TEXTO DEL ESTUDIANTE

MATEMÁTICA 3º MEDIO

mifuturo.cl
Infórmate antes de elegir

Certificado PEFC
Este papel proviene de bosques manejados en forma sustentable y fuentes controladas
PEFC
PEFC/29-31-75
www.pefc.org

9 789563 391718

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

ediciones cal y canto

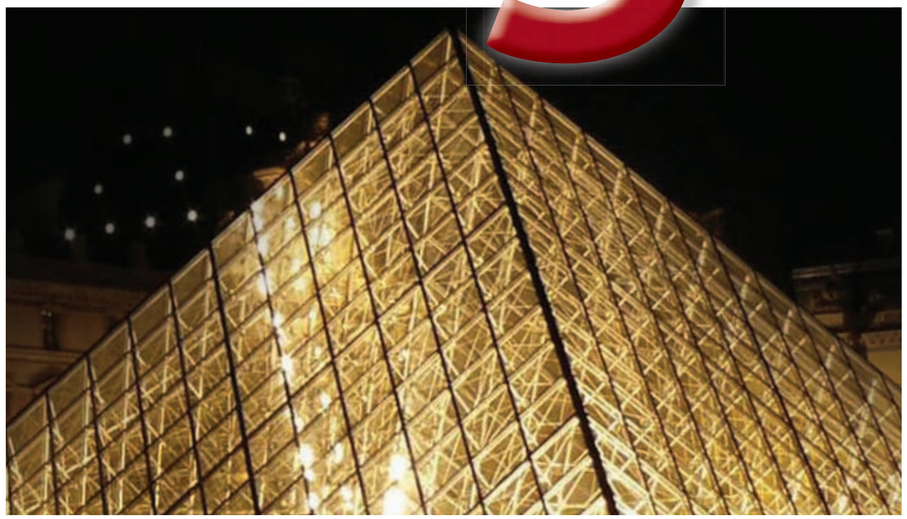
EDICIÓN ESPECIAL PARA EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN
PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN

TEXTO DEL ESTUDIANTE

MATEMÁTICA

3º medio

Olga Saiz Maregatti
Viktor Blumenthal Gottlieb



Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

EDICIÓN ESPECIAL PARA EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN
PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN

ediciones cal y canto

TEXTO DEL ESTUDIANTE

MATEMÁTICA

3º medio

Olga Saiz Maregatti
Profesora de Matemática.
Pontificia Universidad Católica de Chile.

Viktor Blumenthal Gottlieb
Licenciado en Ciencias, mención Matemática.
Pontificia Universidad Católica de Chile.

Este libro pertenece a:

Nombre:

Curso:

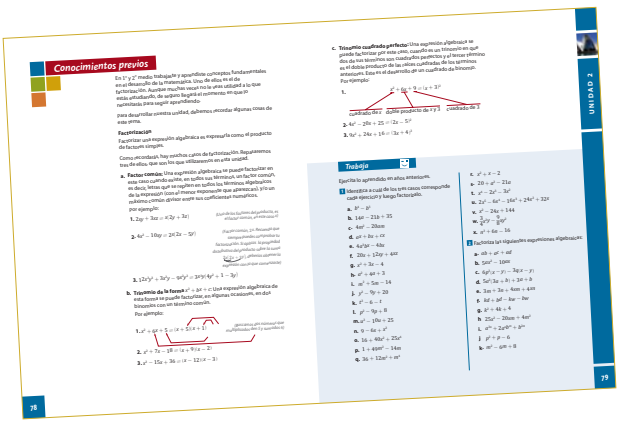
Colegio:

Te lo ha hecho llegar gratuitamente el Ministerio de Educación a través del establecimiento educacional en el que estudias.
Es para tu uso personal tanto en tu colegio como en tu casa; cuídalo para que te sirva durante todo el año.
Si te cambias de colegio lo debes llevar contigo y al finalizar el año, guardarlo en tu casa.

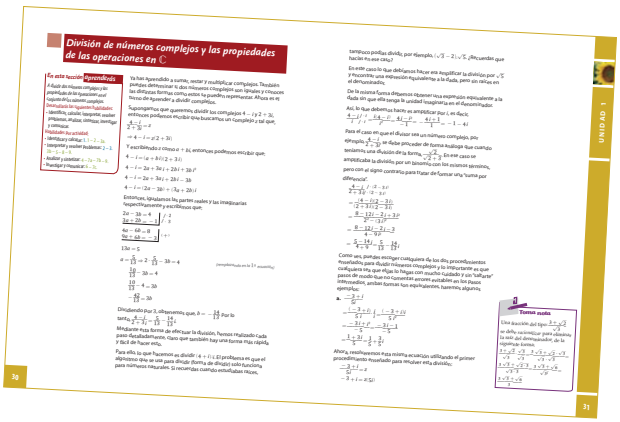
Estructura del texto



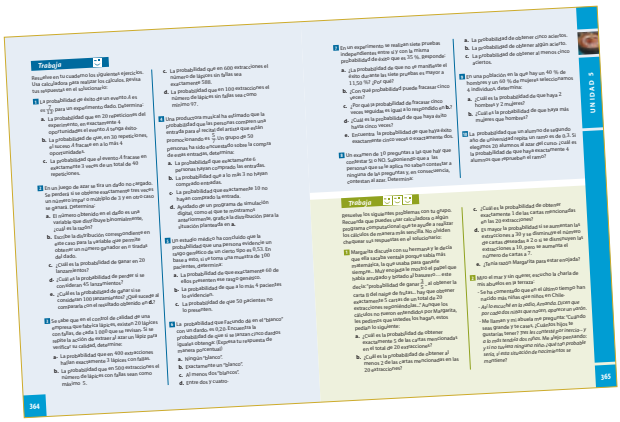
Inicio de unidad: En las primeras dos páginas encontrarás un esquema donde se conectan los contenidos y los objetivos fundamentales y transversales que orientan el trabajo de toda la unidad. En las siguientes dos páginas hallarás los contenidos por trabajar, los aprendizajes esperados y una breve introducción a partir de temas o situaciones reales.



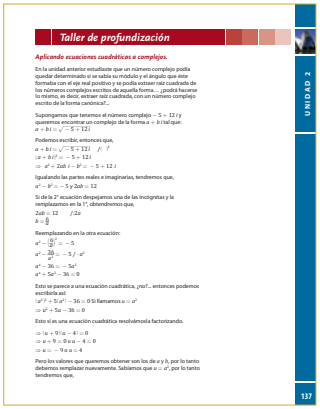
Conocimientos previos: Esta sección te permitirá recordar lo aprendido en años anteriores, que servirá de cimiento para los nuevos aprendizajes. También consta de una Evaluación, en la que podrás autoevaluar cuán preparado te encuentras.



Contenido: A lo largo del libro se presentan páginas de contenido donde se indica claramente lo que aprenderás en cada sección.
Sintetizando y **Revisemos lo aprendido:** En ellas encontrarás un resumen de los conceptos centrales y una evaluación de proceso que te permitirá revisar tu propio aprendizaje.



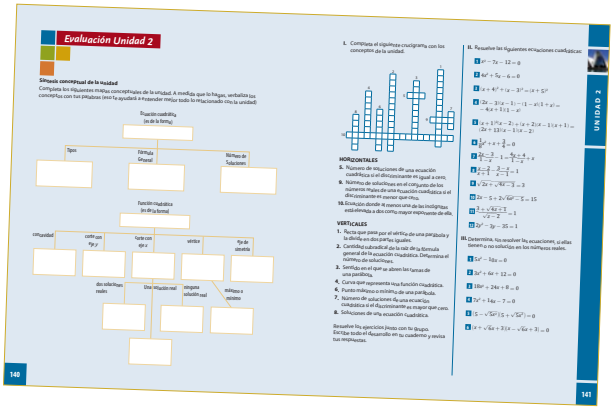
Trabaja: A través de esta sección podrás ir ejercitando algunas habilidades, a fin de fortalecer tus aprendizajes.



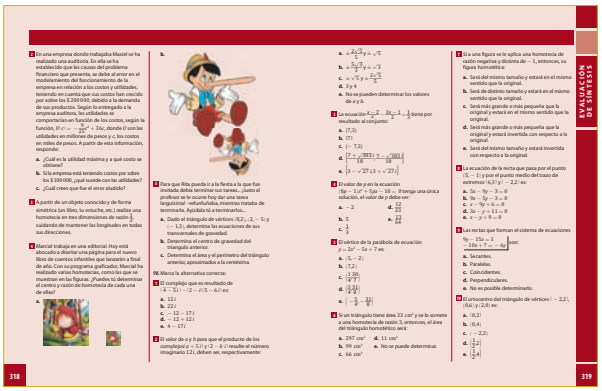
Taller de profundización: Te enfrentarás a un desafío en el que irás más allá con respecto a los contenidos trabajados.



Taller: Podrás trabajar en grupos, aplicando de manera entretenida algunos de los aprendizajes de la unidad.



Evaluación de la unidad: Aquí encontrarás preguntas en las que deberás razonar, ejercicios de desarrollo para que apliques lo aprendido y ejercicios con alternativas, lo que te permitirá evaluar tu nivel de aprendizaje.



Síntesis: Mediante distintos tipos de actividades podrás evaluar los aprendizajes de todas las unidades tratadas.

Trabaja

Trabaja

En forma individual o grupal ejercitarás distintas habilidades.

Toma nota

Datos claves, que debieras recordar o tener presentes, son los que encontrarás en este lateral.

Links de interés

Aquí se sugieren sitios Web que enriquecerán los contenidos que se trabajan.

Recordar y archivar

Lateral en el que se recuerda algún contenido relacionado con el tema que se trabaja.

Para saber más

Encontrarás información complementaria relacionada con el contenido trabajado.

Para entretenerse

¿Te gustan los desafíos? En esta sección se proponen algunos muy interesantes que podrás resolver utilizando lo que has aprendido.

Índice

8

Unidad 1



Un nuevo conjunto... los números complejos

10 *Conocimientos previos*

14 *Números imaginarios... ¿qué son?*

19 *Números complejos... ¿tienen relación con los números imaginarios?*

30 *División de números complejos y las propiedades de las operaciones en* $\mathbb{C}$

37 *Números complejos... módulo y conjugado*

43 *Números complejos... otra forma de representarlos*

63 *Taller*

65 *Evaluación unidad 1*

76

Unidad 2



Ecuaciones cuadráticas y función cuadrática

78 *Conocimientos previos*

81 *Ecuaciones cuadráticas: ¿qué son, cómo se resuelven y para que sirven?*

99 *Función cuadrática: ¿qué es y en qué se utiliza?*

137 *Taller de profundización*

139 *Taller*

140 *Evaluación unidad 2*

150 *Evaluación de síntesis 1 (unidades 1 y 2)*

156

Unidad 3

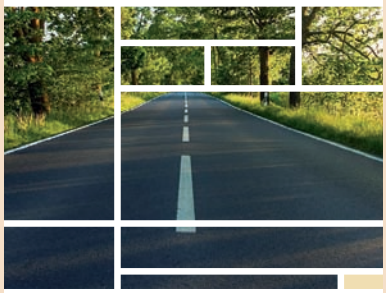


Plano cartesiano y homotecia... un nuevo paso en geometría

160 Conocimientos previos
164 Plano cartesiano y sus elementos... volvamos a mirarlo
169 Distancia entre dos puntos y sus aplicaciones
178 Homotecia... una mirada en perspectiva
220 Taller
222 Evaluación unidad 3
236 Evaluación de síntesis 2 (unidades 1 a 3)

240

Unidad 4



Rectas en el plano... una mirada analítica

244 Conocimientos previos
248 Determinando la ecuación de una recta
263 Analizando un poco más las rectas
276 Rectas y soluciones de ecuaciones, ¿cómo se relacionan?
304 Taller de profundización
307 Evaluación unidad 4
317 Evaluación de síntesis 3 (unidades 1 a 4)

320

Unidad 5



Probabilidad y estadística... una mirada con mayor profundidad

324 Conocimientos previos
331 Probabilidad condicionada
338 Tabulando las probabilidades
353 Distribuciones de probabilidad... Distribución Binomial
385 Taller
387 Evaluación unidad 5
399 Evaluación de síntesis 4 (unidades 1 a 5)
403 Evaluación de síntesis 5 (unidades 1 a 5)

Solucionario 408
Índice temático 491
Glosario 492
Bibliografía 495

UNIDAD 1

Un nuevo conjunto... los números complejos





El conjunto de los números complejos

- Números imaginarios
- Representaciones de un número complejo

- Módulo de un número complejo
- Conjugado de un número complejo

- Operatoria de números complejos

Resolución de problemas y aplicación de números complejos







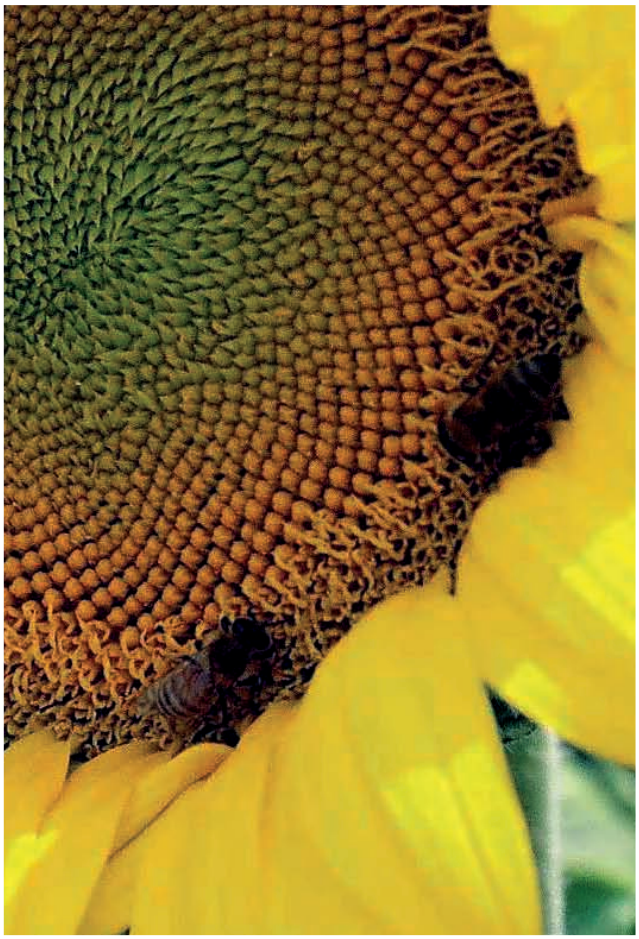




EN ESTA UNIDAD APRENDERÁS A:

1. Identificar situaciones que muestran la necesidad de ampliar los números reales a los números complejos, caracterizando a estos últimos y los problemas que permiten resolver.
2. Identificar la unidad imaginaria como solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$ y su utilización para expresar raíces cuadradas de números reales negativos.
3. Extender las nociones de adición, sustracción, multiplicación, división y potencia de los números reales a los números complejos y los procedimientos de cálculo de estas operaciones.
4. Formular conjeturas y demostrar propiedades relativas a los números complejos, en situaciones tales como: producto entre un número complejo y su conjugado; operaciones de adición, sustracción, multiplicación, división y elevación a potencia con exponente racional de números complejos.













Esto es lo que les ocurrió a un grupo de matemáticos del siglo XVI...

Para ese entonces, los matemáticos dedicados al álgebra, se deleitaban resolviendo ecuaciones de distintos grados, con el afán de encontrar una fórmula maestra que resolviera cualquiera de ellas. A ellos, no les resultaba difícil, resolver ecuaciones como por ejemplo, $x^2 = 100$; porque bastaba encontrar un número que multiplicado por sí mismo resultara 100.

Sin embargo, no todo les era tan usual al resolver sus ecuaciones. Imagínate cuántas discusiones provocó esta humilde ecuación: $x^2 + 1 = 0$. Naturalmente, procedieron a despejar x^2, pero la sorpresa era que obtenían $x^2 = -1$. Echaron mano a todos los números que conocían. Pero sus búsquedas fracasaban; no encontraron un número que, multiplicado por sí mismo diera -1. ¡No valía la pena ni siquiera imaginarse un cuadrado cuya diagonal fuera igual a la raíz cuadrada de -1!

Algunos de ellos, seguramente, abandonaron la idea de seguir adelante.

Afortunadamente, Jerome Cardan, uno de los participantes en esta aventura de resolver ecuaciones, se topó con el siguiente problema: Tenía que resolver una ecuación cúbica, es decir, de grado tres, donde ya sabía que la solución era un número real, comprendido entre 2 y 3. Aplicando correctamente los pasos algebraicos en su desarrollo, aparecían raíces cuadradas de números negativos... ¿qué hacer frente a esta situación? ¿Cómo resolver este dilema?



Jerome Cardan (1501-1576)

Si él aceptaba que estas raíces no eran números, no tenía otra opción que concluir que la ecuación no tenía solución, contradiciendo que "la solución era un número real, comprendido entre 2 y 3".

Pero, si consideraba que estas raíces aparecían, naturalmente, mediante un desarrollo matemáticamente correcto, aceptándolas como números, entonces obtenía la solución esperada.

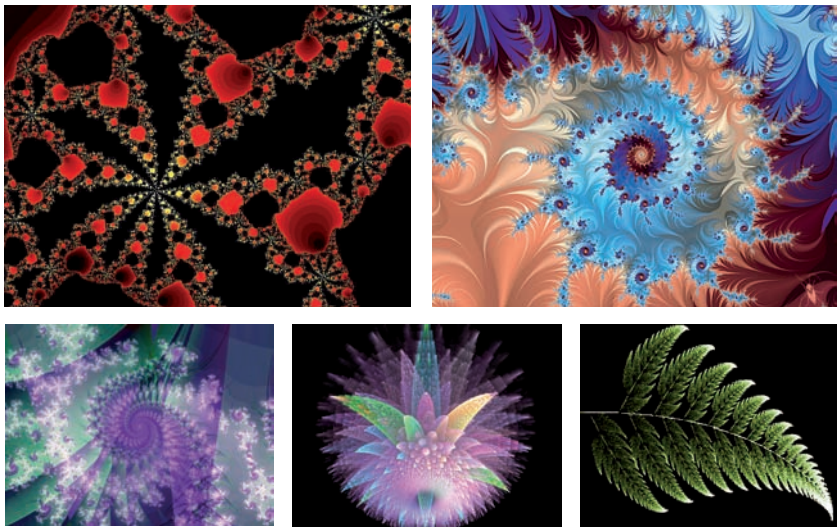
Cardan se inclinó por esto último. Así pasó a ser el primero en declarar que las raíces cuadradas de números negativos, eran números distintos a los conocidos hasta entonces.

Más tarde, en 1777, Euler, les dio el nombre de números imaginarios y los definió formalmente. En 1975, Benoit Mandelbrot denominó fractales (del latín *fractus*, irregular) al conjunto de formas que, generadas normalmente por un proceso de repetición de números complejos, se caracterizan por poseer detalle a toda escala, por tener longitud infinita y por exhibir dimensión fraccional. También se utilizan los números complejos en la física para tratar algunos temas de electricidad.

En este capítulo los conocerás para luego aprender a trabajar con ellos, y saber en las diversas áreas en que ellos prestan utilidad.

Conocimientos previos

Algunas imágenes de fractales son:



Como ya sabes, hay conceptos en matemática que se usan en forma transversal a través de los años y que se utilizan análogamente en diversas situaciones. Algunos de estos conceptos son los relacionados con la operatoria de expresiones algebraicas y son los que revisaremos en esta sección.

Un término algebraico es un conjunto de números y letras unidas por multiplicación y/o división; por ejemplo, $3x^2y$ o $-\frac{1}{2}mnp$. Además, recordarás que una expresión algebraica es un conjunto de términos unidos por los signos de los propios términos; por ejemplo, $4x^2 - 6yk + 2xc$. Y, por último, te acordarás que los términos semejantes son aquellos que tienen el mismo factor literal; por ejemplo, $2xy$ con $-9xy$ o $\frac{1}{3}x^2h$ con $7hx^2$

Ahora bien, se pueden operar (sumar, restar, multiplicar y dividir) las expresiones algebraicas, por ejemplo:

Sean $P = 2x + 4y$, $Q = -3x + 2x^2$,
$R = x + 8$ y $S = -5x + y^2$, determina:

a. $P + Q - S =$

$(2x + 4y) + (-3x + 2x^2) - (-5x + y^2)$ *(eliminando paréntesis) (recuerda que se cambian los signos si hay un signo negativo antes de un paréntesis)*

$\Rightarrow 2x + 4y - 3x + 2x^2 + 5x - y^2$

$= 4x + 4y + 2x^2 - y^2$ *(reduciendo términos semejantes)*



b. $2P - 3QR = 2(2x + 4y) - 3(-3x + 2x^2)(x + 8)$ *(aplicando propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición)*

$= 4x + 8y - 3(-3x^2 - 24x + 2x^3 + 16x^2)$

$= 4x + 8y + 9x^2 + 72x - 6x^3 - 48x^2$ *(reduciendo términos semejantes)*

$= -6x^3 - 39x^2 + 76x + 8y$

c. Resta el producto de P y S al producto de Q y R

$\Rightarrow QR - PS = (-3x + 2x^2)(x + 8) - (2x + 4y)(-5x + y^2)$

$= -3x^2 - 24x + 2x^3 + 16x^2 - (-10x^2 + 2xy^2 - 20xy + 4y^3)$

$= -3x^2 - 24x + 2x^3 + 16x^2 + 10x^2 - 2xy^2 + 20xy - 4y^3$

$= 2x^3 + 23x^2 - 24x + 20xy - 2xy^2 - 4y^3$

d. $P^2 - R^2 = (2x + 4y)^2 - (x + 8)^2$

$= 4x^2 + 16xy + 16y^2 - (x^2 + 16x + 64)$ *(resolución de cuadrado de binomio)*

$= 4x^2 + 16xy + 16y^2 - x^2 - 16x - 64$

$= 3x^2 + 16xy + 16y^2 - 16x - 64$ *(reduciendo términos semejantes)*

Trabaja

1 Reduce los términos semejantes en las siguientes expresiones:

a. $3x - 2y + 5x + 5y$

b. $8m + 6d - 3m + 5d + 2m - 4d + 7m$

c. $a^2b + 5a^2 - 8a^2 - 3a^2b$

d. $\left(3\frac{1}{2}a - 2b + 2\frac{1}{3}c\right) - \left(4\frac{1}{3}a + 8b + 5\frac{1}{3}c\right) + 2\frac{1}{4}a$

2 Multiplica y reduce términos semejantes en los siguientes ejercicios:

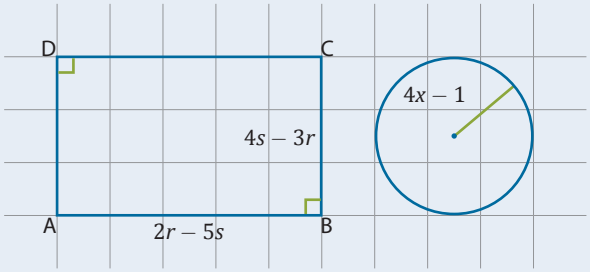
a. $(x + y)(2x - 5) + (4x - 3)(2y - x)$

b. $3(x + y)^2 + 8(x - 3y)(2x - 5y)$

c. $(p + q - 8)(q - 6) - (2p - 5)(q + 3)$

3 Calcula el área y el perímetro de las siguientes figuras geométricas:

a.



b.

4 Reduce al máximo las siguientes expresiones algebraicas:

a. $25 - (3a - 2) + 6a + 3 - (a - 4)$

b. $(3x^2 + 2x - 1) + (2x^2 - 5x + 2) - (9x^2 - 2x - 4)$

c. $\{9 - (5m - 2p)\} - [3 - \{14m - 3p - (2m - 9p - 3)\}]$

d. $44ab + \{48bz - (6az + 3bz - 7ab) + 4az\} - \{48ab - 8bz + 2za - (4ab + bz)\}$

e. $\left\{\left(\frac{1}{2}m^2 - \frac{3}{5}n^2\right)\right\} - \left\{\left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{1}{6}n^2 - \frac{1}{8}mn\right) + \left(-\frac{1}{8}m^2 + \frac{1}{12}n^2 - \frac{7}{8}mn\right)\right\}$

f. $(9 - x)^3 - 2[(x - 9)(5 - x)^2 - (x - 9)^2(5 - x)]$

g. $\frac{22h + 34g - 23}{7a} - \frac{37g^2h + 56g}{7a} + \frac{12g - 16g^2h - 13h}{7a}$

5 Desarrolla los siguientes productos:

a. $(x + 3)^2$

b. $(p + 3)(p - 3)$

c. $(2a - 3)^3$

d. $(2a + b + c)^2$

e. $(3a^3 + 8b^4)^2$

f. $(4x - 2y)^2 - (y - 3x)^2$

6 Completa las siguientes igualdades, según el desarrollo de los productos en cada caso:

a. $(3+x)^2 = 9 + ___ + x^2$

b. $(__ + 2)^2 = ___ + 12x + 4$

c. $(p - ___)(__ + 2) = p^2 - 4$

d. $h^2 - ___ = (h - 3k)(h + 3k)$

7 Al multiplicar un número par por once , y luego restarle su sucesor, se obtiene 239:

a. Plantea al ecuación que permite obtener dicho número par.

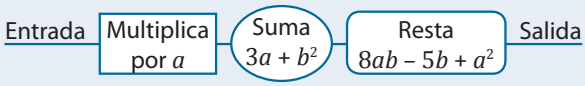
b. ¿Cuál es el número?

8 Une los productos de la columna A con sus respectivos resultados de la columna B.

* Ver tabla (1)

9 Los ángulos interiores de un triángulo miden $2x$, $3x + 11°$ y $7x + 13°$. Determina el valor de x que permite conocer el valor de cada ángulo.

10 La siguiente máquina ingresa expresiones algebraicas y las transforma, según se indica en la figura. Determina la expresión algebraica resultante en la salida de la máquina, si entran cada una de las siguientes expresiones algebraicas:



a. $3a^2 + 2ab + 5b$

b. $(4a - 6)b$

c. $(8a + 2)(b - 5)$

d. $(3a + 2b)(a - b)$

e. $(a + b + 1)(a + b - 3)$

11 Responde las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo equilátero de lado $4a + 5b - 1$?

b. ¿Cuál es el área de un triángulo de base $3a + 5$ y altura $2a + 3$?

c. ¿Cuál es el área de un rombo de diagonales $2a + 3b + 5$ y $4a - 6b + 3$?

d. ¿Cuál es el perímetro de un rectángulo de lados $3x^2 + 2y$ y $8x^2 - 3y$?

e. ¿Cuál es el área de un trapecio de bases $2a + 3b$ y $6a - 5b$ y altura $a + b$?

f. ¿Cuál es el perímetro de un triángulo de lados $x + y - 2z$, $8x + 3y - z$ y $6x + 3y + 3z$?

g. ¿Cuál es el perímetro de un círculo de radio $(5a + 3)b + (2b - 4)a$?

12 Los lados de un triángulo miden $y - 9$, $y + 8$ e $y + 25$, todas expresadas en cm y su perímetro mide 108 cm.

a. Calcula el valor de y.

b. ¿Cuánto vale cada lado?

13 Si el perímetro de un romboide es igual a 82 cm, y sus lados miden $x + 9$ y $2x - 13$, encuentra el valor de cada lado.

14 Las aristas de un paralelepípedo son $2z + 1$, $4z - 9$ y $3z - 11$. Si la suma de ellas es 89 cm:

a. Determina la medida de z.

b. ¿Es verdad que un par de las caras son cuadradas? ¿Por qué?

c. Calcula el perímetro del paralelepípedo.

d. Calcula el área del paralelepípedo.

* Tabla (1)

Columna A	Columna B
$(5x + 3y)(2x - y) + 4xy$	$-16x^2 - 2xy + 3y^2$
$7x^2 + (3x - 6)y + 9y(x + 3)$	$-3y^2 + 7xy - 16x + 30$
$(-3x + 2y)^2 - (5x - y)^2$	$7x^2 - 40xy + 12$
$(x + 2y)(x - 2y) + 6(x^2 - 6xy + 2)$	$10x^2 + 5xy - 3y^2$
$2(x - 5)(x - 3) + (2x - y)(3y - x)$	$7x^2 + 12xy + 21y$



15 Las medidas de lados de un rectángulo son $p^2 - pq + q^2$ y $p + q$. Si la primera expresión aumenta en $2pq$ y la segunda disminuye en $2q$, ¿en cuantas unidades varía el:

a. perímetro?

b. área?

16 Las medidas de un paralelepípedo son x, $x + 1$ y $x + 2$. Si se duplica la primera medida, cuadruplica la segunda y triplica la tercera, se obtiene un nuevo paralelepípedo.

a. Encuentra las áreas totales de ambos y sus volúmenes

b. ¿En cuánto supera el área mayor a la menor? ¿Cuántas veces es más grande el volumen del mayor que el volumen del menor?

17 Con $\$\,(3x + 50)$ se pueden comprar $4n + 1$ lápices, y con $\$\,0{,}5\,x$, n lápices.

a. ¿Cuál es el precio de $4n$ lápices?

b. ¿Cuántos lápices se pueden comprar con $\$\,(x^2 + 10x - 5)$?

c. Se disponía de $\$\,(7x + 15n + 3)$, y ya se han comprado $12n$ lápices. ¿Cuánto dinero queda para ver si se pueden adquirir cuadernos?

18 Usando las propiedades de las potencias, reduce al máximo las siguientes expresiones:

a. $2^{2m^2-mn+n^2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{2n^2-mn+m^2}$

b. $\left(\left(\frac{3}{5}\right)^{3a-b}\right)^{3a+b} : \left(\frac{9}{25}\right)^{4{,}5a^2-0{,}5b^2}$

19 La pregunta Nº 3 de una prueba con dos filas, dice: En un paralelepípedo, a es el ancho, l es el largo y h es el alto. La tabla siguiente muestra las expresiones algebraicas de a, l y h, para cada fila.

* Ver tabla (2)

a. ¿Cuál es la diferencia entre el largo del paralelepípedo de la Fila B con respecto al de la otra fila?

b. Encuentra la suma de todas las aristas que conforman cada paralelepípedo.

c. Si el paralelepípedo de la Fila A aumentara su largo en la misma medida del ancho del otro paralelepípedo, ¿cuánto mide el nuevo largo?

d. Para el paralelepípedo de la Fila B, halla el área de la cara formada por el ancho y el alto.

e. Comparando las expresiones de los altos y desarrollando alguna operación algebraica, demuestra que no difieren.

20 Las proyecciones de los catetos a y b sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo, son: $x + 9$ y $x^2 - x + 2$, respectivamente.

a. Encuentra la medida de la hipotenusa.

b. ¿Cuál es la expresión del valor del cuadrado de:

i. el cateto a?

ii. el cateto b?

iii. la perpendicular bajada desde el vértice opuesto a la hipotenusa?

* Tabla (2)

	Fila A	Fila B
a	$15x^3 - 2x^2 - x + 1$	$15x^3 + 2x^2 - 3x + 1$
l	$6x^4 + 5x^3 + 17x^2 - 6x + 1$	$6x^4 - 5x^3 + 17x^2 + 6x + 1$
h	$4x^2 + 3x - 2$	$4x^2 + 3x - 2$

Números imaginarios... ¿qué son?

En esta sección aprenderás

Qué es un número imaginario, cómo se operan y a calcular potencias de i

Desarrollarás las siguientes habilidades:

- Identificar, calcular, interpretar, resolver problemas, analizar, sintetizar, investigar y comunicar.

Habilidades por actividad:

- Identificar y calcular: 1 – 2
- Interpretar y resolver problemas: 3a – 3b
- Analizar y sintetizar: 3c – 3d
- Investigar y comunicar: 3e

Hola amigas y amigos, les damos la bienvenida a este nuevo año escolar en el que conocerán un nuevo conjunto numérico, el conjunto de los números complejos, que aunque su nombre exprese complejidad, en realidad una vez que los conozcas y domines podrás efectuar operaciones de forma familiar. Para ello, te invitamos a comprender su unidad básica, pues de esta depende el desarrollo de la operatoria entre ellos.

Para comenzar nuestro viaje y antes de introducirte al mundo de los números complejos, debes conocer en primer lugar el concepto de números imaginarios, cuyo nombre proviene del hecho de que en realidad cuando se elevan al cuadrado, o se multiplican por sí mismos, su resultado es un número negativo.

Diariamente estamos acostumbrados a operar entre números que al ser elevados al cuadrado, dan como resultado un número positivo, por ejemplo siete al cuadrado, $7^2 = 7 \cdot 7$ da por resultado 49, y así ocurrirá con cualquier otro número real que eleves al cuadrado, como por ejemplo menos siete al cuadrado, $(-7)^2 = -7 \cdot -7 = 49$, que a pesar de ser un número negativo, al multiplicarse por sí mismo, da como resultado un número positivo.

Es así, que un número elevado al cuadrado cuyo resultado sea un número negativo, solo puede suceder en la imaginación, y es debido a esto que reciben el nombre de **números imaginarios**. Aún así, estos números son muy útiles para resolver problemas que de otra manera serían imposibles de resolver y es por ello que te los presentamos para que te familiarices con ellos.

Los números imaginarios siempre van acompañados de una letra, que por lo general se denota con la letra "i", por ejemplo, el número tres escrito de manera imaginaria corresponde al número imaginario $3i$. Este número es solución de la ecuación $x^2 + 9 = 0$, ya que si te fijas, $x^2 = -9$ y en el conjunto de los números reales no existe un número que elevado al cuadrado nos de cómo resultado -9. Pero dentro de los números imaginarios sí, ya que al resolver la ecuación anterior tenemos $x = \pm\sqrt{-9}$. Así, podemos descomponer el número dentro de la raíz de la forma $x = \pm\sqrt{9 \cdot -1}$ y sabemos que la raíz de 9 es 3, por lo que obtenemos como resultado $x = \pm 3\sqrt{-1}$. Como sabemos, dentro del conjunto de los números reales no existen las raíces negativas por lo que hace muchos años un matemático les dio nombre a este tipo de números, llamándolos números imaginarios y llamó unidad imaginaria a aquel número que resuelve la ecuación $x^2 + 1 = 0$, es decir, a $\sqrt{-1}$ y, decidió darle el símbolo i. Así un número imaginario se define como todo aquel de forma bi donde b es un número real.

Ahora, volviendo a la ecuación planteada anteriormente y utilizando el hecho de que $i = \sqrt{-1}$, tenemos que $x = \pm 3i$.

Resolvamos ahora otras ecuaciones de este tipo:

1. $x^2 + \frac{4}{25} = 0 \quad / -\frac{4}{25}$

$x^2 + \frac{4}{25} - \frac{4}{25} = -\frac{4}{25}$

$x^2 = -\frac{4}{25}$

$\Rightarrow x = \sqrt{-\frac{4}{25}} = \sqrt{\frac{4}{25} \cdot -1} = \frac{2}{5}\sqrt{-1} = \frac{2}{5}i$

2. $x^2 + 10 = 0 \quad / -10$

$x^2 + 10 - 10 = -10$

$x^2 = -10$

$\Rightarrow x = \sqrt{-10} = \sqrt{10 \cdot -1}$

Como la raíz de 10 no es exacta podemos determinarla mediante la calculadora, o dejarla simplemente denotada mediante una raíz, es decir, $x = \sqrt{10} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{10}i$.

3. $x^2 + 0{,}04 = 0 \quad / -0{,}04$

$x^2 + 0{,}04 - 0{,}04 = -0{,}04$

$x^2 = -0{,}04$

$\Rightarrow x = \sqrt{-0{,}04} = \sqrt{0{,}04 \cdot -1} = 0{,}2\sqrt{-1} = 0{,}2i$

Ahora, formalizaremos la definición de número imaginario definiéndolo como todo número de forma bi, donde b es un número real.

También podemos realizar operaciones con estos números, por ejemplo:

a. $2i + 5i = 7i$ *(se suman los números y se conserva la unidad imaginaria)*

b. $(\sqrt{-8} - 3) \cdot \sqrt{-2} = 4 - 3\sqrt{2}i$ *(recuerda descomponer la raíz)*

c. $5i \cdot 7i = 35i^2 = 35 \cdot -1 = -35$ *(ya que si $i = \sqrt{-1} \Rightarrow i^2 = -1$)*

d. $3i - \sqrt{-16} + 2 \cdot 4i = 3i - 4i + 8i = 7i$

Como te puedes dar cuenta la suma entre estos números es muy similar a lo que ya conocías, ahora, en el caso de la multiplicación, debes considerar la multiplicación de los términos $i = \sqrt{-1}$.

Mira ahora esta curiosidad. Si aceptamos que los números imaginarios se parecen a los números reales, podemos escribir algunas potencias de i.

$i^0 = 1$

$i^1 = i$

$i^2 = -1$

$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$

$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$

$i^6 = i^4 \cdot i^2 = 1 \cdot -1 = -1$

$i^7 = i^6 \cdot i = -1 \cdot i = -i$

Como puedes darte cuenta los resultados se repiten y corresponden siempre a 1, i, -1 o $-i$.



Siguiendo con este razonamiento, elevaremos i a 13, es decir,

$i^{13} = i^{12} \cdot i = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 \cdot i$

Y según lo calculado anteriormente, sabemos que $i^4 = 1$, por lo que obtenemos

$i^{13} = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot i = i$

Como los resultados se repiten, escribimos lo siguiente:

$i^0 = i^4 = i^8 = ... = 1$

$i^1 = i^5 = i^9 = ... = i$

$i^2 = i^6 = i^{10} = ... = -1$

$i^3 = i^7 = i^{11} = ... = -i$

Si te fijas, hemos establecido una regularidad, es decir, cada cierto intervalo de números, se repite el mismo resultado para la potencia de i.

Como ves, todas las potencias cuyos exponentes son múltiplos de 4, son iguales a 1, si son múltiplos de 4 más 1, darán i, si son múltiplos de 4 más 2, darán -1 y si son múltiplos de 4 más 3, darán $-i$.

Esto lo podemos anotar de la siguiente forma:

$$i^n = \begin{cases} 1 & si\ n = 4k, \quad \text{donde } k \text{ es un número natural} \\ i & si\ n = 4k+1, \quad \text{donde } k \text{ es un número natural} \\ -1 & si\ n = 4k+2, \quad \text{donde } k \text{ es un número natural} \\ -i & si\ n = 4k+3, \quad \text{donde } k \text{ es un número natural} \end{cases}$$

O lo que es equivalente a decir que:

$$i^n \begin{cases} 1 & si\ n{:}4 \ \text{ tiene resto } 0 \\ i & si\ n{:}4 \ \text{ tiene resto } 1 \\ -1 & si\ n{:}4 \ \text{ tiene resto } 2 \\ -i & si\ n{:}4 \ \text{ tiene resto } 3 \end{cases}$$

Entonces, por ejemplo:

a. $i^{235} \Rightarrow 235{:}4 = 58$ (35, resto 3)

$\Rightarrow i^{235} = -i$

b. $(4i)^3 = 4i \cdot 4i \cdot 4i = 4^3 \cdot i^3 = 64 \cdot -i = -64i$

c. $2i^{209} + 3i^{403}$

Dividamos: $209{:}4 = 52$ (09, 1) $\quad 403{:}4 = 10$ (00, 03)

$\therefore i^{203} = i \quad \wedge \quad i^{403} = -i$

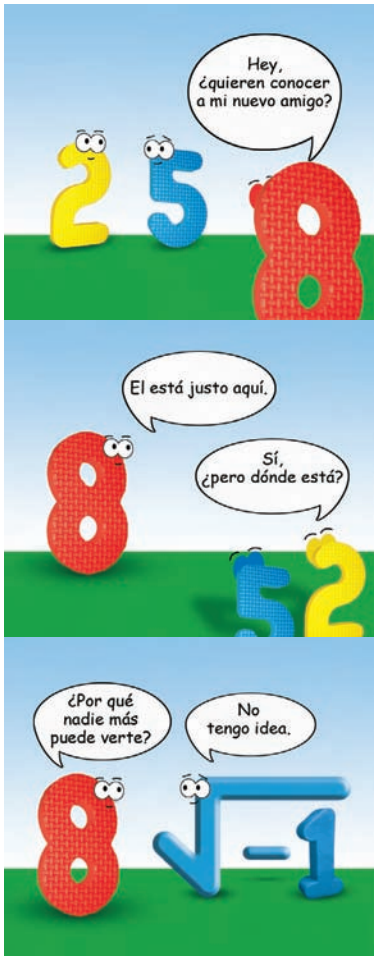
Tenemos que:

$2i^{209} + 3i^{403} = 2 \cdot i + 3 \cdot -i = 2i - 3i = -i$

Como te puedes dar cuenta la clave para operar entre estos números está en determinar el valor de la potencia de i, dado que la(s) operación(es) restante(s) es(son) entre números reales, y tú ya has aprendido estos procedimientos.

Para entretenerse

Lee el siguiente cómic y explica por qué nadie puede ver al amigo del número ocho.





- Llamamos unidad imaginaria a i que es igual a $\sqrt{-1}$.
- Cualquier número de la forma $\sqrt{-b} = \sqrt{b}\,i$, con $b > 0$, se llama número imaginario.
- Se pueden operar los números imaginarios como si fueran términos algebraicos.
- Para calcular cualquier potencia de i, con exponente natural, se tiene la siguiente regla:

$$i^n \begin{cases} 1 & si\ n{:}4 \quad \text{tiene resto } 0 \\ i & si\ n{:}4 \quad \text{tiene resto } 1 \\ -1 & si\ n{:}4 \quad \text{tiene resto } 2 \\ -i & si\ n{:}4 \quad \text{tiene resto } 3 \end{cases}$$

Trabaja

Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios. No olvides chequear tus respuestas en el solucionario.

1 Calcula el valor de las siguientes raíces y reduce al máximo tu resultado:

a. $\sqrt{-121}$

b. $-\sqrt{-0{,}04}$

c. $\sqrt{-0{,}32\overline{1}}$

d. $\sqrt{-\frac{1024}{625}}$

e. $3\sqrt{23-104}$

f. $-\sqrt{\frac{-4\sqrt{7\,056}}{7}}$

g. $7\sqrt{-49} - \sqrt{-\frac{49}{4}}$

h. $\frac{1}{8}\sqrt{-\sqrt[3]{64}} + \sqrt[3]{\sqrt{64}}\,i$

i. $(\sqrt{-32} + \sqrt{-98} - \sqrt{-128}) : (2\sqrt{196} - \sqrt{144})$

j. $\frac{\sqrt{-256}}{\sqrt[3]{-343}}$

2 Calcula el valor de las siguientes potencias de i, reduce al máximo tu resultado:

a. i^7

b. i^{-22}

c. $2\,i^9 + 12\,i^{11}$

d. $3\,i^{50} - 12\,i^{52}$

e. $16\,i\left(\frac{i^{27}\cdot i^{42}\cdot i^{-92}}{4\,i^6\,i^7}\right)^4$

f. $\frac{-11\,i^{31} + 12\,i^{67}}{-i^{2012}}$

g. $i(-i^{1526} + i^{887} - i^{-928})$

h. $(4\,i^{63} - 3\,i^{41})^2$

i. $\frac{6}{\sqrt{2}\,i^{18}}$

j. $\frac{-19\,i^{31}\cdot 12\,i^{67}}{126((i^3)^{24})^5}$

3 Resuelve los siguientes problemas:

a. Completa con la cantidad subradical para formar la secuencia: i, $2i$, $3i$, $4i$...

$\sqrt{-\ldots}$, $\sqrt{-4}$, $\sqrt{-9}$, $\sqrt{-\ldots}$, $\sqrt{-25}$, $\sqrt{-\ldots}$, $\sqrt{-49}$, $\sqrt{-64}$, $\sqrt{-81}$, $\sqrt{-\ldots}$, $\sqrt{-\ldots}$

b. "La mar estaba serena, serena estaba la mar; la mar estaba serena, serena estaba la mar", cantaban mis once primos en el bus que nos llevó de vuelta a Curanilahue. Repitieron todo, pero cambiando cada vocal por i: "Li mir istibi sirini...". Yo, en silencio conté, usando mis dedos, la cantidad de "*ies*". No sé por qué lo hice, pero de golpe me vino tortuosamente a mi cabeza: i elevado a este

número. ¡Justamente el valor de esta potencia es el que no escribí en la prueba de números imaginarios y por esto no alcancé la nota 7! ¿A cuál potencia de i me refiero? ¿De qué valor se trata?

c. En una oficina de una dependencia municipal, se escucha el siguiente diálogo:

–Este es el terreno al que estamos aludiendo y que aparece triangular en el plano... señor Peláez... puedo agregar que las distancias de separación entre sus extremos son $144\ \text{m}$; $215\ \text{m}$ *y...*

$-360\ \text{m}$ *de frente como está escrito en el informe respectivo, que me acabas de pasar Barrientos... ¡Ah!... y encierra un área aproximada de* $2\ 365{,}88\ \text{m}^2$ *¿chequearon si las medidas están correctas?*

–Sí, señor Peláez. Y el área también.

–Entonces, demos el permiso municipal para que se construya allí el conjunto habitacional...

Con el tiempo, se descubrió que las medidas de dicha superficie no eran correctas. Ahora bien, averigua si el valor $2365{,}88\ \text{m}^2$ es el correcto, usando la siguiente fórmula para el área de un triángulo si se tiene la medida de sus tres lados:

$$A = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$$

donde a, b y c son las medidas de los lados. ¿A qué se pudo deber este error?

d. "... en aquella época, cuando yo era jovencito como usted, las exigencias que tuve para ser profesor de Matemática, eran otras. Ahora son más las que a usted le exigen para esta profesión. Fíjese que mi mejor compañero de la universidad, hizo el siguiente desarrollo:

$$\begin{aligned} i &= \sqrt{-1} \\ i^2 &= i \cdot i \\ &= \sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} \\ &= \sqrt{-1 \cdot -1} \\ &= \sqrt{1} \\ i^2 &= 1 \end{aligned}$$

"El día en que dio su examen de grado ante la comisión examinadora. Esta lo reprobó inmediatamente por esto... Y usted que está estudiando números imaginarios, ¿por qué no me indica dónde estuvo el error en ese desarrollo?, pero justifíqueme su respuesta...".

e. **"**El maestro dio una mirada escudriñadora a cada uno de nosotros. Con ceño fruncido nos dijo: *Aprendices de matemático, den tres números naturales* n, m y p *de modo que* $i^{\frac{4n}{m}+p} = i^{235}$, *y acto seguido, encuentren una condición para estos números, satisfaciendo a la vez, la regularidad que tienen las potencias de la unidad imaginaria".* Responde a lo solicitado, recuerda que $i^{235} = i^7 = i^{11} = \ldots$

Revisemos lo aprendido

Responde las siguientes preguntas y revisa lo que has aprendido:

1. ¿Puedo explicar qué es un número imaginario?
2. ¿Entendí como sumar y restar números imaginarios?
3. ¿Entendí como se calcula una potencia de i?
4. ¿Pude desarrollar correctamente los ejercicios propuestos?

Recuerda que si no sabes bien alguna de las respuestas a estas preguntas, debes consultar a tu profesora o profesor o pedir ayuda a algún amigo o amiga.



Números complejos... ¿tienen relación con los números imaginarios?

Los números imaginarios se utilizan en distintas áreas del conocimiento y además, forman parte del conjunto numérico conocido como números complejos, estos son una combinación entre los números reales y los números imaginarios. Entonces, un número complejo tendrá la forma $a + bi$, donde a es la parte real y b es la parte imaginaria. Por ejemplo: $2 + 3i$, $\frac{1}{3} - 7i$, $2 + \frac{4}{5}i$, etc.

Si $b = 0$, en el número complejo $a + bi$ se tiene que $a + 0i = a$, reduciéndose así este número complejo a un número real puro. Por otro lado, si $a = 0$, tenemos que $0 + bi = bi$ y se dice que este número es un número imaginario puro.

Como ejemplos de números complejos tenemos:
$2 - 4i$, $\sqrt{3} + \frac{5}{9}i$, $\frac{1}{2} + \sqrt{2}i$, etc.

Determinemos ahora, las partes real e imaginaria de los siguientes números complejos:

a. $2 - 9i$

En este caso es fácil ver que la parte real corresponde a 2, y la parte imaginaria corresponde a -9.

b. $-\sqrt{5}i$

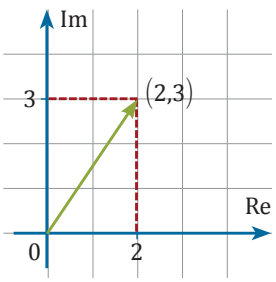
Como te puedes dar cuenta este número es un imaginario puro, correspondiendo así su parte real a 0 y su parte imaginaria a $-\sqrt{5}$.

c. $3 + \frac{1}{3}\sqrt{7}i$

La parte real de este complejo corresponde a 3 y la parte imaginaria a $\frac{1}{3}\sqrt{7}$.

Dado que los números complejos se componen de una parte real y otra imaginaria, es posible representarlos en un eje cartesiano en el que el eje x se llama eje real y se denota por Re, y el eje y se llama eje imaginario y se denota por Im y en este caso, el plano comúnmente conocido como plano cartesiano, se denomina ahora como plano complejo. Esto se diferencia con lo que ocurría con los números naturales, enteros, fraccionarios y reales que podían ser representados simplemente por un punto en una línea recta.

Así, podemos representar el complejo $2 + 3i$ de la siguiente manera:



En esta sección aprenderás

Qué son los números complejos, cómo se representan, cómo se operan y cuando los números complejos son iguales.

Desarrollarás las siguientes habilidades:

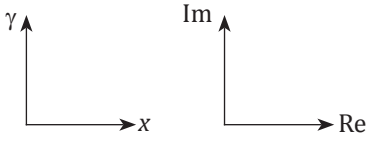
- Identificar, calcular, interpretar, resolver problemas, analizar, sintetizar, investigar y comunicar.

Habilidades por actividad:

- Identificar y calcular: 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9a – 9b – 9c – 11 – 12 – 13. 1 – 2 – 3 – 4.
- Interpretar y resolver problemas: 1 – 2 – 3 – 10 – 14 – 16 – 17 – 18 – 19 – 20. 5 – 6 – 7 – 8 – 10 – 13 – 14a – 16.
- Analizar y sintetizar: 9d – 15. 9 – 11a.
- Investigar y comunicar: 11b – 12 – 14b – 15.

Toma nota

Los ejes x e y del plano cartesiano, corresponden a los ejes Real (Re) e Imaginario (Im) respectivamente, del plano complejo



Un complejo puede ser representado, por lo menos de tres formas:

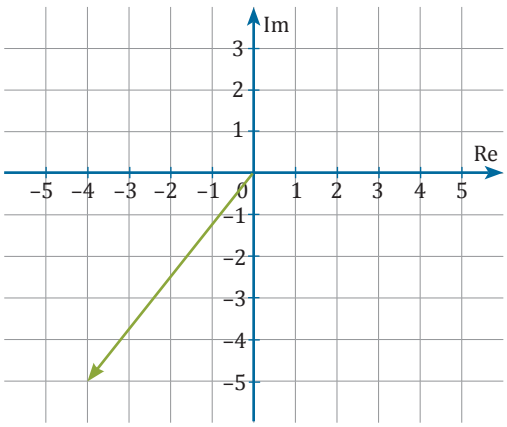
a. Forma canónica o binómica: $z = a + bi$ con a, b, pertenecen $\mathbb{R}$, en este caso $2 + 3i$.

b. Forma de par ordenado: (a, b) con a, b pertenecientes a $\mathbb{R}$, en este caso $(2,3)$. Nota que la primera coordenada corresponde a la parte real del complejo y la segunda coordenada corresponde a la parte imaginaria, de la que solo se escribe el número real que acompaña a la unidad imaginaria i.

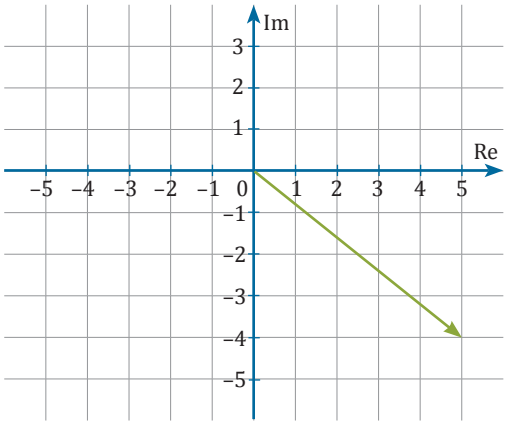
c. Forma gráfica: nota que el complejo representa un vector que parte desde el origen del sistema coordenado hasta el punto $(2,3)$. Hay que tener en consideración un concepto muy importante, este sistema coordenado se parece mucho al plano cartesiano, pero es diferente en su concepción... sus ejes son el eje real (Re) y el eje imaginario (Im), pero funcionan como si fueran parecidos.

Para que afiances estos conocimientos, pon mucha atención al siguiente ejemplo en el que graficaremos un número complejo, escrito en forma canónica o binómica: $-4 - 5i$.

Este número, puede ser representado también como par ordenado, de la forma, $(-4, -5)$ y gráficamente será:



Ahora, si tenemos la representación gráfica de un número complejo, por ejemplo:



Recordar y archivar

$\mathbb{N}$: conjunto de los números naturales, $\mathbb{N} = \{1,2,3,....\}$

$\mathbb{Z}$: conjunto de los números enteros,
$\mathbb{Z} = \{...., -3, -2, -1,0,1,2,3,....\}$

$\mathbb{Q}$: conjunto de los números racionales, $\mathbb{Q}$ es el conjunto de todos aquellos números que se puedan escribir como fracción, es decir,
$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} / a,b \in \mathbb{Z} \ \wedge \ b \neq 0 \right\}$

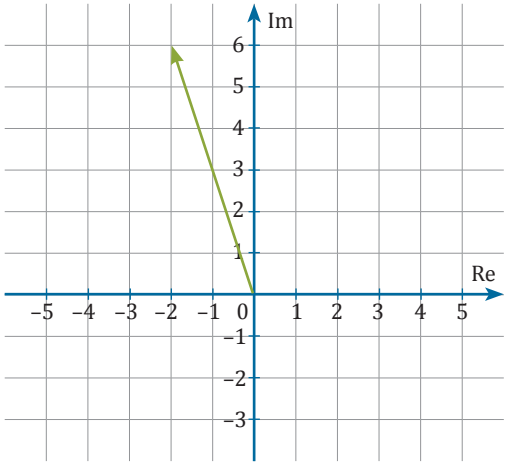
$\mathbb{Q}'$: conjunto de los números irracionales, $\mathbb{Q}'$ es aquel conjunto de los decimales infinitos puros (no finitos, no periódicos, no semiperiódicos, aquellos que no se pueden escribir como fracción, por ejemplo, las raíces que no son exactas, π, e, los logaritmos no exactos, etc.).

$\mathbb{R}$: conjunto de los números reales, $\mathbb{R}$ es el conjunto que une todos los conjuntos anteriores, por lo tanto, en él están todos los números que hasta ahora conocías.

Podemos determinar su representación mediante par ordenado, que en este caso será: $(5, -4)$.

Asimismo, podemos determinar su forma binómica: $5 - 4i$

Finalmente, representaremos gráficamente, el número complejo escrito en forma de par ordenado $(-2{,}6)$.



Como ves, la representación de estos número en un plano es una situación que ya conoces.

Si te fijas, al conjunto de los números complejos pertenecen los números reales y los números imaginarios.

Entonces, por ejemplo el número 9, también puede representarse como número complejo escribiéndolo de la forma $9 + 0i$. O, el número imaginario cinco, puede ser escrito de la forma $0 + 5i$.

También podemos establecer cuando dos números complejos son iguales, lo que ocurre cuando tienen iguales la parte real y la parte imaginaria. Por ejemplo:

a. $2 + 6i$ y $6i + 2$, dado que ambos números tiene sus partes reales e imaginarias iguales y solo difieren en el orden en el que están escritos.

b. $3 + 7i$ y $\frac{9}{3} + 7i$, ya que si te fijas al determinar la parte real del segundo número, esta corresponde a 3.

Trabaja

Resuelve con tu grupo los siguientes ejercicios y compara tus resultados con otros grupos. No olvides corregirlos, chequeando las respuestas en el solucionario.

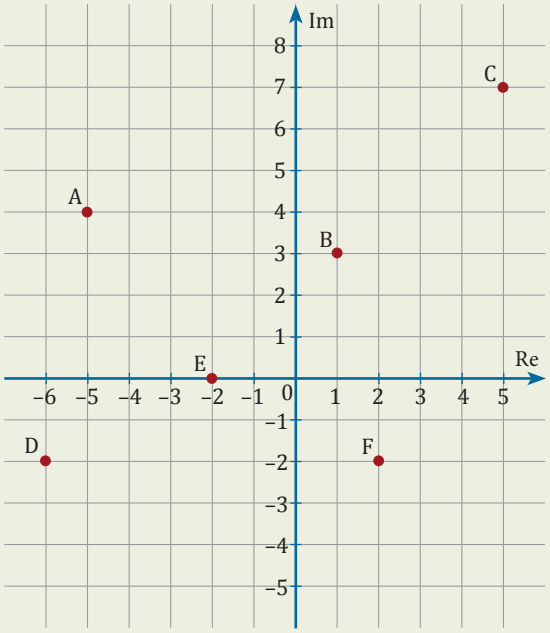
1 Escriban en forma binómica y luego representen en el plano complejo, cada uno de los siguientes números complejos:

a. $(-3,5)$
b. $(7,-7)$
c. $(0,4)$
d. $(-5,6)$
e. $\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{4}\right)$

2 Escriban en forma de par ordenado cada complejo, y represéntalos gráficamente:

a. 7
b. $-2i$
c. $0+4i$
d. $-6+\sqrt{64}i$

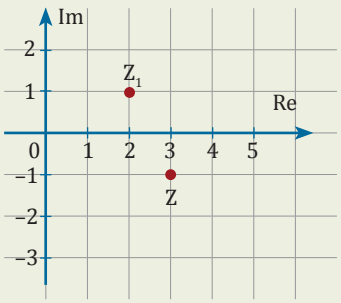
3 A continuación se han representado los puntos correspondientes a los pares ordenados que representan a algunos complejos. Exprésenlos en forma canónica y dibujen el vector correspondiente:



4 En el plano complejo representen todos los extremos de aquellos complejos, que cumplan que $-5 \leq \text{Re}(z) \leq 0$ y $0 \leq \text{Im}(z) \leq 7$. ¿Qué figura geométrica han logrado?

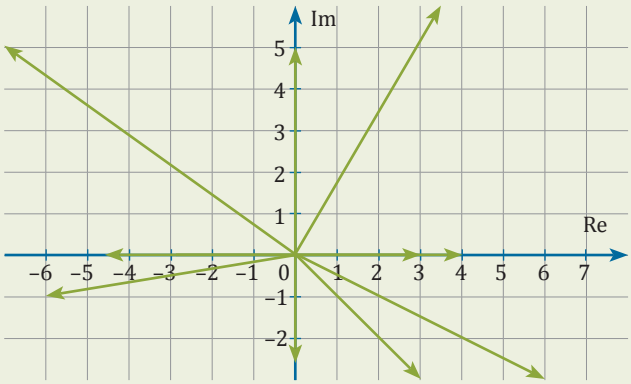
5 Al mirar una representación gráfica en el plano complejo, se observa que la parte real de un complejo z_2, está tres unidades a la izquierda de la parte real de $z_1 = (1,-3)$ y su parte imaginaria a cuatro unidades bajo de esta. Escriban la forma binomial de ambos complejos.

6 La gráfica muestra los pares ordenados de los complejos z y z_1. Determinar tres números complejos z_2, z_3 y z_4 tales que, junto a z_1, sus extremos formen un rectángulo de centro z y sean vértices de él. Expresen su respuesta en forma canónica y como par ordenado.



7 Escribir como par ordenado los complejos $z = -3+4i$ y $z' = 5-i$. Luego, ayudándose por el plano complejo, encuentren las componentes del complejo cuyo extremo está en el punto medio de los extremos de los dos complejos dados.

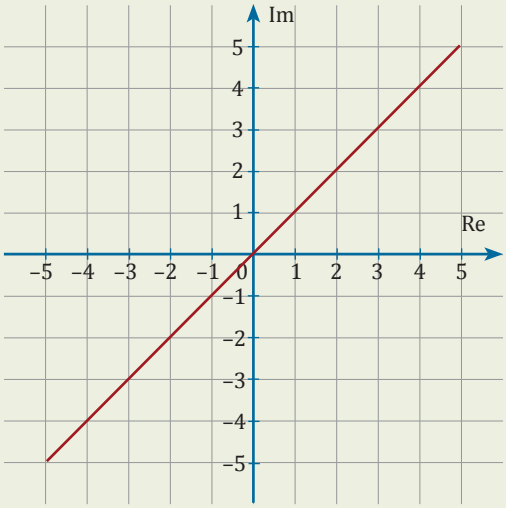
8 Escriban cada uno de los siguientes complejos en forma canónica:





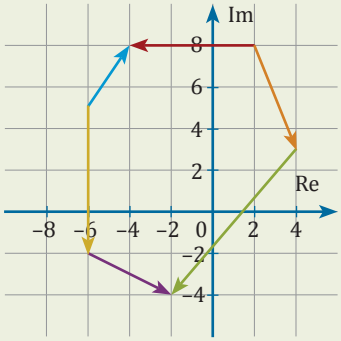
9 La gráfica muestra los extremos de todos los complejos posibles, cuyas partes real e imaginaria guardan una cierta relación numérica entre sí.

a. ¿Cuál es esta?



b. Ahora bien, por otro lado, escriban tres complejos cuyas partes real e imaginaria estén en la razón de 3 es a 2. Finalmente, dibujen los extremos de todos aquellos que tienen esta misma característica.

10 El polígono está formado por la traslación de seis complejos. ¿Cuáles son? Escriban su respuesta en forma canónica.



Operando con números complejos

Para operar entre números complejos, es necesario considerar sus partes reales y sus partes imaginarias por separado, y efectuar la operación indicada entre ellos, por ejemplo sumemos los números complejos $2 + 3i$ y $7 - 9i$.

Las partes reales son respectivamente, 2 y 7, y al sumar estos números obtenemos 9. De la misma forma sumando las partes imaginarias 3 y -9, obtenemos -6. Así, hemos obtenido el número complejo de parte real 9 y parte imaginaria -6, es decir, $9 - 6i$. Como ves el resultado obtenido también es un número complejo, siendo esta una propiedad muy importante, llamada propiedad de clausura.

Ahora para la resta y la multiplicación, consideramos también la forma binómica de un complejo, entonces los complejos se pueden trabajar como binomios. Por lo tanto podemos escribir que:

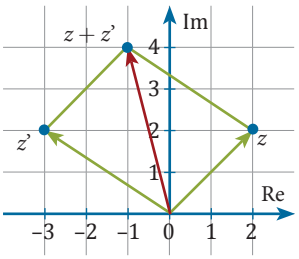
a. $2 + 3i - (5 - 7i) = 2 + 3i - 5 + 7i = -3 + 10i$

b. $\left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i - \left(\frac{2}{5} + i\right) + 2i\right]$

$= \left[\frac{1}{2} - \frac{1}{3}i - \frac{2}{5} - i + 2i\right] = \left(\frac{1}{2} - \frac{2}{5}\right) + \left(-\frac{1}{3} - 1 + 2\right)i = \frac{1}{10} + \frac{2}{3}i$

Para saber más

Si los números complejos son vectores, entonces también los podemos sumar vectorialmente (recuerda que ya has aprendido sobre vectores)... Por ejemplo:



Es decir, el complejo suma de z y z' será el vector que es la diagonal del paralelogramo formado por z y z'.

c. $(4-5\,i)(-3-7\,i) = -12-28\,i+15\,i+35\,i^2$ *(multiplicamos término a término)*

$= -12-28\,i+15\,i-35$ *(recuerda que $i^2 = -1$)*

$= -47-13\,i$

d. $\frac{2}{3}\cdot(4+2i)-2(1+5i)$ *(Multiplicamos el escalar por el número complejo)*

$\frac{8}{3}+\frac{4}{3}i-2-10i = \frac{2}{3}-\frac{26}{3}i$ *(Sumamos términos semejantes)*

Lo anterior se conoce como ponderación de un número complejo, en este caso $(4+2i)$ y $(1+5i)$, por un número escalar, en el ejemplo $\frac{2}{3}$ y −2 respectivamente.

e. $(1-i)^8 = (1-i)^2(1-i)^2(1-i)^2(1-i)^2$

$= (1-2\,i+i^2)(1-2\,i+i^2)(1-2\,i+i^2)(1-2\,i+i^2)$

$= (1-2\,i-1)(1-2\,i-1)(1-2\,i-1)(1-2\,i-1)$

$= -2\,i\cdot -2\,i\cdot -2\,i\cdot -2\,i$

$= 16\,i^4 = 16\cdot 1$ *(recuerda que $i^4 = i^2\cdot i^2 = -1\cdot -1 = 1$)*

$= 16$

Como puedes ver, para sumar, restar o multiplicar entre complejos, es necesario considerar sus partes real e imaginaria por separado y operar de manera independiente entre ellas.

Veamos ahora como podemos obtener un número complejo desconocido, a partir de ciertas restricciones que debe cumplir este número. Para esto, llamaremos z a este número que cumplirá que: $2z+4i = (2-i)(-3+6i)$.

Desarrollemos entonces esta igualdad para determinar el valor del complejo z:

$2\,z+4\,i = (2-i)(-3+6\,i)$

$2\,z+4\,i = -6+12\,i+3\,i-6\,i^2$

$2\,z+4\,i = -6+12\,i+3\,i+6$

$2\,z+4\,i = 15\,i\ /-4\,i$

$2\,z = 11\,i\ /:2$

$z = \frac{11}{2}i$

Como te habrás dado cuenta, acabamos de resolver una ecuación en el conjunto de los complejos. De la misma forma, determinaremos ahora que valor debe tener z en $(3+z)-(4-i)(2i-z)$ para que esta expresión represente al número imaginario puro $7i$. Para esto, escribimos z como $a+bi$ y procedemos a resolver la ecuación:

$$(3+z)-(4-i)(2i-z)$$
$$=(3+a+bi)-(4-i)(2i-(a+bi))$$
$$=(3+a+bi)-(4-i)(2i-a-bi)$$
$$=3+a+bi-(8i-4a-4bi-2i^2+ai+bi^2)$$
$$=3+a+bi-(8i-4a-4bi+2+ai-b) \text{ (recuerda que } i^2=-1)$$
$$=3+a+bi-8i+4a+4bi-2-ai+b$$
$$=(1+5a+b)+(5bi-8i-ai)$$
$$=(1+5a+b)+(5b-8-a)i$$

Para que lo que acabamos de obtener sea igual a $7i$, la parte real de este resultado debe ser 0, y la parte imaginaria 7. (Recuerda que la parte imaginaria es solo aquel número que acompaña a la unidad imaginaria).

Entonces escribimos:

$1+5a+b=0$ y $5b-8-a=7$ *(lo que podemos escribir como un sistema de ecuaciones)*

$$\begin{array}{|l} 1+5a+b=0 \\ 5b-8-a=7 \end{array}$$ *(ordenando el sistema se obtiene:)*

$$\begin{array}{|l} 5a+b=-1 \\ -a+5b=15 \end{array}$$ *(multiplicando por 5 la 2° ecuación obtenemos:)*

$$\begin{array}{|l} 5a+b=-1 \\ -5a+25b=75 \end{array}$$ *(sumando término a término ambas ecuaciones:)*

$$26b=74$$
$$b=\frac{74}{26} \Rightarrow b=\frac{37}{13}$$

Reemplazando en la 2° ecuación para obtener a, se tiene que:

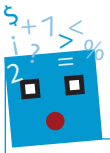
$$-a+5\cdot\frac{37}{13}=15$$
$$-a=15-\frac{185}{13} \Rightarrow -a=\frac{10}{13} \Rightarrow a=-\frac{10}{13}$$

Por lo tanto, el complejo z es: $z=-\frac{10}{13}+\frac{37}{13}i$

Una aplicación de los números complejos es el cálculo de la corriente alterna en redes eléctricas, que es la forma en que llega la electricidad a los hogares y las industrias.

La corriente alterna es la corriente eléctrica en la que varían la magnitud y el sentido de manera cíclica.

En los circuitos eléctricos se presenta una oposición o "resistencia" al paso de una corriente eléctrica, cuando esta corriente eléctrica es alterna a esta resistencia se le denomina impedancia y se representa mediante un número complejo.



Para saber más

Si podemos representar un número complejo como par ordenado, también podemos escribir como par ordenado la suma y la multiplicación de dos números complejos. Así, se tendrá que:

Si $z=a+bi=(a,b)$ y $z'=c+di=(c,d)$, entonces:

- $z+z'=(a+c,b+d)$
- $z\cdot z'=(ac-bd, ad+bc)$

  Puedes comprobarlo tú mismo...

Links de interés

En este *link* podrás encontrar explicación sobre la operatoria de números complejos, así como también ejercicios.

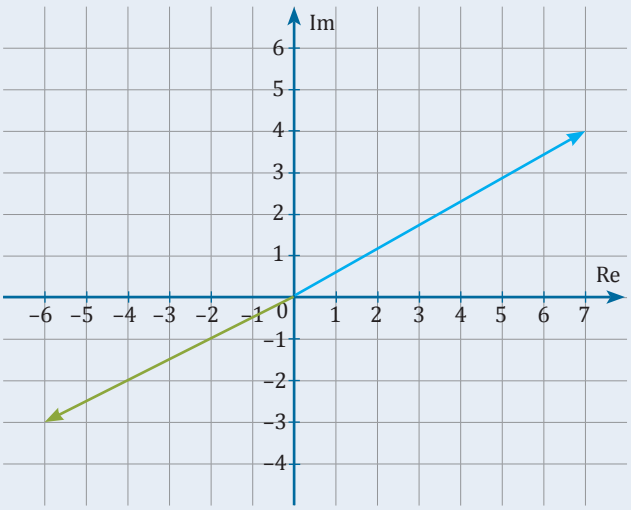
http://www.montereyinstitute.org/courses/DevelopmentalMath/TEXTGROUP-15-19_RESOURCE/U16_L4_T2_text_final_es.html

- Un número complejo es todo número de la forma $a+bi$, siendo a y b números reales, donde a es la parte real, b la parte imaginaria del número complejo e i es la unidad imaginaria $(i^2 = -1)$.
- Un número complejo se puede representar, al menos, de tres maneras: forma canónica o binómica $(a + b\,i)$, como par ordenado (a, b) y de manera gráfica (como un vector).
- Si $z = a + b\,i$ y $z' = c + d\,i$ son dos complejos, entonces se cumple que $z = z' \Leftrightarrow a = c \wedge b = d$.
- Los números complejos se pueden sumar, restar y multiplicar en forma análoga a binomios algebraicos.

Trabaja

Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios, no olvides chequear tus respuestas en el solucionario.

1 El siguiente plano complejo muestra dos complejos coloreados



a. ¿En cuántas unidades debe aumentar o disminuir la parte real del complejo azul para tener la misma parte real que el otro complejo?

b. ¿En cuántas unidades debe aumentar o disminuir la parte imaginaria del complejo azul para tener la misma parte imaginaria que el otro complejo?

2 Si $z = (x,5)$ y $z' = (6 - x, y - x)$, ¿cuáles son los valores de x e y para que:

a. $z = z'$? **b.** $2\,z = 3\,z'$?

3 Dados $z_1 = a\left(0{,}\overline{7} + \frac{7}{a}i\right)$ y $z_2 = 1{,}\overline{2}a + 2b\,i$, encuentra a y b para que sean iguales.

4 Encuentra el valor de:
$(5 - 8\,i) + (9 - i) - (4 + 3\,i)$.

5 Si $z_1 = \left(\frac{2}{5}\,;\, 0{,}\overline{3}\right)$ y $z_2 = \left(-\frac{7}{9}\,;\, 0{,}1\overline{3}\right)$. Hallar el valor de $18\,z_1 - 10\,z_2$.

6 Indica la parte real y la parte imaginaria del complejo que has obtenido al desarrollar:

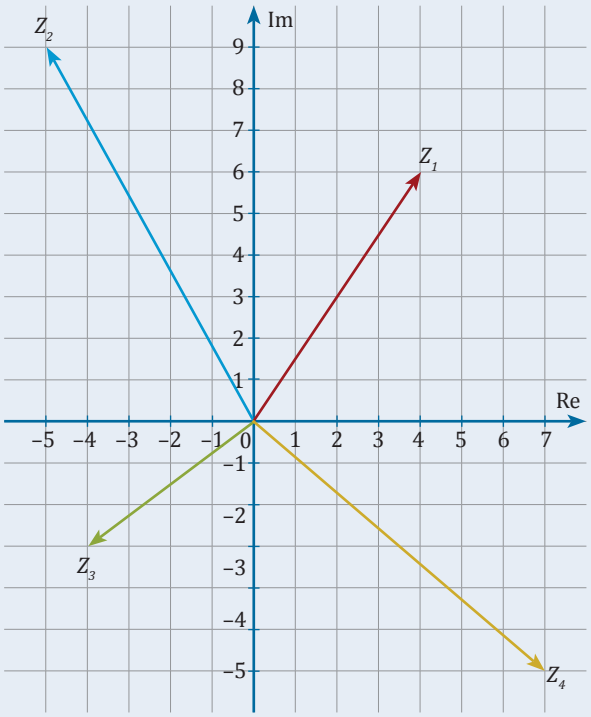
$$\sqrt{-16}\,(2+\sqrt{-1}-5)-(\sqrt{-36}\cdot\sqrt{-4}\cdot\sqrt{-9})+i\sqrt{-25}-i^6\sqrt{121}+3i$$



7 Si $z = -3a\,i$; $z' = 2b - 3a\,i$; $z'' = b - (2b - a)\,i$; $z''' = -2b + (4a - 0{,}\overline{7})\,i$, efectúa la suma de los complejos e indica su parte real e imaginaria.

8 Al reemplazar $z = 2(1 + 8\,i)$ en $(1{,}5 - 4\,i) - z + (3{,}5 + 3\,i) = 3 - 17\,i$, ¿se produce realmente una igualdad?

9 De acuerdo al siguiente gráfico, calcula y da tu respuesta en forma canónica cuando corresponda:



a. $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$

b. $z_1 - z_2 - z_3 - z_4$

c. Grafica los complejos resultantes de **a.** y **b.**

d. Al sumar los complejos obtenidos en **a.** y **b.**, ¿qué notas de este nuevo complejo en relación a z_1?

10 De acuerdo al gráfico anterior, encuentra un complejo $a + b\,i$ tal que:

a. al sumarlo con $z_1 + z_2 + z_3 + z_4$, lo anule.

b. al restarlo a $z_1 - z_2 - z_3 - z_4$, lo anule.

11 Efectúa los siguientes productos de números complejos:

a. $(-2, -5)(31, -11)$

b. $[(-1{,}\overline{1}\,;\,2)(9, -18)]\left(0, -\frac{2}{5}\right)$

12 Desarrolla y reduce al máximo posible:

a. $(2 + 5\,i) + (3\,i - 1)(2 - 4\,i)$

b. $(-2+17i)(17-2\,i)+(3i-1)(-1-3i)$

c. $\left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}i\right)^2 + \left(\frac{9}{8}i - \frac{1}{2}\right)$

13 Si $z = (-0{,}2\,;\,0{,}5)$, evalúa la expresión $i\,z - z^2 + 6 - 3\,i$

14 Sabiendo que $z_1 = 1 + i$, $z_2 = -1 - 2\,i$, $z_3 = 2\,i - 1$, determinar el valor de a en la expresión, $(a - 1)z_1 + 2az_2 - 5z_3$, para que esta sea igual al imaginario $-23\,i$.

15 Dado el complejo $z = a + b\,i$, ¿qué tipo de número complejo se obtendrá de la expresión $2\,z \cdot -z$?

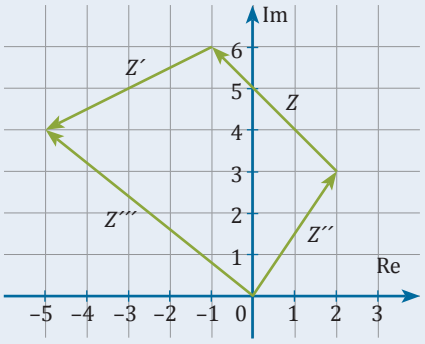
16 Encuentra el complejo z, tal que $2\,z - 0{,}5\,z\,i = 4\,i^3 + 5\,i$.

17 Al sumar el doble de un complejo con $17 + 18\,i$ se obtiene el mismo complejo disminuido en $17 - 8\,i$. ¿Cuál es dicho complejo?

18 Resuelve la siguiente ecuación para determinar el valor de z: $\frac{2z}{5} + \frac{z - 1}{9} = 10 + 6\,i$.

19 Halla la parte real y la parte imaginaria de un complejo, sabiendo que él es la solución de $-2{,}5(z - 4\,i) - 1{,}5\,(1 - 6\,z) = z - 5\,i^3$.

20 Dados los complejos de la figura, encuentra un complejo tal que al sumarlo con el doble de z''' se obtenga la diferencia entre z'' y el triple de la suma de z con z' (nota que z y z' han sido trasladados).



Trabaja

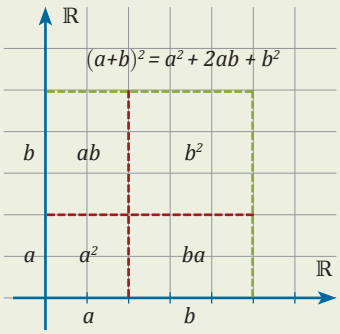
Resuelve con tu grupo los siguientes problemas. No olvides corregirlos chequeando las respuestas en el solucionario.

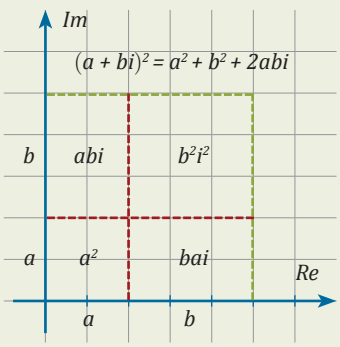
11 La profesora de Pedro, les ha dado un desafío, como ustedes ya saben de números complejos ayúdenlo:

a. Encuentren z^2, z^4, z^6, z^8, z^{10} y z^{12}, a partir de $z = 2 + 2\,i$

b. Observando lo que han respondido en **a.**: ¿qué pueden sugerir con respecto a la demostración que solicita la profesora?

12 Siempre duda, porque hay dudas
que son sanas!
Que las cosas por más que se parezcan,
no son exactamente iguales ni de noche,
ni de tarde, ni de mañana.
¡Siempre duda, porque hay dudas que
son sanas! porque, al ver estas dos figuras,
por ejemplo





hay uno que se confundió.
Ni real, ni complejo, distinguió
¡Grave error en el plano complejo cometió!
¡ Siempre duda, porque hay dudas que son sanas!

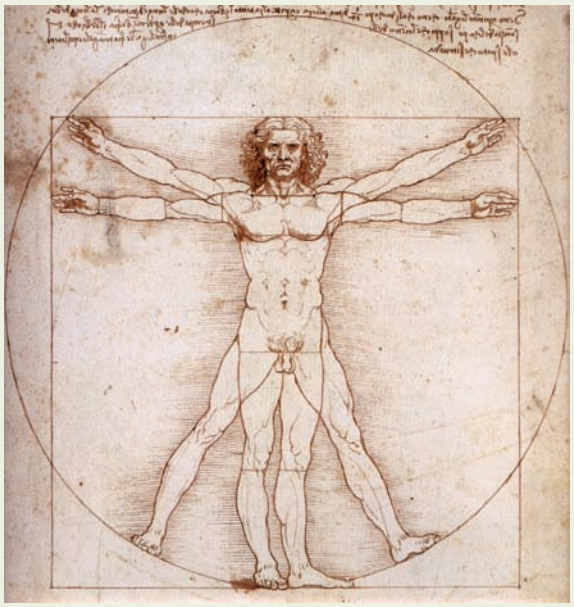
Dime, ¿representan ambos gráficos las correspondientes fórmulas mencionadas?

13 El pintor de la plaza algo sabía de matemática y conocía de la proporción divina porque como buen seguidor de Da Vinci la había aplicado a sus cuadros. Esta dice "Dos números reales a y b están en proporción divina, si la razón entre ellos es igual a φ (número de oro):

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}61803...$$

Pero la curiosidad de este pintor fue mas allá y se propuso resolver el siguiente problema :

En el campo de los números complejos se tiene el número $z_1 = 4 + 3\ i$. Encuentra otro complejo z_2, de forma que: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. Pueden señalar ¿qué numero encontró el pintor?



En el dibujo "El hombre de Vitruvio", Leonardo Da Vinci plasmó las proporciones consideradas armónicas en el cuerpo humano.



14 –Macarena, ¿entendiste lo que Manuel decía sobre los complejos amigos o conocidos?
Sí –respondió Macarena–: Dos números complejos son conocidos entre ellos, si la parte real de uno de ellos pasa a ser la parte imaginaria del otro y viceversa. Así, el conocido de $z_1 = 5 + 3\,i$ es $z_2 = 3 + 5\,i$.

a. Según esto, determinen los conocidos de los siguientes números complejos y encuentren su suma y el producto entre el número y su conocido:

i. $z_1 = 5 + 2\,i$ **iii.** $z_3 = \frac{5}{3} - \frac{3}{4}i$

ii. $z_2 = -3 + 4\,i$ **iv.** $z_4 = -\frac{1}{2} - 9\,i$

b. ¿Qué regularidad encuentran entre los resultados de la suma y la multiplicación de ellos? Enuncien la regla inferida.

15 ¿Qué relación debe haber entre la parte real e imaginaria de un número complejo para que siempre su extremo esté sobre la bisectriz de cada uno de los cuadrantes? –preguntó el profesor a Jorge.
¿Cuál creen que fue la respuesta de Jorge? Anoten su respuesta en forma de par ordenado y forma canónica, de manera que puedan enunciar una regla general.

16 –Yo recuerdo que los sistemas lineales de ecuaciones se resuelven por sustitución, reducción, igualación y que también hay otros métodos –decía Rogelio– ¿pero servirá esto en los complejos?
No se preocupen –dijo el profesor–. Pueden utilizar los mismos métodos. Resuelvan este ejercicio... ¿cuál es el valor de x e y?

$$\begin{aligned} 2 + x\,i + 2y &= 1 + 7\,i \\ (1 - i)x + i\,y &= 0 \end{aligned}$$

Revisemos lo aprendido

Te invitamos a hacer una pausa en tu aprendizaje para revisar lo aprendido en esta sección. Marca V (verdadero) o F (falso) según lo que creas que corresponde a tu trabajo.

1 ____ Soy capaz de explicar el concepto de número complejo.
2 ____ Entendí cómo se representan los números complejos.
3 ____ Entendí cómo se opera con los números complejos.
4 ____ Entendí cuándo dos números complejos son iguales.
5 ____ Entendí los ejercicios resueltos.
6 ____ Resolví correctamente los ejercicios propuestos.
7 ____ Trabajé con mi grupo, aportando cuando fue necesario.

Si has logrado 4 o más respuestas afirmativas, te invitamos a seguir adelante, de lo contrario vuelve a estudiar aquellos contenidos que te hayan resultado más difíciles de comprender.

División de números complejos y las propiedades de las operaciones en $\mathbb{C}$

En esta sección aprenderás

A dividir dos números complejos y las propiedades de las operaciones en el conjunto de los números complejos.

Desarrollarás las siguientes habilidades:

- Identificar, calcular, interpretar, resolver problemas, analizar, sintetizar, investigar y comunicar.

Habilidades por actividad:

- Identificar y calcular: 1. 1 – 2 – 3a.
- Interpretar y resolver problemas: 2 – 3. 3b – 5 – 8 – 9.
- Analizar y sintetizar: 4 – 7a – 7b – 9.
- Investigar y comunicar: 6 – 7c.

Ya has aprendido a sumar, restar y multiplicar complejos. También puedes determinar si dos números complejos son iguales y conoces las distintas formas como estos se pueden representar. Ahora es el turno de aprender a dividir complejos.

Supongamos que queremos dividir los complejos $4 - i$ y $2 + 3i$, entonces podemos escribir que buscamos un complejo z tal que,

$$\frac{4 - i}{2 + 3i} = z$$

$$\Rightarrow 4 - i = z(2 + 3i)$$

Y escribiendo z como $a + bi$, entonces podemos escribir que:

$$4 - i = (a + b\,i)(2 + 3\,i)$$

$$4 - i = 2a + 3a\,i + 2b\,i + 3b\,i^2$$

$$4 - i = 2a + 3a\,i + 2b\,i - 3b$$

$$4 - i = (2a - 3b) + (3a + 2b)\,i$$

Entonces, igualamos las partes reales y las imaginarias respectivamente y escribimos que:

$$\left.\begin{array}{l} 2a - 3b = 4 \\ 3a + 2b = -1 \end{array}\right| \begin{array}{l} / \cdot 2 \\ / \cdot 3 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} 4a - 6b = 8 \\ 9a + 6b = -3 \end{array}\right| (+)$$

$$13a = 5$$

$$a = \frac{5}{13} \Rightarrow 2 \cdot \frac{5}{13} - 3b = 4 \qquad \textit{(remplazando en la } 1^{\text{º}} \textit{ ecuación)}$$

$$\frac{10}{13} - 3b = 4$$

$$\frac{10}{13} - 4 = 3b$$

$$-\frac{42}{13} = 3b$$

Dividiendo por 3, obtenemos que, $b = -\frac{14}{13}$. Por lo tanto, $\frac{4 - i}{2 + 3\,i} = \frac{5}{13} - \frac{14}{13}i$.

Mediante esta forma de efectuar la división, hemos realizado cada paso detalladamente, claro que también hay una forma más rápida y fácil de hacer esto.

Para ello, lo que hacemos es dividir $(4 + i)$:i. El problema es que el algoritmo que se usa para dividir (forma de dividir) solo funciona para números naturales. Si recuerdas cuando estudiabas raíces,

tampoco podías dividir, por ejemplo, $(\sqrt{3}-2):\sqrt{5}$. ¿Recuerdas que hacías en ese caso?

En este caso lo que debíamos hacer era amplificar la división por $\sqrt{5}$ y encontrar una expresión equivalente a la dada, pero sin raíces en el denominador.

De la misma forma debemos obtener una expresión equivalente a la dada sin que ella tenga la unidad imaginaria en el denominador.

Así, lo que debemos hacer es amplificar por i, es decir,

$$\frac{4-i}{i}\ \begin{matrix}/\cdot i\\ /\cdot i\end{matrix} = \frac{i(4-i)}{i^2} = \frac{4i-i^2}{-1} = -\frac{4i+1}{1} = -1-4i$$

Para el caso en que el divisor sea un número complejo, por ejemplo, $\frac{4-i}{2+3i}$, se debe proceder de forma análoga que cuando teníamos una división de la forma, $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}+3}$. En ese caso se amplificaba la división por un binomio con los mismos términos, pero con el signo contrario para tratar de formar una "suma por diferencia".

$$\begin{aligned}
&\frac{4-i}{2+3i}\ \begin{matrix}/\cdot(2-3i)\\ /\cdot(2-3i)\end{matrix}\\
&= \frac{(4-i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)}\\
&= \frac{8-12i-2i+3i^2}{2^2-(3i)^2}\\
&= \frac{8-12i-2i-3}{4-9i^2}\\
&= \frac{5-14i}{4+9} = \frac{5}{13}-\frac{14}{13}i
\end{aligned}$$

Como ves, puedes escoger cualquiera de los dos procedimientos enseñados para dividir números complejos y lo importante es que cualquiera sea que elijas lo hagas con mucho cuidado y sin "saltarte" pasos de modo que no comentas errores evitables en los pasos intermedios, ambas formas son equivalentes, haremos algunos ejemplos:

a. $\frac{-3+i}{5i}$

$$\begin{aligned}
&= \frac{(-3+i)}{5i}\cdot\frac{i}{i} = \frac{(-3+i)i}{5i^2}\\
&= \frac{-3i+i^2}{-5} = \frac{-3i-1}{-5}\\
&= \frac{1+3i}{5} = \frac{1}{5}+\frac{3}{5}i
\end{aligned}$$

Ahora, resolveremos esta misma ecuación utilizando el primer procedimiento enseñado para resolver esta división:

$$\begin{aligned}
&\frac{-3+i}{5i} = z\\
&-3+i = z(5i)
\end{aligned}$$

Toma nota

Una fracción del tipo: $\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ se debe *racionalizar* para eliminar la raíz del denominador, de la siguiente forma:

$$\frac{3+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{2\cdot 3}}{\sqrt{3\cdot 3}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{\sqrt{3^2}} = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$$

Escribiendo z como $a + bi$ tenemos:

$$-3 + i = (a + bi)(5i)$$

$$-3 + i = 5ai + 5bi^2$$

$$-3 + i = 5ai - 5b$$

$$-3 + i = -5b + 5ai$$

Entonces, igualamos las partes reales y las partes imaginarias, quedando:

$$\begin{array}{|l} -3 = -5b \\ \hline 1 = 5a \end{array}$$

de donde obtenemos que $b = \frac{3}{5}$ y $a = \frac{1}{5}$. Por lo tanto $z = \frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$, que corresponde al mismo resultado obtenido mediante el método anterior.

b. $\frac{i^3 - 4i + 3}{2i - 5}$

$$= \frac{-i - 4i + 3}{2i - 5} = \frac{-5i + 3}{2i - 5}$$

$$= \frac{-5i + 3}{2i - 5} \cdot \frac{2i + 5}{2i + 5}$$

$$= \frac{(-5i + 3)(2i + 5)}{(2i - 5)(2i + 5)} = \frac{-10i^2 + 6i - 25i + 15}{4i^2 - 25}$$

$$= \frac{10 - 19i + 15}{-4 - 25} = \frac{25 - 19i}{-29}$$

$$= \frac{-25 + 19i}{29} = -\frac{25}{29} + \frac{19}{29}i$$

De la misma forma que en el ejemplo anterior, utilizaremos el otro procedimiento aprendido para dividir estos números complejos:

$$\frac{i^3 - 4i + 3}{2i - 5} = z$$

$$i^3 - 4i + 3 = z(2i - 5)$$

$$i^3 - 4i + 3 = (a + bi)(2i - 5)$$

$$i^3 - 4i + 3 = 2ai + 2bi^2 - 5a - 5bi$$

$$-i - 4i + 3 = 2ai - 2b - 5a - 5bi$$

$$3 - 5i = (-2b - 5a) + (2a - 5b)i$$

Igualando las partes reales y las partes imaginarias, tenemos:

$$\begin{array}{|l} 3 = -2b - 5a \\ \hline -5 = 2a - 5b \end{array} \quad \begin{array}{l} / \cdot 5 \\ / \cdot -2 \end{array}$$

$$\begin{array}{|l} 15 = -10b - 25a \\ \hline 10 = 10b - 4a \end{array} \quad (+)$$

$$25 = -29a$$

$$a = -\frac{25}{29} \Rightarrow 3 = -2b - 5 \cdot -\frac{25}{29}$$

$$3 = -2b + \frac{125}{29}$$

$$3 - \frac{125}{29} = -2b$$

$$-\frac{38}{29} = -2b \qquad /:-2$$

$$\frac{38}{58} = b$$

Y simplificando por 2 obtenemos $b = \frac{19}{29}$

Es decir, el número complejo obtenido corresponde a $z = -\frac{25}{29} + \frac{19}{29}i$ cuyo valor es el mismo obtenido mediante el procedimiento anterior.

Es el turno de formalizar las propiedades para el conjunto de los números complejos, ¿recuerdas las propiedades que cumplían la adición y la multiplicación de los números reales?, estas tenían ciertas características importantes que permitían a los números reales funcionar de la manera en que lo hacen. En este caso ocurre lo mismo, para la adición se cumplen:

- Clausura: si se suman dos números complejos el resultado será un complejo, es decir, $\forall z,z' \in \mathbb{C}:(z + z') \in \mathbb{C}$.
- Asociatividad: se puede cambiar el orden de agrupación de los sumandos y el resultado de la suma será la misma, es decir, $\forall z,z_1, z_2 \in \mathbb{C}:(z + z_1) + z_2 = z + (z_1 + z_2)$.
- Elemento neutro aditivo: existe un número complejo tal que, sumado con otro, dé este último. En este caso, ese complejo es $e = 0$.
  Es decir, $\forall z \in \mathbb{C}, \exists!\ e \in \mathbb{C}:(z + e) = (e + z) = z$.
- Elemento inverso aditivo: existe un complejo que, sumado con otro complejo z dé el elemento neutro (0). Si $z = a + b\,i$, entonces su elemento inverso será $-z = -a - b\,i$. Es decir, $\forall z \in \mathbb{C}, \exists\ z' \in \mathbb{C}:(z + z') = (z' + z) = e$.
- Conmutatividad: el orden de los sumandos no altera el resultado de la adición. Es decir, $\forall\ z,z' \in \mathbb{C}:z + z' = z' + z$.

Estas propiedades se cumplen dado que la parte real y la parte imaginaria de los complejos están formadas por números reales.

Ahora mencionaremos también las propiedades para la multiplicación de números complejos:

- Clausura: si se multiplican dos números complejos el resultado será un complejo, es decir, $\forall z,z' \in \mathbb{C}:(z \cdot z') \in \mathbb{C}$.
- Asociatividad: se puede cambiar el orden de agrupación de los factores y el resultado de la multiplicación será la misma, es decir, $\forall z,z_1,z_2 \in \mathbb{C}:(z \cdot z_1) \cdot z_2 = z \cdot (z_1 \cdot z_2)$.



- Elemento neutro multiplicativo: existe un número complejo tal que, multiplicado con otro, dé este último. En este caso, ese complejo es $e = 1$. Es decir, $\forall z \in \mathbb{C}, \exists!\ e \in \mathbb{C}: (z \cdot e) = (e \cdot z) = z$.
- Elemento inverso multiplicativo: existe un complejo que, multiplicado con otro complejo z dé el elemento neutro (1). Si $z = a + b\,i$, entonces su elemento inverso será:

  $z^{-1} = \frac{1}{a + b\,i} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,i.$

  Es decir, $\forall z \neq 0 \in \mathbb{C},\ \exists z' \in \mathbb{C}: (z \cdot z') = (z' \cdot z) = e$
- Conmutatividad: el orden de los factores no altera el resultado de la multiplicación. Es decir, $\forall z, z' \in \mathbb{C}: z \cdot z' = z' \cdot z$.
- Distributividad de la multiplicación con respecto a la suma: dice que $\forall z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}: z \cdot (z_1 + z_2) = z \cdot z_1 + z \cdot z_2$.

- Para poder dividir dos números complejos, z y z', se debe amplificar la expresión fraccionaria $\frac{z}{z'}$ de modo que no aparezca la unidad imaginaria en el denominador. Para esto se debe amplificar por i, si z' es imaginario y por un complejo que permita formar una suma por diferencia si z' es un número complejo.
- El conjunto de los números complejos es un cuerpo ya que se cumplen las propiedades de clausura, asociatividad, conmutatividad, elemento neutro, elemento inverso y distributividad para la suma y la multiplicación.
- El inverso aditivo del complejo $z = a + b\,i = (a,b)$ es $-z = -a - b\,i = (-a, -b)$.
- El inverso multiplicativo del complejo $z = a + b\,i = (a,b)$ es $z^{-1} = \frac{a}{a^2 + b^2} - \frac{b}{a^2 + b^2}\,i = \left(\frac{a}{a^2 + b^2}, -\frac{b}{a^2 + b^2}\right)$.



Trabaja

1 Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios, no olvides chequear tus respuestas en el solucionario.

a. $\frac{7+i}{i}$

b. $(\sqrt{-32}+\sqrt{64}-\sqrt{-128}):(\sqrt{-64}-\sqrt{-144})$

c. $\frac{6+8i}{4}-\frac{4}{2-i}$

d. $\frac{(6,1)}{(6,-1)}-\frac{(6,-1)}{(6,1)}$

e. $\frac{6+i}{2-i}-\frac{3}{i^{10}}$

f. $\frac{1+i}{(2+i)(3+i)}$

g. $\frac{(9+i)(4-2i)+3i-5}{1+11i}$

h. $\frac{6i+3}{2i-1}\cdot\frac{13}{4i-5}$

2 La suma de dos complejos es $3+i$ y la parte imaginaria del primero de ellos es 2. Si la diferencia entre la parte real del primero y la del segundo es -5, ¿es posible que su cociente sea un número real puro?

3 La suma de dos números complejos es $8-2i$, la parte real del primero de ellos es 5. Si el cociente entre el primero y el segundo no tiene parte real, decide si ellos pueden ser:

a. $5+3i$ y $3-5i$ **b.** $5+5i$ y $3-3i$

Trabaja

Resuelve con tu grupo los siguientes ejercicios y compara tus resultados con otros grupos. No olvides corregirlos chequeando las respuestas en el solucionario.

1 Completen e indiquen la propiedad que está reflejada en:

a. $\ldots\ldots\ldots\ldots + \left[(-0,8\overline{9}+16i)+\left(-\frac{1}{9}-21i\right)\right]$
$= [(5-3i)+\ldots\ldots\ldots\ldots] + \left(-\frac{1}{9}-21i\right)$

b. $\left[(-0,8\overline{9}+16i)+\left(-\frac{1}{9}-21i\right)\right]+(5-3i)$
$= \ldots\ldots\ldots\ldots + \left[(-0,8\overline{9}+16i)+\left(-\frac{1}{9}-21i\right)\right]$

2 ¿Cuál es la propiedad que garantiza que la suma de un número complejo con el inverso aditivo de otro sea también un complejo?

3 Con $z=11+5i$ y $z'=13-4i$ y $z''=1-4i$:

a. Muestren que $z-(z'-z'')\neq(z-z')-z''$

b. ¿Por qué no se cumple la asociatividad en el ejercicio anterior?

4 Observen el siguiente desarrollo, de manera ordenada. Al lado de la línea correspondiente escriban la propiedad de la adición que se ha usado.

$z+(3+4i) = -(4-8i) \quad / + [-(3+4i)]$

$\{z+(3+4i)\}+[-(3+4i)]$
$= -(4-8i)+[-(3+4i)]$

$z+\{(3+4i)+[-(3+4i)]\}$
$= -(4-8i)+[-(3+4i)]$

$z+0 = -(4-8i)+[-(3+4i)]$

$z = -(4-8i)+[-(3+4i)]$

$z = (-4+8i)+(-3-4i)$

$z = -7+4i$

5 Jacinto, estaba muy nervioso en la prueba de la unidad de complejos, porque quedaba poco tiempo para entregarla y tenía que encontrar un complejo z, tal que fuera equivalente a $-5+2i$ dividido por $2-4i$. Para iniciar el desarrollo, solo igualó z al cociente de ambos complejos y continuó de la manera algebraica habitual.

a. ¿Qué resultado obtuvo?

b. A partir del resultado anterior, también debía determinar otro complejo z_1 tal que el cociente entre z y z_1 resultara igual al número imaginario puro $\frac{3}{10}i$.

6 Muestren a través de un ejemplo que la división de dos números complejos cualquiera no cumple la propiedad conmutativa.

7 Graciela y Gracián aprendieron factorización muy bien pero se sorprendieron al notar que pueden factorizar un complejo, a partir de otro cualquiera dado. Ellos notaron que $-13+14\,i$ se puede factorizar a partir de otro cualquiera, por ejemplo, $(2-i)$. Mediante división obtuvieron el otro factor, por tanto escribieron $-13+14\,i=(2-i)\cdot$ factor obtenido.

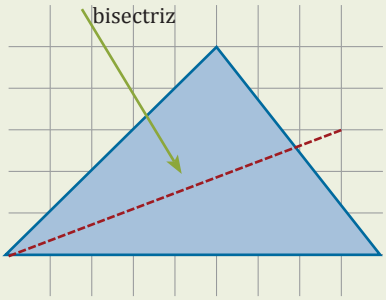
a. Escriban el número complejo $-13+14\,i$ mediante los factores usados por Gracián y Graciela.

b. Escribe otra factorización que tú desees para $-13+14\,i$.

c. ¿Podremos obtener una factorización única para este complejo? En general, ¿ocurrirá siempre esto para cualquier complejo?

8 Hola, soy Lucio. Confieso que a veces tengo una actitud negativa con mi profesora de Matemática. La última vez me sacó a la pizarra me dio la siguiente fórmula:
$z^{-1}=\left(\frac{a}{a^2+b^2},-\frac{b}{a^2+b^2}\right)$, si $z=a+b\,i$,
para resolver un ejercicio sumamente simple: "Sabiendo que $z^{-1}=\left(-\frac{3}{25},\frac{4}{25}\right)$ escribir z en, forma de par ordenado". Había comenzado a rezongar, cuando me di cuenta de que era muy sencillo con esta fórmula. Adivinen cuál es mi respuesta... ¡háganlo ustedes!

9 ¡Uff! –exclama Patricia–. Hasta el momento voy entendiendo toda la materia de números imaginarios. Pero ahora me piden que calcule k, de tal modo que al realizar $\frac{2+i}{k+i}$, el complejo resultante esté representado en la bisectriz del primer cuadrante del plano complejo. ¿Cuál es este valor?



La bisectriz de un ángulo es la recta que lo divide en dos ángulos iguales.

10 Recuerdo que cuando estaba en primer año de la universidad, demostramos que $\frac{a+b\,i}{b-a\,i}$ da siempre raíz cuadrada de -1... Pero ahora no logro recordarlo... Te pido que lo hagas, por favor.

Revisemos lo aprendido

Marca con una ✘ el casillero correspondiente, según la evaluación que hagas de tu trabajo...

MB:	Muy bien	(7,0 - 6,0)	**S:**	Suficiente	(4,9 - 4,0)
B:	Bien	(5,9 - 5,0)	**I:**	Insuficiente	(3,9 - 1,0)

Indicador	MB	B	S	I
Entendí cómo se dividen dos complejos.				
Entendí cuáles propiedades se cumplen para la suma y la multiplicación en el conjunto $\mathbb{C}$ y qué dice cada una de ellas.				
Entendí los ejercicios resueltos.				
Trabajé con mi grupo, aportando cuando fue necesario.				

Si has contestado 3 o más cruces en las columnas de suficiente (S) o Insuficiente (I), debes repasar lo visto y volver a hacer los ejercicios que fueron más difíciles de hacer.

Números complejos... módulo y conjugado



No solo es posible operar con números complejos, también podemos calcular su módulo y su conjugado como veremos a continuación.

En esta sección aprenderás

Qué es el módulo y conjugado de un número complejo

Desarrollarás las siguientes habilidades:

- Identificar, calcular, interpretar, resolver problemas, analizar, sintetizar, investigar y comunicar.

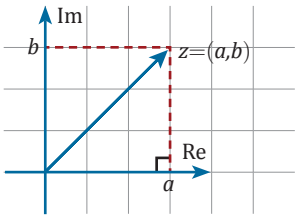
Habilidades por actividad:

- Identificar y calcular: 1 – 2 – 3. 5
- Interpretar y resolver problemas: 4 – 5 – 6 – 10. 1a – 4
- Analizar y sintetizar: 7 – 9. 1b – 2 – 3
- Investigar y comunicar: 8. 1c

Módulo de un complejo

Como los números complejos pueden representarse como un vector, entonces tendrán módulo, dirección y sentido.

Observa la siguiente representación gráfica del complejo $z = a + b\,i$



Si queremos calcular el módulo del complejo z $(|z|)$, es decir, la longitud del vector que z representa, entonces podemos usar el teorema de Pitágoras en el triángulo rectángulo, así podemos escribir que:

$a^2 + b^2 = (|z|)^2 \;/\sqrt{\ }$

$\Rightarrow \; |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

Es decir, el módulo del complejo z es igual a la raíz de la suma de los cuadrados de la parte real e imaginaria del complejo z (recuerda que la parte imaginaria de z es el valor numérico que acompaña a la unidad imaginaria).

Nota que, como el módulo de un complejo representa una longitud, siempre será positivo, salvo que el complejo sea $z = 0 + 0\,i$. En este caso, su módulo es 0.

Por ejemplo:

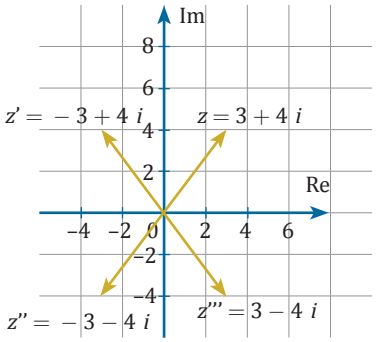
a. Calcular el módulo de $z = 2 - 7\,i$

$\Rightarrow |z| = \sqrt{2^2 + (-7)^2}$

$= \sqrt{4 + 49} = \sqrt{53}$

b. ¿Cuántos complejos existen que tengan módulo 5?

Si pensamos que el módulo de un complejo es la medida de la hipotenusa del triángulo rectángulo que este forma con los ejes (como en la figura), la primera respuesta que se nos puede venir a la mente es la siguiente (pues forman tríos pitagóricos).



Pero también están los complejos que son reales puros o imaginarios puros, tales como: $5, -5, 5\,i, -5\,i$. Todos ellos también tienen módulo igual a 5. Además, podríamos pensar en aquellos como:

$z = \sqrt{18} + \sqrt{7}\,i$, $z_1 = -\sqrt{18} + \sqrt{7}\,i$, o también en otros como: $z = 2 + \sqrt{21}\,i$ y así podrían ser infinitas las combinaciones de a y b tales que $\sqrt{a^2 + b^2} = 5$, es decir, donde $a^2 + b^2 = 25$. Por lo tanto, hay infinitos complejos que cumplen la condición de que su módulo sea igual a 5.

c. El módulo de un complejo es 8. Si la parte imaginaria del complejo es 5, entonces, ¿cuál es su parte real?

$\Rightarrow z = a + 5\,i$ y $|z| = 8$

$\therefore \quad 8 = \sqrt{a^2 + 5^2}\ /(\ )^2$

$64 = a^2 + 25 \qquad / - 25$

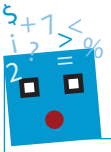
$39 = a^2 \qquad /\sqrt{\ }$

$\sqrt{39} = a$

Por lo tanto, el complejo sería: $z = \sqrt{39} + 5\,i$... Pero ¿será el único? No, no es así, según lo visto en el ejercicio anterior; también podría ser $z' = -\sqrt{39} + 5\,i$. Comprobémoslo...

Si $z = \sqrt{39} + 5\,i \Rightarrow |z| = \sqrt{(\sqrt{39})^2 + 5^2} = \sqrt{39 + 25}$
$= \sqrt{64} = 8$

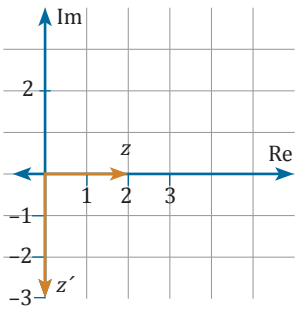
Si $z = -\sqrt{39} + 5\,i \Rightarrow |z| = \sqrt{(-\sqrt{39})^2 + 5^2} = \sqrt{39 + 25}$
$= \sqrt{64} = 8$



Para saber más

Un complejo que es real puro o imaginario puro está ubicado sobre los ejes real e imaginario, respectivamente, por lo tanto su módulo es igual al valor de su parte real, si éste es real puro o a su parte imaginaria, si éste es imaginario puro. Observa este ejemplo...

Si $z = 2$ y $z' = -3\,i$ entonces los podemos representar como...



Algebraicamente, podemos calcular que:

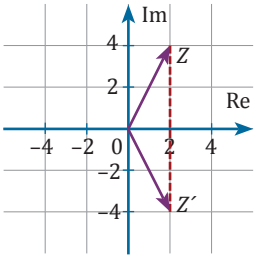
$|z| = |2 + 0\,i| = \sqrt{2^2 + 0^2} = \sqrt{4} = 2$

$|z'| = |0 - 3\,i| = \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$

Resultados que coinciden con la representación gráfica y la medida lógica de la longitud de los vectores sobre cada uno de los ejes.

Conjugado de un complejo

Observa la siguiente representación gráfica de dos complejos z y z':



Llamaremos conjugado de un complejo z, al complejo $\overline{z}$, que será el simétrico de z con respecto al eje real. Es decir, algebraicamente, anotaremos que si, $z = a + b\,i \Rightarrow \overline{z} = a - b\,i$. En otras palabras, el conjugado de un complejo es otro complejo que, difiere del dado solo en el signo de su parte imaginaria.

A continuación te mostramos algunos ejemplos de este concepto:

1 Si $z_1 = 4 - 5\,i$, $z_2 = -3\,i$, $z_3 = -1$ y $z_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}i$. Determina el valor de:

a. $\overline{(z_1 + z_2)}$

$= \overline{(4 - 5\,i - 3\,i)} = \overline{(4 - 8\,i)} = 4 + 8\,i$

b. $|\overline{z_4}|$

$= \left|\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}} = \sqrt{\frac{5}{16}} = \frac{\sqrt{5}}{4}$

c. $\left|3\,\overline{z_3} - z_2\overline{(2 + i)}\right|$

$|3\,\overline{(-1)} - -3\,i\overline{(2 + i)}|$

$|3 \cdot -1 + 3\,i(2 - i)|$

$= |-3 + 6\,i - 3\,i^2|$

$= \sqrt{0^2 + 6^2} = \sqrt{36} = 6$

d. $\left|z_1{}^2 - \overline{(2z_2 - z_3)}\right| \cdot |-z_4|$

$= \left|(4 - 5\,i)^2 - \overline{(2 \cdot -3\,i - -1)}\right| \cdot \left|-\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\,i\right)\right|$

$= \left|(16 - 40\,i + 25\,i^2) - \overline{(-6\,i + 1)}\right| \cdot \left|-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,i\right|$

$= |-9 - 40\,i - (1 + 6\,i)| \cdot \left|-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,i\right|$

$= |-10 - 46\,i| \cdot \left|-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\,i\right|$

$= \sqrt{100 + 2\,116} \cdot \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{16}}$

$= \sqrt{2\,216} \cdot \sqrt{\frac{5}{16}} = \sqrt{{}^{554}\cancel{2\,216} \cdot \frac{5}{\cancel{16}_4}} = \sqrt{\frac{2\,770}{4}} = \frac{\sqrt{2\,770}}{2}$

e. $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2+z_3}\right)}$

$=\overline{\left(\frac{4-5i}{-3i-1}\right)}$

$=\overline{\left(\frac{(4-5i)(-3i+1)}{(-3i-1)(-3i+1)}\right)}$

$=\overline{\left(\frac{-12i+4+15i^2-5i}{9i^2-1}\right)}$

$=\overline{\left(\frac{-11-17i}{-10}\right)}=\left(\frac{11+17i}{10}\right)=\frac{11}{10}-\frac{17}{10}i$

f. $\overline{(z_1)^2}-(\overline{z_1})^2$

$=\overline{(4-5i)^2}-(\overline{4-5i})^2$

$=\overline{(16-40i+25i^2)}-(4+5i)^2$

$=\overline{(-9-40i)}-(16+40i+25i^2)$

$=(-9+40i)-(-9+40i)$

$=-9+40i+9-40i=0$

2 Supongamos que se tienen los complejos $z=(a,b)$ y $z'=(c,d)$, entonces prueba que:

a. $z\cdot\overline{z}$ es un real puro.

$\Rightarrow z\cdot\overline{z}=(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2$

Como a y b son números reales, entonces, a^2+b^2 es real.

b. $|z\cdot z'|=|z|\cdot|z'|$

$=|(a+bi)(c+di)|=|ac+adi+bci+bdi^2|$

$=|(ac-bd)+(ad+bc)i|$

$=\sqrt{(ac-bd)^2+(ad+bc)^2}$

$=\sqrt{a^2c^2-\cancel{2abcd}+b^2d^2+a^2d^2+\cancel{2abcd}+b^2c^2}$

$=\sqrt{a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2}$ *(factorizando)*

$=\sqrt{a^2(c^2+d^2)+b^2(c^2+d^2)}$

$=\sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)}$

$=\sqrt{(a^2+b^2)}\cdot\sqrt{(c^2+d^2)}=|z|\cdot|z'|$

c. $\overline{(z+z')} = \overline{z} + \overline{z'}$

$= \overline{(z+z')} = \overline{(a+bi+c+di)}$

$= \overline{((a+c)+(b+d)i)}$

$= (a+c)-(b+d)i$

$= a+c-bi-di$

$= (a-bi)+(c-di)$

$= \overline{z} + \overline{z'}$

- El conjugado de un complejo z, se denota por $\overline{z}$, siendo el reflejo del complejo z con respecto al eje real. Algebraicamente, el conjugado de z solo difiere de este en el signo de su parte imaginaria, es decir, si $z = a + bi$, entonces $\overline{z} = a - bi$.
- El módulo de un complejo es la medida de la longitud del vector que este complejo representa. Si $z = a + bi \Rightarrow |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Trabaja

Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios. No olvides chequear tus respuestas en el solucionario.

1 ¿Cuáles son los complejos conjugados de $\frac{1+i}{i}$ y $\frac{i}{1+i}$?

2 Calcula el valor de $z = \overline{(3+i)} - \overline{(4-5i)} + \overline{(3+5i)}$ y luego obtén el valor del módulo respectivo.

3 Si $z = \sqrt{3} - i$, calcular:

a. $|z|$; $|\overline{z}|$

b. z^{-1}

c. $\overline{z^{-1}}$

d. $(\overline{z})^3$

4 El complejo z se forma mediante el producto del conjugado de $3 + 6i$ con el inverso aditivo de $-4 + ki$, donde k es un real. Determina el valor k para que z sea un número:

a. Real puro

b. Imaginario puro

5 Si $z = \frac{\sqrt{14}+i}{2+i}$, ¿es cierto que $|z| = \sqrt{3}$?

6 Al sumar un complejo y su conjugado se obtiene seis. El módulo de uno de ellos es cinco. Escribir en forma canónica ambos complejos.

7 Si en un complejo se triplica en sus partes reales e imaginarias, ¿qué pasará con el valor de su módulo?

8 Escribe siete complejos tales, que al sumar cada uno de ellos con sus respectivos conjugados se obtenga -4. Grafícalos usando solo puntos que expresen sus extremos.

a. ¿Qué encuentras de especial en los complejos que has escrito?

b. Ahora bien, representa de esta manera, todos los complejos posibles que al sumarlos con sus respectivos conjugados se obtenga -4. ¿Qué figuras has obtenido?

9 ¿Será verdad que $(\overline{z})^4 \neq \overline{z}$ si $z = \frac{\sqrt{3}}{2}i - \frac{1}{2}$? Haz el desarrollo correspondiente para responder.

10 Si $z_1 = 2 - i$, $z_2 = (1,1)$ verifica que:

a. $|z_1 + \overline{z_2}| \leq |z_1| + |z_2|$

b. $\left|\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}\right| \leq \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Trabaja

Resuelve con tu grupo los siguientes ejercicios y compara tus resultados con los otros grupos. No olvides corregirlos chequeando las respuestas en el solucionario.

1 –¡Claro que sí, Ignacia! Tú siempre relacionas rápidamente los conceptos que te enseñan...

–Muchas gracias, Srta. Marta, por su apreciación... La verdad, no me resultó muy difícil ver una relación numérica entre los complejos,

$-3+5i$ y $\frac{-3}{\sqrt{34}}+\frac{5}{\sqrt{34}}i$ o $4+5i$

y $\frac{4}{\sqrt{41}}+\frac{5}{\sqrt{41}}i$ o $12+5i$ y $\frac{12}{13}+\frac{5}{13}i$,

Y observar que también había una relación entre sus módulos...

Conforme al relato respondan:

a. Observando los pares de complejos, determinen la relación entre cada par y construyan el par correspondiente a $8+15i$

b. ¿Cuál es la relación numérica de los módulos de los pares mencionados?

c. En general, cuál sería la forma de construir un complejo que cumpla esta relación, a partir del complejo $a+bi$. Nótese que, en $a+bi$, a o b no deben ser 0, simultáneamente. ¿Por qué?

2 –Hemos esperado más de treinta minutos de la hora convenida para que Lombardo nos ayude.

–Así es y además, las actitudes de Lombardo siempre te hacen sentir "acomplejado". ¿No crees que si pensamos los dos podamos resolverla?

–Tratemos... Dice así... Traza un plano complejo en una hoja, luego dibuja una circunferencia de centro en el origen y de radio nueve. Los puntos de la circunferencia son todos los extremos de los complejos que cumplen con esta característica. ¿Pueden decir que relación hay entre ellos?

3 Rosario... ¿Cuándo dices que el módulo de un complejo será igual a su conjugado?... Ahora respondan ustedes, ¿existe algún complejo donde se cumpla esta afirmación? Justifiquen matemáticamente su respuesta.

4 Carolina le pregunta a su hermano: "Fernando, ¿cuál es el módulo del complejo conjugado de $\frac{3}{5}-2\frac{1}{4}i$?"... Fernando la miró y... unos minutos después le dio la respuesta... ¿Pueden ustedes decirme cuál fue esta?

5 Emanuel y su grupo repartieron los ejercicios de matemática para que, al día siguiente, cada integrante trajera su parte. Ayuden a Emanuel a resolver los siguientes ejercicios.

Si $z_1=\overline{(3-5i)}$ y $z_2=\overline{(2+5(\overline{2+3i}))}$ determina:

a. $|z_1+z_2|$ **b.** $|z_1\cdot z_2|$

Revisemos lo aprendido

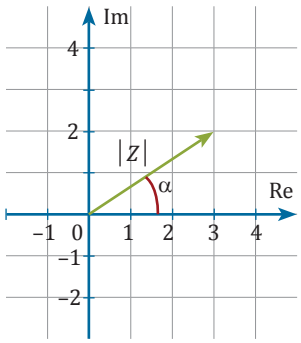
Te invitamos a evaluar a cada uno de los integrantes de tu grupo, respecto de su desempeño en el trabajo grupal. Asígnale un puntaje de 0 (si no cumple nunca con el criterio mencionado), 1 (si lo cumple parcialmente) y 2 (si siempre lo cumple).

Indicadores	Integrante N°1	Integrante N°2	Integrante N°3	Integrante N°4
Propone ideas para el desarrollo de los ejercicios.				
No impone sus ideas sobre los demás integrantes del grupo.				
Realiza su trabajo con un nivel óptimo de calidad.				
Total				

Números complejos... otra forma de representarlos

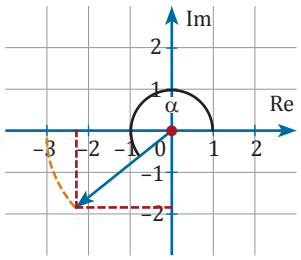
Ya aprendiste que existen diferentes representaciones para los números complejos: forma canónica o binómica ($z = (a + bi)$), forma de par ordenado (a,b) y forma gráfica. Ahora te mostraremos otra forma de representar a estos números y que está muy relacionada con su representación gráfica.

Como ya aprendiste, cada número complejo de la forma $a + b\,i$, puede ser representado por un vector que va desde el origen al punto de coordenadas (a,b) en el plano complejo. Mira la siguiente representación:



El vector representa al complejo $z = (3,2)$. Este complejo determina un cierto ángulo con respecto al eje real positivo. Si lo mides con transportador, verás que $\alpha \approx 32°$ y que su módulo es, $|z| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \approx 3{,}6$. Entonces, se podría determinar un complejo también si se sabe cuál es su módulo (largo del vector) y el ángulo que este determina con el eje real.

Por ejemplo, si sabemos que un número complejo z forma, con el eje real, un ángulo $\alpha \approx 220°$ y que su módulo es igual a 3 unidades, entonces tenemos que:



Si medimos (recuerda que debes usar una regla con las mismas unidades del sistema coordenado o construir el sistema coordenado en centímetros para poder usar una regla convencional), tendremos que el extremo del vector se encuentra, aproximadamente, en el punto $(-2{,}3\ ;\ -1{,}9)$, es decir, el complejo z será igual a $-2{,}3 - 1{,}9\,i$.

En la suma y la resta no hay regularidades muy especiales, pero en la multiplicación y división podemos destacar algunas. Supongamos que tenemos dos complejos $z_1 = 1 + 2i$ y $z_2 = 3 + 4i$, primero

En esta sección aprenderás

Otras formas de representar un complejo, como calcular potencias de un complejo y calcular raíces de un complejo.

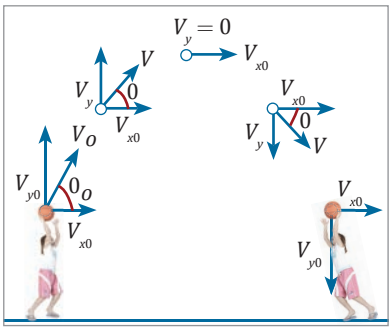
Desarrollarás las siguientes habilidades:

- Identificar, calcular, interpretar y resolver problemas.

Habilidades por actividad:

- Identificar y calcular: 3. 1 – 2 – 3 – 4 – 10.
- Interpretar y resolver problemas: 1 – 2 – 4 – 5. 5 – 6 – 7 – 8 – 9.

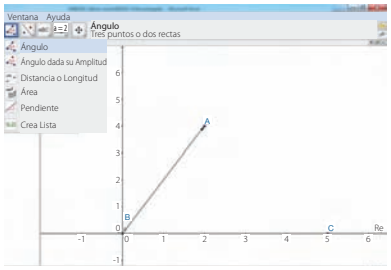
Para saber más

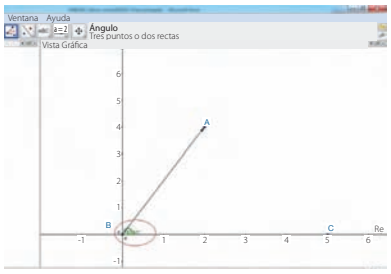


Los vectores tienen múltiples aplicaciones. Una de ellas es la descripción del movimiento en términos de la velocidad, en cada punto del movimiento. En la figura se aprecia un movimiento de tipo "parabólico".

Para saber más

Puedes usar el programa GeoGebra para determinar fácilmente el ángulo que forma un complejo con el eje real. Este programa se puede descargar gratuitamente del sitio http://geogebra.softonic.com/descargar. Una vez instalado, cuando abras el programa aparecerá la pantalla principal. Haciendo clic en el ícono del punto, segundo de izquierda a derecha, debes ubicar el complejo con el cursor en el plano que representará nuestro plano complejo, y luego ubicar dos puntos más, uno sobre el eje real y que forme parte del lado del ángulo que queramos medir (C) y otro en el origen (B). Luego hacer clic en el ícono "ángulo por tres puntos" y posteriormente en los tres puntos en sentido contrario a los punteros del reloj, marcando el ángulo, es decir, (C), (B), (A). Se marcará el ángulo y su medida. Nota que el programa da el valor del ángulo con dos decimales. Si trabajas con él para resolver los ejercicios de esta sección, aproxima los ángulos al entero.

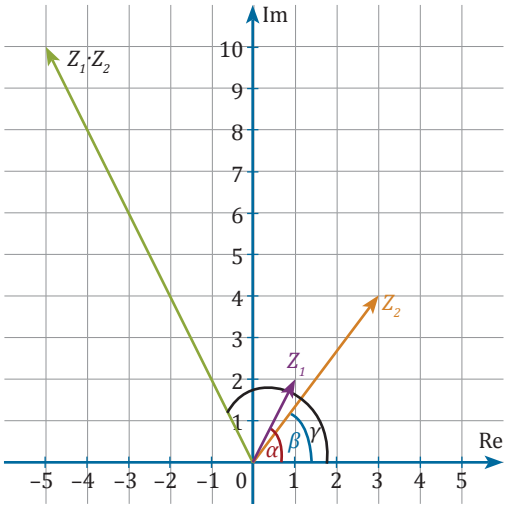




multipliquémoslos usando la forma binómica:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (1+2i)(3+4i) \\ &= 3+4i+6i+8i^2 \\ &= 3+10i-8 \\ &= -5+10i \end{aligned}$$

Ahora, representémoslos en el plano complejo:



Si medimos con transportador (en sentido antihorario) cada uno de los ángulos, tendremos que:

$\alpha = 63°$, $\beta = 53°$ y $\gamma = 116°$ $\quad \Rightarrow \gamma = \alpha + \beta$

Si observamos los módulos, tendremos que,

$|z_1| = \sqrt{5}$, $|z_2| = \sqrt{25}$ y $|z_1 \cdot z_2| = \sqrt{125}$ $\quad \Rightarrow |z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$

Si te fijas, en los resultados anteriores se cumple que cuando se multiplican dos complejos distintos z_1 y z_2, el complejo resultante tiene por módulo el producto de los módulos entre z_1 y z_2 y, por ángulo, la suma de los ángulos que z_1 y z_2 forman con el eje real.

Calcularemos ahora la potencia enésima de un complejo, por ejemplo $z_1^{\,2} = (1+3i)^2$, para ello, tendremos que efectuar la multiplicación de este número complejo por sí mismo, es decir:

$$\begin{aligned} (1+3i)^2 &= (1+3i)(1+3i) \\ &= 1+3i+3i+9i^2 \\ &= 1+6i-9 \\ &= -8+6i \end{aligned}$$

A este nuevo complejo lo llamaremos z_2.

Si calculamos el módulo de z_2, tenemos:

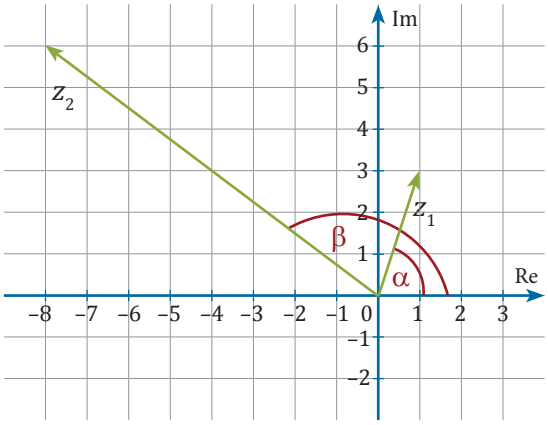
$|(-8+6i)| = \sqrt{64+36} = 10$

De la misma manera si calculamos el módulo de z_1 tenemos:

$|(1+3i)| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$

Si observamos estos valores vemos que $|z_1|^2 = |z_2|$.

Representaremos estos dos números complejos en el plano, de modo de determinar si es que existe alguna relación en la medida de sus ángulos:



Al medir con el transportador, cada uno de los ángulos, obtenemos: $\alpha = 72°$ y $\beta = 144°$.

En este caso tenemos que $\beta = 2\alpha$.

¿Qué ocurrirá en el caso en que queramos calcular ${z_1}^3$ y ${z_1}^4$? Realiza tú el cálculo para ${z_1}^4$. Calculemos ${z_1}^3$, al que llamaremos z_3:

${z_1}^3 = (1 + 3i)^3 = (1 + 3i)^2(1 + 3i)$

Pero ya sabemos que $(1 + 3i)^2 = -8 + 6i$. Así,

$(-8 + 6i)(1 + 3i) = -8 + 6i - 24i + 18i^2$

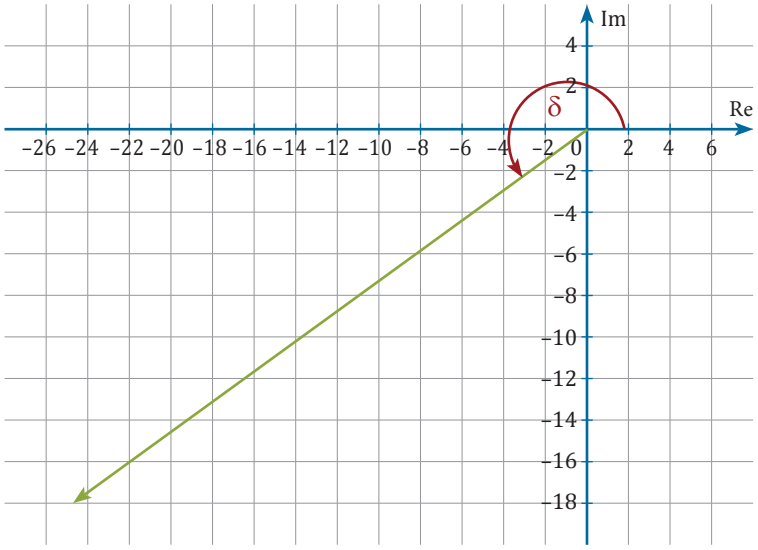
$= -8 - 18i - 18$

$= -26 - 18i$

Calculemos ahora el módulo de z_3, es decir,

$|z_3| = \sqrt{26^2 + (-18)^2} = \sqrt{1\,000}$

Para determinar el valor de su ángulo, que llamaremos γ, procedemos a graficarlo:



Si lo medimos con un transportador, el valor de este ángulo es igual a $\gamma = 216°$.

Para saber más

Si n es un número natural, entonces puede haber hasta n complejos z distintos, de igual módulo y con el mismo z^n. En particular, si n es par y si z es uno de los n complejos mencionados, luego $-z$ también debe ser considerado.

Observa los siguientes ejemplos:

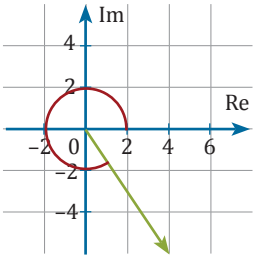
Hay dos complejos distintos $-2+3i$ y $2-3i$ que, al elevarlos al cuadrado se obtiene el mismo complejo: $-5-12i$

Hay tres complejos cuyos ángulos difieren sucesivamente en $120°$. Ellos son: $20°$; $140°$ y $260°$. Además todos estos complejos son de módulo 3, y tal que al elevarlos al cubo se obtiene el mismo complejo, que es de módulo 27 y ángulo $60°$.

A partir de los resultados obtenidos podemos generalizar esta regla: para calcular la potencia n de un número complejo, su módulo se eleva a n y su ángulo se suma n veces, es decir, su ángulo será n veces el del complejo, entonces si z tiene ángulo y módulo $|z|$, entonces z^n, tendrá ángulo igual a $n \cdot \alpha$ y módulo igual a $|z|^n$.

Miremos este último ejemplo, ¿cuál será el complejo resultante al hacer $(4-5i)^7$?

Nuevamente, necesitamos dibujar este complejo para determinar el valor requerido:



Entonces, $|z| = \sqrt{16+25} = \sqrt{41}$. De esta manera, el módulo de z^7 será, $|z^7| = (\sqrt{41})^7 = (\sqrt{41})^6 \cdot \sqrt{41} = 41^3 \cdot \sqrt{41} = 68\,921\ \sqrt{41}$

Por otro lado, $\alpha = 309°$, entonces, el ángulo de z^7, que llamaremos: $\beta = 7 \cdot 309 = 2\,163°$, pero como cada $360°$ damos una vuelta completa y partimos del mismo punto en el eje real, entonces cada $360°$ podremos comenzar a contar nuevamente. Así, podemos escribir que: $\beta = 360 \cdot 6 + 3 \Rightarrow \beta = 3°$.

Por lo tanto, z^7 estará en el primer cuadrante, su módulo medirá $68\,921\sqrt{41}$ unidades (aproximadamente 441 309,73 unidades) y formará un ángulo de 3° con el eje real.

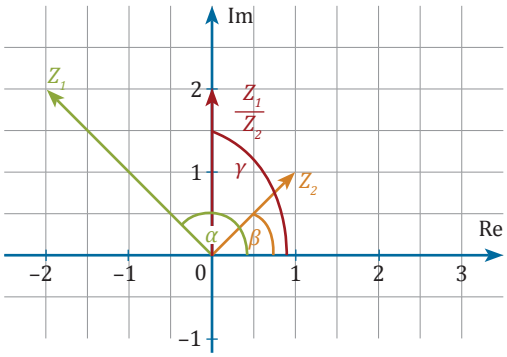
Así como hemos determinado el valor de la multiplicación de dos números complejos utilizando su ángulo y su módulo, podemos también determinar el valor de la división de dos números complejos cualquiera.

Siguiendo con la misma lógica anterior, diremos que la división de dos complejos z_1 y z_2 será un complejo que tendrá por módulo la división entre los módulos de z_1 y z_2 y por ángulo, la resta de los ángulos de z_1 y z_2.

Te mostramos un ejemplo para ilustrar esto: supongamos que $z_1 = -2+2i$ y $z_2 = 1+i$, entonces tendremos que:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{-2+2i}{1+i}$$
$$= \frac{-2+2i}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}$$
$$= \frac{(-2+2i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{-2+2i+2i-2i^2}{1-i^2}$$
$$= \frac{-2+4i+2}{1+1} = \frac{4i}{2}$$
$$= 2i$$

Graficándolos, se tiene que:



Si medimos tendremos que, $\alpha = 135^\circ$, $\beta = 45^\circ$ y $\gamma = 90^\circ \Rightarrow \gamma = \alpha - \beta$ por otro lado, se verifica que,

$|z_1| = \sqrt{4+4} = \sqrt{8}$, $|z_2| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$ y

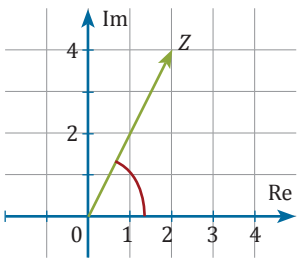
$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = 2 \Rightarrow \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$

Finalmente, y a partir de este método, aprenderás a extraer la raíz enésima de un número complejo, es decir, $\sqrt[n]{z}$.

Si tenemos un número complejo de módulo igual a $|z|$ que forma un ángulo α, la raíz enésima de este complejo sería otro complejo de módulo igual a $\sqrt[n]{|z|}$ y que forma un ángulo igual a $\frac{\alpha}{n}$.

Este es un método para llegar a una de las raíces del complejo buscado. Si te acuerdas de lo que hablamos anteriormente, por ejemplo, había dos complejos que al elevarlos al cuadrado daban $-5-12\,i$, esto significa que la raíz de $-5-12\,i$ admite dos soluciones. Había tres que daban el complejo de módulo 27 y ángulo 60°, cada uno de ellos al elevarlos al cubo dan este complejo, esto significa que existen tres soluciones para la raíz cúbica de este complejo. Así se cumplirá la misma regla para las raíces de orden superior. Sin embargo, para lograr tenerlas todas de manera algebraica, necesitas más herramientas algebraicas de las que conoces aún. Por esta razón, este es un buen método para obtener una de las raíces buscadas.

Ahora, calcularemos $\sqrt[4]{2+4i}$, para ello, en primer lugar dibujaremos este complejo:



Si medimos el ángulo y calculamos el módulo de z tendremos que, $|z| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} \Rightarrow |\sqrt[4]{z}| = \sqrt[4]{\sqrt{20}} = \sqrt[8]{20}$ y, por otro lado, $\alpha = 64^\circ$, entonces si llamamos al ángulo que forma el complejo $\sqrt[4]{z}$ con el eje real, se tendrá que, $\beta = \frac{64}{4} = 16^\circ$. Por lo tanto, el complejo $\sqrt[4]{2+4\,i}$ será un complejo cuyo módulo

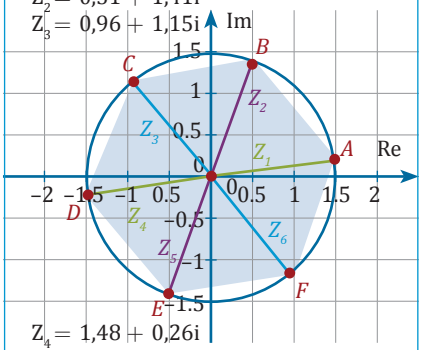
Para saber más

Si z es distinto del complejo cero, entonces z tiene exactamente n raíces de índice n, $n \in \mathbb{N}$, todas ellas con el mismo módulo y que difieren entre sí en $\frac{360^\circ}{n}$.

En una gráfica en el plano complejo y si $n \geq 3$, estos n complejos raíces corresponden a los vértices de un polígono regular de n vértices, inscrito en una circunferencia centrada en el origen y de radio $\sqrt[n]{|z|}$.

Observa las raíces sextas del complejo de módulo $(1{,}5)^6$ y de ángulo 60° y que hemos señalado en los recuadros. El ángulo de z_1 es de 10° y los ángulos de los complejos siguientes difieren entre sí, en 60°.

$Z_1 = 1{,}48 + 0{,}26i$
$Z_2 = 0{,}51 + 1{,}41i$
$Z_3 = 0{,}96 + 1{,}15i$



$Z_4 = 1{,}48 + 0{,}26i$
$Z_5 = 0{,}51 + 1{,}41i$
$Z_6 = 0{,}96 + 1{,}15i$

Las coordenadas de los complejos cuyos extremos son A, B, C, D, E y F han sido aproximadas a la centésima.

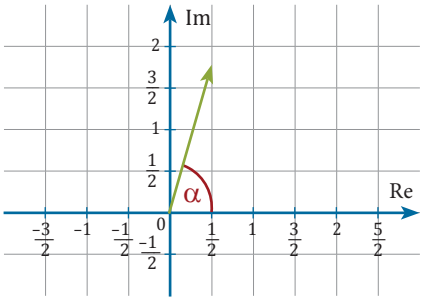
mide $\sqrt[8]{20}$ unidades (aproximadamente 1,45 unidades) y que forma un ángulo de $16°$ con el eje real.

Para consolidar los conocimientos recién adquiridos, te invitamos a observar este último ejemplo. Determinaremos la raíz cuadrada de $z = \left(\frac{1}{2} + \sqrt{3}i\right)$ y además determinaremos z^3.

Para comenzar, debemos calcular el valor de $|z|$,

$$|z| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 3} = \sqrt{\frac{13}{4}} \Rightarrow \sqrt{|z|} = \sqrt{\sqrt{\frac{13}{4}}} = \sqrt[4]{\frac{13}{4}}$$

Por otro lado, si graficamos este complejo, tenemos:



el valor del ángulo, a partir de su medida con el transportador, es de $\alpha \approx 74°$, entonces, llamando al ángulo que forma el complejo $\sqrt{z}$ con el eje real, β, tenemos que $\beta \approx \frac{74}{2} \approx 37°$.

Determinaremos ahora z^3 elevando su módulo a 3 y sumado su ángulo 3 veces, es decir, $|z|^3 = \left(\sqrt{\frac{13}{4}}\right)^3 = \frac{13}{4}\sqrt{\frac{13}{4}} \approx 5{,}9$

Por otro lado, el ángulo de z^3, que llamaremos β será $\beta \approx 3 \cdot 74 \approx 222°$, lo que nos indica que este número se encuentra ubicado en el tercer cuadrante.

- Cada número complejo queda determinado también por su módulo y el ángulo que el vector que lo representa forma con el eje real positivo.
- El número complejo resultante de multiplicar dos complejos z_1 y z_2 será otro número complejo que tiene por módulo el producto entre los módulos de z_1 y z_2, y por ángulo con el eje real, la suma de los ángulos que forman z_1 y z_2.
- El número complejo que resulta de elevar un número complejo a un número n (con $n \in \mathbb{N}$) es un número complejo que tiene módulo igual a $(|z|)^n$, y por ángulo con el eje real al producto de n por el ángulo de z.
- El número complejo resultante de dividir dos complejos z_1 y z_2 será otro número complejo que tiene por módulo la división entre los módulos de z_1 y z_2, y por ángulo con el eje real, la diferencia de los ángulos que forman z_1 y z_2.
- El número complejo que resulta de extraer raíz n-ésima un número complejo (con $n \in \mathbb{N}$) es un número complejo que tiene módulo igual a $\sqrt[n]{|z|}$ y por ángulo con el eje real a la división entre el ángulo de z y n.

Trabaja

Resuelve los siguientes ejercicios con tu grupo. No olvides revisar tus respuestas en el solucionario.

1 Determinen el módulo de los siguientes complejos y el ángulo formado con el eje real por estos:

a. $2 - 5\,i$
b. $-5 - 6\,i$
c. $-8 + 3\,i$
d. 4
e. $-9\,i$

2 Determinen los números complejos, en forma canónica, dados su módulo y el ángulo que forman con el eje real:

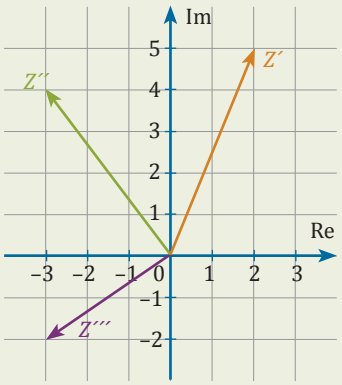
a. $|z| = 4,\ \alpha = 65°$
b. $|z| = 2,\ \alpha = 280°$
c. $|z| = 6,\ \alpha = 125°$
d. $|z| = 3{,}5,\ \alpha = 102°$
e. $|z| = 7,\ \alpha = 80°$

3 Dados los complejos z y z', determinados por su módulo y el ángulo que estos forman con el eje real, de modo que, z: $|z| = 3, \alpha = 50°$; z': $|z'| = 27, \beta = 120°$, determinen:

a. $z \cdot z'$
b. $\frac{z'}{z}$
c. $\sqrt[3]{z'}$
d. z^4

4 Dados los complejos de la gráfica, determinen, en módulo y ángulo, los siguientes complejos:

a. $z' \cdot z''$
b. $\frac{z'''}{z''}$
c. $\overline{z' \cdot z''}$
d. $-\frac{z'''}{z''}$



5 Dados los complejos $\sqrt[4]{z}$: $|\sqrt[4]{z}| = 3,\ \alpha = 70°$ y $(z')^3$: $|(z')^3| = 216,\ \beta = 144°$, determinen, de manera definida por módulo y ángulo:

a. z y z'
b. z^2
c. $\sqrt[5]{z'}$

6 Si z es un complejo de módulo 4 y que forma un ángulo con el eje imaginario positivo de $30°$, determinen:

a. el ángulo que forma z con el eje real positivo
b. $-z$, definido por módulo y ángulo
c. $\overline{z}$, definido por módulo y ángulo.

7 Se definen z y z' de la siguiente manera, luego determinen:

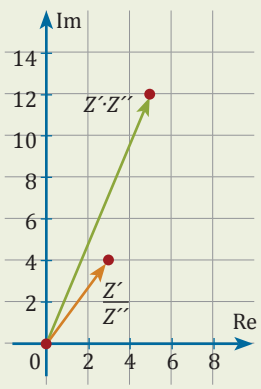
Complejo	Módulo	Ángulo
z	5	$75°$
z'	8	$118°$

a. el ángulo que forman los vectores que representan a los complejos z y z'
b. $z \cdot z'$
c. $\frac{z'}{z}$
d. el ángulo que forman los vectores que representan los complejos obtenidos en **b.** y **c.**

8 Sean z' y z'' dos complejos tales que z' tiene módulo 12 y forma un ángulo con el eje real de $172°$ y z'' es el complejo $3 + 3\,i$. Determinen el módulo y el ángulo que forma con el eje real un complejo z que cumpla que, $z \cdot z'' = z'$.

9 Dos complejos z y z' cumplen para su producto y su división que, $z \cdot z'$: $|z \cdot z'| = 40,\ \alpha = 100°$ y $\frac{z}{z'}$: $\left|\frac{z}{z'}\right| = 10,\ \beta = 74°$. Determinen, dando módulo y ángulo con eje real, los complejos z y z'.

10 Con los datos dados en la siguiente gráfica, determinen, en módulo y ángulo, los complejos z' y z''.



Trabaja

Resuelve los siguientes problemas. No olvides revisar tus respuestas en el solucionario.

1 Esta prueba de números complejos me va a matar –decía Mariana mientras estudiaba. Ella no lograba entender cómo se podían representar los números complejos, usando un ángulo y su módulo. Por una parte, tenía un complejo cuyo módulo era, aproximadamente, $4{,}5$ y su ángulo 33° y, por otro lado un complejo que era $4 + 2i$, ¿serían el mismo complejo?... Da tú la respuesta a Mariana, justificándola matemáticamente.

2 Casimiro, de hobby pintor, le gustaba tanto la matemática, que pensó que su próxima pintura sería basada en los números complejos, su haz de partida sería un vector que tuviera por ángulo 30° y por módulo 2. ¡Ajá! –pensó–. Le llamaré z, como aquellos números complejos que he estudiado... El resto de los haces serán z^2, z^3, $\sqrt[3]{z}$ y $\sqrt{z}$ se puso a calcular... Di tú cuáles fueron estos complejos... ¿Podrías bosquejar con distintos colores el dibujo de Casimiro?

3 Luisa está haciendo su tarea de matemática. Ella debe representar los siguientes complejos en el plano complejo y luego escribirlos determinando su módulo y el ángulo que forman con el eje real. ¿Puedes tú hacerlo también?

a. $(3{,}3)$
b. $(2{,}0)$
c. $(-1, -5)$
d. $(-2{,}7)$
e. $(1, -3)$

4 En un concurso de conocimientos matemáticos, Patricio debe responder lo siguiente: "Desde un punto cualquiera, traza un complejo cuyo módulo sea igual a 5 metros y forme un ángulo de 60° con el este" Entrega las coordenadas, de este complejo.

5 Estela está haciendo su tarea, pero cuando lee el enunciado no logra entender lo que se pide. Este que dice así: "Dado el complejo $(3{,}5)$, encuentra otro complejo de modo que al multiplicarlo con el complejo dado, su resultado sea en módulo 26 unidades y el ángulo formado con el eje real de 128°". ¿Puedes tú responder este problema?

Trabaja más...

Trabaja con tu grupo

I. Números imaginarios

1 Resuelve los siguientes ejercicios:

a. Encuentra el valor de:

i. $\sqrt{(11+4):(2-30:6)+2}$

ii. $\sqrt{\dfrac{20(8+2)(2-15:3+2)}{\sqrt{43{,}\overline{6}-\dfrac{11}{30}}}}$

b. Escribe tres potencias de la unidad imaginaria, de tal modo que sean equivalentes a:

i. -1, y sus exponentes estén comprendidos entre 82 y 95, sin incluir estos valores.

ii. $-i$, y sus exponentes sean mayores de 41 y divisibles por tres.

iii. $-i^3$, cuyos exponentes puedan partir de 90, alcancen a 105, y sean múltiplos de cinco.

2 Resuelve los siguientes problemas:

El siguiente enunciado es común para los ejercicios a. y b.

Hay ciertas páginas de matemática en algunos sitios de Internet, que me producen ciertas dudas. Observen lo que leí allí:

"Para efectuar $\dfrac{15}{4\ i^{835}} + \dfrac{-1024}{(-2\ i^3)^7} - \dfrac{18}{(i^{15})^{35}}$ se debe operar igual que con fracciones".

a. Supongo que hay que usar el mínimo común denominador, y proseguir como operaciones con números racionales. Naturalmente, la respuesta debe estar expresada, usando las potencias fundamentales de la unidad imaginaria. Ayúdame a desarrollar este ejercicio, usando las indicaciones anteriores.

b. Otra persona de San José de Maipo, decidió tratar cada supuesta fracción por separado, pero usando las potencias de la unidad imaginaria. ¿A qué resultado llegó? ¿Son coincidentes?

c. En la prueba recuperativa de los números imaginarios no sé encontrar la raíz cúbica de $-8\,i$, ni tampoco demostrar que $\frac{8}{i}$ es un número imaginario. Tomás, mi compañero, me dice: "Matías, recuerda que menos ocho veces i es lo mismo que ocho por i elevado al cubo. Y que para la demostración, ocho es igual a ocho por uno, y este uno lo puedes expresar como potencia de la unidad imaginaria".
¿Las instrucciones dadas por Tomás pueden ayudar a resolver lo expresado por Matías? Justifica haciendo los desarrollos correspondientes.

d. Panchita observa la siguiente regla de los números naturales: "Al sumar un número con el sucesor de otro, resulta ser lo mismo que si se sumaran los dos números y luego encontráramos el sucesor de este resultado". Vamos a pensar en todos los números imaginarios cuyo coeficiente es un número natural. Aunque sabemos que los números imaginarios no cumplen una relación de orden, ¿se podrá hacer una relación análoga con los imaginarios cuyo coeficiente es natural, considerando los sucesores y antecesores de dichos coeficientes? Ayúdate de algunos ejemplos, Panchita, y dame tu opinión. Al igual que Panchita, responde tú a lo solicitado.

e. Lucía en su tarea de matemática se encuentra frente a esta lectura:

Sean $n \in \mathbb{N}$, entonces:

$$i^n = \begin{cases} \pm 1, & n = 2\,k;\ k \in \mathbb{N} \\ \pm i, & n = 2\,k-1;\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Nada entiende de estos símbolos, explícale, ayudándote de la completación sobre la línea del siguiente cuadro:

$$i^n = \begin{cases} -1, & n = 2,6,10,14,.... \\ \text{es decir, un par que no sea un} \\ \text{múltiplo de 4.} \\ +1, & n = 4, ..., ..., 16, ... \\ \text{es decir, un par que sea un ....} \\ -i, & n = 3,\ 7,\ 11,\ 15, ..., \\ \text{es decir, al impar siguiente a} \\ \text{un par que no sea ....} \\ +i, & n = 1,\ 5,\ 9,\ 13, ..., \\ \text{es decir, al impar siguiente a} \\ \text{un par que sea un múltiplo de 4.} \end{cases}$$

f. "¡Pero profesor!, ¡Cómo se le ocurre que vamos a repasar la materia de logaritmos y números imaginarios juntos a la vez. Esta es la guía de trabajo, el profesor solo me dio una pequeña ayuda diciéndome que podía factorizar las expresiones por i, ¿puedesayudarme a resolver estos ejercicios?:

i. $4\,i \cdot \log 3 - 2\,i^3 \cdot \log 12 + i^5 \cdot \log 2^3$

ii. $\frac{1}{3}\left(12\,i^{33} \cdot \log 5 - \frac{2}{3}\,i^{11} \cdot \log\sqrt{625}\right) + 2\,i^6 \cdot \log 25$

g. *Hola Karen: Te mando esta hoja con Rosita, para decirte que estuve averiguando que: raíz cuadrada de la unidad imaginaria es igual a* $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\,i$, *pero estoy insegura de si estoy en lo correcto. Verifica si esto es así. Espero tu respuesta. Jocelyn.*

Ahora haz tú la verificación solicitada.

h. "¿Cómo distinguir entre lo real y lo imaginario? Ayúdame frente a esto", le gritó desesperadamente Joel a Jannis, mientras le señalaba: "Dicen que se procede igual que en el álgebra que hemos visto".

$$\frac{\sqrt{-12}\left(\frac{\sqrt{-12}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}i\left(\frac{\sqrt{-12}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}{-i^{22}}$$

Haciendo todo el desarrollo, indica el número obtenido. ¿Es imaginario?

i. Maritza le dice a Paula: "Imagínate lo siguiente: tengo una bolsa con x número de monedas, número que supera en 9 unidades a las que tú tienes en otra bolsa, también con monedas... por supuesto, todas imaginarias. Ahora bien, si yo pierdo tres, me queda el doble de las que tú tenías. ¿Cuántas monedas imaginarias tenemos ambas en total?
Paula le indica que como son monedas imaginarias, deberían ser menos de diecinueve. ¿Será verdad?

II. Números complejos y operatoria

1 Dados los complejos $z_1 = 3 + 2i$, $z_2 = 5 - 4i$ y $z_3 = \frac{1}{2} + \frac{2}{5}i$, determina el resultado de:

a. $z_1^{\,2} - 2\,z_2 - z_3$

b. $(i^{43} - i^{18})^2(z_1 + z_2)$

c. $\frac{3\,i^{71} \cdot i^{18} \cdot i^{-25}}{2\,i^7 \cdot i^6} \cdot (-z_3 - z_1)$

2 ¿Qué valor debe tener el complejo z en $(2 - z) + (5 - i)(3i - z)$ para que esta expresión sea igual al complejo $-3 + 5i$?

3 Se llaman raíces de un polinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ (polinomio en la variable x) a aquellos valores de x que hacen que el polinomio evaluado en estos valores sea igual a cero. Si se desea buscar un polinomio, dadas sus raíces a y b se debe multiplicar $(x - a)(x - b)$. En base a esto, encuentra los polinomios que tienen por raíces los siguientes números:

a. $a = 3i$ y $b = -3i$

b. $a = 1 + 2i$ y $b = 1 - 2i$

c. $a = 2 + \sqrt{3}\,i$ y $b = 2 - \sqrt{3}\,i$

d. $a = 1 + 2i$ y $b = 3 - 4i$

4 Efectúa las siguientes operaciones y escribe el resultado de la manera más reducida posible:

a. $(3 + 2i)(5 - i) + (2 + i)^4$

b. $(i + 2)(-2i + 3) - \left(6 - 3\left(5 + \frac{2}{5}i\right)\right)$

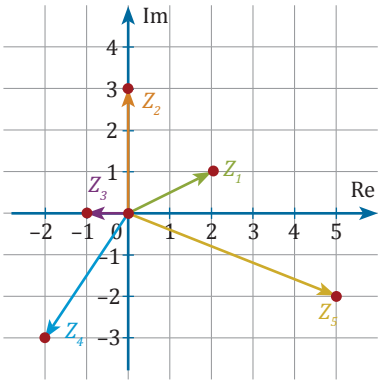
c. $\left[(i + i)(3 - 2i)(2 + 2i)\right]^3$

d. $(4(3 - 2i)(2 + 3i)i)i^{476}$

e. $\left[(2 - 3i) - (5 + 4i) + \frac{1}{2}(6 - 4i)\right]^5$

f. $[(4 - i)^2(i - 1)^{10}]^2$

5 Dados los siguientes complejos de la figura, determina el resultado de las siguientes operatorias de complejos:



a. $(z_1 + z_5)(z_4 - z_2)\,z_3$

b. $2(z_1 \cdot z_2 + z_3) - 3(z_4 + z_5)$

6 Verifica si las siguientes igualdades se cumplen. Justifica tu respuesta matemáticamente.

a. $-\frac{5}{\sqrt{3}}i\left(i + \frac{5\sqrt{3}}{3}\right) = -\frac{25}{3} - \frac{5\sqrt{3}}{3}i$

b. $\left(1 + \frac{5\sqrt{3}}{3}i\right)^2 = \left(1 - \frac{25}{3}\right) + \frac{10}{\sqrt{3}}i$

c. $\left(1 + \frac{5\sqrt{3}}{3}i\right) : \sqrt{3}\,i = -\frac{5}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i$

7 Multiplicando término a término y aplicando los valores de las potencias de la unidad imaginaria, reduce al máximo posible:

a. $(2 - i)\left[(2i^2)^2 + i^2 + 2i\right]$

b. $(x - 1)(x + 1)(x - i)(x + i)$

8 En la expresión: $x^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, remplaza el valor para x por cada uno de los siguientes valores, resuelve y escribe el resultado:

a. $\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ **b.** $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

9 Diego se ha dado cuenta que puede mirar la transformación de un complejo $a + b\,i$ en otro $c + d\,i$, como dos traslaciones sucesivas en base a la sustracción de ambos. Escribe en palabras cuál sería la regla para esto y luego determina la transformación (desplazamiento) de cada uno de los siguientes complejos:

a. $z_1 = 4 + 3\,i$ en $z_2 = 5 + 3\,i$
b. $z_1 = 3 - 2\,i$ en $z_2 = 7 + 4\,i$
c. $z_1 = -3 - 4\,i$ en $z_2 = 5 - 3\,i$

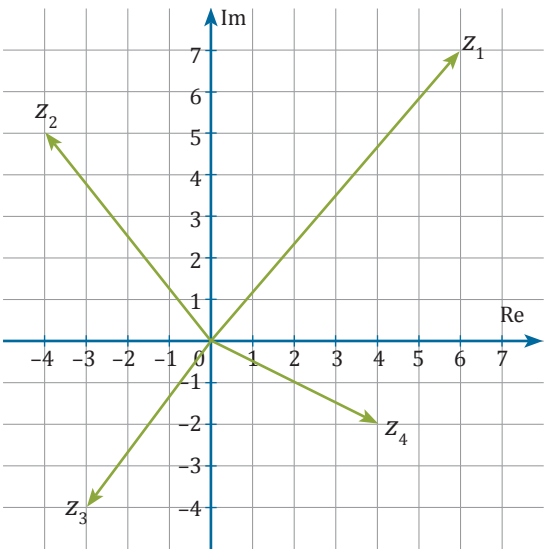
10 –Ignacio, tengo que irme, se me hizo muy tarde.
–Por favor, quédate un rato más, yo le digo a mi papá que te vaya a dejar...
–Pero, Ignacio, si con todo lo que hemos estudiado ya puedes resolver cualquier ejercicio. Hazlos tú ahora, pero recuerda que uno debe confiar en lo que ha estudiado y sabe...
Dado el número complejo $z = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, demostrar que:

a. $1 + z + z^2 = 0$ **b.** $\frac{1}{z} = z^2$

III. División de complejos y propiedades de la operatoria

1 Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno:

a. Dado el siguiente plano complejo y los complejos graficados en él:



Responde a las siguientes preguntas:

i. Efectúa el cociente entre z_1 y z_2, y llámale z,
ii. ¿Cuál es el resultado al dividir $2z_4$ por z_3? Designa el complejo obtenido por z'.
iii. ¿Cuál es el complejo que se obtiene al realizar $\frac{z'}{z}$?
iv. Escribe, en forma de par ordenado, el inverso multiplicativo del complejo que resultó en **iii.**

b. Si $z = -7 + 18\,i$, encuentra el valor de: $\frac{z - 7\,i}{7 - 2\,z}$.

c. Si $\frac{1}{9}z = -1,\overline{2} - 0,2\overline{7}\,i$, encontrar $\frac{z+1}{5-i} \cdot i$.

d. Si $5z - 1 = \frac{-6 + 19i}{0 - i}$, ¿Es la parte real de z menor a 4? Justifica tu respuesta.

e. ¿Cuál es el complejo que al dividirlo por $30\,i + 17$, se obtiene el mismo cociente de $\frac{-5\,i + 27}{1 + 9\,i}$?

2 Resuelve las siguientes ecuaciones en $\mathbb{C}$ (encuentra el valor de la incógnita en cada caso):

a. $2 - 3\,i + i^{46} = i^4 + z^2 i$

b. $\frac{-3\,i(x+i) - 2 - xi}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\,i\right)^2} = 5 + 8\,i$

c. $\left(\frac{2i}{\sqrt{5}}\right)^2 + (y-3)i^3 - (y+3)i + \left(\frac{8}{5} - \frac{1}{5}i\right) = 0$

3 Resuelve los siguientes problemas:

a. María tenía que dibujar un complejo que fuera el denominador de una fracción, de manera tal que si el numerador de ella era $-5+6\,i$, el resultado correspondiente sería i. Ayuda a María, representando en el plano complejo, el complejo buscado.

b. "Lo que más me han dicho mis padres es que no me ponga nervioso ante los ejercicios de la prueba. Lamentablemente, me quedan cinco minutos para entregarla y este ejercicio donde debo encontrar los valores de a, b y n no lo puedo resolver":
$\frac{(-3\,i)^2(i^4 + 2\,i^3)}{(5\,i^2 - 2\,i^3)} = ai^n + bi$

Sabemos que tú sí has aprendido, ¿cuáles son los valores pedidos?

c. Elías se encuentra en su cuarto –me dice su mamá, mientras me abre la puerta de su departamento–. Mira, traje resuelto el ejercicio que me indicaste que estudiara. Decía que había que escribir de la forma binómica la siguiente expresión $\frac{5-3\,i}{11+13\,i}$. Obtuve $\frac{8}{95}-\frac{49}{95}\,i$, pero no sé si está bien. Desarrolla y escribe tu resultado. ¿Coincide con el que está en el enunciado de este problema?

d. "Me siento tan presionado por tener que resolver tantos ejercicios de complejos... Mira este "engendro" $\frac{16-9\,i}{17-i}-2x=0$. Tengo que hallar el valor de x. ¿Cómo se hace?... Mejor hazlo tú, detalladamente, y me lo explicas".

e. "Tío, nuevamente vengo a pedir ayuda para resolver un problema de matemática. No sé ni cómo comenzar a hacer este ejercicio": $\left[\frac{50-13\,i}{-6+7\,i}+\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{5}\,i\right)\right]^{-1}$. Después de explicarme un desarrollo, llegó al siguiente resultado: $-4-3\,i$, ¿estará bien?

f. María Luisa, no sabe cómo resolver el siguiente ejercicio de su tarea de matemática. Es muy tarde, ve una hoja de sus apuntes en el suelo que dice: "Hay que encontrar primero el valor de k sabiendo que $\frac{-3}{5-2k}=\frac{2}{k-2'}$ luego remplazar $\frac{k-3i}{5-2ki}$ y finalmente encontrar el inverso aditivo del número resultante... ¿Cuál es este?". Ayuda a María Luisa y resuelve su problema.

g. Clemente, después de saludarme, me mostró su primer siete en matemática. Vi su prueba, cuyo segundo ejercicio me explicó desde su inicio: "Cómo me pedían dividir $-0{,}5+0{,}3\,\mathrm{i}$ por $1{,}8-0{,}1\,\mathrm{i}$ y el complejo resultante elevarlo al cuadrado, antes se me ocurrió multiplicar todos los números por 10, y después continué... Obtuve el siguiente resultado". Lo abracé y le dije: "Te felicito hijo".

h. La Srta. Diana, profesora de matemática, se pasea por la sala, controlando la actividad grupal del curso. De pronto, escucha en un grupo:

–¿Sabes Tamy?, me gusta Jennifer Lopez cuando canta "On the floor", acompañada por Pitbull.

–¡Yo no!, prefiero a Rihanna con la música de David Gettha, ya que él es un DJ famoso... Entonces, Tamy empieza a leer en voz alta: «divide menos cinco veces la unidad imaginaria con el complejo cuya parte imaginaria es menos veinte, su parte real, seis».

De pronto escuchan la voz conocida de la profesora, detrás de ellas: "Y yo prefiero a Modern Talking en Lubi, lubi lubi. ¡Señoritas, basta de charlas y a resolver el ejercicio!". ¿Cuál es el resultado?

i. **"**He leído varios ejercicios desarrollados de división de números complejos. Son más de las $23{:}00$ horas y aún no puedo encontrar una mínima pista para responder a este desafío: Encontrar un par complejos que tengan la misma parte real pero la parte imaginaria contraria, y de tal modo que dividir uno por el otro se obtenga un complejo imaginario puro. ¡Ayúdenme porque no tengo mucho tiempo!"

j. "Amiga Mirna, ese alumno de pelo castaño y de ojos marrón que se encuentra en el patio y que está acercándose a la oficina de coordinación, es al que tienes que acudir. Anda ahora, antes que termine este recreo. Pregúntale qué puedes hacer si hiciste el siguiente desarrollo pero no llegaste al resultado binómico pedido":

$$\frac{-1+3\,i}{9-2\,i}=\frac{(-1+3\,i)}{(9-2\,i)}\cdot\frac{(-1-3\,i)}{(-1-3\,i)}$$

$$=\frac{10}{-14-25\,i}$$

Mirna regresó no solo enamorada de los números complejos... Indica alguna idea correcta que Mirna recibió para encontrar el cociente complejo solicitado.

k. **"**Así, amigos lectores, siguiendo con los cuentos de amor, les voy a contar que mi amigo y compañero Gustavo, de ese liceo de enseñanza media en 1981, me aconsejó que utilizara como pretexto este ejercicio de matemáticas que aún conservo, miren":



Si $2a + b = 5$ y $b - a = 2$, ¿Cuál es el complejo resultante de $\frac{b - ai}{2a + bi}$?

"¿El resultado?... 25 años de hermoso matrimonio..." Ahora, dime tú el resultado.

l. "Katy, ¿no crees que este guion de nuestra obra de teatro no debería tener ejercicios de matemática que el público no va a entender?... El protagonista no tiene para qué hacer el ejercicio en aquella ventana durante la obra, ya podría estar escrito y solo hacer alusión a lo inteligente que es...
Ok, está bien, el ejercicio debe decir lo siguiente: Encuentre la parte real y la parte imaginaria de $\frac{4 - ki}{k + 9\ i}$, sabiendo que $k^2 - 1 = 8$, siendo k negativo´...
¿Cuál será el resultado que aparecerá en aquella ventana?

m. Estoy muy contento pues he obtenido puntaje nacional en matemática. Te dejo aquí, para que resuelvas, uno de aquellos ejercicios de números complejos con los que me preparé": $(\ 16, -3\ ) : (\ 1, -4\ )$
¿Cuál es la respuesta?

n. "Otra vez soy yo, Lucio. Después del episodio de encontrar el complejo z, sabiendo que $z^{-1} = \left(-\frac{3}{25}, \frac{4}{25} \right)$ en aquella clase de matemática, le llevé a la profesora esta otra manera de hacer ese mismo ejercicio.
Fíjate bien":

$$z^{-1} = \left(-\frac{3}{25}, \frac{4}{25} \right) \qquad / \cdot z$$

$$z^{-1} \cdot z = \left(-\frac{3}{25}, \frac{4}{25} \right) \cdot z$$

$$1 = \left(-\frac{3}{25}, \frac{4}{25} \right) \cdot z$$

$$z = 1 : \left(-\frac{3}{25}, \frac{4}{25} \right)$$

Ahora, encuentra el inverso del complejo, $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4} \right)$, aplicando este método.

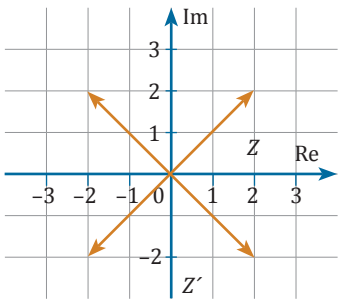
o. Abel, mira en este instante el mar a través de la ventana de su dormitorio, en el séptimo piso de un edificio de la Cuarta Región. Se dice: "El mar hoy se mueve"... prefiero seguir moviéndome en mis quehaceres de hoy...
¿En qué ejercicio iba? ¡Ah! ¡ya!... Determinar k y k', de tal manera que se produzca la siguiente igualdad":

$$\frac{-3\ k + k'i}{1 - i} = 6 - 43\ i$$

Ahora dime tú, ¿cuáles son los valores que obtuviste?

p. –¿Por qué están tan desordenados tus desarrollos en las pruebas?...
–Srta. Gabriela, no es sólo en su ramo. La matemática siempre me ha gustado ¿Por qué tengo esa nota? Yo había estudiado mucho...
–Hiciste un ejercicio que no había pedido. Mira: tenías que responder a $\left(\frac{-5 - 7\ i}{8 + 9\ i} \right)^2$ y no a $2 \cdot \left(\frac{-5 - 7\ i}{8 + 9\ i} \right)$.
Este alumno se fue enojado por no leer bien... Ahora haz tú el ejercicio que pidió la profesora, correctamente.

El siguiente enunciado es común para los problemas **q**, **r** y **s**.
A Daniel Arlington le encanta la matemática y, como profesor de esta asignatura, dibujó en su curso de tercero medio, esta figura:



q. En el III A, pidió que dividieran el complejo del tercer cuadrante con el del cuarto, luego que multiplicaran los otros entre sí, y por último que sumaran los resultados de ambas operaciones. ¿Cuál es el inverso multiplicativo del complejo total?

r. En el III B, solicitó a sus alumnos que dividieran el complejo del segundo cuadrante con el del cuarto, luego que multiplicaran entre sí los otros dos complejos restantes y que por último restaran los resultados. ¿Cuál es el inverso multiplicativo de este complejo total?

s. Pasados los días, un alumno del III C decidió sumar todos los complejos involucrados en el famoso gráfico. Sin embargo, al instante de encontrar el inverso multiplicativo de este complejo total, se encontró con una sorpresa. ¿Cuál crees que es?

IV. Módulo y conjugado

1 Dados los complejos $z_1 = 3 - 9i$, $z_2 = -5 - i$ y $z_3 = -10 + 7i$, determina el resultado de las siguientes expresiones:

a. $(\overline{z_1 - z_2}) : \overline{z_3}$

b. $\left(\overline{\frac{z_1 - z_2}{z_3}}\right)$

c. $\overline{(z_3 + 2\,z_2)} \cdot z_1$

d. $\overline{(z_1 + \overline{z_2 \cdot z_3})}$

e. $\left(\overline{\frac{z_3}{(z_2 - z_1)}}\right)$

2 Dados los complejos $z_1 = 1 - i$, $z_2 = -5 - 6i$ y $z_3 = -1 + 2i$, determina el valor de las siguientes expresiones:

a. $|z_2 - z_1 \cdot z_3|$

b. $\left|\frac{z_1}{z_2 - z_3}\right|$

c. $|z_1 - 3\,z_2| \cdot |4\,z_3 + z_1|$

d. $|z_1^{\,2} - 2(z_2 - z_3)|$

e. $\left|z_2 + \frac{z_3}{z_1}\right|$

3 Determina el resultado de los siguientes ejercicios:

a. $|\overline{(2 - 3i)(-2 - i)}|$

b. $\frac{(\overline{-6i})}{|-1 + 12i|}$

c. $\frac{\overline{|2 - 3i|}}{\overline{4 - 5i}}$

d. $|\overline{(5 - 3i)^3}|$

e. $\left(\left|\frac{(2 - i)^2}{\overline{i - 2}}\right|\right)^4$

V. Otra forma de representar los complejos

1 Realiza las siguientes operaciones con complejos y luego escribe el complejo resultante, según su módulo y ángulo que forma con el eje real (aproximado al entero).

a. $(2 + 3i)^2 + (5 - 2i)^2$

b. $(6i - 1)(7i - 5) - (2i + 3)(3i - 9)$

c. $\frac{4i - 3}{i} + \frac{2i - 7}{2i}$

d. $\frac{i + 5}{i + 1} - \frac{i + 3}{i - 1}$

e. $\frac{(i + 3)(i + 2)}{i - 2} - \frac{(-1 + 2i)^2}{i}$

2 Dados los siguientes complejos

a. z_1: $|z_1| = 5$; $\alpha = 30°$

b. z_2: $|z_2| = 3$; $\alpha = 105°$

c. z_3: $|z_3| = 9$; $\alpha = 210°$

Determina, dando su módulo y ángulo formado con eje real, el resultado de las siguientes operaciones de números complejos:

a. $A = z_1^{\,2} \cdot z_2$

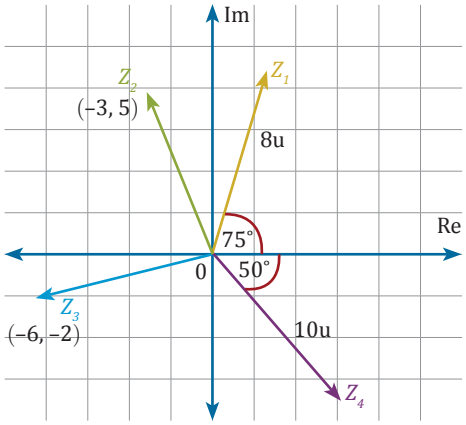
b. $B = \sqrt{z_3} : \sqrt[3]{z_2}$

c. $C = \sqrt{z_1 \cdot z_2 \cdot z_3}$

d. $D = \sqrt[3]{\frac{z_2}{z_3}}$

e. $E = (z_1 \cdot z_2)^3$

3 Dados los siguientes complejos, escribe el resultado de las operaciones pedidas, dando su ángulo formado con el eje real y módulo:



a. $A = (z_1 \cdot z_2) : z_3$

b. $B = z_4^{\,2} : z_3^{\,3}$

c. $C = \sqrt{z_2 \cdot z_4}$

d. $D = \sqrt[3]{\frac{z_2}{z_1}}$

e. $E = \frac{z_1 \cdot z_2}{z_3 \cdot z_4}$

4 Determina los complejos pedidos, dando tu resultado según su módulo y ángulo formado con el eje real:

a. Dado $z_1 = (4,3)$, encuentra un complejo z de modo que $z \cdot z_1$ tenga módulo 20 u y forme un ángulo con el eje real de 85°.

b. Encuentra un complejo z cuya raíz cuadrada sea otro complejo de módulo 6 u y ángulo de 125° con el eje real.

c. Al dividir dos complejos se obtiene uno de módulo 10 u y que forma un ángulo de 80° con el eje real. ¿Cuál es el dividendo, si el divisor es el complejo $(1,2)$?

d. Al elevar al cubo un complejo se obtiene el complejo $(-3,-5)$, ¿cuál es dicho complejo?

e. Dados $z_1 = (2,2)$ y $z_2 = (-3,2)$, determina un complejo z_3 de modo que $z_1 \cdot z_2 \cdot z_3$ sea igual a un complejo de módulo 6 u y cuyo ángulo con el eje real sea $300°$

f. Si $\sqrt[4]{z}$ es un complejo cuyo módulo es 16 u y forma un ángulo con el eje real de $84°$. ¿Cuál es el valor del cubo del complejo z?

g. Al elevar $z_1 \cdot z_2$ a la quinta potencia se obtiene un complejo cuyo módulo es $32\ 768$ u y forma un ángulo con el eje real de $325°$. Si $z_2 = (2,1)$, ¿cuál es el complejo z_1?

h. Demuestra que la multiplicación de complejos es asociativa, usando complejos escritos según su módulo y ángulo.

5 Resuelve los siguientes problemas:

a. Pablo ha dibujado los siguientes complejos, escritos según su módulo y ángulo. Estos son: z_1: $|z_1| = 2, \alpha = 45°$;
z_2: $|z_2| = 2, \alpha = 135°$;
z_3: $|z_3| = 2, \alpha = 225°$;
z_4: $|z_4| = 2, \alpha = 315°$.
Luego unió sus extremos, ¿qué figura se forma?, ¿cuál es su área y su perímetro?

b. Reinaldo ha dicho que si multiplica el complejo $3 + 7i$ con el complejo $-2 - i$ se obtendrá un complejo de módulo 12 u que forma un ángulo con el eje real de $200°$. ¿Estás de acuerdo con él? Si no es así, ¿cuál es la respuesta correcta?

c. Esta materia si es muy fácil –dijo Isabela–. Solo debo averiguar los ángulos y módulos de los siguientes complejos: $z_1 = (1,5)$, $z_2 = -3 + i$, $z_3 = -4$, $z_4 = (0,-1)$ y luego podré dar el resultado de las siguientes operaciones, dando el resultado según módulo y ángulo de cada complejo resultante. Ahora haz tú estos ejercicios y da la respuesta correcta:

i. $(z_1 \cdot z_2) : z_3$

ii. $z_1 \cdot (z_2 : z_3)$

iii. $\sqrt{z_1 \cdot z_2} : \sqrt{z_3 \cdot z_4}$

iv. $z_3^{\,2} : z_4^{\,3}$

v. $\left\{z_1 \cdot \left(z_2^{\,2} \cdot z_3^{\,3}\right)\right\} : z_4$

d. Al profesor de Andrés se le ocurrió hacer un concurso donde los alumnos tenían que transformar números complejos dados, en forma canónica a su forma escrita, según módulo y ángulo. Andrés logró contestar bien todas las preguntas. Sin embargo, no ganó el 1er lugar pues empleó más tiempo que Tomás. ¿Puedes hacerlo tú también? ¿Cuánto tiempo tardas?

i. $z = 4 + 3i$

ii. $z = -5i$

iii. $z = -2 - 5i$

iv. $z = 2 - 3i$

v. $z = 8$

e. A José Antonio, su profesor le encomendó la tarea de demostrar que $((2+i)^3)^2 = (2+i)^6$. Él miró un rato el problema y decidió que si escribía dicho complejo según su módulo y ángulo, sería más fácil demostrar lo pedido. Escribe tú también esta demostración, como lo hizo José Antonio.

f. Cristina pensó en la siguiente propiedad de las raíces para números reales, $\sqrt[m]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[m \cdot n]{a^n \cdot b^m}$, y quiso saber si se cumplía también si a y b fueran números complejos. ¿Puedes tú ayudarla? Haz un análisis usando dos complejos escritos, según su módulo y ángulo formado con el eje real.

g. Para la semana del colegio, siempre el centro de alumnos organizaba un concurso de conocimientos. Pilar abrió la pregunta y leyó lo que decía: "Si un complejo tiene módulo 15 unidades y el ángulo formado con el eje real es de $238°$, ¿cuál será otro complejo tal que al multiplicarlo con el dado, se obtenga por resultado el complejo $-5 + 2i$?" Pilar no supo que responder. Tú ya aprendiste cómo dar respuesta a esta pregunta, ¿cuál es?

h. Josefa se había preparado mucho para su examen de admisión a la escuela de oficiales. Aquella mañana se sentó, abrió el cuadernillo y comenzó a responder la prueba de matemática. De pronto, vio la siguiente pregunta: "Dados los siguientes complejos, $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 1 - i$, $z_3 = -1 + i$, $z_4 = -1 - i$, establezca la veracidad de cada una de las siguientes afirmaciones, usando para cada complejo la notación según su módulo y ángulo formado con el eje real":

i. $z_1 \cdot z_4 = z_2 \cdot z_3$



ii. $z_1^{\,3} = z_2 : z_4$

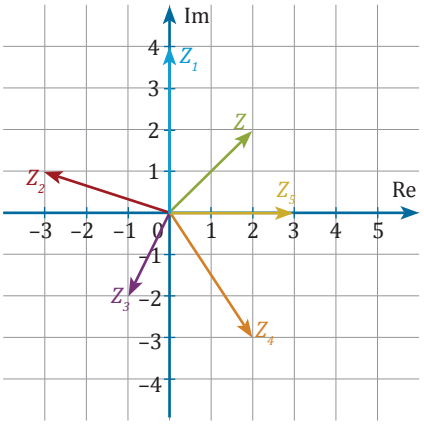
iii. $z_4 : z_1 = z_2 : z_3$

Josefa se demoró un poco, pero lo hizo sin problemas. Ahora te toca a ti.

VI. Ejercicios misceláneos

Resuelve los siguientes ejercicios y problemas de números complejos. No olvides revisar tus respuestas en el solucionario.

1 Dados los siguientes complejos, encuentra el resultado de las operaciones pedidas:



a. $z \cdot z_1 + z_3 \cdot z_5$

b. $|2\,z_2| + |z_3 \cdot z_4| - |z_5^{\,2}|$

c. $\overline{z_2 : z_1} - 3\,z_4$

d. $(\overline{z_1 + z_2})^2$

e. $\dfrac{z}{z_1 + z_3} + \dfrac{z}{z_4 + z_5}$

f. $\left(\overline{\dfrac{z_2}{z_3} + \dfrac{z_3}{z_4}}\right)$

g. $|(z_1 + z_2)(z + z_5)|$

h. $-z_3 + 2 \cdot z_1 \cdot z - z_2 \cdot z_4$

2 Resuelve los siguientes ejercicios y entrega tu resultado como par ordenado:

a. $i^{323} + 2\,i^{425} + 3\,i^{-122}$

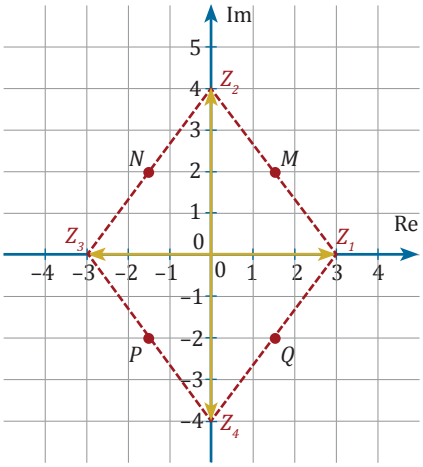
b. $(1 + i)^5 + (1 - i)^7 + (i - 1)^9$

c. $i^{27}(i^{52} + i^{30}) + (-i - 1)^8$

d. $\dfrac{i^{-36} + 3\,i^{-52}}{i^{721} + 4\,i^{236}}$

e. $(4\,i + 1)\,i^{92} - (5\,i + 3)\,i^{78}$

3 El rombo de la figura se ha construido de tal manera que sus vértices son los extremos de los complejos z_1, z_2, z_3 y z_4. Además, se han marcado en sus lados los puntos medios M, N, P y Q.



Determina:

a. Los complejos cuyos extremos son M, N, P y Q, en forma canónica.

b. El perímetro de la figura $MNPQ$.

c. La longitud de la circunferencia circunscrita a la figura anterior. Considera $\pi = 3{,}14$.

d. El perímetro de cada uno de los cuatro rombos pequeños determinados por los complejos escritos en **a**.

e. Si las coordenadas de la parte real del cuadrado del complejo

$$\overline{z_3} - \frac{\overline{-z_4} - z_3}{2} + z_1 + \frac{\overline{z_3} - \overline{-z_1}}{2}$$

queda en el interior del rombo original. Justifica tu respuesta.

4 Dados los siguientes complejos: $z_1 = -2 + 5\,i$; $z_2 = (2{,}1)$ y $z_3 : |z_3| = 3$, $\alpha = 100°$. Determina, según su módulo y ángulo, el complejo resultante de:

a. $z_1 \cdot z_2$

b. La raíz cuadrada del cociente entre z_3 y z_2.

c. El cubo de la raíz séptima de z_1.

d. $\sqrt{(z_1 \cdot z_2) : z_3}$.

e. El triple de la décima parte de la cuarta potencia de z_2.

5 Sean los complejos $z_1 = (2{,}6)$ y $z_2 = (8, -4)$. Ubícalos en el plano complejo. Luego, determina el complejo z que está determinado por el punto medio del segmento que une los extremos de los complejos z_1 y z_2 dados.

6 Encuentra el resultado de los siguientes ejercicios y escribe tu respuesta como par ordenado.

a. $(3+2i)(4-2i)-\dfrac{4+4i}{5i-3}$

b. $\dfrac{1-4i}{3+i}+(2+3i)(5-6i)$

7 Determina el inverso multiplicativo de los siguientes complejos:

a. $\left[(2+3i)-2(3+2i)\right]$

b. $\left[(-4+5i)+\dfrac{1}{2i-1}\right]$

8 Resuelve los siguientes ejercicios y da tu respuesta como par ordenado:

a. $(2-3i)^3 : i^{23}$

b. $(3+i)^2 \cdot (2+2i)^4$

9 Encuentra el valor de x para que el complejo $\dfrac{2-xi}{1-3i}$ sea de la forma:

a. $(a,0)$ con $a \in \mathbb{R}$

b. (a,a) con $a \in \mathbb{R}$

10 Resuelve:

a. $\left(\dfrac{11-4i}{5-i}\right) : \sqrt{-25}$

b. $\left(13-\dfrac{\sqrt{2}}{10}i\right)^2 : -26\,i^3$

c. $\left(\dfrac{1-4i}{1+2i}\right)\left(\dfrac{1+4i}{1-2i}\right)+\dfrac{5i^2-4i}{3i}$

11 Determina el valor de la incógnita en cada ecuación en el conjunto de los números complejos:

a. $(2+i)(1+i)=1+z^2 i$

b. $\dfrac{(x,1)(0,-3)-x(-1,1)}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}i\right)^2}=(5,-8)$

c. $\dfrac{2-(y+3)i}{(y-3)+2i}+\left(\dfrac{8}{5}-\dfrac{1}{5}i\right)=0$

d. $\dfrac{a}{a^2+144}-\dfrac{12}{a^2+144}i=\dfrac{a-12i}{169}$

12 Resuelve los siguientes ejercicios:

a. $\left(\dfrac{-2+i}{1-2i}\right)^3$

b. $\dfrac{(-2+i)^3}{(1-2i)^3}$

c. ¿Será verdad que $\left(\dfrac{-2+i}{1-2i}\right)^3=\dfrac{(-2+i)^3}{(1-2i)^3}$?

d. En general, si n es un número natural, entonces $\left(\dfrac{a+bi}{c+di}\right)^n=\dfrac{(a+bi)^n}{(c+di)^n}$. ¿Puedes dar un ejemplo donde esta fórmula no se cumpla?

13 Con un número complejo que desees, pero que no sea ni real puro, ni imaginario, comprueba que:

a. $(z^{-1})^2=z^{-2}$

b. $(z^{-1})^2=(z^2)^{-1}$

c. $z^2 \cdot z^{-1}=z$

d. $(z+z^{-1})^2=2+z^2+(z^{-1})^2$

14 La pregunta que tuvimos que resolver para ganarnos un punto fue la siguiente: Si $z_1=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ y $z_2=-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$, entonces:

a. ¿Satisfacen los complejos dados la ecuación $x^2+x+1=0$

b. Efectúa $\dfrac{z_2}{z_1}$

¿Cuáles son las respuestas?

15 –¿Cuál es tu problema, José? –dijo su papá.
–Mira, papá, estamos estudiando los números imaginarios y no entiendo muy bien.
Si tengo los siguientes números, $a=\sqrt{-4}, b=5i, c=\sqrt{-9}, d=-\sqrt{-36}$, debo resolver los siguientes ejercicios.
Su papá pensó que esta materia nunca la había visto en el colegio, pero tú ya la has estudiado.
Resuelve los ejercicios de José e indica el conjunto más pequeño al que pertenecen los resultados:

a. $(ab)^3+c^5-d^2$

b. $(a+b-c)^2-d^2$

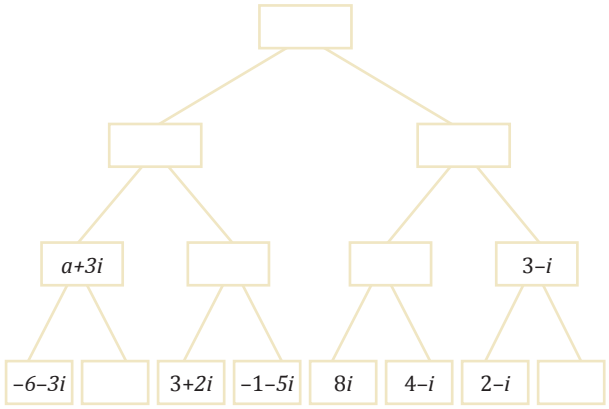
c. $(a \cdot db):d$

d. $(a+d):(c+d)$

e. $(a-b)(c-d)$



16 Esteban había creado un juego para estudiar para su prueba de números complejos. Cada celda se obtenía sumando las dos celdas que estaban bajo ella. Completa las celdas del juego de Esteban.



17 Mariela le dijo a Agustina, su mejor amiga: "Agu, dibuja un plano complejo. Luego dibuja en él, un paralelogramo. Ahora responde las siguientes preguntas".
Agustina lo hizo, ¿puedes responderlas ahora tú?... Adelante, eres muy capaz...

a. ¿Cuáles son los complejos que son los vértices del paralelogramo?

b. ¿Cuál es el perímetro del paralelogramo?

c. ¿Cuál es el área del paralelogramo?

d. ¿Cuál es la suma de los complejos determinados en **a.**?

e. ¿Cuál es el producto de los complejos determinados en **a.**?

18 Adivina buen adivinador. ¿Cuál es el complejo que al sumarle $2 + i$ y luego dividir dicha suma por $6 - 2i$, da por resultado $-3 - i$?

19 Nos sentamos en el patio de mi casa a hacer las tareas para mañana. Después de un rato de estudio, pude resolverlas y encontrar el valor de z. Te las escribo aquí para que tú también las resuelvas:

a. $z + i(2 + 4i) = 8i^3 - 4i^{17}$

b. $\frac{2i - 3}{z} = 9i + 4$

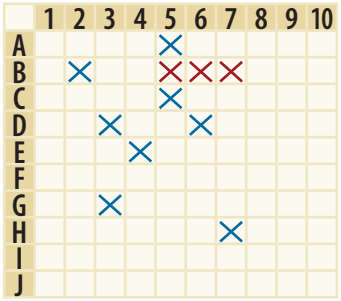
c. $z(4 - i) = (2i + 1)(i + 2)$

d. $2z(i + 5) = 3i(i - 2)$

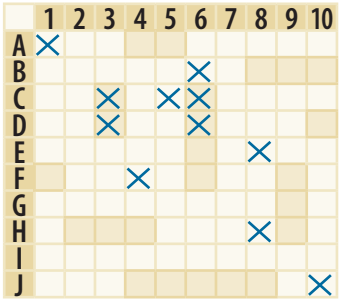
e. $(i + 1)^4 + 2zi = (3 + 2i)^2$

20 Matías con Elena construyeron el tablero de su combate naval sobre un plano complejo. Así, dijeron, aparte de jugar podemos aprender un poco de matemática. "Real 2, imaginario -1", decía Matías.
–Ajá, $2 - i$, al agua- le respondía Elena.
Las siguientes fueron algunas de las coordenadas dadas por Matías. Construye un tablero de combate naval (puede ser en un trozo de madera, cartulina, etc.) en el que el eje vertical represente el eje imaginario, y el eje horizontal, el eje real y ubica los números señalados. Además, escribe tú estos complejos en forma canónica, como par ordenado y según su módulo y ángulo:

FLOTA NAVAL ENEMIGA:



MI FLOTA NAVAL:



a. Real 3, imaginario -2.

b. Real -5, imaginario 4.

c. Real 0, imaginario 8.

d. Real 2, imaginario 6.

e. Real -4, imaginario -3.

21 El director del colegio de Pericles le ha planteado un desafío. Él le dijo: "Pericles, te desafío a construir un triángulo equilátero en el plano de los complejos, de modo que uno de sus lados sea el complejo $(5,12)$ y otro de los lados esté sobre el eje real. Dime tú las coordenadas de los vértices de dicho triángulo".
¿Crees tú que es posible lo que ha pedido el director? Justifica tu respuesta matemáticamente.

22 Osvaldo no entiende bien cuál es la diferencia entre el módulo de un complejo y el conjugado de este. ¿Puedes tú establecer dicha diferencia, resolviendo los ejercicios que Osvaldo tenía de tarea?

a. Si $z = 2 + 4\,i$, determina el valor de $|z| + 2\,|\overline{z}|$.

b. Si $z = (-3, -1)$, determina el valor de $\left(\overline{z + \frac{1}{z}}\right)$.

23 No es un desagravio preguntarte tu edad, sino que es un desafío para escribirla usando sumas y restas de todas las potencias básicas de i, y las potencias enteras positivas, inmediatamente siguientes a estas. Por ejemplo, yo tengo 23 y lo he escrito como $23 = i - 9\ i^2 + i^3 + 8\ i^4 - 2\ i^5 - 6\ i^6 - 2\ i^7 + 0\ i^8$. Si te fijas, además utilicé solamente los dígitos y terminé con una potencia de i cuyo exponente es múltiplo de 4. Fácil, ¿no es cierto? De igual manera, anota tu edad.

24 Mira el problema que encontré en este libro: "Dicen algunos que el 21 es el número de la buena suerte. Más aún, para que un proyecto tenga éxito debe estar un periodo de 21 días de incubación, como el del nacimiento de un pollo". ¿Y qué tiene que ver esto con los números imaginarios? Déjame seguir leyendo:" Te invitamos a que reemplaces x por $\sqrt{-\sqrt[3]{-16\ 777\ 216}}$ en $\frac{1}{3}\left(\frac{i^2 - x^6}{1 + x^3 i}\right)$, reduzcas usando propiedades e indiques si obtienes el número de la suerte".

25 "Así que, estimados alumnos, quieren que yo resuelva por ustedes el ejercicio de la pizarra". "Sí", asentimos todos con nuestras cabezas. "Solo les voy a decir que factoricen por $-i^3$ la expresión: $-12\ i^5 - 6\ i^9 - 18\ i^4 + 24\ i^8 + 30\ i^2$, reduzcan y continúen" replicó el profesor... Miré el ejercicio una vez, y escribí correctamente la expresión lo más reducida del otro factor que quedó... ¿Cuál creen que es ese factor? ¿Cómo crees que queda la expresión?

26 "Papá, ¿qué es eso de la puerta giratoria que discuten unos caballeros en las noticias de la TV?". Mi padre trata de explicarme, pero no puedo ponerle mucha atención, en mi cabeza dan vueltas los números imaginarios... Pero esperen, a propósito de una puerta giratoria de cuatro hojas... imagínate que mi hermano, justo en ese instante empuja la puerta que se ubica en la posición de i^3, da 2,75 vueltas girando en sentido antihorario. ¿A qué potencia de i debería llegar?

27 Dada la siguiente expresión $a + bi$, donde a es la parte real y b la parte imaginaria de un número complejo. Al igual que una operación habitual de álgebra, se solicita que multipliques dicha expresión por las cuatro potencias fundamentales de i. ¿Qué ocurre con a y bi en cada caso?.

28 Nos encontramos con el profesor de física en el bus que va a La Serena. Iba a hacer una clase extraordinaria a unos alumnos de la universidad.
"Ellos estudian Ingeniería Eléctrica y voy a repasar los números complejos porque los deben usar en el estudio de la corriente alterna", nos contó.
Le pregunté qué tenemos que saber los de tercero medio para aprender esos números. "Algebra y números imaginarios" –dijo. Se despidió y bajó antes que nosotros. Miré y, en su asiento, el profesor nos había dejado el siguiente ejercicio: "Si $h^2 = pq$ siendo $p = 2((-i^3)^3)^5$ y $q = i((-i)^6)^{37}$, encuentren la expresión más reducida para $h^2 - p + q$, ¿cuál es esta?"



29 "–¡Shht! –me dijo el espectro–... Estamos atrapados en tu sueño... Pero tengo una fórmula para romper el hechizo que me ata a tu mente. Entonces le dije: "¿cuál hechizo?... ¡Ah claro! recuerdo el hechizo del ejercicio: i^{1953} multiplicado por i^{-953}, dividido por i^{53}.
–¿De qué diantres me estás hablando muchacho? ¡Qué tontera estás diciendo producto de tu fiebre! –exclamó él–, se supone que los espectros no sabemos de números..."
Tú no eres un espectro, pero resuelve el ejercicio insinuado por el soñador afiebrado.

30 Soy Lucio, de tercero medio, aquel al que le cargan los logaritmos. ¿Se acuerdan de mí?...
En la última clase de matemática, la profesora nos reunió en grupos de a cuatro, pasándonos una bolsa con cuatro bolitas en su interior. Cada una de ellas tenía marcada una de las potencias básicas de i... En mi grupo tuve que sacar, con reposición, una bolita, tres veces seguidas, y decir en voz alta la potencia de i. Enseguida, multiplicarlas todas a la vez, entonces fue cuando dije en voz alta: ¿cuál es la probabilidad teórica requerida?

31 Juan Pablo está haciendo una investigación acerca de los números imaginarios. En uno de los párrafos del libro que está consultando, dice que al sumar, restar y/o multiplicar números reales con números imaginarios, el resultado de estas operaciones, siempre da un número real, un número imaginario, o bien un número complejo. No encontrando ningún ejemplo que le aclarara esta afirmación, decide preguntártelo a ti: "Dame un ejemplo de cada situación, donde el resultado se reduzca a una de estas tres situaciones".

32 Mira este ejercicio que tengo que reducir al máximo....

$$\frac{14\,i^5 - 13\,i^3}{8\,i^3 + 5\,i} - \frac{8\,i^2 - 13\,i^8}{11\,i^4 - 4\,i^6}$$

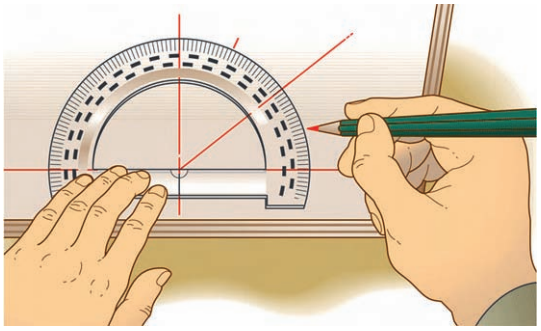
Necesito que tú me ayudes a resolverlo... ¿cuál es la respuesta?"

33 "Ahora que soy abuela he decidido nuevamente estudiar matemática. Me puse a investigar sobre los números imaginarios y les propongo este acertijo que compuse: Si tenemos la unidad imaginaria elevada a cuarenta y tres, y queremos obtener el cociente que resulta entre la unidad imaginaria elevada a cincuenta y la unidad imaginaria elevada a cuarenta y cinco, ¿por cuál potencia de la unidad imaginaria inmediatamente superior a veintitrés debo multiplicar la primera potencia que les mencioné? Si no lo pueden resolver, soliciten mi ayuda.

34 –¿Trajiste el transportador, Matías?–. Sí acá lo tengo.
–Bien, ubiquemos los complejos en el plano y midamos... ¡Qué coincidencia, todos los pares dados son perpendiculares!...
Al igual que nuestros amigos, ubica en el plano complejo los números $z_1 = 3 + i$ y $z_2 = -1 + 3\,i$, luego responde:

a. ¿Cuánto mide el ángulo entre ambos vectores?

b. Determina otros dos pares de complejos en los cuales se efectúe una rotación de $90°$. Da una regla general para que dos vectores sean perpendiculares en el plano complejo.



El transportador es un instrumento indispensable en matemáticas, que nos permite conocer la medida de diferentes ángulos en grados.

Taller

Utilizando Excel

Materiales:

- Programa Excel.
- Lápiz y papel.

Instrucciones:

En Excel se pueden confeccionar planillas de cálculo. En parejas, deberán crear una planilla que entregue el resultado de la suma, resta, multiplicación y división de dos números complejos.

Para ello, deberán primero encontrar en forma general cada resultado, suponiendo que los complejos a operar son $z = a + b\,i$ y $z' = c + d\,i$. Con esto se pueden colocar las fórmulas en las casillas correspondientes. Un ejemplo puede ser:

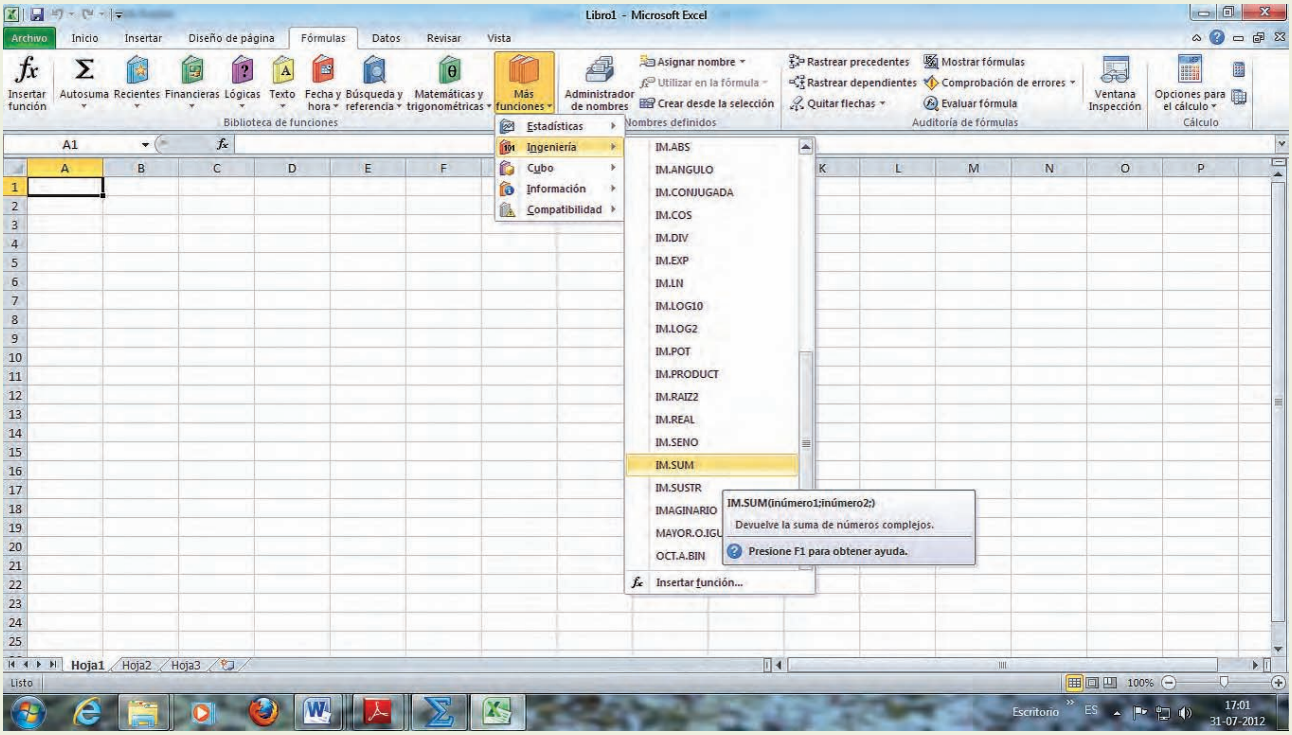
	z		z'		z+z'		z-z'		z*z'		z:z'	
	Re(z)	Im(z)	Re(z')	Im(z')	Re(z+z')	Im(z+z')	Re(z-z')	Im(z-z')	Re(z*z')	Im(z*z')	Re(z:z')	Im(z:z')
	3	4	2	-1	5	3	1	5	10	5	0,4	2,2

=(B4+D4)

=(C4+E4)

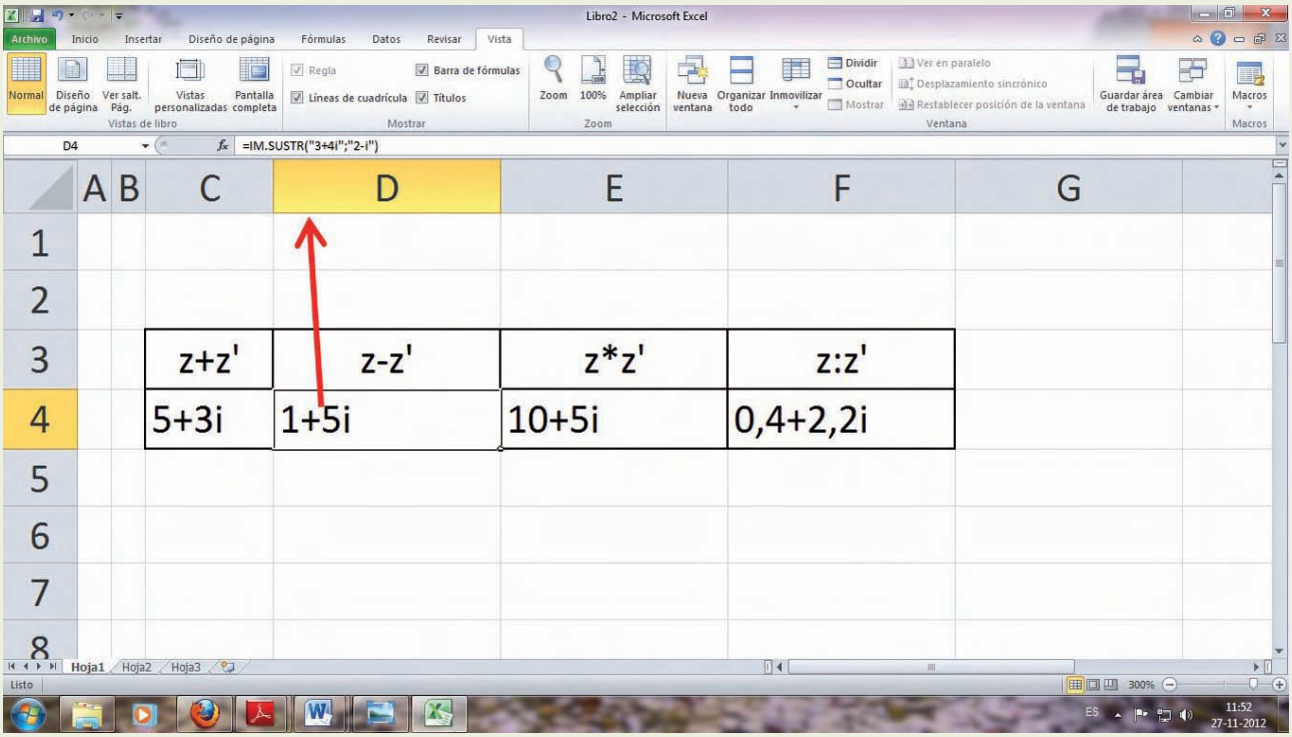
Puedes completar, de esta manera, las cuatro operaciones, pero también puedes crear planillas para números complejos como el inverso aditivo, el inverso multiplicativo y el conjugado de un complejo, así como también para calcular el módulo de un complejo... Inténtalo...

Finalmente, para comprobar tus resultados utilizaremos una herramienta de Excel que permite operar con números complejos. Para ello debes hacer clic en la pestaña "fórmulas" y dentro de esta, hacer clic en el ícono "más funciones".Ahí debes seleccionar "Ingeniería" y dentro de esta la función "IM.SUM", que te pedirá en forma canónica los números complejos que previamente habías escrito separadamente en parte real e imaginaria. Por ejemplo, $3 + 4\,i$ y $2 - i$. Luego debes apretar "enter" y aparecerá el resultado de la suma de ambos complejos.



Debes considerar que el resultado también estará escrito en forma canónica, por lo que las partes imaginaria y real estarán juntas.

Para comprobar los demás resultados debes seguir el mismo procedimiento pero dentro de "Ingeniería"; debes seleccionar la función "IM.SUSTR" para la sustracción, "IM.PRODUCT" para la multiplicación e "IM.DIV" para la división entre ambos números. Aquí te mostramos un ejemplo, utilizando los números $3 + 4\ i$ y $2 - i$:

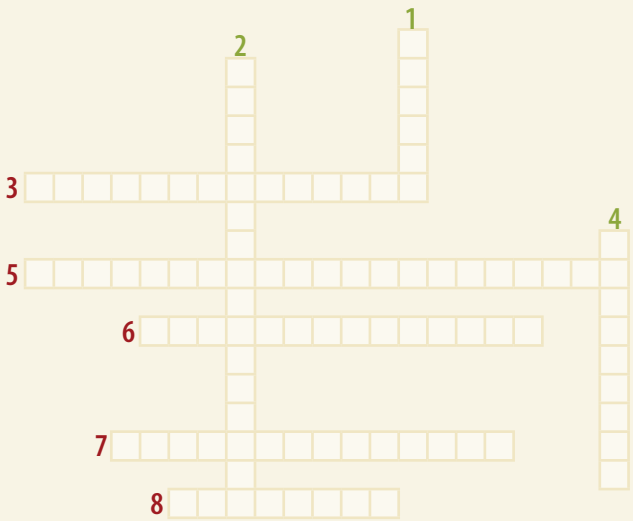


Evaluación Unidad 1



Síntesis conceptual

I. Completa el siguiente crucigrama con los conceptos fundamentales de la unidad:



Horizontal

3 Complejo cuya parte real e imaginaria tienen signo contrario al de un complejo dado
5 El conjugado de un complejo dividido en su módulo
6 Número de la forma $b\,i$
7 Número de la forma $a + b\,i$
8 Número de la forma $a + 0\,i$

Vertical

1 Largo del vector que representa a un número complejo
2 Solución de la ecuación $x^2 + 1 = 0$
4 Complejo que representa la reflexión de un número complejo con respecto al eje real

II. Coloca V (verdadero) o F (falso), según corresponda, en cada una de las siguientes afirmaciones:

1 ____ Cualquier número real puede ser visto como un complejo de parte imaginaria nula, esto hace que los reales sean considerados como un subconjunto de los complejos.

2 ____ $i^{21} + 2\,i^{27}$ es un complejo imaginario puro.

3 ____ Si $z = a + b\,i$ es un número complejo, entonces, a es la parte real de z y $b\,i$ es la parte imaginaria de z.

4 ____ Si dos complejos están en el mismo cuadrante y tienen el mismo módulo, luego ellos son iguales.

5 ____ En general, si z es un número complejo, entonces, $\overline{z} \neq -z$.

6 ____ La igualdad $3x + 2y\,i = 8 - \sqrt{3}\,i$, es cierta, si $x = \frac{8}{3}$ e $y = -\sqrt{\frac{4}{3}}$.

7 ____ $\sqrt{2} + 3\,i + \sqrt{3} + 4\,i = \sqrt{3} + 4\,i + 3\,i + \sqrt{2}$ porque existe conmutatividad en la adición de complejos.

8 ____ Todos los complejos tienen un inverso aditivo, pero no todos tienen un inverso multiplicativo

9 ____ Para encontrar el inverso multiplicativo de $5 + 13\,i$, se debe resolver $\frac{1}{5 - 13\,i}$.

10 ____ Si el ángulo que forma z con el eje real es 21° y $|z| = 2$, entonces el módulo de z^5 es 32 y se ubica en el segundo cuadrante.

Ejercicios de resumen de la unidad

I. Resuelve los siguientes ejercicios. Coloca todo el desarrollo en tu cuaderno. No olvides revisar tus respuestas en el solucionario.

1 Completa las siguientes tablas:

+	1	-1	i	$-i$
1				
-1				
i				
$-i$				

$-$	1	-1	i	$-i$
1				
-1				
i				
$-i$				

:	1	-1	i	$-i$
1				
-1				
i				
$-i$				

·	1	-1	i	$-i$
1				
-1				
i				
$-i$				

2 Si $x = 2$ en la expresión $2\sqrt{150} - \sqrt{4-4x} - 2(4\sqrt{54} - 5\sqrt{1-x}) + \frac{1}{9}\sqrt{486} - \sqrt{9-9x}$, ¿obtendrás un número imaginario, un número real o un complejo? Justifica claramente tu respuesta.

3 ¿Cuáles son las partes real e imaginaria del complejo que resulta al desarrollar $0{,}5\left(-\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{3}{\sqrt{2}}\,i\right) \cdot 5\,i\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\,i\right)$?

4 Hallar z, sabiendo que $3z = \frac{-12 + 21\,i}{i(2 - 3\,i)}$.

5 ¿Cuál es el complejo que se obtiene a reducir al máximo $(19{,}3)^2 - \frac{4(2 - 3\,i)}{i}$?

6 Encuentra el complejo $z = \left(\frac{2}{3}\,x + \frac{5}{6}\,a, 6x - 7y\right)$, sabiendo que cumple la igualdad $2z = 11a - 14a\,i$

7 Si $z = -3 + 4\,i$ ¿Cuál es el valor de $z^{-1} - (\overline{z})^{-1}$?

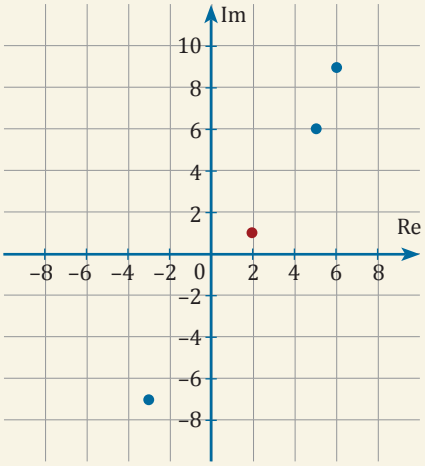
8 Determinar a y b para que se cumpla que: $(a - 2b)(i^2 45 + (-4)^2 i) + (-3)^2 = 7a - 32b\,i$

9 Si $z_1 = 11 - 7\,i$ y $z_2 = -7 + 3\,i$

a. Efectúa el producto entre ambos complejos

b. Supongamos que z_2 disminuye en seis unidades su parte imaginaria y aumenta en dos unidades su parte real ¿Qué debiera ocurrir con las partes real e imaginaria de z_1 para que al multiplicarlos nuevamente obtengas el mismo complejo que en **a.**?

10 El plano complejo muestra, en azul, los extremos de tres complejos. Aún faltan dos que cumplen que la parte real de uno de ellos es -2 y la parte imaginaria del otro es 1. Ubica en el plano los extremos de estos dos complejos faltantes, de modo que la suma de los cinco complejos dé como resultado el complejo que tiene por extremo el punto rojo.



11 Encuentra el complejo $x + y\,i$, tal que, al multiplicarlo por $20 + 43\,i$, se obtenga el complejo $-381 - 32\,i$.

12 Encuentra el valor de z en la ecuación: $(2 + i)(i + 3) - (2 - 2\,i)z = |5 + 12\,i|\,i$.

13 Mediante un ejemplo, muestra la propiedad de la distributividad de la multiplicación con respecto a la adición, en el conjunto de los complejos.

14 Desarrolla completamente $\frac{6 + i}{(1 + 2\,i)^2} + \frac{(3 - i)^3}{2\,i}$ e indica el complejo resultante.

15 Hallar $z = (a + 5, -b + 6)$ y $z' = \left(\frac{1}{4}, -3b\right)$ de modo que $z - z' = -1 + i$, donde a y b son reales.

16 Sabiendo que, $z = (\sqrt{x}, 15)$, $z' = (\sqrt{x}, -14)$ y $z'' = (-210\ ,\ 0)$:

a. Encontrar el valor de x, tal que $(-z') \cdot z = z''$

b. ¿Cuáles son las partes reales de z y z'?

17 Los complejos $z_1 = (x,y)$ y $z_2 = (a,b)$ son complejos que cumplen con que $x - y = 1 - x\,i - y\,i - 3\,i$; $6a - 7 = 3 + a - b\,i$ ¿Cuál es el valor de la expresión $\frac{1}{4}\,z_1 + 4\,z_2$?

18 Verifica si $z = 6 + 11\,i$ es solución de: $\left|\frac{z - 3\,i}{z + 4 + 13\,i}\right| = \frac{5}{13}$

19 Del complejo $z = \left(\frac{10}{3}\,x - \frac{1}{5}\,y, 9 - x\right)$, se sabe que $x = 1{,}5$ e $y = 125$. Hallar a tal que se cumpla la condición: $y + i + a \cdot z = 5(9 + 5\,i)$

20 Dados $z_1 = 8 + 11\,i$ y $z_2 = 1 + \frac{5}{8}i$, determinar el valor de n en $(1 - n)z_1 \cdot (-2)z_2$ tal que la esta expresión resulte nula.

21 z y z' son dos complejos, donde el primero de ellos se representa en el segundo cuadrante de un plano complejo, en cambio el segundo lo hace en el tercer cuadrante. Sus partes reales satisfacen la ecuación $x^2 - 169 = 0$, y sus partes imaginarias lo hacen para $y^2 - 144 = 0$.

a. Encuentra dichos complejos

b. Efectúa la diferencia entre z y z'. ¿Es verdad que se anulan?

22 ¿Cuál es el complejo z si: $\frac{z}{(-3 + 4\,i)\overline{(2 + 6\,i)}} = 1 + 0\,i$?

23 La suma entre las partes reales de dos complejos es 46 y su diferencia -10. Si ambos tienen a 11 como parte imaginaria:

a. Encuentra el complejo resultante de la diferencia entre el complejo que tiene menor parte real con el que tiene mayor

b. Anteriormente has encontrado el complejo resultante de la diferencia. Ahora bien, ¿cuál es el complejo que anula al complejo que resulta de la suma?

24 La suma de dos complejos z_1 y z_2 es $11 + 23\,i$, y la diferencia de ellos es $-1 + 5\,i$. ¿Cuáles son los complejos z_1 y z_2?

25 Encuentra el complejo z tal, que satisfaga la siguiente ecuación:

$$\frac{z}{1 + 4\,i} + \frac{z + i}{1 - 4\,i} = 11 - 9\,i$$

26 ¿Cuál es el complejo conjugado de $\left(-\frac{1}{5} - 5\,i\right)^2$?

27 El ángulo que forma un complejo que está ubicado en el segundo cuadrante con el eje imaginario del plano complejo es $30°$. Un segundo complejo, que se ubica en el primer cuadrante, forma un ángulo de $70°$ con este mismo eje. Ambos tienen módulo igual a 2.

a. Grafícalos.

b. Indica aproximadamente las coordenadas de la suma de ellos.

c. Indica el cuadrante donde está el cociente entre el primero y el segundo.

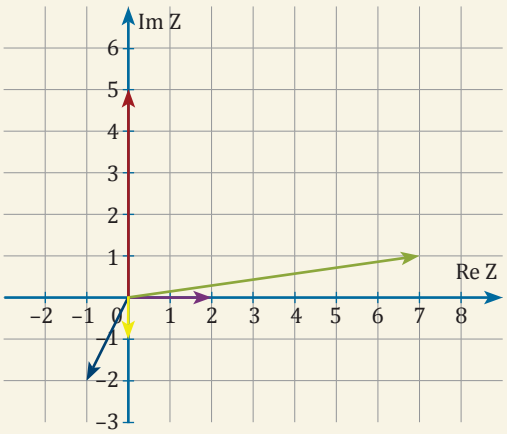
28 Los valores de los módulos de dos complejos son 4 y 9; y los ángulos que forman con el eje real positivo del plano complejo son $51°$ y $45°$, respectivamente. Entonces:

a. Indica el módulo del producto de ellos y el ángulo correspondiente.

b. Calcula el módulo y ángulo del complejo igual a la raíz cuadrada del primer complejo mencionado.

29 Resuelve el producto: $(x + 3 + \sqrt{2}\,i)(x + 3 - \sqrt{2}\,i)$, ¿qué tipo de expresión algebraica se obtiene?

30 El plano complejo siguiente muestra cinco complejos, de distintos colores, de un total de seis. Se sabe que el producto entre los complejos azul y el rojo, menos el producto de los complejos amarillo y verde, equivale al producto de los complejos fucsia y el complejo que no se ve. Suponiendo que este último, invisible, se simboliza por $a + b\,i$, encuentra su inverso aditivo



II. Resuelve los siguientes problemas. Coloca todo el desarrollo en tu cuaderno:

1 –En mis tiempos no me pasaban estas cosas de los números complejos, Carlitos –decía su abuelo.
–Y yo soy más del área humanista, creo que por ahí va mi vocación –le respondió Carlitos–. Además, no sé para qué me va a servir responder esta pregunta.
–Pero, todo saber es importante, Carlitos. Trata de responderla... Verás que puedes hacerlo... los ejemplos son los que mejor funcionan para pensar...
–Veamos entonces... dice así... ¿Se podrá encontrar el inverso multiplicativo de un complejo, conociendo el valor de su módulo y parte imaginaria?".
Carlitos tomó el siguiente ejemplo: un complejo que tuviera módulo 10 y cuya parte imaginaria fuera 8. Él pudo responder la pregunta... Ahora hazlo tú, escribe todo el desarrollo.

2 Marcelino y su polola, también compañera de curso, se entretenían, de vez en cuando, jugando a las preguntas y respuestas... ¿Quién sabía más?... era a lo que ellos jugaban.
–¿Premio Nobel chileno en $1\,945$? –preguntó Marcelino.
–Gabriela Mistral –respondió su polola–. ¿Descubrimiento de Alexander Fleming?
–La penicilina –dijo Marcelino–. ¿$z = 2 - 3\,i$ y $z' = -4 - 5\,i$, cuál es el complejo resultante del doble de su producto dividido por la diferencia de ambos?
Su polola lo pensó por un rato... Dime tú, cuál es la respuesta.

3 Encuentra un complejo de modo que al ser multiplicado por un número entero entre 1 y 5 (ambos incluidos), se obtenga como resultado:

$25 - \frac{5}{3}\,i$

III. Marca la alternativa correcta:

1 El valor de $2\,i^0 + i - (i^3 + i^6)$ es:

a. $3 + 2\,i$
b. $2 - i$
c. $-i$
d. i
e. $2 + i$

2 Los complejos $(6x - 5,\ 3y + 6)$ y $(4x + 6,\ y + 15)$ son iguales. Entonces:

a. $x = 5\ ;\ y = 4$
b. $x = 4\ ;\ y = 5$
c. $x = 5{,}5\ ;\ y = 4{,}5$
d. $x = 4{,}5\ ;\ y = 5{,}5$
e. $x = 9\ ;\ y = 7$

3 Se sabe que z forma un ángulo de 30° con el eje real positivo del plano complejo, entonces el ángulo que forma con este mismo eje, el inverso aditivo de z es:

a. 120°
b. 150°
c. 210°
d. 300°
e. 330°

4 Dados los complejos $z_1 = \left(1 + \sqrt{2}\ ,\ \frac{3}{4}\right)$ y $z_2 = \left(1 - \sqrt{2}\ ,\ \frac{1}{4}\right)$ el complejo conjugado de $z_1 + z_2$ es:

a. $z_1 = \left(2\sqrt{2}\ ,\ -\frac{1}{2}\right)$
b. $(3,1)$
c. $(2, -1)$
d. $(-2,1)$
e. $(-3, -1)$

5 La unidad imaginaria y el neutro multiplicativo son, respectivamente:

a. $(1,1)$ y $(1,0)$
b. $(1, -1)$ y $(1,0)$
c. $(1,0)$ y $(1,1)$
d. $(1,0)$ y $(-1, -1)$
e. $(0,1)$ y $(1,0)$

6 $z \cdot \overline{z}$ es siempre:

a. Un número real.
b. Un número imaginario puro.
c. Igual a z^2.
d. $(1,0)$.
e. Depende del valor de z.

7 Si $z_1 = 1 + i$ y $z_2 = 1 - i$, luego $\frac{z_1}{z_2}$ es :

a. $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$
b. $0 + 0\,i$
c. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$
d. $-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,i$
e. $0 + i$

8 El valor de $i(1 - i)(1 + i)$ es:

a. $2(1 + i)$
b. $2(1 - i)$
c. $2 - i$
d. $2 + 0\,i$
e. $0 + 2\,i$

9 Si $z_1 = 3 - 2\,i$, $z_2 = 3\,i$ y $z_3 = 1 + i$, el valor de $z_1 \cdot z_2 + z_3$ es:

a. $-5 + 10\,i$
b. $7 + 10\,i$
c. $1 + 6\,i$
d. $10 - 5\,i$
e. Ninguna de las anteriores.

10 Si $z = -2 + i$, ¿cuál es el valor de $|z^{-1}|$?

a. $\sqrt{5}$
b. $\frac{1}{\sqrt{25}}$
c. $\frac{1}{\sqrt{5}}$
d. $\sqrt{3}$
e. Ninguna de las anteriores.

11 $(-6\,i - 1)^2$ corresponde al complejo:

a. $-(35 + 12\,i)$
b. $-(35 - 12\,i)$
c. $35 + 12\,i$
d. $35 - 12\,i$
e. 35

12 Se afirma que la(s) solución(es) de la ecuación $z^2 = 15 - 8\,i$ es(son):

I. $4 - i$ **II.** $-4 + i$ **III.** $-4 - i$

De estos números complejos, es(son) solución(es)

a. Solo I
b. Solo II
c. Solo I y II
d. Solo I y III
e. I, II y III

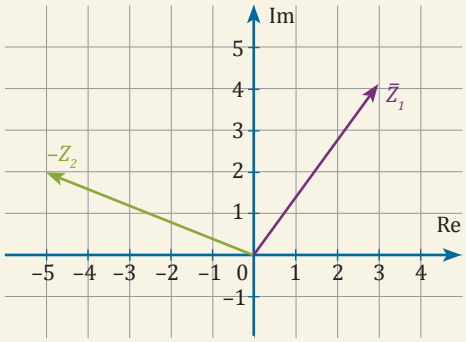


13 ¿Cuántos números complejos tienen sus inversos aditivos igual a ellos mismos?

a. 0
b. 1
c. 2
d. 3
e. Ninguna de las anteriores.

14 De acuerdo a la figura adjunta, el valor del módulo de $z_1 + z_2$ es:

a. $2\sqrt{2}$
b. $2\sqrt{7}$
c. 10
d. $4\sqrt{2}$
e. $2\sqrt{10}$



15 Si $z = a + b\,i$, entonces la suma entre el conjugado de z y el inverso aditivo de z es:

a. Un número complejo real.
b. Un número complejo imaginario puro.
c. Un número complejo que puede ser real o un imaginario puro.
d. Un número que no es ni real ni imaginario puro.
e. Ninguna de las anteriores.

16 ¿Cuál(es) de la(s) siguiente(s) igualdades es(son) falsa(s)?

I. $i^{17} + i^{18} = 2\,i$
II. $i^{36} + i^{28} = 2$
III. $(i^2 + i^{-2})^2 = 4$

a. Solo I
b. Solo II
c. Solo III
d. Solo I y II
e. I, II y III

17 Considera $z = 4 - 3\,i$ y $z' = a + b\,i$ con $z' \neq 0$. Si $\frac{z}{z'} = 8 - 6\,i$ entonces, la suma de la parte real con la parte imaginaria de z' es:

a. $-1{,}5$
b. $-0{,}5$
c. $-0{,}5\,i$
d. $0{,}5$
e. $1{,}5$

18 El inverso multiplicativo de $-2 + i$ es:

a. $\frac{2}{3} + i$
b. $-\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\,i$
c. $-\frac{2}{5} - \frac{1}{5}\,i$
d. $2 - i$
e. Ninguna de las anteriores.

19 Si $z = 1 - i$, entonces, ¿cuál de las siguientes expresiones es igual a z?

a. $z^2 + \bar{z}$
b. $2\,z^2$
c. z^3
d. $z^3 + z^2$
e. $\frac{z^2}{2}$

20 La siguiente operación de números complejos $(2\,i + 3)^3 + (3\,i - 1)(2 - i) + 9$ tiene por resultado:

a. $49 + 53\,i$
b. $1 + 53\,i$
c. $1 - 53\,i$
d. $49 - 53\,i$
e. $53 - 53\,i$

21 El resultado de $\frac{1}{2 + 3\,i} - \frac{1}{2 - 3\,i}$ es:

a. $\frac{6}{13}\,i$
b. $-\frac{6}{13}\,i$
c. $\frac{4}{13}\,i$
d. $-\frac{4}{13}\,i$
e. $\frac{4 - 6\,i}{13}$

22 Si $z = (2{,}3)$, $z_1 = (-1, -5)$, $z_2 = (-4{,}1)$, entonces el complejo resultante de $z \cdot z_1 + \frac{z}{z_2}$ es:

a. $\frac{226 - 235\,i}{17}$
b. $\frac{8 - 27\,i}{17}$
c. $\frac{-216 + 235\,i}{17}$
d. $\frac{216 - 235\,i}{17}$
e. $\frac{-8 + 27\,i}{17}$



23 Si $z = -2 - i$, el valor de $|(\overline{z})^2|$ es igual a:

a. $\sqrt{13}$
b. $\sqrt{29}$
c. $\sqrt{41}$
d. 5
e. 13

24 El complejo $z = (-2,2)$, escrito según su módulo y el ángulo que forma con el eje real, corresponde a:

a. $|z| = 2\sqrt{2}, \alpha = 45°$
b. $|z| = 2, \alpha = 135°$
c. $|z| = 2\sqrt{2}, \alpha = 135°$
d. $|z| = 2, \alpha = 225°$
e. $|z| = 2\sqrt{2}, \alpha = 225°$

25 El valor de $3i^5 + i - (i^2 + i^7)$ es:

a. $1 - 3i$
b. $3 + i$
c. $5 + 3i$
d. $1 + 5i$
e. $5 + i$

26 Los números reales x e y que satisfacen la igualdad $3(x + 2) + 2yi - xi + 3y = 9 + 5i$, son, respectivamente:

a. -1 y 2
b. -2 y -3
c. 1 y -4
d. 5 y -1
e. 1 y -2

27 Al reducir la expresión $\frac{(-5+i)(1+i)}{3-i} + i$ a su forma binómica, se obtiene:

a. $\frac{4}{5} - \frac{7}{5}i$
b. $-3 + \frac{2}{3}i$
c. $5 + 7i$
d. $-\frac{7}{5} - \frac{4}{5}i$
e. $\frac{3}{4} + \frac{7}{3}i$

28 Al desarrollar el producto $(2 - (3 - 2i))(2 - (3 + 2i))$ se obtiene por resultado:

a. Un real puro.
b. Un imaginario puro.
c. Un número complejo de la forma $a + bi$.
d. El neutro aditivo de los números complejos.
e. El neutro multiplicativo de los números complejos.

29 El valor de x para que el desarrollo de $(16 - xi)^2$ sea un número real puro, es:

a. -32
b. -16
c. 0
d. 4
e. 32

30 Al reducir al máximo la expresión $9\sqrt{-0,25} - 7\sqrt{-2,89} - 8\sqrt{-0,49}$ y luego elevar al cuadrado, se obtiene:

a. $-13i$
b. $-169i$
c. $-169i^2$
d. -169
e. 169

31 ¿Cuántas unidades imaginarias tiene el desarrollo de $i^3[(-2i)^3 : i^8] - 1$?

a. -33
b. -31
c. 0
d. 31
e. 33

32 El valor de $\frac{3i^2 + i - (-2i^3 + i^6)}{-i^4 + i^{-6}}$ es:

a. $2 + 0,5i$
b. $1 + 0,5i$
c. $-2 - 0,5i$
d. $1 - 0,5i$
e. $2 - 0,5i$

33 Si a $-13\ i^{7\,023}$, se aumenta el coeficiente numérico en doce unidades y al exponente se baja cuatro unidades, se obtiene:

a. Un número real menor que -1.

b. Un número real no negativo.

c. Un número imaginario positivo.

d. El opuesto de la unidad imaginaria.

e. La unidad imaginaria.

34 Al multiplicar tanto el numerador como el denominador de $\frac{522}{3\sqrt{12{,}5}\ i}$, por $\sqrt{2}i^3$ se obtiene:

a. $-\frac{174\sqrt{2}}{5}i^3$

b. $-\frac{174\sqrt{2}}{5}i$

c. $\frac{174\sqrt{2}}{5}i$

d. $-\frac{174\sqrt{2}}{5\ i}$

e. $-\frac{174\sqrt{2}}{5\ i^3}$

35 El valor que debe tener k para que $\frac{14\ i^5-(3\ k+1)\ i^3}{2\ ki^3+5\ i}$ sea igual a -9, es:

a. 4

b. 8

c. 0

d. 1

e. -1

36 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?

a. El número real cinco puede ser escrito usando una potencia de un número imaginario.

b. Las potencias fundamentales de la unidad imaginaria son cuatro.

c. Al sumar o restar dos números imaginarios distintos, se obtiene un número imaginario.

d. El producto de dos potencias de números imaginarios es siempre imaginario.

e. Toda potencia de orden par de un número imaginario es real.

37 De las siguientes potencias de i, es(son) solución(es) de $1+x^{10}=0$:

I. $-i$ **II.** i^{23} **III.** $-i^{-30}$

a. Solo I

b. Solo II

c. I y II

d. I y III

e. I , II y III

38 La expresión $x^2i^7-36\ i^3$ proviene del desarrollo de:

a. $(6-x)(6-x)\ i$

b. $(6-x)(6-x)\ i^3$

c. $(6+x)(x-6)\ i^3$

d. $(6+x)(6-x)\ i^3$

e. $(6-x)(6+x)\ i$

39 Para que $5\ i^n$ y $b\ i^{13}$, con n entero y b un número real o imaginario, sean iguales se debe(n) cumplir la(s) siguiente(s) condición(es)

(1) $b=5$ y $n=7$ (2) $b=-5$ y $n=3$

a. (1) por sí sola

b. (2) por sí sola

c. (1) y (2), ambas juntas.

d. (1) o (2), cada una por sí sola.

e. Se requiere información adicional.

40 Se puede determinar la parte imaginaria del complejo z, dado:

(1) El valor de su módulo y su parte real.

(2) El opuesto aditivo de $\overline{z}$.

a. (1) por sí sola.

b. (2) por sí sola.

c. (1) y (2), ambas juntas.

d. (1) o (2), cada una por sí sola.

e. Se requiere información adicional.

Criterios para evaluar tu aprendizaje

Marca con una ✘, según sea la evaluación de tu trabajo en esta unidad. Recuerda que hacer esta evaluación responsablemente, te entregará información sobre tu proceso de aprendizaje.

Indicadores	+++	++−	+−−
Pude completar el crucigrama de la síntesis conceptual, sin necesidad de mirar mi libro o cuaderno.			
Respondí correctamente el ítem de verdadero o falso de la síntesis conceptual.			
Resolví correctamente los ejercicios propuestos.			
Colaboré con mis compañeros en el trabajo grupal, si lo hubo.			
Soy capaz de explicar los contenidos y procedimientos para la resolución de ejercicios de esta unidad.			
Entiendo el tipo de problemas que se pueden resolver con los contenidos de esta unidad.			
Me siento seguro de lo aprendido y creo que podría resolver otros ejercicios que me plantearan.			

Calcula el porcentaje de logro (PL) que obtuviste en tus respuestas de la sección de alternativas.

Porcentaje de logro

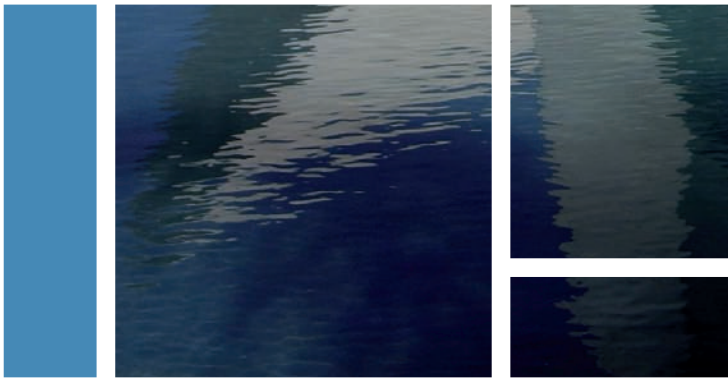
$$PL = \frac{\text{Nº de respuestas correctas}}{40} \cdot 100$$

Porcentaje de logro	Nota obtenida	Nivel de mi aprendizaje	Cómo mejorar
29 % a 0 %	1,0 a 2,5	Alerta	Los contenidos no han sido comprendidos. Debes repasarlos nuevamente y rehacer los ejercicios. Fíjate muy bien en los ejercicios resueltos. Debes pedir ayuda. ¡Ánimo!, con trabajo y estudio se puede.
49 % a 30 %	2,6 a 3,5	Muy bajo	La mayoría de los contenidos no han sido comprendidos. Debes volver a repasarlos y rehacer los ejercicios incorrectos. Pídeles ayuda a tus compañeros o compañeras. Vuelve a estudiar; seguro que lo lograrás.
59 % a 50 %	3,6 a 3,9	Bajo	Una gran parte de los contenidos no han sido comprendidos en su totalidad. Rehaz aquellos ejercicios incorrectos, pero antes, vuelve a estudiar los contenidos. Trata nuevamente.
69 % a 60 %	4,0 a 4,7	Medio bajo	Adquiriste una parte de los contenidos, pero aún faltan. Debes corregir aquellos ejercicios incorrectos y revisar los contenidos de los temas en que fallaste. Bien, has avanzado, aunque aún queda camino por andar.
79 % a 70 %	4,8 a 5,4	Medio	Has logrado entender una buena parte de los contenidos; sin embargo, aún faltan otros y afianzar los primeros. Corrige las respuestas erróneas; puedes pedir ayuda si lo deseas. Revisa los contenidos. Puedes hacerlo mucho mejor.
89 % a 80 %	5,5 a 6,2	Medio alto	Has logrado adquirir gran parte de los contenidos. Revisa los ejercicios en los que fallaste y repasa los respectivos contenidos. ¡Lo has hecho bien!
100 % a 90 %	6,3 a 7,0	Alto	Has logrado aprender todos o casi todos los contenidos tratados. ¡Muy bien! Has logrado los objetivos propuestos. Sigue así.

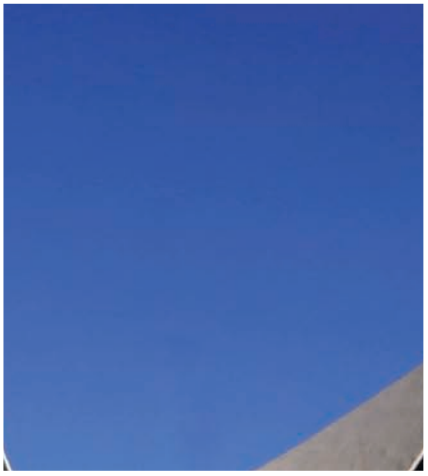
UNIDAD 2

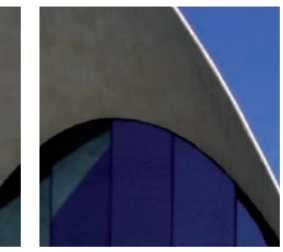
Ecuaciones cuadráticas y función cuadrática



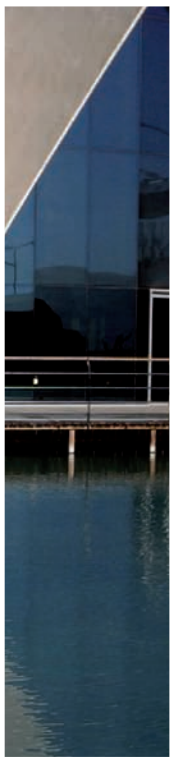


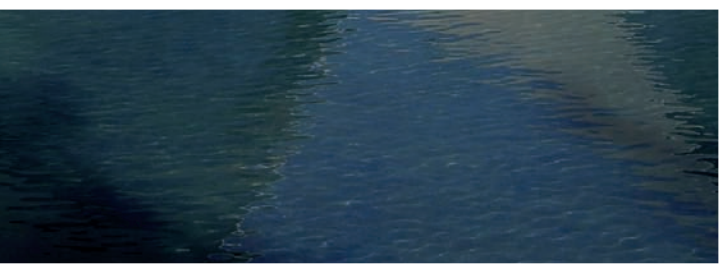












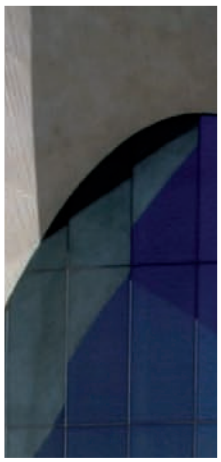


ECUACIONES CUADRÁTICAS Y FUNCIÓN CUADRÁTICA

- Concepto de ecuación cuadrática
- Concepto de función cuadrática
- Tipos de ecuaciones cuadráticas y métodos de resolución
- Análisis de la función cuadrática
- Problemas de aplicación a la vida diaria



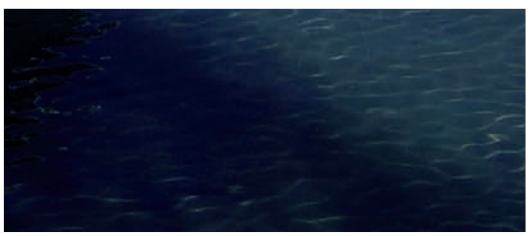


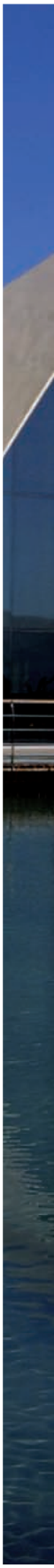












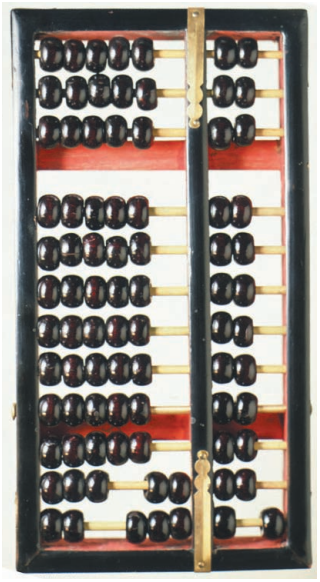
EN ESTA UNIDAD APRENDERÁS A:

1. Resolver ecuaciones de segundo grado con una incógnita por completación de cuadrados, por factorización o por inspección, con raíces reales o complejas.
2. Interpretar las soluciones y determinar su pertenencia al conjunto de los números reales o complejos.
3. Deducir la fórmula de la ecuación general de segundo grado y discutir sobre sus raíces y su relación con la función cuadrática.
4. Resolver problemas asociados a ecuaciones de segundo grado con una incógnita.
5. Analizar la existencia y pertinencia de las soluciones de acuerdo con el contexto en que se plantea el problema.
6. Representar y analizar el gráfico de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$, para distintos valores de a, b y c.
7. Discutir de las condiciones que debe cumplir la función cuadrática para que su gráfica intersecte el eje x (ceros de la función).
8. Usar algún software para el análisis de las variaciones de la gráfica de la función cuadrática a partir de la modificación de los parámetros.
9. Modelar situaciones o fenómenos asociados a funciones cuadráticas.



La resolución de la ecuación de segundo grado se remonta a los comienzos del desarrollo de la matemática en general y a los del álgebra en particular. La ecuación de segundo grado y su solución tiene antiguo origen. En el 2000 a. C., los ingenieros chinos, egipcios y babilónicos se topaban con un problema. Sabían el valor del área de un terreno rectangular o en forma de T, pero no podían encontrar las longitudes del terreno en cuestión. Es decir, lo que en nuestros días se resolvería usando una ecuación cuadrática.

En Egipto, los ingenieros se dedicaban a calcular el valor de las áreas de los posibles cuadrados y rectángulos por utilizar, construyendo así tablas como una forma de resolver el problema de las longitudes. En China se usó una doble comprobación de operaciones simples matemáticas para resolver este problema, las que fueron asombrosamente fáciles por el empleo extendido del ábaco. En Babilonia, la tablilla cuneiforme BM13901 contiene abundante material relativo a la resolución de ecuaciones de segundo grado con una incógnita, donde se pueden apreciar los conocimientos que, sobre el particular, tenían los matemáticos babilonios.



Ábaco: instrumento que se utiliza para realizar operaciones aritméticas sencillas como sumas, restas y multiplicaciones. Se compone de un cuadro de madera con barras paralelas por las que corren esferas o algún otro elemento móvil.

En Grecia, la ecuación de segundo grado fue desarrollada por el matemático Diofanto de Alejandría. Por el año 628 d. C. en la India, una ecuación de segundo grado equivalente a la actual $x^2 - 10x = -9$ fue tratada por el matemático indio Brahmagupta, quien propuso una forma de resolverla. Posteriormente, en el siglo IX, el matemático árabe Mohamed ibn Musa al-Khowarizmi utilizó una estrategia para resolver la ecuación $x^2 + 10x = 39$.

La solución de las ecuaciones de segundo grado fue introducida en Europa por el matemático judeoespañol Abraham bar Hiyya en su *Liber embadorum*.



Diofanto de Alejandría (200 d. C. - 284 d. C.)

Ahora bien, con el desarrollo de las funciones, se fue estudiando un tipo especial de ellas: las llamadas funciones polinómicas, es decir, aquellas que están definidas por un polinomio. Por ejemplo, $f(x) = x^3 + 1$, que es una función polinómica de tercer grado.

En esta ocasión conoceremos las funciones cuadráticas, es decir, aquellas de grado dos; estudiaremos su gráfica y nos valdremos de ellas para profundizar más en su análisis. También conoceremos qué situaciones se modelan con este tipo de funciones. Emprendamos este viaje al mundo de las ecuaciones y funciones cuadráticas.

Conocimientos previos

En 1° y 2° medio trabajaste y aprendiste conceptos fundamentales en el desarrollo de la matemática. Uno de ellos es el de factorización. Aunque muchas veces no le veas utilidad a lo que estás estudiando, de seguro llegará el momento en que lo necesitarás para seguir aprendiendo.

Para desarrollar nuestra unidad, debemos recordar algunas cosas de este tema.

Factorización

Factorizar una expresión algebraica es expresarla como el producto de factores simples.

Como recordarás, hay muchos casos de factorización. Repasaremos tres de ellos, que son los que utilizaremos en esta unidad.

a. Factor común: Una expresión algebraica se puede factorizar en este caso cuando existe, en todos sus términos, un factor común, es decir, letras que se repiten en todos los términos algebraicos de la expresión (con el menor exponente que aparezcan), y/o un máximo común divisor entre sus coeficientes numéricos.

Por ejemplo:

1. $2xy + 3xz = x(2y + 3z)$ *(Uno de los factores del producto, es el factor común, en este caso x)*

2. $4x^2 - 10xy = 2x(2x - 5y)$ *(Factor común, 2x. Recuerda que siempre puedes comprobar tu factorización. Si aplicas la propiedad distributiva del producto sobre la suma $2x(2x + 3y)$, deberías obtener la expresión con la que comenzaste)*

3. $12x^2y^3 + 3x^2y - 9x^2y^2 = 3x^2y(4y^2 + 1 - 3y)$

b. Trinomio de la forma $x^2 + bx + c$: Una expresión algebraica de esta forma se puede factorizar, en algunas ocasiones, en dos binomios con un término común.

Por ejemplo:

1. $x^2 + 6x + 5 = (x + 5)(x + 1)$ *(Buscamos dos números que multiplicados den 5 y sumados 6)*

2. $x^2 + 7x - 18 = (x + 9)(x - 2)$

3. $x^2 - 15x + 36 = (x - 12)(x - 3)$



c. Trinomio cuadrado perfecto: Una expresión algebraica se puede factorizar por este caso, cuando es un trinomio en que dos de sus términos son cuadrados perfectos y el tercer término es el doble producto de las raíces cuadradas de los términos anteriores. Este es el desarrollo de un cuadrado de binomio. Por ejemplo:

1. $x^2 + 6x + 9 = (x + 3)^2$

cuadrado de x | doble producto de x y 3 | cuadrado de 3

2. $4x^2 - 20x + 25 = (2x - 5)^2$

3. $9x^2 + 24x + 16 = (3x + 4)^2$

Trabaja

Ejercita lo aprendido en años anteriores.

1 Identifica a cuál de los tres casos corresponde cada ejercicio y luego factorízalo.

a. $b^4 - b^3$

b. $14a - 21b + 35$

c. $4m^2 - 20am$

d. $ax + bx + cx$

e. $4a^3bx - 4bx$

f. $20x + 12xy + 4xz$

g. $x^2 + 3x - 4$

h. $a^2 + 4a + 3$

i. $m^2 + 5m - 14$

j. $y^2 - 9y + 20$

k. $t^2 - 6 - t$

l. $p^2 - 9p + 8$

m. $u^2 - 10u + 25$

n. $9 - 6x + x^2$

o. $16 + 40x^2 + 25x^4$

p. $1 + 49m^2 - 14m$

q. $36 + 12m^2 + m^4$

r. $x^2 + x - 2$

s. $20 + a^2 - 21a$

t. $x^4 - 2x^3 - 3x^2$

u. $2x^5 - 6x^4 - 16x^3 + 24x^2 + 32x$

v. $x^2 - 24x + 144$

w. $\frac{3}{4}x^2y - \frac{9}{8}xy^2$

x. $n^2 + 6n - 16$

2 Factoriza las siguientes expresiones algebraicas:

a. $ab + ac + ad$

b. $5ax^2 - 10ax$

c. $6p^2(x - y) - 3q(x - y)$

d. $5a^2(3a + b) + 3a + b$

e. $3m + 3n + 4xm + 4xn$

f. $kd + bd - kw - bw$

g. $k^2 + 4k + 4$

h $25x^2 - 20xm + 4m^2$

i. $a^{2n} + 2a^nb^m + b^{2m}$

j $p^2 + p - 6$

k. $m^2 - 6m + 8$

3 Si se sabe que una diferencia de cuadrados se puede factorizar como suma por diferencia, de la siguiente forma $x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$, entonces, factoriza las siguientes expresiones algebraicas:

a. $25m^2 - 4p^2$

b. $a^2k^2 - b^4m^4$

c. $\frac{1}{4}a^2 - \frac{16}{25}b^2$

d. $a^{2c} - 4b^{2m}$

e. $25x^2 - 16y^8$

f. $m^{6a} - p^{8b}$

4 Factoriza completamente las siguientes expresiones algebraicas. Recuerda que debes factorizar dos o más veces para desarrollar completamente los ejercicios.

a. $27x^3 - 12x$

b. $5x^3 - 40x^2 + 80x$

c. $x^4 - 81$

d. $3x^5 - 18x^3 + 27x$

5 Factoriza las expresiones siguientes:

a. $(a-b+1)^2 - (a+b-1)^2$

b. $(3x+1)^2 - 7(3x+1) + 12$

6 Determina el valor de k en cada caso para que se cumpla la igualdad:

a. $x^2 + kx + 24 = (x-3)(x-8)$

b. $kx^2 + x - 15 = (2x-3)(3x+5)$

c. $x^3 - 8 = (x-2)(k-2x+4)$

7 Decide si las siguientes expresiones están bien factorizadas o no:

a. $x^2 - 2 = (x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})$

b. $4x^2 - 1 = 2(2x-1)(x+1)$

c. $2x^2 + 5x - 3 = 2\left(x - \frac{1}{2}\right)(x+3)$

8 Responde las siguientes preguntas. Justifica matemáticamente tu respuesta:

a. Se sabe que el área de un rectángulo es $6x^2 - x - 2$. Si uno de sus lados es $2x+1$, ¿Cuál es el valor del otro lado?

b. Si x e y son enteros positivos y $x - y$ es par, ¿será $x^2 - y^2$ divisible por 4?

c. ¿Es verdad que la diferencia entre el cuadrado de un número y dicho número es siempre par?

Revisemos lo aprendido

Responde las siguientes preguntas:

- ¿Recordé cómo factorizar y los casos de factorización planteados?
- ¿Entendí los ejercicios resueltos?
- ¿Pude hacer correctamente los ejercicios propuestos?
- ¿Colaboré con mis compañeros en el desarrollo de las actividades?

Recuerda que si has tenido dificultades para hacer los ejercicios y no te sientes seguro o segura en los contenidos, debes volver a repasar o pedir ayuda a tus compañeros o compañeras y/o a tu profesor o profesora, ya que los aprendizajes a tratar en esta unidad sobre ecuación y función cuadrática necesitan una real comprensión de la factorización y sus conceptos relacionados dado que te serán muy útiles al momento de resolver los ejercicios y problemas planteados.



Ecuaciones cuadráticas: ¿qué son, cómo se resuelven y para qué sirven?

En esta sección aprenderás

Qué es una ecuación cuadrática, cómo se resuelven y qué problemas nos ayudan a resolver.

Desarrollarás las siguientes habilidades:

- Identificar, calcular, interpretar y resolver problemas.

Habilidades por actividad:

- Identificar y calcular: 1 – 2 – 3 – 4 – 6.
- Interpretar y resolver problemas: 5 – 7 – 8. 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9.

En el consejo de curso, Daniel y Paulina darán a conocer los costos que tendrá su fiesta de graduación. Junto con sus familias, han reunido $1 197 000. El señor Lucas Montecinos, encargado de la empresa que más les gusta, les dijo que si él les rebajara en $1 000 el costo por persona, entonces podrían ir 12 personas más. Interesados por esta oferta, deben hacer los cálculos de la cantidad de personas que pueden ir y cuánto costaría el menú por cada uno; la idea es que vayan con sus parejas y, tal vez, los papás.

Celeste, la hermana de Daniel, que estaba escuchando la conversación, le dijo a Daniel: "¿Pero cómo pueden calcular eso?" Daniel le explicó:

Llamemos x a la cantidad de personas que van e y al costo de la cena, por persona, entonces podemos anotar que:

$x \cdot y = 1\,197\,000$

Ahora bien, como nos rebajarán $1 000 y podrán ir 12 personas más, podemos anotar también que:

$(x + 12) \cdot (y - 1\,000) = 1\,197\,000$

Despejamos la incógnita y de la primera ecuación y luego la remplazamos en la segunda:

Si $x \cdot y = 1\,197\,000 \Rightarrow y = \frac{1\,197\,000}{x}$

Remplazando en la segunda ecuación, tenemos que:

$(x + 12) \cdot \left(\frac{1\,197\,000}{x} - 1\,000\right) = 1\,197\,000$

Multiplicando término a término, se tiene:

$1197000 - 1000x + \frac{14\,364\,000}{x} - 12000 = 1197000 \quad / -1\,197\,000$

$\Rightarrow \; -1\,000x + \frac{14\,364\,000}{x} - 12\,000 = 0 \quad / \cdot x$

$\Rightarrow \; -1\,000x^2 + 14\,364\,000 - 12\,000x = 0$

Daniel le dijo que estas eran un tipo de ecuaciones distintas y que en 3° medio las estudiará en el colegio.

Al igual que Celeste, que lo hará pronto, estudiemos nosotros estas ecuaciones para terminar luego de resolver el problema de Daniel y Paulina.

Definiremos ecuación cuadrática a aquella ecuación en la que al menos una de las incógnitas involucradas está elevada al cuadrado, siendo la mayor potencia de ella.

Así, una ecuación cuadrática será toda ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$ y a, b y c números reales.

Analizaremos los distintos tipos de ecuaciones cuadráticas y su manera de resolverlas, partiendo desde las más sencillas hasta las más complejas. Antes de comenzar con esta tarea debes tener especial cuidado en el cálculo de raíces cuadradas ya que al extraer raíz cuadrada de un número x que está elevado al cuadrado se tiende a pensar que la respuesta es x, es decir, $\sqrt{x^2} = x$. Esto ocurre ya que la cantidad que está dentro de la raíz debe ser siempre positiva, pero como está al cuadrado, esta cantidad nunca se indefine, por ejemplo:

$$\sqrt{4^2} = \sqrt{16} \text{ o } \sqrt{(-4)^2} = \sqrt{16}$$

Como vemos, que la cantidad subradical sea positiva, no quiere decir que el valor inicial "x" es positivo, este caso puede ser 4 o -4 pues ya sea que se trate de un número positivo o negativo, al elevar este al cuadrado se obtendrá siempre un número positivo. De esta manera y para ser precisos, $\sqrt{x^2} = |x|$.

Recordar y archivar

Un polinomio es una expresión algebraica con más de dos términos; por ejemplo, $4x^2 - 3xy + 4z - 1$.

Se llama polinomio en una sola variable a aquel en que el factor literal de sus términos está compuesto solo por potencias de una misma variable; por ejemplo: $2x^2 + 2x - 2$.

Se llama grado de un polinomio en una variable al mayor exponente de los términos de un polinomio; por ejemplo: el polinomio $2x^3 - 4$ tiene grado 3 y el polinomio $-x^4 - 3x^2 + 1$ tiene grado 4.

Ecuaciones cuadráticas incompletas de la forma $ax^2 + c = 0$, con a y c números reales y $a \neq 0$

En este caso, solo se distinguen términos de grado dos y grado 0 (o término libre).

Para resolverla debemos despejar la incógnita.
Por ejemplo:

1 $2x^2 - 8 = 0 \quad / +8$

$\Rightarrow 2x^2 = 8 \quad /:2$

$\Rightarrow x^2 = 4$

Al extraer raíz cuadrada

$\sqrt{x^2} = \sqrt{4}$

$|x| = 2$

De donde se obtiene

$x = 2$ ó $-x = 2 \Rightarrow x = 2$ ó $x = -2$

Recordar y archivar

A las soluciones de una ecuación se les llama también raíces de la ecuación. Aunque se nombran de manera similar, no son lo mismo que las raíces de un número.

Veamos otro ejemplo en el que no se presenta directamente el tipo de ecuación que estamos estudiando, sino que, al desarrollar y reducir se obtiene este caso:

2 $3(x^2 - 5) = 2x^2 + 9$

$\Rightarrow 3x^2 - 15 = 2x^2 + 9 \quad / -2x^2$

$\Rightarrow x^2 - 15 = 9 \quad / +15$

$\Rightarrow x^2 = 24 \quad /\sqrt{\ }$

$\sqrt{x^2} = \sqrt{24}$

$|x| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

Luego

$x = 2\sqrt{6}$ ó $-x = 2\sqrt{6} \Rightarrow x = 2\sqrt{6}$ ó $x = -2\sqrt{6}$

(¿Te das cuenta de que esta ecuación presenta solo términos de grado 2 y grado 0 para x?)



3 $\frac{x+2}{x-2}+\frac{x-2}{x+2}=\frac{40}{x^2-4}$ /m.c.m. $(x-2)(x+2)$

(Recuerda que debes factorizar los denominadores para calcular el mínimo común múltiplo y luego multiplicar por dicha expresión ambos lados de la igualdad)

$(x+2)^2+(x-2)^2=40$

$x^2+4x+4+x^2-4x+4=40$

$2x^2+8=40 \quad / -8$

$2x^2=32 \quad /:2$

(¿Es este el caso que estamos estudiando?)

$x^2=16 \quad /\sqrt{\ }$

Es decir, $\sqrt{x^2}=\sqrt{16} \rightarrow |x|=\sqrt{16}=4$

Luego $x=4$ o $-x=4 \Rightarrow x=4$ o $x=-4$

Recuerda que en las ecuaciones que tienen expresiones algebraicas en los denominadores de una expresión fraccionaria, debes comprobar que ninguno de ellos se haga 0 al remplazar la incógnita por el valor obtenido, pues no existe una fracción con denominador 0. En este caso, esa ya no sería solución.

Veamos, el m.c.m. $(x+2)(x-2)$ de la ecuación anterior solo se hace cero si $x=2$ o si $x=-2$, entonces sabemos que la solución $x=4$ es la solución de la ecuación.

4 $\frac{x}{x+2}+\frac{x}{x-2}=1$ /m.c.m. $(x-2)(x+2)$

$x(x-2)+x(x+2)=(x-2)(x+2)$

$x^2-2x+x^2+2x=x^2-4$

$2x^2=x^2-4 \quad / -x^2$

$x^2=-4 \quad /\sqrt{\ }$

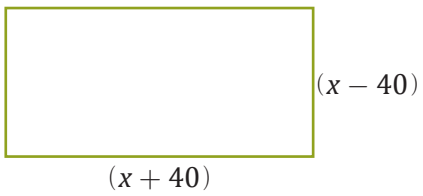
por supuesto es un número imaginario como los que estudiaste en la unidad anterior.

$\sqrt{x^2}=\sqrt{-4} \Rightarrow |x|=\sqrt{-4}$

Luego $x=2i$ o $-x=2i \Rightarrow x=2i$ o $x=-2i$

5 Arnoldo está preparando su primer trabajo para el taller de diseño. Le han pedido que haga un collage sobre una madera de área $900\ \text{cm}^2$ con cuadraditos de colores de $2 \cdot 2$ cm. La madera es un rectángulo, donde el largo y el ancho difieren en 80 cm. ¿Cómo podrá Arnoldo saber cuántos cuadraditos colocará a lo largo y a lo ancho?

Después de un momento de nerviosismo, decidió, ingeniosamente, calcular los lados del rectángulo, para lo que hizo el siguiente bosquejo:



$(x+40)(x-40)=900$ *(suma por diferencia)*

$x^2-1\,600=900 \quad / +1\,600$

$x^2=2\,500$

$\sqrt{x^2}=\sqrt{2\,500} \Rightarrow |x|=50$

Luego $x=50$ o $-x=50 \Rightarrow x=50$ o $x=-50$

Como se trata de una longitud, usaremos solo el resultado positivo, entonces, el largo será $50+40$, es decir, 90 cm, y el ancho será $50-40$, es decir, 10 cm.

Así, deberá colocar 45 cuadraditos a lo largo y 5 a lo ancho.

Observa que, en este caso, si la ecuación tiene solución en los números reales, las raíces de las ecuaciones son una la inversa aditiva de la otra, es decir, si una es a , entonces la otra será $-a$.

Si la ecuación no tiene solución en los números reales, estas son complejas conjugadas.

Trabaja

Resuelve cada ecuación cuadrática en tu cuaderno.

1 Incluye todo el desarrollo y comprueba tus respuestas en el solucionario.

a. $x^2 - 12 = 0$

b. $\frac{6x^2 - 11}{114 + x^2} = 1$

c. $x^2 = -1$

d. $(14x + 5)(1 - x) = x(9 - x)$

e. $2y + \left(7y - \frac{1}{2}\right)^2 = 2\left(1 - \frac{5}{2}y\right)$

f. $\frac{x^2 - 6}{2} - \frac{x^2 + 4}{4} = 5$

g. $\frac{x + 4}{x - 2} + \frac{x - 2}{x - 4} + \frac{4x}{x^2 - 6x + 8} = 0$

h. $\frac{1}{4z^2} - \frac{1}{9z^2} = \frac{1}{24}$

i. $2\sqrt{1 + 0{,}5x^2} = \sqrt{166}$

j. $\sqrt{\sqrt{\frac{5x^2 - 6}{3x^2 + 2}}} = 1$

Ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx = 0$, con a y b números reales y $a \neq 0$, mediante el método de factorización.

En este tipo de ecuaciones solo se distinguen términos de grado dos y grado uno; no hay término independiente o de grado cero. Por lo tanto, ya no se puede despejar la incógnita para igualarla a un número y luego extraer raíz cuadrada. Así, si tenemos una ecuación de este tipo, es decir: $ax^2 + bx = 0$, extraemos factor común x:

$x(ax + b) = 0$

Para determinar las soluciones de las ecuaciones cuadráticas se debe aplicar la propiedad del producto igual a cero.

Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Igualamos a cero el 1er factor: $x = 0$

Una solución siempre será $x = 0$.



La otra solución se obtiene al resolver la ecuación de primer grado resultante de igualar a cero el 2º factor: $ax + b = 0$

Luego, despejando se obtiene: $x = \frac{-b}{a}$

Miremos algunos casos, a modo de ejemplo.

1 $x^2 - 9x = 0$

Si factorizamos por x, tendremos que:

$x(x-9) = 0$ *(Ahora bien, si miramos que este es un producto o multiplicación que es igual a 0, esto solo se puede cumplir si alguno de los factores es 0; por lo tanto, podemos separar esta ecuación en dos)*

$x = 0$ o $x - 9 = 0 \quad / + 9$

$x = 0$ o $x = 9$ son las soluciones.

2 $(x+4)^2 + (x-3)^2 = (x+5)^2$

Esta es una ecuación en la que debes desarrollar los cuadrados de binomios y reducir términos semejantes.
Veamos lo que obtenemos.

$x^2 + 8x + 16 + x^2 - 6x + 9 = x^2 + 10x + 25$ *¿Notas que a través del desarrollo algebraico se obtiene una ecuación con términos de grado 2 y 1 solamente?*

$2x^2 + 2x + 25 = x^2 + 10x + 25 \quad / - 25$

$2x^2 + 2x = x^2 + 10x \quad / - 10x$

$2x^2 - 8x = x^2 \quad / - x^2$ *(Por lo tanto, debemos resolverla como lo hicimos en el ejercicio anterior)*

$x^2 - 8x = 0$ *(Debemos igualar a 0 y factorizar para poder resolver)*

$x(x-8) = 0$

$x = 0 \quad$ o $\quad x - 8 = 0$

$x = 0 \quad$ o $\quad x = 8$ son las soluciones.

3 $\frac{3(x^2-5)}{5} - \frac{2(x^2-70)}{7} = 17 + x \quad / \text{m.c.m. } 35$ *(¿Por qué debemos multiplicar por el m.c.m?)*

$21(x^2-5) - 10(x^2-70) = 35(17+x)$

$21x^2 - 105 - 10x^2 + 700 = 595 + 35x$

$11x^2 + 595 = 595 + 35x \quad / - 595$

$11x^2 = 35x \quad / - 35x$ *(¿Ya lo notaste? ¡Muy bien!, esta ecuación es del mismo tipo de las que estamos estudiando)*

$11x^2 - 35x = 0$

$x(11x - 35) = 0$ *(Factorizamos)*

$x = 0 \quad$ o $\quad 11x - 35 = 0 \quad / + 35$

$11x = 35 \quad /:11$

$x = \frac{35}{11}$

Por lo tanto, las soluciones son: $x = 0$ o $x = \frac{35}{11}$

4 La profesora pidió que escribieran un cuento de fantasía. Esto es parte de lo que Aukán escribió:

... después de mucho andar y aventurar, Nawel llegó frente a una gran puerta cuadrada en aquel país lleno de sorpresas. Con voz profunda, la puerta le preguntó: "¿Queréis pasar, extranjero?" "Sí", respondió Nawel, casi adivinando lo que venía y ya muy cansado para devolverse. "Pues bien –dijo la puerta–, deberás hallar mis medidas, sabiendo que si a 8 veces mi área, en metros cuadrados, le restas 12 veces la medida de mi lado, tendrás nuevamente 12 veces la medida del lado".

¿Qué le respondió Nawel a la puerta?

Este es su razonamiento:

Llamemos x a la medida del lado de la puerta; entonces tendremos que:

$8x^2 - 12x = 12x \qquad / - 12x$

$8x^2 - 24x = 0 \qquad$ *(Factorizamos)*

$x(8x - 24) = 0$

$x = 0 \quad \text{o} \quad 8x - 24 = 0 \qquad / + 24$

$8x = 24 \qquad /:8$

$x = 3$

Como el lado de la puerta no podía medir 0 metros, entonces debía medir 3 metros. Nawel dio la respuesta y la puerta se abrió.

Observa que, en este caso, siempre hay dos soluciones reales, donde una de ellas es siempre 0 y la otra es un número real cualquiera.

Trabaja

Aplica lo aprendido.

2 Resuelve cada ecuación cuadrática en tu cuaderno y verifica tus respuestas consultando en el solucionario.

a. $5x^2 - 41x = 0$

b. $\frac{9x}{2x^2} = 2$

c. $\frac{19x^2 + 12}{(3x + 2)(2x - 3)} = -2$

d. $\frac{x^2 + 4}{(x - 3)(x - 5)} = \frac{4}{15}$

e. $4 + \left(6y - \frac{3}{4}\right)^2 = \frac{73}{16}$

f. $(7 - 11x)(11 - 7x) - (1 - x^2) = 4(19 - 4x)$

g. $\frac{x^2 - 5}{3} - \frac{4(x^2 - 5)}{12} = \frac{4(x^2 + 5x)}{4}$

h. $\frac{2x - 1}{x + 2} - \frac{1 - 2x}{x - 2} = \frac{4x}{x^2 - 4}$

i. $\sqrt{1 - 0{,}\overline{4}x}\sqrt{1 + 0{,}\overline{4}x} = \sqrt{5(1{,}\overline{4}x + 0{,}2)}$

j. $\frac{\sqrt{175z^2 - 112z}}{\sqrt{7}} = 3z$

Trabaja

1 Resuelvan en parejas los siguientes problemas y comparen sus resultados con los otros grupos. Hagan el desarrollo en su cuaderno. No olviden revisar sus respuestas en el solucionario.

a. El profesor de Lenguaje de Macarena le pidió como tarea que hiciera un poema que tuviera rima e integrara las asignaturas de Lenguaje y Matemática. A Macarena le gustaban los desafíos, así que después de un rato escribió:

Un número entero soy y qué cansado estoy.
Ocho veces han multiplicado mi sucesor
por mi antecesor hoy
y nadie entiende cómo he terminado
ocho unidades
menor que yo mismo, aquí donde estoy...

¿A qué número se refiere Macarena en su poema?

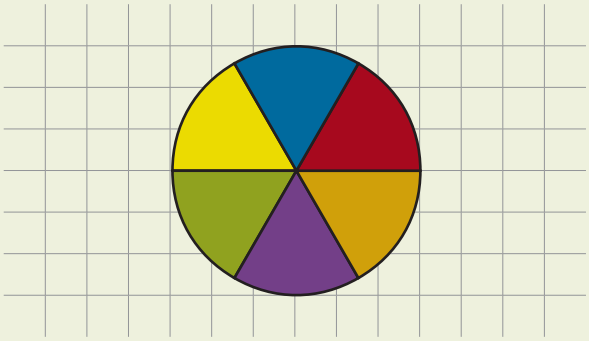
b. A Bastián le dijo su mamá que se puede encontrar un número que al sumarle 6 y 8, se forman otros dos cuyo producto es 48. ¿Será cierto? ¿Cuál es este número?

c. Evelyn tiene mucha imaginación y decidió hacer una ruleta como la de la figura, la que se divide en 6 sectores circulares iguales y se enumeran del 1 al 6, desde el rojo y en sentido antihorario. Para que sea más entretenido y plantee algún desafío para quienes juegan, pensó colocar ecuaciones que den por resultado los números deseados (obviando la solución que se repite en todas ellas). Esta es la lista de ecuaciones planteadas. ¿Puedes colocarlas correctamente en la ruleta?

$\frac{2}{x-1} = x - 2$, $(x-7)(x+2) + 14 = 0$

$(x-2)^2 = 4$, $4x(x-2) = -2x(x-14)$

$x(x-1) = 0$, $x(x+1) + x(x-3) = x^2$



d. A Octavio le gusta coleccionar monedas de $\$\,500$. Él guarda siempre la misma cantidad de dinero en cada una de las bolsas que tiene destinadas para ello. Un día su mejor amigo le pregunta cuántas bolsas tiene y Octavio le responde: "Tú crees que tengo el mismo número de bolsas que de monedas en cada bolsa, pero no es así. Partiendo de tu supuesto, te diría que debes disminuir en 50 las bolsas y en 30 las monedas de cada bolsa para obtener $\$\,750\,000$".

Ahora dime, ¿cuántas bolsas y cuántas monedas tiene Octavio?

e. El hermano menor de Francisca cantaba por la casa: "Le sumo 5, le sumo 10, al doble le sumo 3, le sumo 6". Francisca lo escuchó y pensó que era otra de las locuras de su hermano. Después de un rato y cansada de escuchar lo mismo, le preguntó qué era todo aquello. Él le dijo que existía un número que generaba otros cuatro si hacías lo que él cantaba, donde estos últimos formaban una proporción colocándolos en el mismo orden cantado. Miró a su hermana y le preguntó: ¿Cuál es?

Responde tú también la pregunta.

Ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con a, b y c números reales y $a \neq 0$, donde el trinomio es factorizable

En este caso, hay términos de grado dos, uno y cero (o término independiente) y, además, el trinomio $ax^2 + bx + c$ se puede factorizar.

Aplicaremos el mismo razonamiento que para el caso anterior.

Veamos:

1 $x^2 + 7x + 12 = 0$

$(x + 3)(x + 4) = 0$ *(Factorizamos)*

(Recuerda, buscabas dos números que multiplicados dieran 12 y sumados, 7. Separamos el producto en dos factores iguales a 0)

$x + 3 = 0$ o $x + 4 = 0$ *(Resolvemos cada una de las ecuaciones)*

$x = -3$ o $x = -4$ son las soluciones.

2 $(x + 6)(x - 6) - 8 = 1 - 4x$ *(Desarrollamos; resuelve como suma por diferencia)*

$x^2 - 36 - 8 = 1 - 4x$

$x^2 - 44 = 1 - 4x \quad / -1 + 4x$

$x^2 + 4x - 45 = 0$ *(Factorizamos. Recuerda que debes encontrar dos números que multiplicados den –45 y sumados, 4)*

$(x + 9)(x - 5) = 0$

$x + 9 = 0$ o $x - 5 = 0$

$x = -9$ o $x = 5$ son las soluciones.

3 $\frac{9}{2} - \frac{(x-6)^2}{2} = x - 1 \quad /\text{m.c.m. } 2$

$9 - (x - 6)^2 = 2x - 2$ *(Recuerda mantener el signo – delante del paréntesis porque después debes cambiar signos)*

$9 - (x^2 - 12x + 36) = 2x - 2$

$9 - x^2 + 12x - 36 = 2x - 2$

$-x^2 + 12x - 27 = 2x - 2 \quad / -2x + 2$

$-x^2 + 10x - 25 = 0 \quad / \cdot -1$

$x^2 - 10x + 25 = 0$

$(x - 5)(x - 5) = 0$

$x - 5 = 0$ o $x - 5 = 0$ *(Factorizamos)*

$x = 5$ o $x = 5$ *(Soluciones)*

En este caso, ambas soluciones son iguales; por lo tanto, decimos que la ecuación solo tiene una solución, que es $x = 5$

4 $\frac{x+3}{3}-\frac{2}{x-4}=\frac{x}{6}+\frac{x-2}{4}$ /m.c.m. $12(x-4)$

$4(x+3)(x-4)-24=2x(x-4)+3(x-2)(x-4)$
$4(x^2-x-12)-24=2x^2-8x+3(x^2-6x+8)$
$4x^2-4x-48-24=2x^2-8x+3x^2-18x+24$
$4x^2-4x-72=5x^2-26x+24$ $/-5x^2+26x-24$
$-x^2+22x-96=0$ $/\cdot -1$

$x^2-22x+96=0$ *(Es más fácil factorizar si el coeficiente numérico de x^2 es positivo)*

$(x-16)(x-6)=0$ *(Factorizamos)*

$x-16=0$ o $x-6=0$
$x=16$ o $x=6$

Si nos fijamos en los denominadores, $x-4$ solo se hará 0 (cero) si $x=4$; por lo tanto, las soluciones de la ecuación son:
$x=16$ o $x=6$

5 $3x^2+8x-35=0$

Para factorizar este trinomio procederemos de la siguiente manera:

- multiplicamos el coeficiente del término de grado 2 por el término de grado 0, esto es $3\cdot -35=-105$
- buscamos dos números que multiplicados den -105 (producto calculado antes) y que sumados den 8 (coeficiente del término de grado 1). Estos son: 15 y -7 (ya que, $15\cdot -7=-105$ y $15+-7=8$)
- Escribimos nuevamente el trinomio dado, cambiando el término de grado 1 por la suma de los dos números encontrados en el paso anterior:

$$3x^2+8x-35=0$$
$$3x^2+15x-7x-35=0$$

- Factorizamos por agrupación:

$\underbrace{3x^2+15x}-\underbrace{7x-35}=0$

$3x(x+5)-7(x+5)=0$

$(x+5)(3x-7)=0$

Ahora bien, una vez factorizado, procedemos a aplicar la propiedad, cada uno de los factores puede ser igual a 0, por lo tanto:

$x+5=0$ o $3x-7=0$

$x=-5$ o $x=\frac{7}{3}$

Estas son las soluciones de la ecuación dada.

Observa que en este caso puedes tener dos soluciones reales y distintas o dos soluciones reales e iguales.

Trabaja

Aplica lo aprendido.

3 En tu cuaderno, desarrolla cada ejercicio, sin olvidar comprobar tus respuestas en el solucionario.

a. $x^2 - 14x + 45 = 0$

b. $4x^2 - 4x + 1 = 0$

c. $2x^2 + 7x - 4 = 0$

d. $4y^2 + 1 = 9 + 4y$

e. $\frac{2x + 11}{x} + \frac{x - 5}{3} = 5$

f. $\frac{3x^2 - 8x + 15}{2} = \frac{3(x^2 + 9) + 4x(x - 4) + x}{5}$

g. $(x - \sqrt{3x})(x + \sqrt{3x}) = 18$

h. $\sqrt{x} + \frac{4}{\sqrt{x}} = 5$

i. $1 = \frac{x + 1}{\sqrt{7 + x}}$

j. $\sqrt{2x + \frac{1}{8x}} = 1$

Trabaja

2 Desarrolla los siguientes problemas con tu grupo y comparen sus resultados con otros grupos, defendiendo o incluyendo los procedimientos realizados por los demás. Revisen las respuestas encontradas.

a. "Mira –le dijo Lucía a Reinaldo–, aquí tengo 4 ecuaciones cuadráticas que, de a pares, poseen las mismas soluciones". ¿Puedes encontrar los dos pares y decir cuáles son sus soluciones?

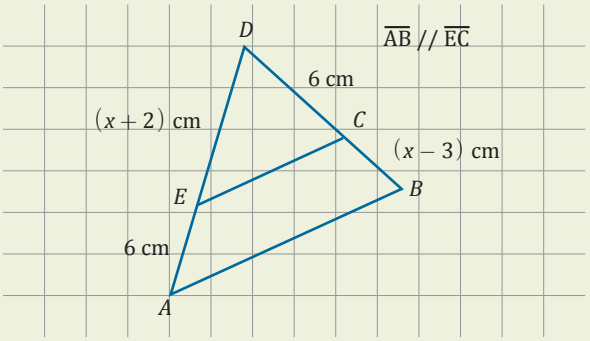
A: $x^2 - 8x + 15 = 0$

B: $x(x + 3) = -5(4 + x) + 5$

C: $x(x - 5) = 3(7 + x) - 36$

D: $x^2 + 8x + 15 = 0$

b. A Jasmín se le ha presentado el siguiente problema: debe dibujar dos triángulos semejantes, como muestra la figura adjunta. ¿Cuál debe ser el valor de x?



c. Cristián debe hacer un diseño para el marco de uno de sus cuadros. Él quiere que tenga forma de trapecio, de manera que la base mayor y la menor tengan 5 dm más y 2 dm menos, respectivamente, que su altura. Para ello, realizó algunos cálculos y determinó que el área de la tela que debe colocar en el marco debe ser de 76 dm^2. ¿Cuáles serán las medidas de las bases y la altura del marco?

d. La profesora del curso de Carolina ha decidido hacer un concurso de conocimientos. La última pregunta del concurso decía que ganaría quien diera correctamente, en el menor tiempo posible, la solución de las ecuaciones A: $x(x - 7) = 18$ y B: $(2x + 1) - 3(x + 5) = x^2 + 12x + 22$. Carola, respondió correctamente y se demoró 1 minuto y 35 segundos. ¿Puedes tú superarla?

e. El señor Montero, dueño de una plantación de almendras, plantó 324 árboles en una parte de su terreno. Por razones de producción del resto de su fundo, necesita mover estos árboles, de manera que ocupen un terreno rectangular, donde el número de árboles colocados en cada fila supere en 15 unidades al número de árboles puestos en cada columna. ¿Cuántos árboles debe colocar en cada una de las filas y en cada una de las columnas?

Método de completación de cuadrado

Podemos estudiar ahora otro método para resolver ecuaciones cuadráticas, llamado ***método de completación de cuadrado***. Esto es, transformaremos el trinomio dado en una expresión que contenga un cuadrado de binomio.

Por ejemplo:

1 $x^2 - 2x - 1 = 0$

Para comenzar seleccionamos el valor absoluto del término b, en este caso será 2.

Luego, dividimos este término por 2 y a esa expresión la elevamos al cuadrado y sumamos y restamos este nuevo término a la ecuación original: $x^2 - 2x + (1)^2 - (1)^2 - 1 = 0$.

Si el primer término agregado se puede simplificar, se realiza, en nuestro caso no procede, y además, se desarrolla el segundo término agregado $(1)^2 = 1$, con lo que se obtiene:
$x^2 - 2x + 1 - 1 - 1 = 0$.

A los tres primeros términos se les completa cuadrado y a los dos últimos se le realizan las operaciones indicadas, es decir,
$x^2 - 2x + 1 - 2 = 0$

Finalmente agrupamos el trinomio como un cuadrado de binomio: $(x - 1)^2 - 2 = 0$.

Ambas expresiones, la resultante de los tres primeros términos y la de los dos últimos será la completación de cuadrados.

Ahora bien, para resolver la expresión obtenida procedemos de la siguiente forma:

$(x - 1)^2 - 2 = 0$

$\Rightarrow (x - 1)^2 = 2 \qquad /\sqrt{\ }$ *(Aplicamos raíz cuadrada)*

$\Rightarrow x - 1 = \sqrt{2}$ o $\Rightarrow x - 1 = -\sqrt{2}$

De aquí, $x = \sqrt{2} + 1$ o $x = -\sqrt{2} + 1$

2 $-3x^2 + x + 2 = 0$ *(Factorizamos por -3)*

$-3\left(x^2 + \frac{x}{-3} + \frac{2}{-3}\right) = 0$ *(Sumamos y restamos en la expresión, el valor absoluto del término b dividido por 2 y elevado al cuadrado)*

$-3\left(x^2 + \frac{x}{-3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \frac{2}{-3}\right) = 0$ *(Desarrollamos el segundo término agregado)*

$-3\left(x^2 - \frac{x}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{1}{36} - \frac{2}{3}\right) = 0$ *(Realizamos las operaciones correspondientes entre los dos últimos términos)*

$-3\left(x^2 - \frac{x}{3} + \left(\frac{1}{6}\right)^2 - \frac{25}{36}\right) = 0$ *(Agrupamos como cuadrado de binomio los tres primeros términos)*

$$-3\left(\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{36}\right)=0 \qquad /:-3$$

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^2-\frac{25}{36}=0 \qquad /+\frac{25}{36}$$

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^2=\frac{25}{36} \qquad /\sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow x-\frac{1}{6}=\frac{5}{6} \text{ o } x-\frac{1}{6}=-\frac{5}{6}$$

$$\Rightarrow x=\frac{1}{6}+\frac{5}{6}=\frac{6}{6}=1 \text{ o } x=\frac{1}{6}-\frac{5}{6}=-\frac{4}{6}=-\frac{2}{3}$$

3 $x^2+5x=0$ *(Sumamos y restamos en la expresión, el valor absoluto del término b dividido por 2 y elevado al cuadrado)*

$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2=0$$ *(Desarrollamos el segundo término agregado)*

$$x^2+5x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=0$$ *(Agrupamos como cuadrado de binomio los tres primeros términos)*

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}=0 \qquad /+\frac{25}{4}$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4} \qquad /\sqrt{\ }$$

$$\Rightarrow x+\frac{5}{2}=\frac{5}{2} \text{ o } x+\frac{5}{2}=-\frac{5}{2}$$

$$\Rightarrow x=-\frac{5}{2}+\frac{5}{2}=0 \text{ o } \Rightarrow x=-\frac{5}{2}-\frac{5}{2}=-\frac{10}{2}=-5$$

Aunque este método es muy útil, no es siempre tan directo o tan fácil de utilizar, por lo que los matemáticos pensaron en tener una regla que sirviera para todas las ecuaciones cuadráticas, y en especial, para aquellas que fueran trinomios no factorizables.

Toma nota

Para transformar de centímetros cúbicos a decímetros cúbicos, debes recordar que

$100\ \text{cm}=10\ \text{dm}$, por lo que al elevar al cubo, tendremos que:

$(100)^3\ \text{cm}^3=(10)^3\ \text{dm}^3$

$\Rightarrow 1\,000\,000\ \text{cm}^3=1\,000\ \text{dm}^3$

luego, $1\,000\ \text{cm}^3=1\ \text{dm}^3$

Trabaja

4 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por el método de completación de cuadrado. Compara tus desarrollos y resultados con tus compañeros y luego verifiquen sus respuestas en el solucionario.

a. $x^2+32x-144=0$

b. $x^2-6x-1=0$

c. $2x^2-9x-5=0$

d. $x^2-7x=-1$

e. $5x^2+2x+5=0$

f. $(2x+1)(3x-4)-x(2x+3)=1$

g. $\frac{x+21}{x}-\frac{2x-5}{x+2}=3$

5 Resuelve los siguientes problemas. Para ello, desarrolla las ecuaciones cuadráticas planteadas por el método de completación de cuadrado.

a. Josefina debe construir una maceta de base rectangular para su invernadero, de modo que el largo de la base tenga 30 cm más que su ancho, y su altura sea de 20 cm. Además, la maceta debe poder contener exactamente $360\ \text{dm}^3$ de tierra. ¿Cuáles deben ser las medidas de la maceta?

b. Alipio está decidido a resolver el problema que le planteó su mejor amigo como desafío. Él debe encontrar un número x tal que el producto de otros dos números, uno 3 unidades mayor que x y otro 8 unidades menor que x, sea 390. Ayuda a Alipio a encontrar el número x.

Ecuaciones cuadráticas de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, y a, b, c pertenecen a los reales

En este caso, analizaremos la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, de manera general, y deduciremos una fórmula para encontrar sus soluciones.

Esta fórmula puede ser usada en todos los casos, pero anteriormente quisimos mostrarte que podías solucionar el problema de manera fácil, sin necesidad de conocimientos nuevos y solo con las herramientas matemáticas que ya tienes.

Veamos qué hicieron los matemáticos hace años.

Si miramos $ax^2 + bx + c = 0$, solo podríamos transformar esto en dos ecuaciones lineales (como en el caso estudiado donde factorizábamos) siempre y cuando pudiéramos transformar $ax^2 + bx + c$ en un cuadrado de binomio para luego extraer raíz cuadrada.

Analiza pausadamente los siguientes pasos:

$ax^2 + bx + c = 0 \qquad / \cdot a$ *(Multiplicamos por a para que el primer término sea un cuadrado perfecto)*

$a^2x^2 + abx + ac = 0 \qquad / - ac$ *(Formaremos el cuadrado)*

$a^2x^2 + abx = -ac$

Si abx es el término central del desarrollo del binomio, entonces debería ser el resultado de $2 \cdot ax \cdot \frac{b}{2}$, con lo que el término que nos falta para completar nuestro cuadrado de binomio es el cuadrado de $\frac{b}{2}$. Sumemos, entonces, a ambos lados de la igualdad, $\frac{b^2}{4}$.

$a^2x^2 + abx + \frac{b^2}{4} = -ac + \frac{b^2}{4}$ *(Factorizamos el cuadrado perfecto)*

$\left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \frac{b^2}{4} - ac \qquad / \sqrt{\ }$

$ax + \frac{b}{2} = \sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}$ o $ax + \frac{b}{2} = -\sqrt{\frac{b^2}{4} - ac}$ *(Despejando ax y sumando dentro de la raíz)*

$\Rightarrow ax = -\frac{b}{2} + \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}}$ o $\Rightarrow ax = -\frac{b}{2} - \sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4}}$ *(Dividiendo por a y descomponiendo la raíz)*

$\Rightarrow x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ o $\Rightarrow x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *(Ambas soluciones se escriben en una expresión)*

$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Si $ax^2 + bx + c = 0$ (con $a \neq 0$ y a, b y c números reales) es una ecuación cuadrática, entonces sus soluciones están dadas por la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Esta fórmula es conocida como fórmula general para resolver cualquier ecuación cuadrática.

Veamos ahora cómo se aplica.

Ejemplo:

1 $21x^2 - 8x - 5 = 0$ *(Nota que para aplicar la fórmula, uno de los miembros de la ecuación debe ser 0)*

$\Rightarrow a = 21$ *(Coeficiente numérico de x^2)*

$\Rightarrow b = -8$ *(Coeficiente numérico de x)*

$\Rightarrow c = -5$ *(Término libre)*

$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ *(Remplazando los valores de a, b y c)*

$$x = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 21 \cdot -5}}{2 \cdot 21}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{64 + 420}}{42}$$

$$x = \frac{8 \pm \sqrt{484}}{42} = \frac{8 \pm 22}{42}$$

Por lo tanto, tenemos dos soluciones:

$$x = \frac{8 + 22}{42} = \frac{30}{42} = \frac{5}{7}$$

Así, las soluciones de la ecuación son: $x = \frac{5}{7}$ o $x = -\frac{1}{3}$

2 ¿Te acuerdas de la tarea que tenían Daniel, Paulina y Mauricio en su clase de artes visuales?

Mauricio llamó x a la medida del ancho de la caja; entonces anotó que: $5 \cdot x \cdot (x + 5) = 1\,500$.

Ahora bien, multiplicando los términos de la ecuación anterior anotó también que: $5x^2 + 25x = 1\,500$

Después de restar $1\,500$ para dejar todos los términos al lado izquierdo de la ecuación e igualarlos a cero, obtuvo que: $5x^2 + 25x - 1\,500 = 0$

Y dividiendo cada término por 5 se obtiene:

$x^2 + 5x - 300 = 0 \qquad /a = 1,\ b = 5,\ c = -300$

Aunque podríamos tratar de factorizar esta ecuación, es decir, buscar dos números que multiplicados den -300 y sumados, 5, aplicaremos la fórmula que acabas de aprender.

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 1 \cdot -300}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 1\,200}}{2} = \frac{-5 \pm \sqrt{1\,225}}{2} = \frac{-5 \pm 35}{2}$$

$$x = \frac{-5 + 35}{2} = \frac{30}{2} = 15 \text{ o}$$

$$x = \frac{-5 - 35}{2} = \frac{-40}{2} = -20$$

La primera solución, -20, no nos sirve pues estamos hablando de medidas de longitud y que no tiene sentido en este contexto, por lo tanto, la solución será $x = 15$.

Ahora bien, utilizando el valor encontrado, la medida del largo de la caja será $x + 5 = 15 + 5 = 20$, es decir, 20 cm.

Así las medidas de la caja debían ser de $15 \times 20 \times 5$ cm. Luego, multiplicando para verificar su volumen obtenemos $1\,500$ cm^3.

3 $x(x + 6) = 5(2x - 1)$ *(Aplicamos la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la suma)*

$x^2 + 6x = 10x - 5 \qquad / -10x + 5$

$x^2 - 4x + 5 = 0$

$\Rightarrow a = 1,\ b = -4,\ c = 5$

$$\Rightarrow x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5}}{2 \cdot 1}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2}$$

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{-4}}{2}$$ *(recuerda que ya conoces los números complejos)*

$$\Rightarrow x = \frac{4 \pm 2i}{2} = \frac{\cancel{2}(2 \pm i)}{\cancel{2}}$$

$\Rightarrow x = 2 + i$ o $x = 2 - i$

Toma nota

Si las soluciones o raíces de una ecuación cuadrática se calculan por la fórmula $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, entonces, que una ecuación tenga dos soluciones reales o una solución real, o no tenga soluciones reales, dependerá de la cantidad subradical, a la que se le llama *discriminante* y se representa por Δ.

Así, $\Delta = b^2 - 4ac$ y tendremos que si $\Delta > 0 \Rightarrow$ la ecuación cuadrática tendrá dos soluciones reales y distintas.

$\Delta = 0 \Rightarrow$ la ecuación cuadrática tendrá solo una solución real (o dos soluciones reales e iguales).

$\Delta < 0 \Rightarrow$ la ecuación cuadrática no tendrá soluciones reales, sus soluciones serán números complejos (siempre conjugados)

4 Rayén estudia en la Escuela Militar y tendrá que ayudar en la preparación del desfile previo a la Parada Militar. Debe ordenar a su grupo y su teniente le ha presentado el siguiente problema: "Tenemos 180 cadetes y debemos ordenarlos de manera tal que el número de filas sea 8 unidades menos que el número de cadetes en cada fila.

¿Cuántos cadetes deberán formar cada fila y cuántas filas tendremos en nuestra unidad?"

Rayén pensó e hizo los siguientes cálculos: sea x el número de cadetes en cada fila y $x-8$ el número de filas. Por lo tanto:

$x(x-8)=180$

$x(x-8)=180$

$x^2-8x=180 \qquad / -180$

$x^2-8x-180=0 \qquad /a=1,\ b=-8,\ c=-180$

$$\Rightarrow x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

$$x=\frac{8\pm\sqrt{(-8)^2-4\cdot 1\cdot -180}}{2\cdot 1}=\frac{8\pm\sqrt{64+720}}{2\cdot 1}=$$

$$\frac{8\pm\sqrt{784}}{2}=\frac{8\pm 28}{2}$$

$$x=\frac{8+28}{2}=\frac{36}{2}=18 \text{ o } x=\frac{8-28}{2}=\frac{-20}{2}=-10$$

Como x representa el número de soldados, no puede ser –10; por lo tanto, la solución es $x=18$. Entonces, deberán formarse en 10 filas de 18 cadetes cada una.

Trabaja

6 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas. No olvides chequear tus respuestas en el solucionario.

a. $3x^2+35x-12=0$

b. $x^2-\frac{7}{6}x-\frac{1}{3}=0$

c. $9x^2-12x+29=0$

d. $(2+y)^2=100-y^2$

e. $\frac{9}{4-x}=\frac{x+4}{x+2}$

f. $\frac{x+5}{x}+\frac{2x-3}{x}=\frac{x-3}{x-2}$

g. $\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}=8$

h. $\frac{x+3}{3}-\frac{x}{6}=\frac{2}{x-4}+\frac{x-2}{4}$

i. $\sqrt{5x+6}-\sqrt{x+7}=1$

j. $2\sqrt{2x+1}=\sqrt{x+5}+\sqrt{4x-7}$

7 Desarrolla cada ejercicio y da respuesta a la pregunta planteada.

a. Al dividir 961 por un cierto número resulta este mismo número. ¿Cuál es el número?

b. Dividiendo 229 por y, se obtiene y como cociente y resto igual a cuatro. ¿Cuál es el valor de y?

8 La medida de superficie de un triángulo equilátero de lado a es $\sqrt{192}$ m^2. ¿Cuál es el valor de su perímetro?

Trabaja

Resuelve junto con tus compañeros y compañeras los siguientes problemas de ecuaciones cuadráticas. No olviden que definir bien la incógnita es de gran ayuda. Hagan el desarrollo en su cuaderno.

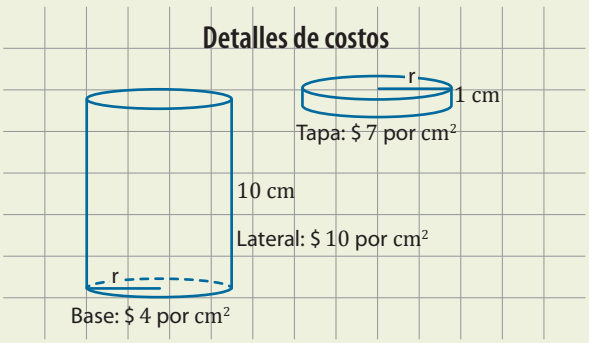
3 Mi abuelo me dijo que existe una relación entre la velocidad de escape en la Luna, en $\mathrm{km/s}$, (velocidad mínima de un cuerpo para despegar hacia el espacio, sin orbitar el planeta, desde el suelo) y su aceleración de gravedad, en $\mathrm{m/s^2}$. Según lo que he averiguado, esto es:

$v_e = \sqrt{2 \cdot g_L \cdot R_L}$

Como la velocidad de escape en la Luna (v_e) es, numéricamente $1{,}46$ veces su aceleración de gravedad (g_L) y el radio lunar (R_L) es aproximadamente $1\,734\ \mathrm{km}$, entonces... hagamos los cálculos, y estimemos la aceleración de gravedad lunar en $\mathrm{m/s^2}$ y su velocidad de escape en $\mathrm{km/s}$. Usa tu calculadora y aproxima tus resultados a la centésima.

4 "Necesito calcular el volumen de la cajita cilíndrica que ustedes nos ofrecen a $\$\,2\,223$ la unidad y que tendría $1\ \mathrm{cm}$ menos de radio del que necesitamos. Y entiendo, además, que lo que ustedes cobran por hacerla está detallado en el diseño siguiente".

¿Puedes calcular la medida del radio de la caja ofrecida? ¿Cuál es la diferencia en el volumen con respecto a la que se necesita? (considera $\pi = 3$).



5 Octavio tiene 3 varillas de metal, de 8, 15 y 16 cm, con las que está trabajando en su taller de robótica. Para hacer uno de los ensamblajes necesita construir un triángulo rectángulo cortando un cierto trozo en cada varilla, de modo que con los trozos sobrantes pueda armar un triángulo equilátero. ¿Cuánto debe cortar de cada varilla para que pueda construir ambos triángulos?

6 Matilde le pidió a su hermano que le ayudara a construir una caja muy especial para sus juguetes. Debe ser de base cuadrada, sin tapa, de alto $30\ \mathrm{cm}$ y que su volumen sea $588\ \mathrm{L}$. Además, debe ocupar un cartón cuadrado. El hermano de Matilde después de hacer algunos cálculos, le dio las medidas precisas para que consiguiera el cartón. ¿Cuáles eran estas medidas?

7 Don Alfonso, dueño de una fábrica de muebles, les encarga a dos operarios un trabajo que, juntos, debieran terminar en 6 semanas. Sin embargo, deciden hacerlo por separado. Sabiendo que siempre uno de ellos se demora 5 semanas más que el otro en terminar los trabajos, ¿cuánto se demorará cada uno trabajando por separado? ¿Qué les dirías para que se convencieran de que el trabajo en equipo es una buena alternativa?

8 Nekul requiere dibujar en una cartulina dos circunferencias concéntricas, que son la vista superior de dos cilindros de altura $30\ \mathrm{cm}$, donde uno está dentro del otro. Su profesor de taller le indica que el espacio que queda entre ambos se puede llenar con $1\,440\ \mathrm{cm^3}$ de agua. Además, le señala que considere π aproximado a 3 y que uno de los radios era las tres cuartas partes del otro. Nekul hizo los cálculos de cada radio y pudo dibujar tranquilamente lo que se le solicitaba.

Con estas indicaciones, encuentra el valor de ambos radios.

9 "¿Así que ustedes no le ven ninguna utilidad a $\sqrt{20{,}25} = 4 + x$?", nos pregunta un matemático. Nos miramos unos a otros, un poco avergonzados por nuestra falta de imaginación. Entonces nos propone resolver la ecuación y pensar en lo que ella nos dice; para luego determinar:

a. el valor de x.

b. el valor de $\sqrt{20{,}25}$ usando el valor obtenido en **a.**

Sintetizando

- Una ecuación cuadrática es de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son reales y $a \neq 0$.
- Al resolverla se buscan los valores de x que hacen que la igualdad se satisfaga.
- La fórmula general para resolverla es $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$. Sin embargo, hay ocasiones en que se pueden resolver por factorización o extrayendo raíces.
- Las ecuaciones cuadráticas pueden tener una solución real, dos soluciones reales o dos soluciones complejas conjugadas (dependiendo del valor de $\Delta = b^2 - 4ac$)

  Si $\Delta > 0$ entonces hay dos soluciones reales y distintas.

  Si $\Delta = 0$ entonces hay dos soluciones reales e iguales.

  Si $\Delta < 0$ entonces no tiene soluciones reales.
- Las ecuaciones fraccionarias que se reducen a ecuaciones cuadráticas deben ser siempre comprobadas.

Revisemos lo aprendido

Marca el casillero correspondiente según la evaluación hecha de tu proceso de aprendizaje.

MB: Muy bien (7,0 - 6,0)
B: Bien (5,9 - 5,0)
S: Suficiente (4,9 - 4,0)
I: Insuficiente (3,9 - 1,0)

Indicador	MB	B	S	I
Soy capaz de reconocer una ecuación cuadrática.				
Entendí los ejemplos resueltos y los diferentes tipos de ecuaciones cuadráticas.				
Sé cómo resolver una ecuación cuadrática.				
Entendí en qué tipo de problemas cotidianos se utilizan las ecuaciones cuadráticas.				
Entendí cómo se plantearon los ejercicios resueltos en la resolución de problemas.				
Fui capaz de resolver correctamente los ejercicios propuestos en esta sección.				
Fui capaz de resolver correctamente los problemas de planteo propuestos en esta sección.				
Colaboré con el trabajo de mi grupo cuando fue preciso.				

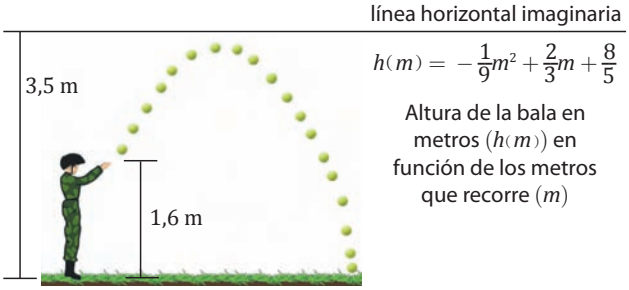
Si marcaste 4 o más indicadores en las columnas (S) o (I), debes volver a repasar los contenidos y pedir ayuda si es necesario.

Recuerda que debes tener claro los conceptos para poder resolver los ejercicios. Para esto es de mucha ayuda recordar la información de los recuadros de síntesis.



Función cuadrática: ¿qué es y en qué se utiliza?

Braulio, Macarena y sus amigos planearon una tarde de viernes jugando paintball (en español "bola de pintura"). "Te puedes sentir en un verdadero combate y las balas, por ser de pintura, no hieren cuando te topan", fueron los argumentos de Braulio para convencer a sus amigos. Braulio lanzó su bala como se indica en el dibujo. Con estos datos, ¿qué pasó?



$h(m) = -\frac{1}{9}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{8}{5}$

Altura de la bala en metros $(h(m))$ en función de los metros que recorre (m)

¿Qué trayectoria describe, gráficamente, la bala?
¿Es posible determinar de antemano qué pasará con ella?

La función que describe la trayectoria de la bala es:
$h(m) = -\frac{1}{9}m^2 + \frac{2}{3}m + \frac{8}{5}$.
donde m representa la variable independiente, $h(m)$, la variable dependiente y la relación entre ellas es de tipo cuadrática. Esta función describe la trayectoria de la bala de Braulio pero debes tener en cuenta que esta no siempre será la función para otras trayectorias de cuerpos.

La ecuación que describe la trayectoria de la bala la obtenemos escribiendo las ecuaciones de la trayectoria de esta en el eje x y en el eje y:

$x = x_0 + v_{0x}t$
$y = y_0 + v_{0y}t - \frac{1}{2}gt^2$

De la ecuación para el eje x despejamos la variable tiempo (t) y reemplazamos esta en la ecuación para el eje y, obteniendo así la ecuación que describe la trayectoria de la bala, donde h corresponde a y y m a x. Los coeficientes que acompañan a m y m^2 se derivan de las condiciones de velocidad inicial para la bala en ambos ejes y el coeficiente libre corresponde a la altura inicial en el eje y, $1{,}6 = \frac{8}{5}$.

La bala que lanzó Braulio describe una curva llamada parábola y el movimiento asociado a esta curva se llama movimiento parabólico. Para poder responder qué pasó con la bala, necesitamos estudiar esta curva, pero ¿qué tiene que ver esto con las ecuaciones cuadráticas que estábamos estudiando? Pues, mucho, ya verás. ¡Manos a la obra!

La parábola

Ya sabías que existen distintos tipos de funciones, dependiendo de la expresión algebraica que la defina. Llamaremos **función cuadrática** a toda función del tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$. A la gráfica de esta función se le llama **parábola**.

En esta sección aprenderás

Qué es una función cuadrática, cuál es su relación con las ecuaciones cuadráticas y qué problemas nos ayudan a resolver.

Desarrollarás las siguientes habilidades:

- Identificar, calcular, interpretar, resolver problemas, analizar, sintetizar, investigar y comunicar.

Habilidades por actividad:

- Identificar y calcular: 1 – 2. 1 – 2 – 3 – 4 – 7 – 8.
- Interpretar y resolver problemas: 2 – 4 – 5 – 6. 5 – 6 – 9 – 10.
- Analizar y sintetizar: 7a – 7b.
- Investigar y comunicar: 7c.



El paintball es un deporte en el que los participantes disparan pequeñas bolas rellenas de pintura a otros jugadores, y aquellos que son alcanzados por las bolas de pintura son eliminados a veces en forma transitoria, o en forma definitiva.

Para saber más

La circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola son las curvas cónicas que pueden obtenerse seccionando un cono. Apolonio estudió en detalle las cónicas y les dio su nombre actual. Fue él quien mencionó que un espejo parabólico refleja de forma paralela los rayos emitidos desde su foco, propiedad usada en la óptica, y hoy, en las antenas satelitales. Los términos elipse, hipérbola y parábola los usaron por primera vez los discípulos de Pitágoras. Elipse significaba deficiencia, hipérbola significaba exceso y parábola, equiparación. En 1638 Galileo demostró que los proyectiles, en su movimiento, recorren parábolas. En el siglo XVI el filósofo y matemático René Descartes (1596-1650) desarrolló un método para relacionar las curvas con ecuaciones. Este método es la llamada **geometría analítica.** Con ella, las curvas cónicas se pueden representar por ecuaciones en las variables x e y. Así, la parábola quedó relacionada con su ecuación.

A a y b se les llama **coeficientes numéricos** de x^2 y x, respectivamente. A c se le llama **término independiente**.

Comencemos analizando la función $f(x) = x^2$. Hacemos una tabla de valores para calcular algunas imágenes y preimágenes (recuerda que las preimágenes son los valores de x y las imágenes, los valores de y o $f(x)$).

x	$y = f(x)$	(x,y)
1	1	$(1,1)$
-1	1	$(-1,1)$
0	0	$(0,0)$
2	4	$(2,4)$
-2	4	$(-2,4)$

$y = 1^2 = 1$

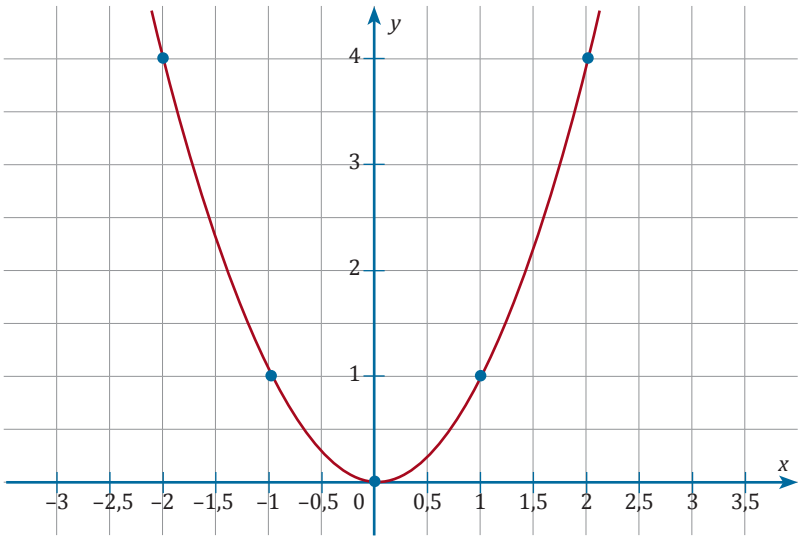
$y = (-1)^2 = 1$

$y = 0^2 = 0$

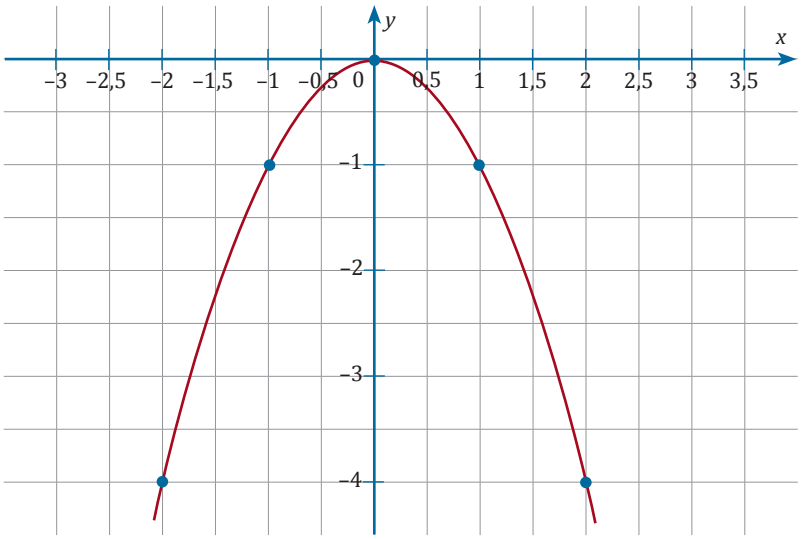
$y = 2^2 = 4$

$y = (-2)^2 = 4$

Ahora bien, podemos ubicar estos puntos en el plano cartesiano para graficar nuestra función. También podemos utilizar un programa para graficar. ¿Recuerdas que en la unidad anterior usamos el programa Graphmatica? Si nos ayudamos con él, tendremos el siguiente gráfico para esta función:



¿Y si graficamos $f(x) = -x^2$?



¿Cómo determinar si un punto del plano pertenece o no a una parábola?

Si pensamos en la tabla de valores que hicimos anteriormente, podemos decir que, para determinar si un punto pertenece a una parábola, debemos tener la función que la determina y así podremos evaluar y verificar que la igualdad se cumpla. Por ejemplo, tomemos la función $y = x^2 + 3x - 5$ y decidamos si los puntos $(1, -1)$ y $(2,1)$ pertenecen a la parábola.

Para el punto $(1, -1)$ tenemos que:

$$-1 = 1^2 + 3 \cdot 1 - 5$$
$$-1 = 1 + 3 - 5$$
$$-1 = 4 - 5$$
$$-1 = -1.$$

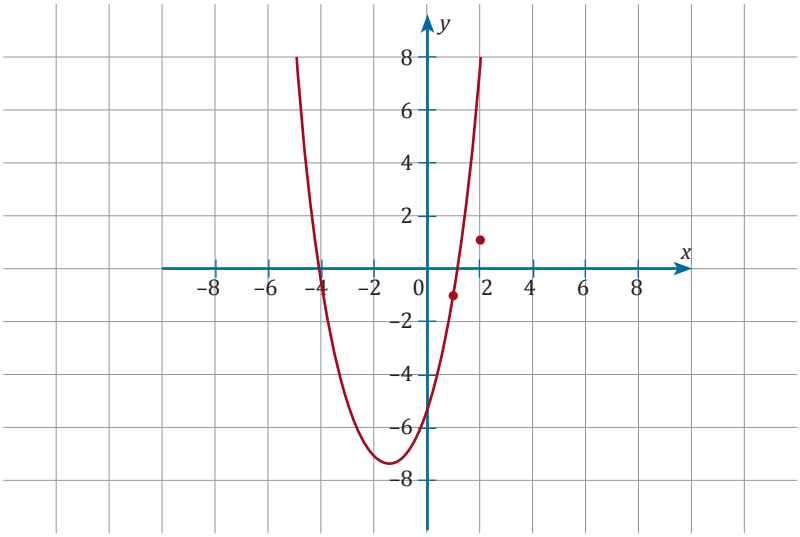
Como se cumple la igualdad, entonces el punto pertenece a la parábola.

Para el punto $(2,1)$ tenemos que:

$$1 = 2^2 + 3 \cdot 2 - 5$$
$$1 = 4 + 6 - 5$$
$$1 = 10 - 5, \text{ pero}$$
$$1 \neq 5;$$

por lo tanto, el punto no pertenece a la parábola.

Volvamos a trabajar con gráficos para ver esta situación.



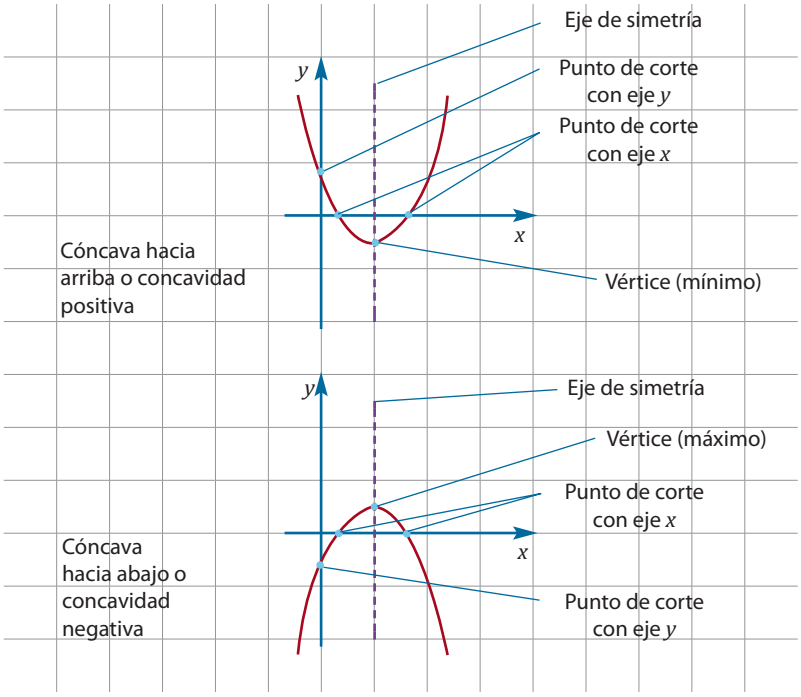
Estudiemos en profundidad las parábolas y su función asociada. Las parábolas tienen características comunes y puntos muy importantes en ellas. Mira y analiza con detención:

Recordar y archivar

Recuerda que cuando usas programas computacionales y algunas calculadoras científicas, la notación de potencias se escribe diferente. Así, por ejemplo, para escribir

$f(x) = x^2 - 5x$, debemos anotar,

$f(x) = x \wedge 2 - 5x$.



Recordar y archivar

El vértice de una parábola es el punto más bajo (cuando la parábola es cóncava hacia arriba) o el punto más alto (cuando la parábola es cóncava hacia abajo). En el primer caso, decimos que la parábola tiene un mínimo y en el segundo caso, que la parábola tiene un máximo.

¿De qué depende que la parábola se abra hacia arriba o hacia abajo?

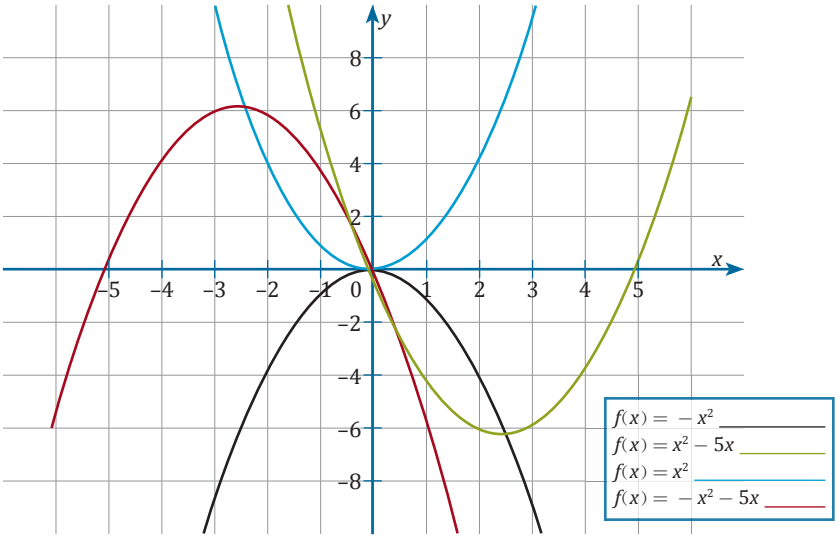
Mira y compara.

La parábola de color negro representa la función $f(x) = -x^2$.

La parábola de color verde representa la función $f(x) = x^2 - 5x$.

La parábola de color azul representa la función $f(x) = x^2$.

La parábola de color roja representa la función $f(x) = -x^2 - 5x$.

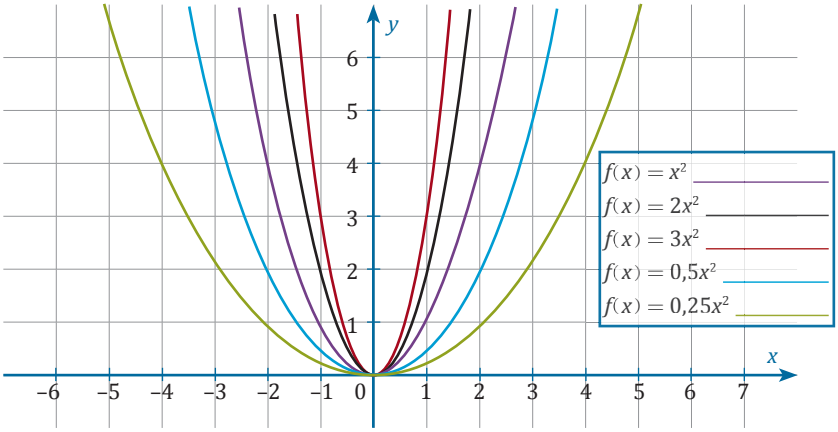


¿Qué término cambia en las fórmulas de las funciones negra y azul?
¿Qué término cambia en las fórmulas de las funciones verde y roja?
¿Cómo es la orientación de la parábola azul y verde?
¿Cómo es la orientación de la parábola roja y negra?

Por lo tanto, que la parábola sea cóncava hacia arriba (se abra hacia arriba) o cóncava hacia abajo (se abra hacia abajo) depende del valor de a (coeficiente numérico de x^2).

Si $a > 0$, entonces la parábola será cóncava hacia arriba. Si $a < 0$, entonces la parábola será cóncava hacia abajo.

Analicemos un poco más el coeficiente a. Observa:



Entonces, ¿qué cambia en los gráficos de las parábolas a medida que disminuye el valor de a?

Concluimos que del coeficiente a depende la dilatación o contracción de la parábola. Ya que mientras mayor sea el valor absoluto de a, la parábola se contrae, y mientras menor sea el valor absoluto de a, la parábola se dilata.

Ejemplos:

1 Determina la concavidad de la siguiente parábola: $y = 2x^2 - 4$.
En esta función, $a = 2$, $b = 0$, $c = -4$. Como $a = 2 > 0$, entonces la parábola será cóncava hacia arriba.

2 El papá de Millaray está leyendo un informe que encargó para la empresa en la que trabaja. En él se dice que las utilidades de las cañas de pescar que vende se calculan en función del precio de venta por unidad bajo la siguiente función:
$U(p) = p^2 - 3p + 2$.

Donde U representa las utilidades, en decenas de miles de pesos, y p el precio de venta en miles de pesos. Cuando el papá de Millaray trata de calcular el precio de venta que hará que la utilidad sea máxima, nota que en el informe hay un error.
¿Cuál es?

Como la función $U(p) = p^2 - 3p + 2$ es una función cuadrática, tendrá un mínimo o un máximo que dependerá de si esta es cóncava hacia arriba o hacia abajo.

En este caso, $a = 1$, por lo que la parábola es cóncava hacia arriba, lo que quiere decir que ella tiene un mínimo. Por lo tanto, el papá de Millaray no podrá calcular un máximo; entonces, el error está en la función.

Trabaja

Resuelvan en pareja los siguientes ejercicios. Escriban todo el desarrollo en el cuaderno y no olviden revisar sus respuestas en el solucionario.

1 Grafiquen, usando algún programa computacional, las siguientes funciones cuadráticas. Dibujen o impriman estos gráficos y péguenlos en su cuaderno.

Pueden utilizar el programa graficador "Graph" que pueden descargar gratuitamente de: http://www.padowan.dk/download/

a. $f(x) = 6x^2 - 3x$

b. $y = x^2 + 6x + 9$

c. $y = -2x^2 + x + 3$

2 Determinen si los siguientes puntos pertenecen a las parábolas dadas:

a. A: $(2,1)$; $y = 2x^2 - 6x - 176$

b. C: $\left(\frac{1}{2}, \frac{25}{8}\right)$; $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + 3$

c. $(-1, -1)$; $y = \frac{x^2 + 9x + 6}{2}$

3 Determinen la concavidad de las siguientes parábolas, es decir, si son cóncavas hacia arriba o hacia abajo.

a. $y = 6x^2 + 2x - 1$

b. $f(x) = 3x^2 - 13x + 20$

c. $y = 15 - 7x^2 + 14x$

Trabaja

Resuelve los siguientes problemas:

1 Lupercio tuvo que clasificar muchas parábolas según su concavidad. Conforme a los datos dados escribe cóncava hacia arriba o hacia abajo, según corresponda. Haz un bosquejo de cada gráfica para ayudarte.

a. Parábola cuyo vértice está en $(-2,3)$ y que intersecta al eje y en $(0, -5)$.

b. Parábola que intersecta al eje x en $(-3,0)$ y $(0{,}5\ ;0)$, con mínimo.

c. Parábola que intersecta al eje y en $(0,7)$, pero su vértice no representa un mínimo.

d. Parábola que pasa por $(0,0)$, $(1,3)$ y $(-1,3)$.

e. Parábola que pasa por $(0,0)$ y todos los otros puntos de ella tienen ordenadas negativas.

f. Parábola con eje de simetría coincidente con el eje y, cuyo punto más alto es $(0,1)$.

g. Parábola de ecuación $y = -x^2 - 3x + 7$.

h. Parábola cuyo término cuadrático está multiplicado por un número no negativo.

2 Saqui y Quidel se instalaron a ver televisión. Se estaba iniciando un documental titulado *El 2013 que nos espera*. El programa trataba de la calidad de la atmósfera y la advertencia de peligro si no se toma conciencia y se adopta una conducta más ecológica en el diario vivir. Los científicos entrevistados se valían de fórmulas que explicaban muy bien sus opiniones.

Saqui y Quidel estaban muy interesados en saber cómo la densidad de la atmósfera se relacionaba con la altura, pues ellos viven en un

sector cordillerano. Pues bien, seguían explicando en la televisión que para altitudes h hasta de $10000\ \text{m}$, la densidad de la atmósfera terrestre D, en $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, está dada aproximadamente por:

$D = 1{,}225 - 1{,}12 \cdot 10^{-4}h + 3{,}24 \cdot 10^{-9}h^2$

Desafortunadamente, la pantalla indica "...este programa continuará la próxima semana, gracias por su sintonía".

¿Serán ciertos los datos encontrados por ellos, que decían que para una altura de $5\,200\ \text{m}$ la densidad será aproximadamente de $0{,}74\ \text{kg/m}^3$? Pueden usar calculadora.



¿Cómo determinar los puntos de corte o intersección de la parábola con los ejes coordenados?

a. Con el eje y

Todos los puntos sobre el eje y son de la forma $(0,y)$; esto implica que la condición que se debe cumplir es que la coordenada x sea igual a 0. Si la función cuadrática es $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos remplazar $x = 0$.

Entonces $y = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c \Rightarrow y = c$.

Por lo tanto, si $x = 0$, entonces $y = c$.
Así, el punto de intersección de la parábola con el eje y será siempre $(0, c)$.

Por ejemplo, la parábola que representa la función $y = 2x^2 - 5x + 6$ intersecta al eje y en el punto $(0,6)$.

b. Con el eje x

Todos los puntos sobre el eje x son de la forma $(x,0)$; esto implica que para que se cumpla la condición, la coordenada y debe ser igual a 0. Si la función cuadrática es $y = f(x) = ax^2 + bx + c$, podemos remplazar $y = 0$.

Entonces $0 = ax^2 + bx + c$. Es decir, debemos resolver esta ecuación para encontrar los valores de x.

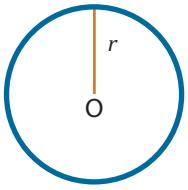
¿Ya te diste cuenta? ¡Qué bien! Exactamente como lo estás pensando, esta es una ecuación cuadrática de esas que acabas de estudiar.

Entonces, por ejemplo, si $f(x) = x^2 + 3x + 2$, tendremos que, para calcular los puntos de intersección de la parábola con el eje x debemos resolver la siguiente ecuación:

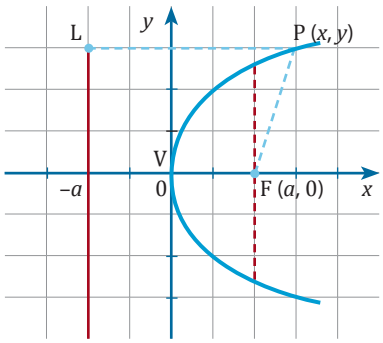
$x^2 + 3x + 2 = 0$ *(Factorizamos)*
$(x + 2)(x + 1) = 0$
$x + 2 = 0$ o $x + 1 = 0$
$x = -2$ o $x = -1$

Para saber más

Se llama lugar geométrico al conjunto de puntos que cumplen con una condición dada. Generalmente, los lugares geométricos forman figuras; algunas ya las conoces.
Por ejemplo, el lugar geométrico (L.G.) de todos los puntos del plano que están a la misma distancia de un punto fijo del plano es la circunferencia.
Observa: todos los puntos de la circunferencia están a la misma distancia (r) del punto fijo O.



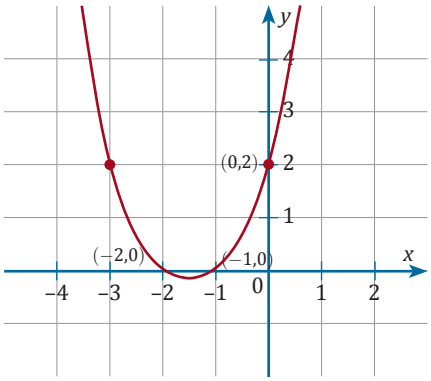
De esta manera, la parábola también es un lugar geométrico. Se dice, entonces, que la parábola es el L.G. de todos los puntos del plano cuya distancia a un punto fijo llamado foco y a una recta llamada directriz es la misma.



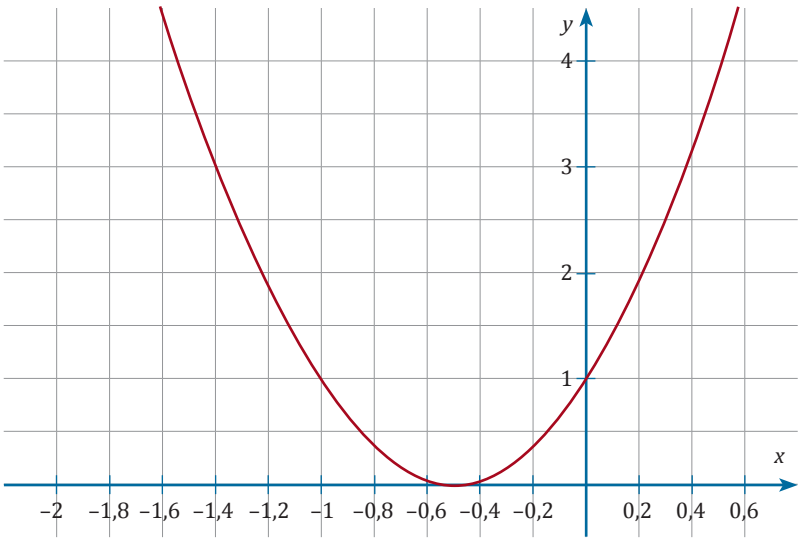
Por lo tanto, la parábola intersecta al eje x en los puntos $(-2,0)$ y $(-1,0)$.

Como recordarás, archivamos un concepto muy importante. ¿Cuándo una ecuación cuadrática tiene o no solución en el conjunto de los números reales? ¿Qué significa esto para nuestras parábolas? Recordemos y pensemos juntos. Habíamos dicho que las soluciones de una ecuación cuadrática (podían ser 2, 1 o ninguna en el conjunto de los números reales) dependían de su discriminante $(\Delta = b^2 - 4ac)$, entonces quiere decir que las parábolas pueden cortar en dos puntos o un punto o ningún punto al eje x. Veamos cada caso:

1 En la función anterior, $f(x) = x^2 + 3x + 2$, tenemos que:
$a = 1,\ b = 3,\ c = 2,$
entonces $\Delta = 3^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 9 - 8 = 1.$
Ahora bien, como $1 > 0$, quiere decir que la parábola tiene dos puntos distintos de intersección con el eje x (como ya lo habíamos calculado). Miremos su gráfico.



2 En la función $y = 4x^2 + 4x + 1$ se tienen: $a = 4,\ b = 4,\ c = 1,$ entonces $\Delta = 4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1 = 16 - 16 = 0$. Si $\Delta = 0$, habrá solo un punto de intersección con el eje x. ¿Cómo puede ser eso? Mira su gráfico.





Calculemos este punto. Para ello, debemos resolver la ecuación:

$4x^2 + 4x + 1 = 0$

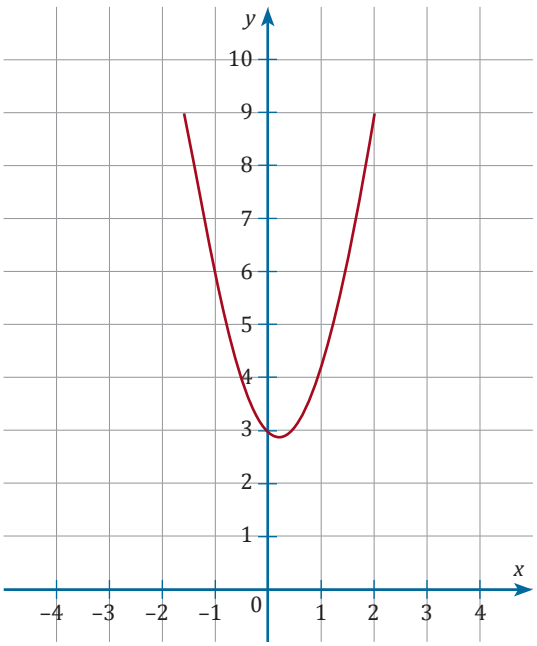
$\Rightarrow x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

(Recuerda, la cantidad subradical o discriminante es 0 –lo acabamos de calcular– y cuando se realiza la operación 4 ± 0, ambos resultados serán lo mismo)

$\Rightarrow x = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{2 \cdot 4} = \dfrac{-4 \pm 0}{8} = -\dfrac{1}{2}$

Por lo tanto, el único punto de intersección con el eje x que, en este caso, siempre coincide con el vértice de la parábola es $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$.

3 En la función $y = 2x^2 - x + 3$, sabemos que $a = 2$, $b = -1$, $c = 3$, entonces podemos calcular que $\Delta = (-1)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 3 = 1 - 24 = -23$, en este caso $\Delta < 0$, las soluciones de la ecuación serán números complejos, como no son números reales, entonces, la parábola no intersectará al eje de las x, miremos su gráfico:

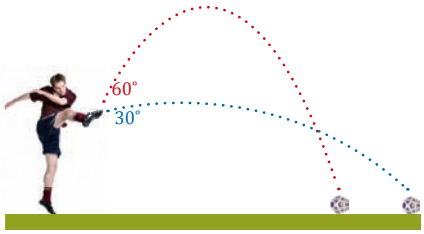


Toma nota

A los puntos de intersección de la parábola con el eje x se les llama también *ceros de la función*.

En síntesis, una función $f(x) = ax^2 + bx + c$ intersecta al eje x en:

- 2 puntos si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene dos soluciones reales y distintas o $\Delta > 0$.
- 1 punto si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene una solución real o $\Delta = 0$.
- Ningún punto si la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ no tiene solución en $\mathbb{R}$ o $\Delta < 0$. En este caso, sus soluciones son números complejos.



En muchos deportes, como por ejemplo el fútbol, podemos apreciar la trayectoria parabólica realizada por la pelota.

Ejemplos:

1 Dada la función $f(x) = -3x^2 + 11x + 4$, calcula los puntos de intersección de su gráfico con los ejes coordenados.
En la función dada, $a = -3$, $b = 11$, $c = 4$.
Resolvamos la ecuación $-3x^2 + 11x + 4 = 0$ para obtener los puntos de intersección con el eje x. Por fórmula tenemos que:

$$\Rightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \Rightarrow x = \frac{-11 \pm \sqrt{11^2 - 4 \cdot -3 \cdot 4}}{2 \cdot -3}$$

$$x = \frac{-11 \pm \sqrt{121 + 48}}{-6} = \frac{-11 \pm \sqrt{169}}{-6} = \frac{-11 \pm 13}{-6}$$

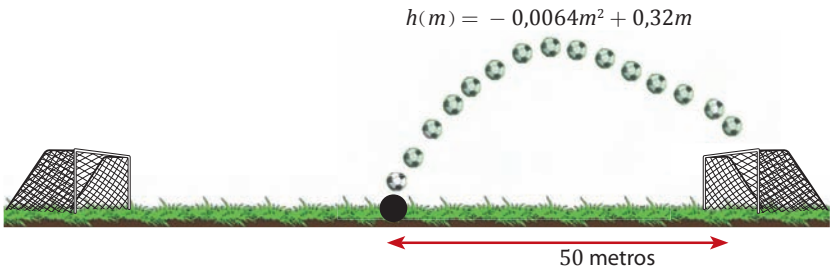
$$x = \frac{-11 + 13}{-6} = \frac{2}{-6} = -\frac{1}{3} \text{ o } x = \frac{-11 - 13}{-6} = \frac{-24}{-6} = 4$$

Por lo tanto, los puntos de intersección con el eje x son 1: $\left(-\frac{1}{3}, 0\right)$ y $(4,0)$.

Por otro lado, para determinar el punto de intersección con el eje y basta el valor de c; por lo tanto, el punto de intersección con el eje y es $(0,4)$

2 Mauricio es un fanático del fútbol y de la matemática. Siempre investiga y hace cálculos para tener datos exactos de la fuerza y potencia que tiene su ídolo como atacante y goleador. Los últimos cálculos que hizo lo llevaron a concluir que el lanzamiento desde el centro de la cancha de una pelota detenida estaba determinado por la función $h(m) = -0{,}0064m^2 + 0{,}32m$, donde h es la altura en metros que alcanza la pelota a lo largo de su trayectoria, y m, los metros que ella recorre. Si la distancia entre el centro de la cancha y el arquero es de 50 m, ¿llegará a convertir el gol?

Supongamos que el centro de la cancha es el origen del plano cartesiano. Resolver este problema equivale a encontrar a cuántos metros del centro llegará la pelota, es decir, encontrar los puntos de intersección con el eje x (en este caso la cancha).



Entonces, resolvamos la ecuación:

$-0{,}0064m^2 + 0{,}32m = 0$ *(Factorizamos)*
$m(-0{,}0064m + 0{,}32) = 0$
$m = 0$ o $-0{,}0064m + 0{,}32 = 0 \quad / -0{,}32$

$-0{,}0064m = -0{,}32 \; /: -0{,}0064$
$m = 50$



La solución $m = 0$ indicará el lugar desde donde el futbolista lanzó la pelota (pues allí estaba el origen del sistema de coordenadas) y $m = 50$ indicará la distancia recorrida tras la que la pelota volvió a topar el suelo de la cancha, esto es, justo a los pies del arquero (recuerda que la distancia desde el centro de la cancha al portero era de 50 metros). Por lo tanto, no llegó a convertir el gol.

Trabaja

Desarrollen la siguiente actividad. No olviden revisar sus respuestas en el solucionario.

4 Determinen la intersección de las siguientes parábolas con los ejes coordenados (eje x y eje y). Grafiquen las funciones; ayúdense con el programa Graphmatica e identifiquen allí sus respuestas.

a. $f(x) = 2x^2 - 6x - 176$

b. $f(x) = -x^2 + 10x - 25$

c. $y = -x^2 + 2x + 2$

d. $f(x) = x^2 - 17x + 16$

e. $y = 3x^2 + 18x + 27$

f. $f(x) = -x^2 + 196$

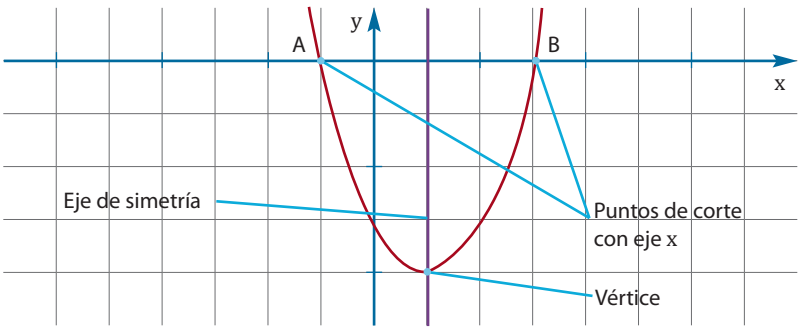
5 Max ese día estaba muy triste. Las penas de amor a veces nublan la razón y nuestros pensamientos pintan de oscuro nuestro entorno. Simplemente, ella se había alejado. Él se había quedado largo rato mirando los problemas que había que copiar de la pizarra. En esa soledad, después de la última clase, solo escribió:

... y el niño salta de derecha a izquierda de acuerdo a la ecuación $y = x - \frac{\sqrt{2}}{2}x^2$.

Suponiendo que el suelo se puede considerar como el eje de las abscisas, determina el punto de partida y el punto de llegada del salto.

¿Cómo determinar el vértice de una parábola?

Observa nuevamente el gráfico de una parábola:



Como la parábola es simétrica con respecto al eje de simetría, la coordenada x del vértice de la parábola será la misma que la coordenada x del punto medio entre los puntos de intersección con el eje x.

Sea $f(x) = ax^2 + bx + c$. Si A: $(X_A, 0)$ y B: $(X_B, 0)$ son los puntos de corte con el eje x y V: $(x_V y_V)$ es el vértice, entonces:

$x_V = \frac{x_A + x_B}{2}$, y así, evaluando la función en x_V, se obtiene que:

$y_V = ax_V^2 + bx_V + c$

Por ejemplo, en la función $y = x^2 + 3x + 2$ (ejemplo 1, página 106), los puntos de corte con el eje x que calculamos eran $(-2,0)$ y $(-1,0)$; entonces, si queremos calcular su vértice, tendremos que:

$$x_V = \frac{-2 + -1}{2} = -\frac{3}{2}$$

$$y_V = \left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 3 \cdot -\frac{3}{2} + 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = \frac{9 - 18 + 8}{4} = -\frac{1}{4}$$

Por lo tanto, el vértice es el punto $\left(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$. Vuelve a mirar el gráfico y ubícalo.

Ahora bien, si la parábola corta en un solo punto al eje x, entonces el vértice será dicho punto. Pero ¿qué hacemos cuando no hay puntos de corte con el eje x? ¡Este método ya no resultaría!

Entonces, tenemos la necesidad de encontrar alguna generalización que sirva en todos los casos. Pues bien, volvamos a la fórmula de las soluciones de una ecuación cuadrática. Esta era:

$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, y así las soluciones estaban dadas por,

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{o} \quad x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Si razonamos como anteriormente lo hicimos, tendríamos que sumarlas y luego dividir por 2. Hagámoslo,

$$x_V = \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac} + -b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}\right) : 2$$

(Recuerda que son fracciones de igual denominador)

$$\Rightarrow x_V = \left(\frac{-2b}{2a}\right) : 2 = \frac{-b}{a} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{b}{2a}$$

(Nota que las raíces siempre se anularán)

Para determinar y_V se debe evaluar la función en x_V, es decir, $f(x_V) = f\left(-\frac{b}{2a}\right)$, entonces las coordenadas del vértice de cualquier parábola corresponden a: $V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

$$\Rightarrow y_V = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot -\frac{b}{2a} + c = \frac{ab^2}{4a^2} - \frac{b^2}{2a} + c = \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c$$

$$= \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} = \frac{4ac - b^2}{4a}$$

Muy bien, hemos llegado a la fórmula que nos ayudará a calcular el vértice de cualquier parábola. Esta es:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$



Calculemos el vértice de la parábola del ejercicio 3, hecho antes (en la página 107), donde $y = 2x^2 - x + 3$. Aquí $a = 2,\ b = -1,\ c = 3$.

Así, remplazando en ambas expresiones, tenemos que:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$$

$$V = \left(-\frac{(-1)}{2 \cdot 2}, \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 - (-1)}{4 \cdot 2} \right)$$

$$V = \left(\frac{1}{4}, \frac{24 - 1}{8} \right) = \left(\frac{1}{4}, \frac{23}{8} \right)$$

Puedes volver a mirar tu gráfico y ubicar el vértice, chequeando sus coordenadas.

Ejemplos:

1 Determina el vértice de las siguientes parábolas; indica si son puntos máximos o mínimos.

a. $y = 2x^2 - 4x + 5$

En esta función, $a = 2, b = -4, c = 5$.

Otra forma de obtener el vértice de una función cuadrática es usando la expresión:

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a} \right) \right)$$

Calculamos $-\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2 \cdot 2} = \frac{4}{4} = 1$

Calculamos ahora $f\left(-\frac{b}{2a} \right) = 2 \cdot \left(-\frac{b}{2a} \right)^2 - 4 \cdot \left(-\frac{b}{2a} \right) + 5$

Pero ya habíamos calculado que $-\frac{b}{2a} = 1$

Luego, $f(1) = 2 \cdot 1^2 - 4 \cdot 1 + 5 = 2 - 4 + 5 = 3$

Así el valor del vértice es $(1,3)$

Es un mínimo, pues la parábola es cóncava hacia arriba $(a > 0)$.

b. $y = -3x^2 - 12x + 7$

En esta función $a = -3, b = -12, c = 7$ y utilizando la fórmula para el vértice $V = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$, tenemos:

$$V = \left(-\frac{(-12)}{2 \cdot -3}, \frac{4 \cdot -3 \cdot 7 - (-12)^2}{4 \cdot -3} \right)$$

$$V = \left(\frac{12}{-6}, \frac{-84 - 144}{-12} \right) = \left(-2, \frac{-228}{-12} \right) = (-2, 19)$$

Es un máximo, pues la parábola es cóncava hacia abajo $(a < 0)$.

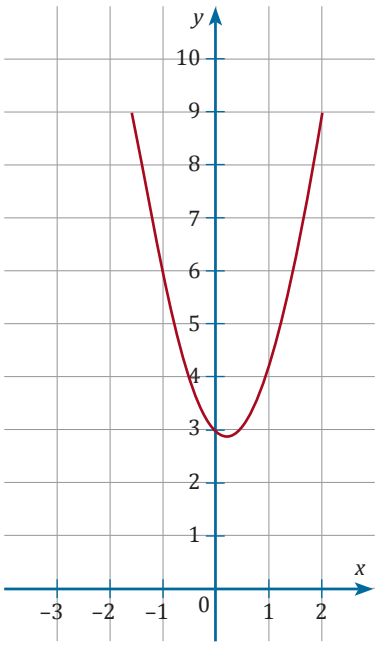
Toma nota

En una función cuadrática, el *dominio* serán siempre todos los reales, ya que la expresión $y = ax^2 + bx + c$, con $a, b, c \in \mathbb{R} \ \wedge \ a \neq 0$ nunca se indefine, no importa cuál sea el valor de x.

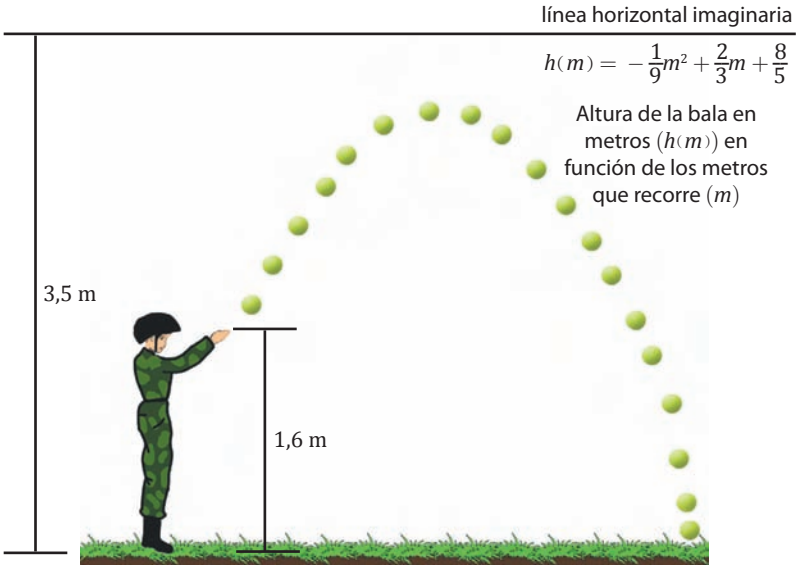
El *recorrido*, en cambio, está determinado por el vértice de la parábola. Como este es su punto más bajo o más alto, entonces el recorrido será
Rec $f(x) = \{y \in \mathbb{R} / y \geq y_V\}$ si tiene un mínimo ($a > 0$), y será
Rec $f(x) = \{y \in \mathbb{R} / y \leq y_V\}$ si tiene un máximo ($a < 0$).

Por ejemplo: Para la función $f(x) = 2x^2 - x + 3$, hemos calculado su vértice y era $V = \left(\frac{1}{4}, \frac{23}{8}\right)$, entonces, podemos decir que como $a > 0$, entonces el vértice es su mínimo.

Por lo tanto: Dom $f(x) = \mathbb{R}$ y
Rec $f(x) = \left\{y \in \mathbb{R} / y \geq \frac{23}{8}\right\}$
"Para que lo veas más claro, observa el gráfico de esta función".



2 Volvamos al problema inicial de Braulio (página 99).



Calculemos el punto más alto de la trayectoria de la bala, es decir, el vértice de la parábola:

$$a = -\frac{1}{9},\ b = \frac{2}{3},\ c = \frac{8}{5}$$

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

$$V = \left(-\frac{\left(\frac{2}{3}\right)}{2 \cdot \left(-\frac{1}{9}\right)}, \frac{4 \cdot -\frac{1}{9} \cdot \frac{8}{5} - \left(\frac{2}{3}\right)^2}{4 \cdot -\frac{1}{9}}\right) = \left(\frac{-\frac{2}{3}}{-\frac{2}{9}}, \frac{-\frac{52}{45}}{-\frac{4}{9}}\right) = \left(3, \frac{13}{5}\right)$$

Esto significa que la altura máxima que alcanzó la bala disparada por Braulio fue de $\frac{13}{5}$ m $= 2{,}6$ m.

3 La señora Silvia ha entrado a estudiar un curso de finanzas, requisito para obtener un ascenso en su trabajo. En clases, le plantearon el siguiente problema que no supo resolver: "Los gastos de una empresa son modelados, según los costos de producción, por la siguiente función: $g(c) = 5c^2 - 3c + 21$, donde c está en miles de pesos y g en cientos de miles de pesos. ¿Cuál es el costo de producción que hace que los gastos sean los menores posibles?"



Sus hijos, que ya habían estudiado la función cuadrática, le explicaron a su mamá lo siguiente:

La función cuadrática dada representa gráficamente una parábola que se abre hacia arriba (ya que $a > 0$); por lo tanto, el valor mínimo que se pregunta está dado por el vértice de esta.

Calculémoslo:

$a = 5,\ b = -3,\ c = 21$

$$V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$$

$$\Rightarrow V = \left(-\frac{(-3)}{2 \cdot 5}, \frac{4 \cdot 5 \cdot 21 - (-3)^2}{4 \cdot 5}\right) = \left(\frac{3}{10}, \frac{411}{20}\right)$$

Como c representa los costos y la función $g(c)$ depende de estos, quiere decir que c es el valor de la primera coordenada y $g(c)$ es el valor de la segunda coordenada del vértice (compáralo con $f(x)$); por lo tanto, el costo que hará los gastos mínimos es $\frac{3}{10}$, o sea, 0,3 miles de pesos, es decir, $0{,}3 \cdot 1\,000 = \$\,300$.

Trabaja

Desarrolla los siguientes problemas con tu grupo y comparen sus resultados con otros grupos, defendiendo o incluyendo los procedimientos realizados por los demás. Revisen en el solucionario las respuestas encontradas.

6 Los pares de puntos que se dan a continuación son los puntos de corte de una parábola con el eje x. Si se sabe que el vértice de dicha parábola es un punto de la forma $(x, 4x)$, determinen dicho vértice en cada caso.

a. $(2,0)$ y $(-3,0)$

b. $(7,0)$ y $(9,0)$

c. $\left(-\frac{1}{2},0\right)$ y $\left(\frac{5}{4},0\right)$

7 Dadas las siguientes funciones y un punto, determinen en cada caso si el punto dado es el vértice de la parábola asociada a la función dada.

a. $f(x) = 2x^2 + 3x - 5,\ \left(-\frac{3}{4}, -\frac{49}{8}\right)$

b. $y = -x^2 + 2x - 3,\ (1,8)$

c. $y = \frac{1}{4}x^2 + 3x + 1,\ (-6, -8)$

8 Dados los siguientes puntos, que representan vértices de algunas parábolas, asocien cada uno de ellos con las funciones que aparecen a continuación.

a. $\left(\frac{1}{2}, \frac{33}{4}\right)$

b. $\left(\frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$

c. $\left(\frac{1}{5}, \frac{6}{5}\right)$

i. ____ $y = 3x^2 - 4x$

ii. ____ $y = 2x - 5x^2 + 1$

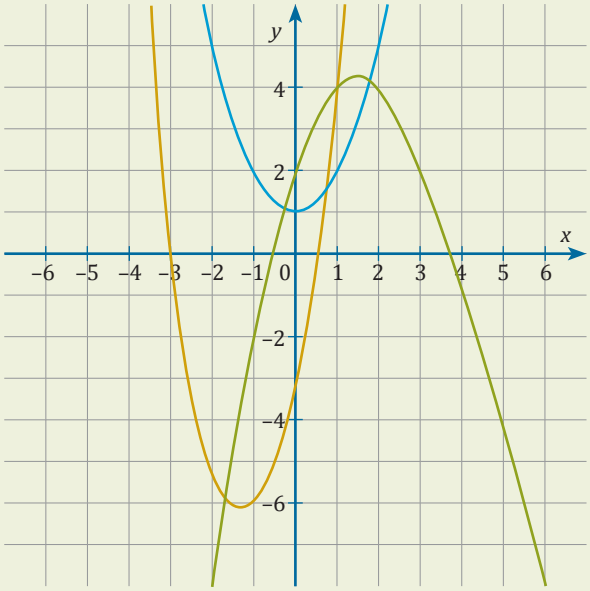
iii. ____ $y = 8 + x - x^2$

9 Dados los siguientes gráficos de parábolas, determinen a cuál de las funciones listadas corresponde cada uno de los vértices de los gráficos.

i. ____ $y = x^2 + 1$

ii. ____ $y = -x^2 + 3x + 2$

iii. ____ $y = 2x^2 + 5x - 3$



10 Determinen a qué cuadrante del plano cartesiano pertenecen los vértices de las siguientes parábolas:

a. $y = 3x^2 + 7x$

b. $f(x) = -x^2 - 4x - 1$

c. $f(x) = x^2 - 9$

Revisemos lo aprendido

A continuación valorarás el desempeño grupal de tus compañeros, anota el nombre de cada uno en tu cuaderno y evalúalos (Si/No) tomando en cuenta los siguientes aspectos:

1 Estuvo al pendiente del proceso de la tarea, comunicándose oportunamente, participando activamente, sugiriendo ideas y compartiendo conocimientos y opiniones.

2 Demostró responsabilidad en el desempeño del grupo, orientando oportunamente, y preocupándose por el enriquecimiento y mejora de la tarea.

¿Cómo determinar el eje de simetría?

El eje de simetría es una recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola.

Como recordarás del estudio de rectas del año pasado, toda ecuación paralela al eje y tiene ecuación $x = m$, donde m es el valor en que la recta corta al eje x.

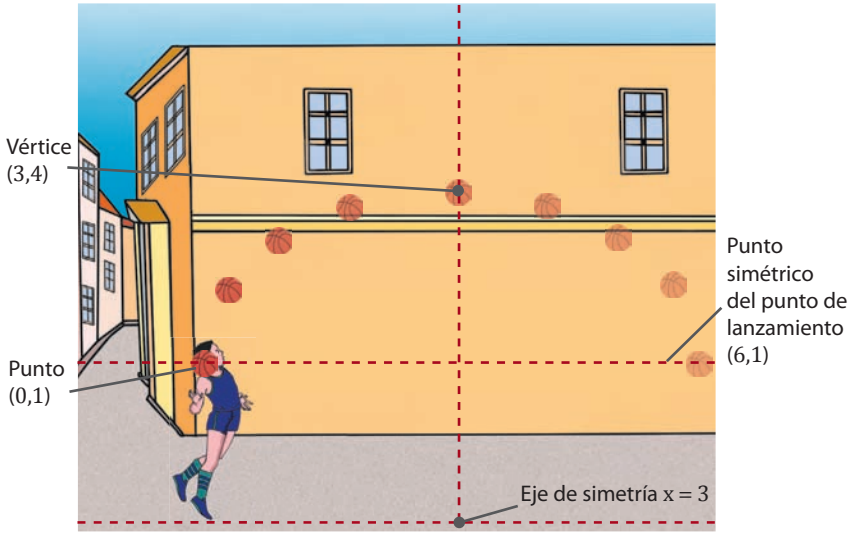
En nuestro caso, el valor de m es el valor de la coordenada x del vértice. Así, el eje de simetría queda determinado por la recta de ecuación $x = x_v = -\frac{b}{2a}$.

"Pensemos en el siguiente ejemplo"...

Renato estaba jugando básquetbol en el patio con sus compañeros. La oficina del director queda a 6 m de este lugar. Su ventana, ubicada desde su parte más baja, a 2 m del suelo, está cerrada y da al patio. Tratando de encestar, Renato lanza la pelota con más fuerza de lo habitual y se va directo hacia esa ventana. El profesor de Física, que estaba en el patio, estima que la pelota alcanzó su altura máxima de 4 m cuando iba en la mitad de la distancia entre Renato y el edificio.

Si Renato lanza la pelota desde un metro de altura, ¿romperá la ventana del director?

Este es el dibujo de la situación, suponiendo que el origen de coordenadas está en el punto donde está parado Renato:



Como el vértice está en el punto $(3,4)$, quiere decir que allí está el eje de simetría de la parábola descrita por la pelota; entonces, debe haber un punto por el que pasará la pelota que esté a la misma altura de lanzamiento $(1\ \text{m})$ y a la misma distancia desde Renato a la mitad del patio, esto es, en el punto $(6,1)$, como muestra la figura. Como la parte más baja de la ventana está ubicada a $2\ \text{m}$ del suelo, tendremos que cualquier punto que pertenezca a la ventana estará por sobre el punto $(6,2)$; por lo tanto, la pelota no llega a la ventana. ¡Qué buena suerte la de Renato!

Links de interés

Te sugerimos este link, en el que encontrarás la definición de algunas características de la parábola, así como ejercicios.
http://conteni2.educarex.es/mats/11826/contenido/

Trabaja

3 Determina el eje de simetría de cada una de la siguientes parábolas:

a. $y = x^2 - 7x + 12$

b. $y = 2x^2 + 3x$

c. $y = -x^2 + 15$

d. $y = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}$

e. $y = \sqrt{3}x^2 - 4x + 2$

4 Resuelve los siguientes problemas:

a. Luisa y sus amigos están jugando voleibol, ella lanza hacia arriba la pelota y Max, uno de sus amigos, calcula que alcanzó $3\ \text{m}$ de altura máxima a los $2\ \text{s}$ de lanzada. ¿En cuánto tiempo, aproximadamente, Luisa volverá a ver pasar la pelota frente a ella?

b. Pedro está respondiendo su prueba de Matemática. El problema 5 dice que los puntos $(5,7)$ y $(12,7)$ son simétricos en una parábola y que se debe hallar el eje de simetría. ¿Cuál será este? ¿Puedes encontrar la respuesta al igual que Pedro?

Para saber más

Recuerden que, para determinar una parábola (su función), se necesitan tres puntos cualesquiera por los que pasa. Al reemplazar las coordenadas de estos tres puntos en los valores de x e y de una función de la forma $y = ax^2 + bx + c$, se obtendrá un sistema de ecuaciones para a, b y c. Al encontrar dichos valores se podrá escribir la función pedida.

Por ejemplo:

Los puntos $(1, -4)$, $(-1{,}6)$, $(2{,}3)$ pertenecen a una parábola ¿puedes determinar la función que representa?

$\Rightarrow$ para $(1, -4)$ se tiene que:
$-4 = a \cdot 1^2 + b \cdot 1 + c$

para $(-1{,}6)$ se tiene que:
$6 = a \cdot (-1)^2 + b \cdot (-1) + c$

para $(2{,}3)$ se tiene que:
$3 = a \cdot 2^2 + b \cdot 2 + c$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} a + b + c = -4 \\ a - b + c = 6 \\ 4a + 2b + c = 3 \end{array}$$

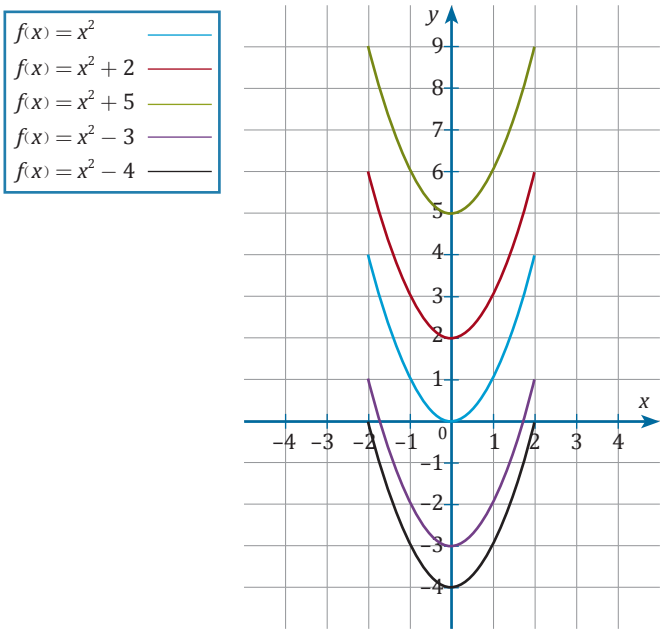
$\Rightarrow a = 4, b = -5, c = -3$

$\Rightarrow y = 4x^2 - 5x - 3$

Otras consideraciones

Ya hemos analizado una función cuadrática en forma general y has visto sus aplicaciones. Solo nos quedan dos casos interesantes por analizar.

1 Tomemos las funciones de la forma $y = x^2 \pm c$. Grafiquemos algunas de ellas para poder compararlas.



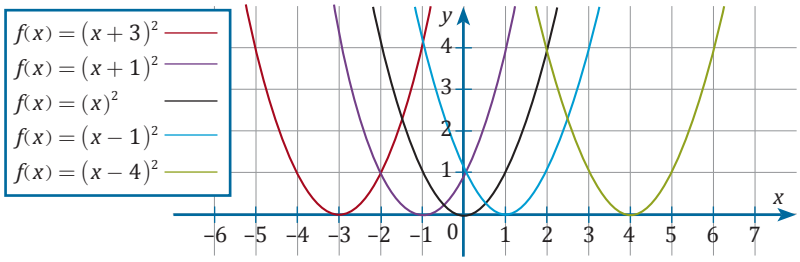
¿Qué sucede con el gráfico de las parábolas con respecto a las variaciones del valor de c?
Si observas bien, verás que con respecto a la función $y = x^2$, las otras se han desplazado verticalmente.

Al escribir la parábola de la forma $y = x^2 + c$, esta se traslada verticalmente con respecto a $y = x^2$ dependiendo del valor de c.

Si $c > 0$, la parábola se traslada c unidades hacia arriba.

Si $c < 0$, la parábola se traslada c unidades hacia abajo.

2 Grafiquemos ahora funciones de la forma $y = (x \pm m)^2$. Mira, compara y responde.



¿Qué sucede cuando se suma o resta un número dentro del cuadrado, es decir, cuando formamos un cuadrado de binomio?
Como ya lo observaste, al comparar las funciones con $y = x^2$, de m depende que las funciones se desplacen horizontalmente.

Al escribir la función cuadrática de la forma $y = (x + m)^2$, ésta se traslada horizontalmente con respecto a $y = x^2$, dependiendo de m. Así, si $m > 0$, la parábola se trasladará m unidades hacia la izquierda y si $m < 0$ se trasladará m unidades hacia la derecha.

Hemos llegado al final de esta unidad y te desafiamos a que grupalmente realices una presentación sobre los conceptos más importantes aprendidos aplicando cada uno en alguna situación de tu vida diaria. Además, debes incluir en tu exposición lo que pensabas antes de tu aprendizaje con respecto a los conceptos acá tratados.

Trabaja

5 Jaime está navegando por Internet y le llama la atención un video de optimización de funciones. En más de una oportunidad había escuchado: "Optimicemos la función estudio y ahorremos tiempo". ¿Qué será esto de optimizar funciones?, se pregunta Jaime. El profesor dice: *"Hoy aprenderás a optimizar funciones; resolvamos el siguiente problema. Descomponer el número 44 en dos sumandos tales que el quíntuplo del cuadrado del primero más el séxtuplo del cuadrado del segundo tenga un mínimo valor"*.

Jaime lo vio y se dio cuenta de que tenía mucha relación con la clase de funciones cuadráticas que había visto recientemente. Anotó el desarrollo y lo guardó. ¿Cuál fue el desarrollo que escribió?

6 Los grupos de Amaro y Mauro se unieron para hacer la tarea de parábolas. A cada grupo le tocaba analizar 8 parábolas para encontrar todos sus elementos característicos. Se quedaron en el liceo y juntos resolvieron las seis primeras asignadas. Acto seguido, intercambiaron los desarrollos para revisarlos mutuamente a fin de advertir las fallas. Decidieron terminar la tarea en la casa de aquel integrante que tuviera la parábola con sus ramas más abiertas y menos puntos de intersección con el eje x.

Por el grupo de Amaro competían las siguientes parábolas:
$y = 0{,}5x^2$; $y = 4x^2 + 2x - 1$

Por el grupo de Mauro iban:
$y = 0{,}5x^2 - 1{,}5x + 1$; $y = 3x^2 + 1$.

¿De qué grupo era el integrante que facilitó su casa? Justifica tu respuesta matemáticamente.

7 El grupo de Rafael disertó acerca de la temperatura a la que hierve el agua y su relación con la altura. Explicaron que en su investigación aprendieron que: "La temperatura en °C (T) a la que hierve el agua está en función de la altura, h, en metros sobre el nivel del mar mediante la fórmula:

$h = 1\,000(1\,000 - T) + 580(100 - T)^2$ y que esta fórmula se usa solamente a partir de los 95 °C, hasta los 100 °C, inclusive".

Rafael usó correctamente la fórmula para encontrar la temperatura a la cual hierve el agua en la cima del monte Everest, cuya elevación aproximada es de 8840 m.

a. ¿Cuál debiera ser la respuesta que obtuvo Rafael?

b. ¿A qué temperatura hierve el agua a nivel del mar?

c. Averigua a qué altitud sobre el nivel del mar está el sector donde tú vives. Con esa información, aplica la fórmula para hallar la temperatura a la que hierve el agua en esa zona. Deben usar calculadora.

Sintetizando

- Una parábola es la curva que representa, gráficamente, a la función cuadrática de la forma $y = ax^2 + bx + c$, con a, b, c pertenecientes a los reales y $a \neq 0$.
- Las parábolas tienen elementos característicos que son:

  Concavidad (sentido hacia donde se abren sus ramas). Puede ser cóncava hacia arriba (si $a > 0$) o cóncava hacia abajo (si $a < 0$).

  Vértice (punto máximo o mínimo de la parábola). Se calcula usando la fórmula:
  $V = \left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a} \right) \right) = \left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a} \right)$

  Punto de corte con el eje y (punto donde la parábola intersecta al eje y). Está dado siempre por $(0,c)$.

  Punto de corte con eje x (punto donde la parábola intersecta al eje x). Se resuelve la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ (se iguala la función a 0). La parábola puede tener dos, uno o ningún punto de corte con el eje x, dependiendo de las soluciones de la ecuación. Si las soluciones son x_1 y x_2, entonces los puntos de corte son $(x_1,0)$ y $(x_2,0)$.

  Eje se simetría (recta paralela al eje y que pasa por el vértice de la parábola y la divide en dos partes iguales). Su ecuación es $x = -\frac{b}{2a}$.
- La función $y = x^2 + c$ se traslada verticalmente c unidades hacia arriba con respecto a la función $y = x^2$ si $c > 0$ o c unidades hacia abajo con respecto a la función $y = x^2$ si $c < 0$.
- La función $y = (x + m)^2$ se traslada horizontalmente m unidades hacia la izquierda con respecto a la función $y = x^2$ si $m > 0$ y m unidades hacia la derecha con respecto a la función $y = x^2$ si $m < 0$.

Revisemos lo aprendido

Responde las siguientes preguntas y luego comparte las respuestas con tu compañero o compañera de banco. Complementa lo que te faltó y aporta tus conocimientos. Recuerda preguntar si tienes dudas.

- ¿Puedo definir los conceptos de parábola, función cuadrática, dominio, recorrido, imagen y preimagen?
- ¿Entendí los contenidos de esta sección? Cuando no fue así, ¿volví a estudiarlos? ¿Pregunté mis dudas a compañeros o compañeras que entendieron, o a mi profesor o profesora?
- ¿Pude resolver correctamente las actividades propuestas en esta sección?
- ¿Ayudé a mi grupo para realizar un buen trabajo?
- ¿Hice un resumen de los conceptos que me fueron más difíciles de entender, de modo que no los olvide?



Trabaja más...

I. Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$

Trabaja en forma individual

1 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $5x^2 + 49 = 0$

b. $(2x - 11)^2 = 20(5 - 2x) + 4(5 - x) + 9$

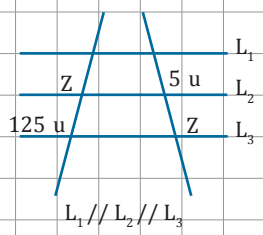
c. $2\sqrt{1 - 0{,}75x^2} = \sqrt{31}$

2 ¿Cuál es el número natural que elevado al cuadrado da 676?

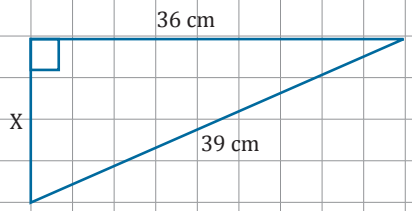
3 La tercera parte del área de un cuadrado vale 120cm^2. ¿Cuánto mide su lado?

4 Determina el valor de la incógnita en cada uno de los siguientes casos:

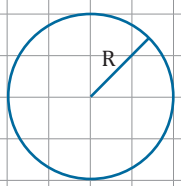
a.



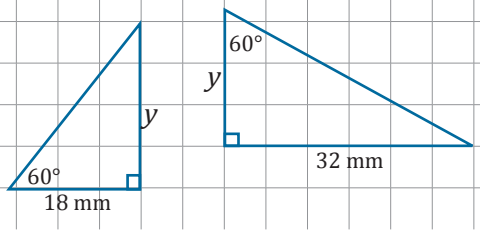
b.



c. El área de la circunferencia es $15{,}7\ \text{mm}^2$ ($\pi = 3{,}14$).



d. Los triángulos de la figura son semejantes.



5 "Cayó la noche y aún no puedo encontrar el número pedido. Sé que a partir de él debo formar otros 2 de la siguiente manera: sumando tres y quitando 3, de tal modo que el producto de los números formados sea 2 695. ¿Puedes decirme cuál es el número que ando buscando?"

6 "Así es, inspector, me di cuenta cuando el ladronzuelo iba corriendo y atravesando en diagonal la parcela vecina. Vi que se llevaba mis joyas y otras pertenencias más, y se perdió en el otro extremo". Si todas las parcelas de acá son de $5\,000\ \text{m}^2$ y rectangulares, con un frente de $40\ \text{m}$, ¿cuántos metros debió atravesar en diagonal este ladronzuelo? Usa calculadora si es necesario. Expresa tu respuesta aproximando a la centésima.

7 Juan Carlos encontró que algunos utensilios arqueológicos cilíndricos tenían la particularidad de que el radio era la raíz cuadrada de la altura. "Este instrumento –dijo– tiene un volumen aproximado de $1\,200\ \text{cm}^3$. Si aproximo π a 3, tendría que la altura y su diámetro debieran ser...". Entonces interrumpieron su trabajo. De acuerdo a la información dada, ¿qué valores aproximados tienen el radio y la altura?

8 "Aló, hija, hablé con el maestro Lucho y me contestó que cobra $ 2 250 por metro cuadrado de pintura. Le conté que tenías que pintar tres conos iguales de $1\ \text{m}$ de diámetro por una altura que no me acordé en ese momento, y que los necesitas lo antes posible para tu exposición de arte. Él parece que se acordaba de la altura de los conos, pues me dijo que según sus cálculos (con $\pi = 3$), en total, por los tres cobraría $ 56 700. Luego de un rato de calcular, yo también pude saber la altura". ¿Puedes tú también calcular la medida de la altura de los conos? Expresa la respuesta con aproximación a la centésima (puedes usar calculadora).

II. Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$

1 Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno, incluyendo todo el desarrollo:

a. $5x^2 = 7x$

b. $4(x+1) = (x-3)^2 - 5$

c. $(2x+3)(3x-7) - (8x+1)(2x-1) = (x-5)(x+4)$

d. $3(x+1)(2x-5) - (5x+3)(2x-1) = 4(x-3)$

e. $\frac{9x}{5} + \frac{(x-3)(x+2)}{3} = -2$

f. $\left(\frac{a}{2} - \frac{3}{5}\right)^2 + \frac{a^2}{50} = \frac{a}{10}\left(\frac{a}{2} + 1\right) + \frac{18}{50}$

g. $\frac{3x^2-5}{x^2-1} + \frac{11x-4}{(x-1)(x+1)} = \frac{9}{1-x^2}$

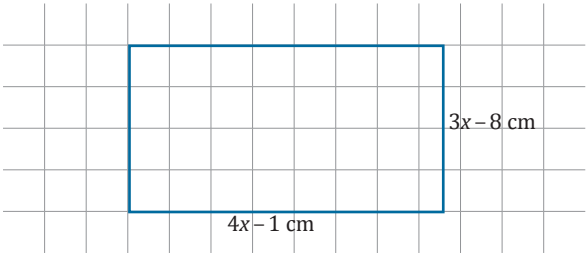
h. $(4^{x+1})^{x+3} = (2^6)^{x+1}$

i. $\frac{3^{x+3}}{3^{3x^2+5}} = 9^{x^2-1}$

j. $\sqrt{2 + \sqrt{3 + \sqrt{x^2 + 8x + 1}}} = 2$

k. $\sqrt{x+1} \cdot \sqrt{2x+4} = \sqrt{4x - 3x^2 + 4}$

l. Con los datos de la figura adjunta, calcula la medida de los lados del rectángulo si se sabe que su área es igual a $8\ \text{cm}^2$.



III. Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$

1 Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno. Revisa luego tus respuestas.

a. $6x^2 + 3 = -11x$

b. $3x(x+2) - 4x(x+6) = 77$

c. $(4x-1)^2 + 12x = 15(x^2+3x) - 329$

d. $(3x+1)^2 - (2x-3)^2 = 0$

e. $\frac{(x+1)^2}{2} - \frac{x(2x+3)}{3} = -\frac{7x}{6}$

f. $\frac{x(x+2)}{4} + \frac{(3x+1)(x+2)}{8} = \frac{x^2+x+1}{2}$

g. $\frac{2x+1}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{3x+5}{x^2+x}$

h. $2^{x+3} \cdot (4^x)^{x+5} = 8^{\frac{x^2}{3}-7}$

i. $125^{x-3} : (25^x)^{2x-5} = \left(\frac{1}{5}\right)^{51+5x^2}$

j. $\sqrt{14-x} + 8 = x$

k. $\sqrt{1 + \sqrt{2x+5}} = \sqrt{3x-2}$

l. $\sqrt[3]{5+x} \cdot \sqrt[3]{x+25} = 5$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $7y^2 + 14y = -30$

b. $\frac{3x-7}{x+\sqrt{2}} - \frac{x-\sqrt{2}}{3x-7} = 0$

c. $13(z^2 + 0{,}25) - 12z = 0$

3 ¿Cuál es el menor de los números que satisface la ecuación $(3x-1)^2 - 121 = 0$?

4 Resuelve los siguientes ejercicios y responde las preguntas planteadas.

a. Al multiplicar un número natural par por su sucesor par, se obtiene 168. ¿Cuáles son estos números?

b. La fracción $\frac{158}{2m}$ equivale a tomar el número cuatro, también dividirlo por $2m$, y luego aumentarlo en $2m - 3$ unidades.

¿Cuánto vale m? Escribe la fracción aludida.

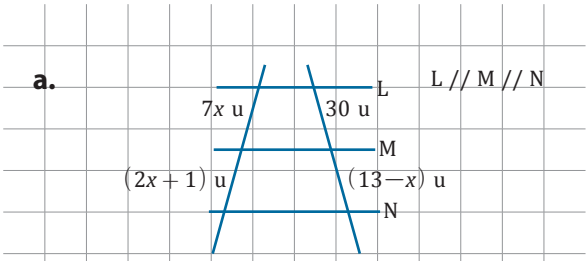
5 Aumentar en 27 el séxtuplo de un número es lo mismo que sumar su cuadrado cinco veces. ¿Cuál es ese número?

6 En cm, los lados de un rectángulo miden $(11y-1)$ y $(y+1)$, respectivamente. Si su área es de $20\ \text{cm}^2$. ¿Cuánto vale su diagonal?

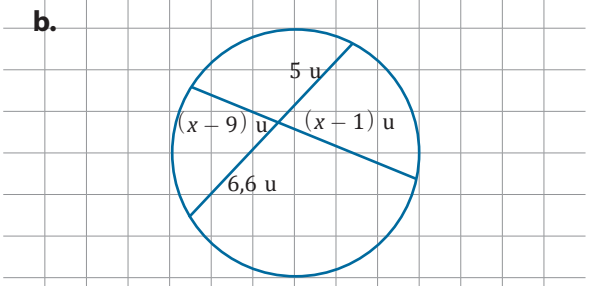
7 El área de un triángulo es $\frac{63}{4}$ dm². La altura está dada por $3a$ y la base por $(2a + 5{,}5)$. Determina el valor de a y las medidas de la altura y la base.

8 Determina el valor de x en cada caso:

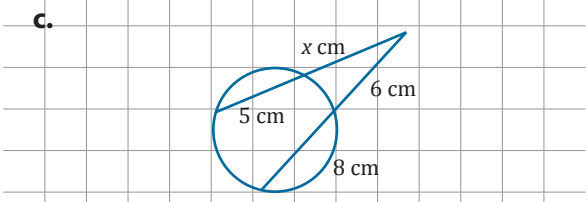
a.



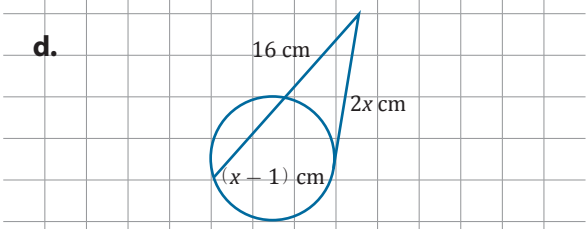
b.



c.



d.



9 Para la ecuación $ax^2 + bx - 7 = 0$ se tiene que $a = k + 1$ y $b = 2k$, donde k es un número por determinar. Se sabe además que $\sqrt{b^2 - 4a(-7)} = 10$.

Determina:

a. Los valores de k y los de a y b.

b. Las dos ecuaciones resultantes de la forma $ax^2 + bx - 7 = 0$.

c. La solución de la ecuación formada con los menores valores de a y b.

IV. Ejercicios misceláneos de ecuaciones cuadráticas

Trabaja en grupo

1 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas; verifiquen sus respuestas en el solucionario.

a. $6x - x^2 = x(x + 9) - 3$

b. $x^2 - 4x - 45 = 0$

c. $8x^2 - 25x - 3 = 0$

d. $35x^2 - x - 12 = 0$

e. $\frac{x+1}{2-x} - \frac{2x+5}{3-x} = 3$

f. $(x + 2)^3 - x(x + 1)^2 = 2x(x + 5)$

g. $\frac{3x^2 - 6(x+1)}{9} = \frac{3}{5}$

h. $\frac{x+6}{2} + \frac{x+1}{x} = \frac{3x-3}{9}$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas, usando el método de completación de cuadrado:

a. $x^2 - 4x + 3 = 0$

b. $x^2 + 4x - 21 = 0$

c. $3x^2 + 13x - 10 = 0$

d. $2x(x + 1) = (x + 3)^2$

e. $x(x + 2) - x(4 - x) = 12$

f. $(5x - 3)(x + 1) = x - 2$

g. $(x - 1)^2 + x(x + 7) = 2$

3 Determina si los siguientes números son soluciones de la ecuación que se indica:

a. 4 y 5 de $x^2 + 3x - 1 = 0$

b. $i - 1$ y $-1 - i$ de $x^2 + 2x + 2 = 0$

c. -8 y 7 de $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x - 28 = 0$

4 Escribe una ecuación cuadrática que tenga por solución los siguientes números:

a. 5 y -8

b. $\frac{1}{3}$ y $\frac{1}{9}$

c. $2 + 3i$ y $2 - 3i$

5 Une con una línea las ecuaciones (en la columna A) con sus respectivas soluciones (en la columna B).

COLUMNA A	COLUMNA B
$x^2+5x+4=0$	3 y -1
$2x^2-9x+1=0$	0 y 1
$x^2=2x+3$	$\frac{3\pm\sqrt{33}}{3}$
$x=2x(x+4)$	-1 y -4
$x^2-x=0$	0 y $-\frac{7}{2}$
$3x^2-6x=8$	$\frac{9\pm\sqrt{73}}{4}$

6 Una ecuación se dice equivalente con otra cuando ambas tienen las mismas soluciones. Determina cuáles de las siguientes ecuaciones son equivalentes:

a. $x^2+6x+1=0$

b. $x^2-5x=0$

c. $x^2-3x-4=0$

d. $x^2-2x+1=x(1-x)-5$

e. $\frac{1}{3}x^2=-2x-\frac{1}{3}$

7 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas en tu cuaderno, buscando el método más rápido de desarrollo. No olvides comprobar tus resultados cuando sea necesario:

a. $8x^2-32=0$

b. $5(x^2-9)=4x^2+19$

c. $\frac{x^2-3}{4}+\frac{4x^2-1}{3}=\frac{17x^2+5}{12}$

d. $(x-2)(x+3)-x(x+2)=x(2x-1)-24$

e. $\frac{3x+1}{2x-1}-\frac{x+3}{2x+1}=\frac{2x^2+6}{4x^2-1}$

f. $\frac{x}{2}+\frac{4}{x}=\frac{12}{x}$

g. $\sqrt{2x+5}-1=x$

h. $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{3x^2-53}{2x^2-2}}}=2$

i. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}=\sqrt{2x+2}$

j. $3x^2-6x=0$

k. $(2x+5)(5x-3)=(x-1)(x+15)$

l. $\frac{x^2}{2}-\frac{x-4}{10}=\frac{2}{5}$

m. $(x-4)^2+8x=(3x-8)(x-2)$

n. $\frac{3x-2}{x-3}=\frac{5x+4}{x-3}$

ñ. $7x+\frac{25}{3x+5}=5$

o. $\sqrt{x+3}-4=\sqrt{1-x}$

p. $\sqrt[3]{p^{x-3}}=\sqrt[x-7]{p^7}$

8 Resuelve los siguientes problemas, coloca todo el desarrollo en tu cuaderno:

a. Aumentando dos de los lados opuestos de un cuadrado en 4 metros y los otros dos lados en 6 metros, se obtiene un rectángulo de doble área que el cuadrado. Determina el área del cuadrado.

b. Si la diferencia entre 5 veces un número y 15 se multiplica por dicho número, resulta cero, ¿cuál es el número?

c. Diego estaba un poco aburrido en la fiesta y se puso a contar a las personas, encontrando que el total de personas era un cuadrado perfecto, luego anoto en un papel: "Si al cuadrado de la cantidad de personas le restamos 100 veces la cantidad de personas, entonces no quedan personas" ¿puedes indicar cuántas personas habían en la fiesta?

d. Dos llaves llenan juntas una piscina en dos horas, la primera lo hace por si sola en tres horas menos que la segunda. ¿Cuántas horas tarda cada llave en llenar la piscina por si sola?

e. Pedro dice a Diego "Hagamos el trabajo de Física juntos y lo terminamos en 6 días, de lo contrario yo demoraré 5 días más que tú en hacerlo" ¿Puedes indicar en cuántos días se demora cada uno de ellos si lo hacen solos?

f. La suma de un número natural y su cuadrado es 42, ¿de qué número se trata?

g. Según las medidas que tomó Matías de la sala de clase determinó que la longitud excede a su ancho en 4 metros. Si cada dimensión se aumenta en 4 metros, el área de la nueva figura será el doble de la inicial. Por desgracia no fue al colegio ese día. ¿Hay alguien que pueda resolver este problema? - exclamó la profesora un poco alterada - ¿Tú crees que el problema tiene solución?

h. La suma de $USD\ 800$ debe distribuirse en partes iguales a cierto número de personas. En el momento de la repartición, cinco personas se retiran lo que significa que la cantidad que les corresponde a las otras aumenta en $USD\ 8$ ¿Cuántas personas eran inicialmente?

9 Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas, mediante factorización:

a. $x^2 + 9x - 36 = 0$

b. $\frac{6x+5}{2x+3} = \frac{2x+1}{4x-1}$

c. $\frac{6}{x^2} - \frac{9}{x} = -\frac{4}{3}$

10 En el acto de inicio de temporada a la recién remozada piscina municipal, el alcalde en su discurso destacó las ventajas de la colocación de un grifo adicional al que había. Para llenarla con ambos a la vez, tan solo transcurren siete horas y media. La ventaja frente al anterior es que este la podría llenar completamente y por sí solo, en ocho horas menos que el grifo más viejo. En el nuevo recambio de agua, el proceso de llenado de la piscina comenzó a la una de la madrugada, pero no se pudo utilizar el grifo antiguo pues sufrió un desperfecto. ¿A qué hora debiera estar completamente llena si solo se utilizó el grifo nuevo?

11 "Nos encontramos en la parte final de nuestro programa *Alcanzando una gira de estudio para mi curso*, transmitido por RACH-TV. Atención, estudiantes, se viene el desafío matemático: Cada uno de los cinco participantes tiene un paquete con un kg de harina y dos bolsitas más pequeñas completamente desocupadas. El desafío consiste en llenarlas, usando la harina del paquete, de tal modo que la razón entre las cantidades de la bolsita que quede más pesada (x) y la otra sea igual a la razón entre el kg original aumentado en 50 g y la bolsita más pesada, a la cual se le ha extraído un cuarto de kg de harina. ¿Cuántos gramos debe haber en cada bolsa?"

12 Anacleto y Gumersindo, oriundos de Colchagua y amigos desde la infancia, se rencuentran después de muchos años en el campo de Anacleto y sostienen la siguiente conversación:
–¡Bienvenidos, compadres, a mis $253\ \text{m}^2$ de terrenito! Comadre Lola, compadrito Gumersindo, ¿cómo han llegado?
–Anacleto Espinoso, ¡quién pudiera imaginar que del terrenito de antes ahora tenga este tremendo potrero...!
–Lo único que hice fue comprar 3 m a lo largo y 1 m a lo ancho, y agregárselo al terreno anterior.
–Según recuerdo, compadrito, el largo del terrenito anterior era el doble de su ancho. ¿Estoy en lo cierto?
–¡Así es!
¿Puedes encontrar las medidas del terreno antiguo de Anacleto?

13 María Gracia y Raymundo estudian química y hoy han aprendido de algunas leyes sobre gases. La ley de Boyle – Mariotte relaciona la presión con el volumen de un gas cuando la temperatura es constante, y dice que la presión inicial multiplicada por el volumen inicial es igual al producto de la presión final por el volumen final. Ellos están preparando su próximo experimento, pero deben hacer algunos cálculos teóricos que después probarán experimentalmente. Para ello, supondrán que toman x litros de un gas y lo someten a una presión igual a $150x$ mm Hg. Luego, el gas disminuirá en 1 litro, entonces la presión debería llegar a 800 mm Hg. Ahora deben calcular el valor de x para realizar el experimento. ¿Cuál es este valor? ¿Qué debiera ocurrir con el volumen si la presión disminuye?



14 "Cuando llegó el tío Jacob con cinco galones de barniz de barco, nos explicó que los aplicaría en el frontón de nuestra casa, en el remate triangular de la fachada que reposa sobre la cornisa. Agregó: que como la altura mide 1 metro menos que la base, no le fue difícil hacer el cálculo con respecto al número de galones que usaría en el frontón, ya que para el de su casa, usó dos galones menos. ¿Y por qué menos?, le pregunté. Entonces señaló que aunque el frontón de su casa tiene 1 metro más de base, la altura es 2 metros menos que el frontón de la nuestra. Te entiendo, le dije, comparaste ambas superficies y después estableciste una proporción con el número de galones que usarías!"

¿Puedes tú calcular cuál es el área de ambos frontones? ¿Cuánto rinde cada galón de pintura?

15 Hola, Karen:

Te escribo este email porque me siento muy mal por lo ocurrido con la tía Gertrudis en la última reunión en su casa. Estábamos entre mujeres, y en el clima de confianza que había, le pregunté su edad. Se incomodó y se fue a la cocina, con la excusa de traer bebidas. Al volver, y fingiendo reír, me dijo: "Mira, preciosa, a mi edad réstale 50 y guárdatela". Me enrojecí de vergüenza y todas se echaron a reír.
Después, al repartir la torta, añadió: "Al triple de mi edad le restas 131, lo multiplicas con lo que te guardaste y obtendrás 50. ¿Entiendes, linda? C I N C U E N T A, SIN CUENTA". Todas explotaron en carcajadas... Me levanté y me fui. ¿No sé dónde estuvo mi error? Ella parece de 42 años, pero sé que tiene más...

¿Puedes calcular tú la edad de la tía Gertrudis?

16 Clemente revisó en Internet maneras de construir cohetes de juguete. En una de ellas encontró, además, una ecuación para calcular el tiempo (en segundos) en que ese tipo de cohete tardaría en alcanzar treinta metros: $-2t^2 + 4\sqrt{15t} = 30$, pero al resolverla, no coincidió con el tiempo que allí mostraban. ¿Cuál fue el valor del tiempo que daba esta ecuación? Finalmente, comprobó que su valor para el tiempo era el correcto. ¡A jugar se ha dicho!

17 El distraído Hipólito revisó los apuntes sobre la proporcionalidad inversa que están presentes en un viejo libro. En voz alta, repetía: "Si para realizar un determinado trabajo, 24 trabajadores se demoran dos días, 12 trabajadores lo efectuarían en el doble de tiempo, siempre y cuando se guarden las mismas condiciones. Por otro lado, $3y + 5$ trabajadores tardarían $3y + 3$ días". Sin darse cuenta, se había adentrado en el mundo de las ecuaciones cuadráticas. ¿A qué valor de y se refería? ¿Cuántos eran los trabajadores y cuántos días tardarían en realizar el trabajo?

18 "–Afortunadamente, sé matemática –le contaba Raúl a su polola–, ya que gracias a eso pude contestar correctamente la última pregunta del test que me hicieron para ingresar a este nuevo trabajo".

–¿Qué pregunta era? –preguntó ella. –Decía así: Dado el cuadro siguiente, encuentra el valor de x y algunas probabilidades.

Número	1	2	3	4	5	6
Probabilidad	$1x$	$2x^2$	$3x$	$4x^2$	$5x$	$6x^2$

Tú también puedes hacerlo. Para ello, determina:

a. la ecuación cuadrática usando la propiedad de la suma de las probabilidades (teorema de la Probabilidad Total).

b. ¿la probabilidad de obtener un seis al lanzar un dado cargado. Da tu resultado aproximado a la centésima, puedes usar calculadora.

19 "Otra vez me pasa lo mismo. Cae la noche y aún no puedo resolver la siguiente ecuación, en la cual cada factor representa la medida de una arista en un paralelepípedo:
$2(2x - 3)(5x - 9) = 224$".
¿Qué representa esta fórmula? ¿Cuál será el valor de x?, ¿Cuáles son las medidas de las aristas?

20 María José ha leído en la sección de desafíos al ingenio de su revista favorita lo siguiente: "El producto de dos números que difieren en 8 unidades es $10\,185$". Encuentra, al igual que María José, los números mencionados.



21 Antonio necesita construir un triángulo isósceles que tenga área $60\ \text{cm}^2$ y cuya altura exceda en $2\ \text{cm}$ a la base, pero al hacer los cálculos se dio cuenta que no sabía suficiente matemática para resolver su problema. Como tú si sabes, ayuda a Antonio y determina:

a. La ecuación que permite calcular la altura y la base del triángulo pedido.

b. La medida de la base, la altura y los lados del triángulo pedido.

c. El perímetro del triángulo.

22 Martín siempre estaba preocupado por las rebajas y descuentos, pero esta vez no había logrado llegar a tiempo. Al llegar a su casa le comentaba a Marcela: "si hubiera alcanzado la oferta, habría comprado 6 alcachofas más y cada una me hubiera costado $\$\ 48$ menos y habría gastado los mismos $\$\ 5\,760$. ¿Cuántas alcachofas compró Martín y cuánto le costó cada una?

23 A Bernardo le gustaba inventar problemas matemáticos. Esta vez le dijo a su profesor: ¿Puede encontrar usted un número real de modo que el producto entre su antecesor y otro número, tres unidades menor que él, sea igual a -2?" El profesor le dijo que no existía tal número en el conjunto de los números reales. Bernardo se quedó atónito, en algo se debía haber equivocado. Encuentra tú el error ayudándote con las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la ecuación que plantea el problema dado?

b. ¿Cuál es la solución de la ecuación planteada?

c. ¿A qué conjunto pertenecen la(s) solución(es) encontrada(s)?

24 Gloria, no importa la altura, solo importa la base de tu acuario de modo que quede bien en el mueble en el que lo colocarás… No, quiero que mi acuario tenga $30\ \text{cm}$ de altura, ni uno más ni uno menos. Además, el largo debe medir $60\ \text{cm}$ más que el ancho y acuérdate que debe contener exactamente 273 litros. Ya veré yo que hago con el mueble… ¿Cuáles son las medidas que Gloria quiere que tenga su acuario?

25 Desafío número 1 – dijo el profesor. Todo el curso sabía que ello significaba algún incentivo posterior para el primero que llegara con la respuesta correcta a su escritorio. ¿Cuántos números, cuáles y de qué naturaleza o conjunto numérico existen que cumplan la igualdad $(x+1)^2+(x+2)^2=(x+3)^2$?

26 No me acuerdo como se hacían este tipo de ejercicios, ¿me puedes ayudar? – decía un papel en el paradero de micro y había un mail para enviarlos resueltos. Ayuda a tan desesperada persona enviándole las respuestas.

a. Encuentra el valor de k en la ecuación $(k+1)x^2-2kx+9=0$, de modo que tenga sólo una solución en los números reales

b. Si 3 y -4 son las soluciones de una ecuación cuadrática, ¿cuál puede ser una de estas posibles ecuaciones?

27 ¿Por qué siempre dicen que soy tan complicado? – dijo Carlos – Yo resolví las ecuaciones por el método de completación de cuadrado porque me entretiene más y porque así aprovecho de repasar la materia. Al igual que Carlos, tú puedes hacerlo también por este método…

a. $2x^2+3x-5=0$

b. $x^2+x(2+3x)=9(x-2)$

c. $\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{2x+3}{x+2}$

28 Fabiana, que lo sabía todo era la indicada para ayudar a Felipe a resolver su problema. Se dio ánimo, fue donde estaba y le dijo: "Necesito tu ayuda con el siguiente enunciado: El cuadrado de un número natural aumentado en el cuadrado de su sucesor da por resultado el cuadrado de siete aumentado en tres veces cuatro". Al igual que Fabiana responde las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la ecuación que planteó Fabiana?

b. ¿Cuál es el número buscado?

29 Ok, hagamos un trato… si logras decirme cuántas series de abdominales debes hacer si en cada una tienen que haber el doble de abdominales que de series y así completar 98 abdominales en total, te libero de 10 minutos de bicicleta al final de la clase… tienes exactamente estos 2 minutos de descanso para responderme – le decía el entrenador personal a Fernanda. Ella lo logró sin problema, ¿cuántos abdominales y series de ellos hizo Fernanda?

30 Esa rampa debe medir 15 metros y la altura de la pared a la que debe llegar es de $2{,}5$ metros. ¿Cuánto deberé alejarme desde el pie de la muralla? – se preguntaba Luis. Seguro tú puedes responder…

31 ¿Terminaste tu tarea, Juan? No, papá. ¿Y las harás ahora hijo? No lo sé, ya no tengo ganas, pero si no las llevo mañana y me llaman a interrogación me sacaré un dos. El papá de Juan se sentó junto a él, ya que sabía que si le hacía compañía, su hijo terminaría su tarea. Y efectivamente Juan terminó su tarea, ¿cuáles fueron sus resultados?

a. $3x(x+2)^2 - 3(x-3)^3 = 1$

b. $\dfrac{4x+3}{x} = \dfrac{5x-3}{x+2}$

c. $\dfrac{x+1}{x} - \dfrac{2x+2}{x+1} = 0$

d. $x(x+1) - 2x(x+3) = 3x(x+5)$

e. $\dfrac{4x+1}{2} + \dfrac{8x-3}{x} = x+4$

32 Esta cartulina mide $16\ \text{cm}$ por $8\ \text{cm}$, pero debo recortar en sus extremos ciertos cuadrados de modo que se pueda transformar en una caja de base de $20\ \text{cm}^2$. ¡Fácil! – dijo David – y solucionó el problema respondiendo las siguientes preguntas que se planteó para poder construir su caja:

a. ¿Cuánto se debe recortar en cada esquina?

b. ¿Cuáles serán las medidas de la caja?

c. ¿Cuál será el volumen de la caja?

d. Si se debe forrar la caja, ¿cuántos cm^2 de papel se ocuparán?

33 Consuelo necesita construir un triángulo rectángulo. Para ello posee tres tiras de papel de $15\ \text{cm}$, $13\ \text{cm}$ y $11\ \text{cm}$. Si debe cortar el mismo trozo de cada una de ellas de modo que con las nuevas tiras pueda construir su triángulo, ¿cuánto debe cortar de cada una?

34 ¡¿Por qué la vida es tan injusta?! – decía Tamara. No reclames tanto, sorteamos los ejercicios que debíamos resolver de la tarea, mala suerte la tuya si te tocaron estos. Ayuda a Tamara a resolverlos:

a. Escribe una ecuación cuadrática donde una de las soluciones sea el complejo $3 - 5\,i$.

b. Resuelve la siguiente ecuación: $x^2 + 7x + 12 = 0$, ¿cuál es el conjunto más pequeño al que pertenecen sus soluciones?

c. ¿Toda ecuación cuadrática tiene solución? Justifica matemáticamente tu respuesta.

35 Tenemos 224 árboles, Tomás. Ahora tú debes ordenarlos en este terreno rectangular de modo que el jardinero pueda plantarlos. Cada fila debe tener dos árboles más que el número de filas que coloques... ¡Cómo te gusta complicar los cálculos, José!... A Tomás le tomó algunos minutos resolver su problema, ¿cuántas filas deben haber y cuántos árboles debe tener cada fila?

36 ¡No me contradigas, Genaro!, mi ecuación $x^2 + 64x + 64 = 0$ da por solución 8 y -8. Humberto, escúchame, no puede ser porque aquellas que daban como resultado dos números inversos aditivos eran de la forma $ax^2 + c = 0$… ¿Estás de acuerdo con Genaro o con Humberto?, ¿cuál es la solución de la ecuación? Si no son 8 y -8, ¿cuál es una posible ecuación que tenga estas soluciones?

37 Ya entiendo, quieres transformar tu cubo en un paralelepípedo para aumentar su capacidad. Para ello debes agregar una misma cantidad de centímetros a lo largo y ancho, pero conservando su altura de $8\ \text{cm}$. Además, el volumen final debe aumentar en $1\,288\ \text{cm}^3$ con respecto al inicial. ¿Cuáles deben ser las medidas del paralelepípedo?, ¿cuántos centímetros se deben agregar al largo y al ancho del cubo?

38 ¡No sé cómo mi profesora quiere que resuelva este problema! ¡Cómo voy a saber yo cuánto miden las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa en un triángulo rectángulo! Sólo me dicen que la altura del triángulo rectángulo con respecto a la hipotenusa mide $12\ \text{cm}$ y que su hipotenusa mide $25\ \text{cm}$… ¿Te acuerdas que el año pasado estudiaste el Teorema de Euclides?... Ayúdame a resolver este problema.

39 Todos decían que Felipe no era muy bueno para los estudios. Pero a Marcia no le importaba, cada vez que lo miraba, sentía que su corazón se le escapa del pecho. Ese día, un choque inesperado la hizo botar los cuadernos de Felipe, un montón de ecuaciones a medio resolver… ¿Te puedo ayudar con estas ecuaciones?, Felipe lo dudó por unos segundos y luego le respondió: "gracias, no entiendo mucho". Estas son las ecuaciones de Felipe, ¿cuáles son los desarrollos que realizó Marcia?

a. $(2x+3)(x+5)^2+3(x+2)=2(x+2)^3$

b. $\frac{x+1}{5}-\frac{(x+3)^2}{10}=\frac{2x+1}{15}$

c. $\sqrt{x+3}+x=17$

d. $4x^2-12x=(6x-1)^2-9$

e. $\frac{x+3}{x}=\frac{2x+5}{3}+1$

40 La ejecutiva del banco me dijo que si depositaba $\$\ 200\,000$, al cabo de dos meses tendría $\$\ 202\,005$. Llegando a mi casa averigüé que los intereses de los ahorros bancarios son intereses compuestos y que la fórmula para calcularlos era la siguiente:

$C_F = C_I \cdot (1+i)^t$, donde

C_F: es el capital final

C_I: es el capital final

i: es el interés mensual, representado como decimal

t: es la cantidad de meses que se deposita el dinero

¿Qué interés mensual me ofreció la ejecutiva en mi depósito?

41 Teo y su grupo deben construir para su tarea de tecnología una pirámide de base rectangular y altura $8\ \text{cm}$. Esta debe contener $616\ \text{cm}^3$ y el largo de su base debe diferir del ancho en exactamente $10\ \text{cm}$. Además deben contestar las siguientes preguntas, ayúdalos a realizar su tarea.

a. ¿Cuál es una de las posibles ecuaciones que se pueden plantear para encontrar las medidas de la base de la pirámide?

b. ¿Cuáles son las medidas de la base de la pirámide?

c. ¿Cuántos frascos de témpera se necesitarían para pintar la pirámide por dentro y por fuera, si cada frasco pinta $750\ \text{cm}^2$ de papel?

42 Rodrigo siempre había sido un buen amigo y esta vez no era diferente. Sus compañeros le habían pedido ayuda para estudiar para la prueba de matemática y él aceptó. Buscó algunos ejercicios y les hizo una pequeña clase de repaso. Estos fueron los ejercicios que resolvieron, ¿qué resultados obtuvieron?

a. $x-x(x+2)=2x(x+6)$

b. $(3x+1)^2-(2x-3)^2=(x+2)^2$

c. $\frac{x+2}{x+1}+\frac{x+3}{x+2}=0$

d. Encuentra el valor de k en la ecuación $2kx^2+3(x+1)+(x+2)^2=0$, de modo que ella tenga solo una solución real.

e. ¿Cuál es el valor de la suma y del producto de las soluciones de la ecuación $2x^2+3x-5=0$?

43 Aurora debía calcular el largo de un prisma de base rectangular para su tarea. Ella sabía que la diagonal principal mide $2\sqrt{61}\ \text{cm}$, su alto y la diagonal basal difieren en $2\ \text{cm}$, siendo el alto mayor que la diagonal. El largo y ancho presentan la misma variación mencionada anteriormente. Para resolver más fácilmente se planteó las siguientes preguntas que guiaban su razonamiento:

a. ¿Cuál es una de las posibles ecuaciones a plantear para calcular la medida de la diagonal basal y de la altura del prisma? Puedes hacer un bosquejo del prisma para ayudarte.



b. ¿Cuál es la medida de la diagonal basal y de la altura del prisma?

c. ¿Cuál es una de las posibles ecuaciones a plantear para calcular el largo y el ancho de la base del prisma?

d. ¿Cuál es la medida del largo y ancho del prisma?

e. ¿Cuál es el área y volumen del prisma?

44 Blanquita siempre compraba de aquellas revistas donde venían problemas matemáticos. En este número aparecían cinco que le gustaron y los llevaría para colocarlos en el diario mural de matemática.

a. El producto de dos números que se diferencian en 45 unidades es 364, ¿cuáles son los números?

b. El cuadrado de un número excede al cuadrado del doble del número disminuido en 30, en 273 unidades, ¿cuál es el número?

c. El sucesor de un número por el antecesor de éste da por resultado 323, ¿cuál es el número?

d. El cociente entre un número y su sucesor, aumentado en el antecesor del número, da por resultado $\frac{19}{5}$, ¿cuál es el número?

e. La suma entre un número y el cuadrado de este aumentado en una unidad, es equivalente a 505, ¿cuál es el número?

V. Ejercicios de función cuadrática

Trabaja en forma individual

1 Dada la parábola $y = 3x^2 + 2x$, señala:

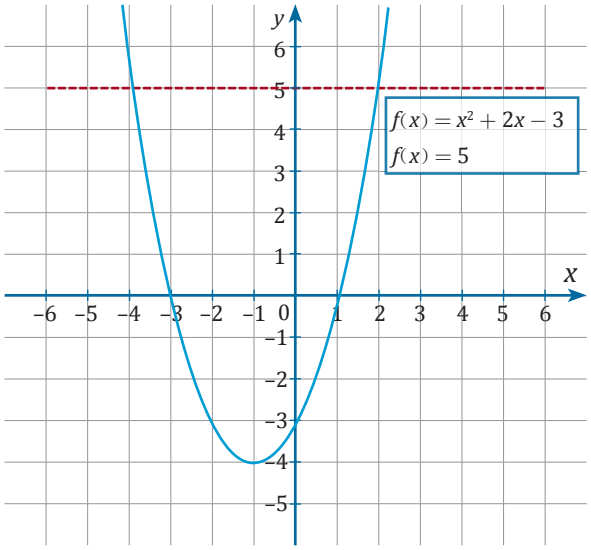
a. ¿Es cóncava hacia abajo? ¿Por qué?

b. ¿Cuáles son los puntos de ella cuyas abscisas son $-\frac{5}{3}$ y 1?

c. ¿Qué observas en los puntos determinados anteriormente?

2 Hay dos puntos de coordenadas $(a,4)$ que se encuentran en la gráfica de $y = 1 + 3x + 6x^2$. ¿Cuáles son?

3 La gráfica muestra una parábola y una recta que se intersectan.



a. Gráficamente, determina los puntos de intersección.

b. Haciendo los cálculos correspondientes y usando la fórmula de la parábola, verifica que los puntos que anteriormente hallaste pertenecen a ella.

4 Hay parábolas cuyas fórmulas son del tipo $y = (x - K)(5 - Kx)$, donde K es cualquier número real distinto de cero. Encuentra dos valores para K, de tal modo que la parábola resultante sea:

a. Cóncava hacia abajo.

b. Cóncava hacia arriba.

c. Contenga al punto $(1,0)$:

Trabaja en grupo

5 Determinen el número de puntos en el que cada parábola intersecta al eje x. Justifiquen su respuesta.

a. $y = -3 + 2x - 7x^2$

b. $y = 13x^2 + 11x - 2$

c. $y = 169x^2 - 52x + 4$

d. $y = -19x^2 + 2x$

e. $y = 0,\overline{3}x^2 + 5$

f. $y = 0,\overline{3}x^2 - 1,\overline{3}$



6 Con respecto a las intersecciones con el eje x, ¿tienen algo en común las siguientes parábolas?

$y = 4x^2 + 2x - 12$; $y = 3x^2 + 1{,}5x - 9$

Encuentren los puntos de intersección con dicho eje y ya verán.

7 Dada la parábola $y = -3x^2 + 11x - c$, donde c es un real, escriban su ecuación si se sabe que intersecta al eje y 11 unidades por debajo del eje x.

8 El punto de abscisa $\frac{-\sqrt{11}+1}{5}$ es la intersección de $y = 5x^2 - 2x - 2$ con el eje x.

a. Determinen el otro punto de intersección.

b. ¿Cuál es el punto de intersección de esta parábola con el otro eje?

9 La ecuación $y = 0{,}5x^2 + bx + 3$ representa parábolas que intersectan al eje x en un solo punto.

a. ¿Cuáles son los valores de b?

b. Escriban las ecuaciones de las parábolas aludidas en el enunciado de este ejercicio.

10 Encuentren las coordenadas del punto medio entre:

a. los puntos de intersección de $y = -2x^2 - 5x + 25$ con el eje x.

b. el punto de intersección de $y = 21x^2 + x - 9$ con el eje y y el origen.

11 Encuentren el área del triángulo cuyos vértices son los puntos de intersección de la parábola $y = -x^2 + x + 12$ con los ejes coordenados.

12 Determinen el vértice de las siguientes parábolas e indiquen si corresponde a un máximo o a un mínimo. Grafiquen las funciones, ayúdense con el programa Graphmatica e identifiquen allí sus respuestas:

a. $y = x^2 - 14x + 15$

b. $y = x^2 + 1$

c. $y = -4x^2 + 9x - 11$

d. $f(x) = x^2 - 12$

e. $f(x) = x^2 - 3x + 20$

f. $y = 3x^2 - 8x + 5$

13 Disponen de una cuerda de 100 cm y les piden que la doblen para formar un paralelogramo recto (cuadrado o rectángulo), pero haciendo que su área sea la más grande que puedan tener. ¿Cuáles son las medidas de dicho paralelogramo recto?

14 Determinen si los siguientes puntos pertenecen a las parábolas dadas:

a. A:$(-2{,}3)$; $f(x) = 5x^2 - 2x - 21$

b. B:$\left(\frac{1}{5}, -\frac{29}{15}\right)$; $f(x) = \frac{5}{3}x^2 - 2$

c. C:$(-3, -6)$; $f(x) = -7x^2 - 2x$

15 Determinen la concavidad (positiva: hacia arriba o negativa: hacia abajo) de las siguientes parábolas:

a. $f(x) = 3 - 7x + 6x^2$

b. $f(x) = (x - 2)(3 - x)$

c. $f(x) = 4 - 3x^2 + 10x$

16 Analicen los datos de cada situación y señalen si la parábola es cóncava hacia arriba o abajo respectivamente:

a. Parábola cuyo vértice esta en $(-5{,}7)$ y que intersecta al eje y en $(0, -2)$.

b. Parábola que intersecta al eje y en $(0, -3)$ y su vértice corresponde a un máximo.

c. Parábola que pasa por A: $(0, -3)$, B: $(1{,}10)$ y C: $(-2{,}7)$.

17 Determinen la intersección de las siguientes parábolas con los ejes coordenados:

a. $f(x) = x^2 + 5x - 24$

b. $f(x) = 6x^2 - 3 + 7x$

c. $f(x) = -200x + 8x^2$

d. $f(x) = -3(x^2 - 16)$

e. $f(x) = x^2 - 7x + 13$

18 Determinen el vértice de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = 8x - 15 - x^2$

b. $f(x) = (x+3)^2 - 2$

c. Función cuyas raíces (o corte con eje x) son $(3,0)$ y $(7,0)$

d. $f(x) = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}$

e. $f(x) = (x-3)^2$

f. $f(x) = x^2 - 10x + 21$

19 Dadas las siguientes funciones y un punto, determinen en cada caso, si el punto dado es el vértice de la parábola asociada a la función:

a. $f(x) = x^2 + 4x + 11$, $(-2,7)$

b. $f(x) = 2x^2 - 12x + 13$, $(3,-5)$

c. $f(x) = 3x^2 - 4x + 14$, $(-2,2)$

20 Determinen el eje de simetría de cada una de las siguientes funciones:

a. $f(x) = x^2 - x - 6$

b. Función cuyas raíces son $(6,0)$ y $(14,0)$

c. Función cuadrática de parámetros: $a = 15$, $b = -19$ y $c = 6$

d. Función cuadrática que pasa por los puntos $(5,11)$ y $(7,11)$

e. $f(x) = 2x^2 - 12x + 18$

f. $f(x) = (x+8)^2 - 3$

g. Función que tiene por raíces los puntos $\left(\frac{1}{5}, 0\right)$ y $\left(\frac{3}{4}, 0\right)$

21 Señalen en cuantas unidades se ha desplazado verticalmente cada una de las siguientes parábolas, con respecto a la parábola de ecuación $f(x) = x^2$

a. $f(x) = x^2 - 2$

b. $y = x^2 + 12$

22 Indiquen en cuantas unidades se ha desplazado horizontalmente cada una de las siguientes parábolas, con respecto a la parábola de ecuación $f(x) = x^2$

a. $y = (x-6)^2$

b. $f(x) = \left(x + \frac{1}{4}\right)^2$

c. $f(x) = x^2 - 6x + 9$

23 Resuelvan los siguientes ejercicios:

a. Nicolás y sus amigos están jugando paintball, la altura alcanzada, en m, por una de sus bolas de pintura está dada por $h(t) = 12t - 3t^2$ donde t corresponde al tiempo que la bola está en el aire. Determina qué altura alcanza en los 3 segundos de vuelo.

b. Encontrar dos números que sumados den 120 y cuyo producto sea el máximo posible.

c. La trayectoria de un proyectil está dada por la ecuación $s(t) = 100t - 5t^2$, donde t se mide en segundos y la altura, $s(t)$, en metros. Calcular el valor de t para que el proyectil se encuentre a 255 metros sobre el nivel del suelo.

d. Si la ganancia de cierta empresa se puede determinar por la función $f(x) = -x^2 + 14x + 13$, x es el número de unidades diarias producidas y $f(x)$ las ganancias, ¿cuál será el número de unidades diarias que se deben producir para obtener la máxima ganancia?

24 Dada la parábola $f(x) = x^2 + 6x - 27$, determinen tres puntos que pertenezcan a ella.

25 Ordenen las siguientes parábolas de menor a mayor contracción:

a. $f(x) = x^2 + 3x$

b. $f(x) = 0{,}5x^2 - 2$

c. $f(x) = 3x^2 - 4x + 1$

26 ¿Cuál debe ser el valor de a en la función $f(x) = (2a-1)x^2 + 3x - 2$, para que ésta sea una parábola?

27 Si $f(x) = x^2 + kx + 15$ y $f(3) = 48$, ¿Cuál es el valor de k?

28 ¿Cuál de las siguientes parábolas no corta al eje de las abscisas?

a. $f(x) = 12x^2 - 10x - 2$
b. $f(x) = x^2 + 5x + 8$
c. $f(x) = 7x^2 - 21x$
d. $f(x) = 2x^2 - 7x + 6$
e. $f(x) = x^2 - 3x + 7$
f. $f(x) = 0{,}5x^2 + 1{,}5x - 2$

29 Si $f(x) = 3x^2 - 2$, determinen el valor de $f(-3) - f(-1) - f(-2)$.

30 Determinen la función cuadrática si se sabe que:

i. Su vértice es $(3{,}0)$ y sus raíces son $(-\sqrt{3}{,}0)$ y $(\sqrt{3}{,}0)$
ii. Pasa por los puntos $(2{,}9)$, $(3{,}40)$ y $(-5, -40)$
iii. Pasa por los puntos $(1{,}28)$, $(-4{,}12)$ y $(-3{,}0)$

31 Determinen a que cuadrante pertenece el vértice de la parábola $f(x) = -x^2 + 8x - 15$ y cuál es su concavidad.

32 La ecuación $y = -4x^2 + bx - 9$ representa a dos parábolas que intersectan al eje x en un solo punto.

a. ¿Cuáles son los valores de b para que esto suceda?
b. Escriban las ecuaciones de las parábolas.

33 ¿Será cierto que las parábolas $f(x) = 2x^2 - 7x + 8$ y $g(x) = 3x^2 - 5x - 7$ se intersectan en los puntos $(3{,}5)$ y $(-5{,}93)$?

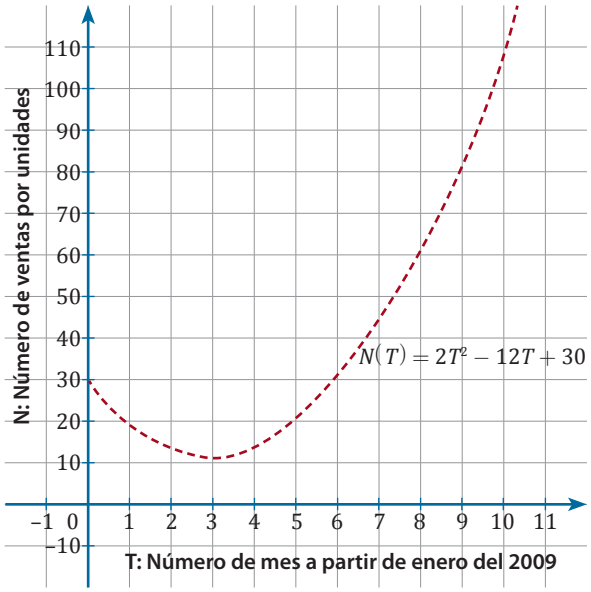
34 Dada la función $f(x) = 5x^2 + 7x - 6$, decidan, justificando matemáticamente, cuál de las siguientes afirmaciones son verdaderas:

a. La parábola tiene concavidad hacia arriba.
b. La parábola corta al eje y en el punto $(-6{,}0)$.
c. El vértice de la parábola es el punto $\left(-\frac{7}{10}, -\frac{169}{20}\right)$.
d. El eje de simetría es $x = \frac{7}{10}$.
e. La parábola corta al eje x en los puntos $\left(\frac{3}{5}, 0\right)$ y $(-2{,}0)$.

VI. Problemas de función cuadrática.

Trabaja en forma individual

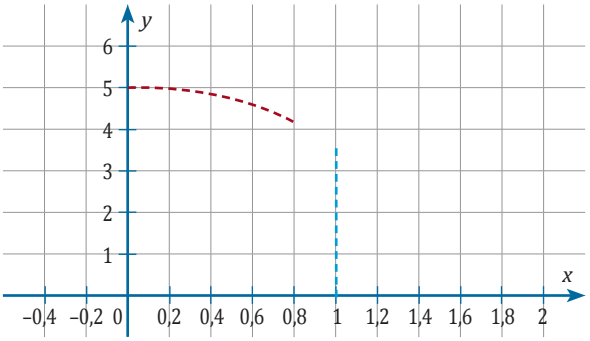
1 María Ignacia, gerente comercial de una tienda de electrónica, encargó a su equipo de trabajo un estudio de ventas de LCD durante 2009 y hasta mayo del 2010, mes previo al mundial de fútbol en las distintas salas de ventas a través del país.



En la reunión de octubre del 2009, y viendo la gráfica, hizo a su equipo varias preguntas, tanto de las ventas ya realizadas como de las proyecciones que se tenían hasta mayo del año siguiente. Algunas que tú también puedes responder fueron:

a. ¿Es verdad que las ventas de febrero del 2009 fueron de 18 unidades? ¿Por qué?
b. ¿En qué mes se vendieron 62 unidades? Chequea efectuando los cálculos necesarios.
c. ¿Cuántas unidades se espera vender en diciembre?
d. Específicamente, en el próximo mes de mayo, ¿superarán las ventas de LCD las 370 unidades? ¿Por qué?
e. En total, ¿habrá más de 600 unidades vendidas durante los dos meses previos a junio del 2010?

2 –Mayor, venga rápidamente al monitor de observación. Mire cómo se desplaza velozmente ese objeto en trayectoria parabólica.
–Indíqueme por dónde apareció en pantalla.
–Por aquí, a $5\ \text{km}$ enfrente de nosotros. Seguro pasará por el punto de coordenadas $(0{,}8;4)$ Pero hay aún algo más. Este segundo objeto más pequeño, al parecer, va a su encuentro. ¿Ve usted? Apareció moviéndose verticalmente hacia arriba, $1\ \text{km}$ a nuestra derecha.
–Capitán, encárguese de saber a qué distancia de aquí debieran encontrarse o cruzarse, y ver si realmente por ese punto debiera pasar la nave mayor. Estas dos informaciones las requiero porque voy a llamar a alerta preventiva.
Con ayuda de esta gráfica, y sabiendo que la trayectoria de la nave mayor es de la forma $y = ax^2 + 5$, responde:



a. ¿Cuáles son las coordenadas del puesto de observación?

b. Responde las dos preguntas del mayor.

Trabaja en grupo

3 Mafalda estuvo enferma y no fue al liceo. Para ponerse al día, fotocopió algunos cuadernos de sus compañeras. En uno de los ejercicios estaba escrito: *no puedo encontrar la solución*. Mafalda leyó: "Encuentra las coordenadas de las intersecciones con los ejes de $y = x^2 + x - 3$". Lo desarrolló correctamente. Llamó por teléfono a su compañera y le dio la respuesta. ¿Cuál fue?

4 "Alamiro, como amiga y compañera tuya, te digo que no te asustes frente a la siguiente tarea: encuentra la intersección de la parábola $f(x) = -x^2 + 6$, con la recta paralela $y = 2$, y luego con el eje x. Dibuja el trapecio al unir consecutivamente los puntos de intersección, y después encuentra el área de esta última figura".

5 Marcela está ubicando tres puntos de la parábola $y = 2x^2 - x - 1$, cuyas abscisas están entre los puntos de intersección con el eje horizontal. Para esto, eligió los siguientes valores: $-0{,}25$; 0 y $0{,}5$:

a. Verifiquen si esta elección cumple la condición dada en el enunciado. Justifica claramente tu respuesta.

b. Indiquen la distancia del punto de menor abscisa a la paralela al eje x, que pasa por el punto de intersección de la parábola con el eje y.

6 "Estoy pensando en un arco parabólico que represente un puente para incluirlo en mi maqueta y participar con ella en el remozamiento de la plaza municipal. Voy a representar mi puente a través de la función $y = -0{,}25x^2 + 3x - 5$, donde x e y están en m. Uno de los extremos debe quedar a $2\ \text{m}$ de la base del monolito central, que estará en el origen de mi sistema coordenado".

a. ¿A cuántos metros de la base del monolito, queda el otro extremo del puente?

b. ¿La distancia entre ambos extremos es $9\ \text{m}$? Justifiquen.

7 –Profesor, no vaya a hacer preguntas tan difíciles en la próxima prueba, por favor, –insistíamos una y otra vez. –No es difícil encontrar similitudes y diferencias, con respecto a los puntos de intersecciones en ambos ejes de las siguientes parábolas: $y = 2x^2 - 11x + 12; y = 3x^2 - 16{,}5x + 18$ –dijo–. Esta es una muy interesante pregunta y para empezar a estudiar, vamos a trabajar juntos. Encuentren las similitudes y diferencias mencionadas en el párrafo anterior. Justifiquen su respuesta.

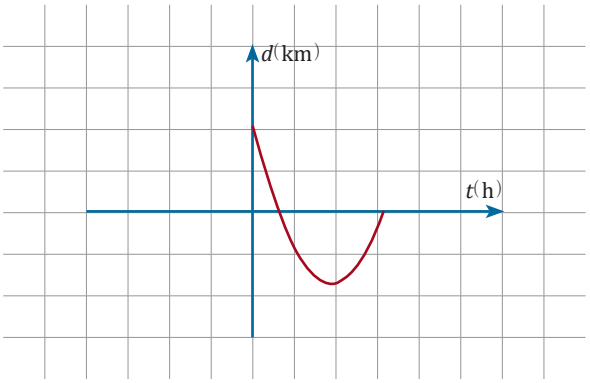
8 "¿Así que usted es la persona que pone en duda mis conocimientos de física? Está bien. Usted me dice que tiene una partícula situada en un sistema de coordenadas que, siguiendo la trayectoria $y = x^2 - 9$, empieza su movimiento en el punto más bajo de esta curva y sigue siempre por su derecha, hasta llegar al cruce con el eje x. Después de esto –me ha dicho usted–

continúa la trayectoria dada por $y = x^2 - 10x + 21$, hasta el próximo cruce con el eje x, y allí se detiene.
Le aseguro que puedo darle las coordenadas desde donde partió, la del primer cruce y el punto donde se detuvo. ¿No me lo cree?" ¿Pueden ustedes dar aquellos puntos?

9 "En realidad, me tiene bastante preocupado que se proponga en esta reunión que la relación entre nuestras ganancias g (en decenas de miles de pesos) con respecto a nuestras ventas de jugos v (en miles) esté dada por esa dudosa curva, $g = 225 - v^2$, que el señor Faustino Dundoso está mostrando en su presentación de PowerPoint. Señores, no me miren así; si vendemos más, ganamos más, ¿o no?"

¿Cuál es el problema? Indica cuántas unidades tendrían que vender para llegar nuevamente a $ 0 de ganancia. ¿Sucede eso alguna vez?

10 Rosalía y Javier han recibido su guía de trabajo en el taller de Física. En ella aparece la siguiente pregunta: "La ecuación de la curva adjunta es $d = t^2 - 6t + 5$, donde d representa la posición de un móvil, medida en km, en función del tiempo t, expresado en h. Obtengan los puntos de intersección con los ejes coordenados y hagan una interpretación física de ellos".



11 Débora, Naim, Raquel y Saúl han decidido tomar cursos para microempresarios. Quieren asociarse para instalar una empresa. En la tarea final del curso de costos deben presentar su proyecto para producir bolitas de queso relleno con nueces y almendras. Discuten el precio de costo estimado por unidad y no llegan a un acuerdo. Junto al encargado del curso y mediante el uso de un software, encuentran que el costo promedio C (en pesos) y su relación por cierto número de unidades producidas, x, viene dado por: $C(x) = 15 - 0{,}05x + 0{,}0002x^2$.

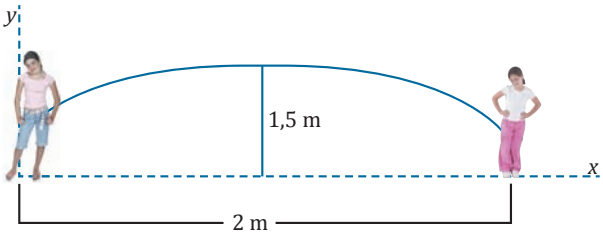
Estudian muy bien esta fórmula y se preguntan:

a. ¿Será más barato producir 90 unidades que 100?

b. ¿Cuántas unidades deberíamos producir para hacer el costo promedio lo más bajo posible?

c. ¿Cuál es el correspondiente costo mínimo por unidad?

12 Las niñas del 2º básico del colegio están jugando a saltar la cuerda; mientras, Paola le pregunta a su profesor algunos temas de funciones cuadráticas que no había entendido en clases. "–Mira a esas niñas –le dijo su profesor–. Ellas forman con su cuerda una parábola cuya altura máxima es de aproximadamente 1,5 m. Además, la distancia que hay entre ambas niñas es de alrededor de 2 m". ¿Puedes tú dar las coordenadas del vértice de la parábola?



13 A Marta, gerente general de una empresa de telecomunicaciones, le parecía extraña la rapidez con que la empresa financiera que habían contratado para hacer un estudio les había entregado el mismo. Éste decía que los costos de la empresa en un período de cierta cantidad de años estarían modelados, en función de los productos vendidos, por la siguiente función: $C(v) = v^2 - 13v + 40$, donde v es el número de artículos vendidos (en unidades) y C, los costos asociados a esa venta (en miles de pesos). A Marta le interesó, por supuesto, analizar los costos mínimos. ¿Qué estaba errado en el informe?

14 Una empresa se capitaliza bajo la siguiente función: $C(t) = -t^2 + 6t + 5$, donde C es el capital (en decenas de millones) y t es el tiempo (en décadas). Determinen el capital máximo de la empresa y en qué año de funcionamiento lo logra.

15 Un banco decide lanzar un nuevo tipo de seguro automotriz. Después de un año, un estudio del banco ha arrojado que el número de clientes captados para este producto se puede modelar bajo la siguiente función: $C(t) = 10t - 2t^2$, donde C es el número de clientes y t los años transcurridos. Determinen en qué momento el banco comienza a tener pérdida de clientes para este producto.

16 En el laboratorio Biolab se está realizando un experimento para encontrar la cura contra una nueva bacteria. Los científicos han detectado que la población de bacterias disminuye con la administración de cierto antibiótico, pero luego de un tiempo, estas se vuelven inmunes y crecen nuevamente. Ellos encontraron que la función que modela la población de bacterias es: $P(m) = \frac{3}{64}m^2 - \frac{3}{4}m + 4$, donde P es la población de bacterias (en miles de individuos) y m los miligramos de antibiótico suministrado diariamente. ¿Cuál es la población que existe antes de que la bacteria se vuelva inmune?

17 Juan Pablo está haciendo un trabajo para su ramo de diseño de la universidad. Él tiene un triángulo de 8 cm de base y 5 cm de altura, pero debe disminuir su base y aumentar su altura en un mismo valor, de modo que el triángulo que resulte cubra la mayor superficie posible. ¿Qué respuesta le darían a Juan Pablo? ¿Cuál es el mayor valor en el que se puede aumentar la altura y disminuir la base y cuál es el área máxima que podrá cubrir?

18 La compañía disquera donde trabaja Esteban ha determinado que el número de copias que se venden de un artista consagrado cuando lanza al mercado un nuevo trabajo (considerando las preventas) se rige, en función de los días, por: $V(d) = -\frac{400}{9}d^2 + \frac{4\,000}{3}$. El jefe de Esteban le ha pedido que calcule cuál será la cantidad máxima de copias que se venderán y en qué día se logrará esta venta.

¿Pueden también responder ustedes?

19 Arturo debe entregar un informe para una compañía de artículos médicos. Sabe que las utilidades de la empresa se comportan según una función cuadrática y sabe además que para una producción de $1\ 000$ artículos su utilidad es de $USD\ 5\,000$, y de $USD\ 6\,000$ si producen $2\,000$ artículos. Ayuda a Arturo en su informe, contestando las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la función que regula las utilidades en función de los artículos producidos?

b. ¿Cuál es la utilidad máxima que alcanzará la empresa?

c. ¿Cuántos artículos debe producir para alcanzar la utilidad máxima?

d. ¿Entre qué rangos de producción las utilidades crecen?

e. ¿Entre qué rangos de producción las utilidades decrecen?

20 Ximena está estudiando la viabilidad de una empresa. Para ello, ha estimado que los costos de la empresa en función de los años de existencia de esta, se comportan bajo la siguiente función: $C(a) = \frac{a^2}{2} - 8a + 1\,200$, donde a se mide en años y C en dólares. Para ello se planteó las siguientes preguntas, ¿Qué le aconsejarías a Ximena?

a. ¿En qué año de funcionamiento la empresa alcanzará sus costos mínimos?

b. ¿Cuál será el monto de los costos mínimos?

c. ¿Cuáles serán los costos iniciales de la empresa?

d. ¿En qué año de funcionamiento los costos volverán a ser iguales a los iniciales?

e. Si la empresa sólo puede financiarse si los costos no superan los $USD\ 4\,000$ ¿en qué año se producirá esto?

21 Joaquín tiene que hacer una tarea de matemática con nota. Su profesor le ha dado la siguiente función $y = 2x^2 - 7x + 3$ y le ha entregado unas preguntas. Ayúdenlo respondiendo:

a. ¿Cuál es la ecuación de otra parábola que sea reflejo de la dada con respecto al eje x?

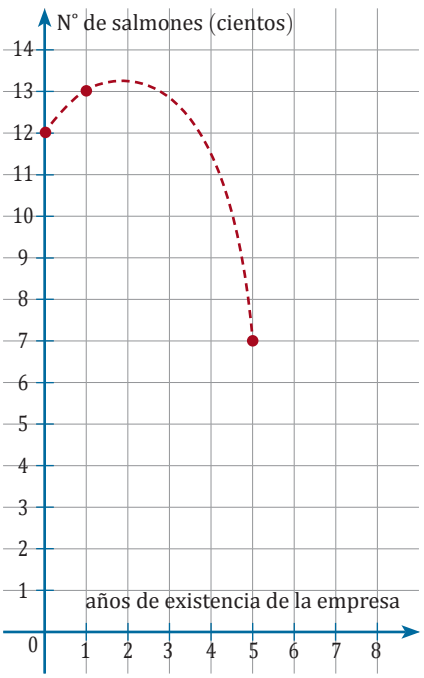
b. ¿Cuál es el eje de simetría de ambas parábolas?

c. ¿Cuál es la distancia que separa ambos vértices (el de la parábola dada y el de su reflexión)?

d. ¿Cuál es la distancia que separa los puntos de corte de las parábolas con el eje x?

e. Encuentra un punto cualquiera que pertenezca a cada una de las parábolas. Justifica matemáticamente tu respuesta.

22 ¡Es urgente! – le dijo la Señora Ernestina a Lorenzo por mail – mis salmones siguen disminuyendo. Como entiendo mejor si veo las cosas en dibujos, hice un bosquejo de la producción y te lo envío aquí:



Parece inevitable que mi pequeña empresa se termine, ¿me puedes responder algunas preguntas? Lorenzo miró el bosquejo y pensó que se parecía mucho a una función cuadrática, entonces hizo algunos cálculos y le respondió el mail a la Señora Ernestina. ¿Cuáles fueron sus respuestas?

a. Asumiendo una función cuadrática como modelo del problema, ¿cuál es ésta?

b. ¿En qué año se obtuvo o se obtendrá la mayor producción de salmones?

c. ¿Cuál fue o será esta producción máxima?

d. ¿En qué año dejará de producir salmones?

e. ¿Qué crees tú que debería hacer la Señora Ernestina para remediar su situación?

23 Bernardita estaba concentrada en su proyecto del ramo de Diseño Arquitectónico. Su desafío era construir una puerta de forma parabólica e incrustar aquellas piedras en el marco justo a la distancia pedida por su profesor. Para esto, Bernardita fijó sus ejes coordenados justo en el centro de la puerta a nivel del suelo y estimó en 1 metro cada una de las hojas de la puerta y en 2 metros su altura. Luego, respondió las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la función que modela el arco de la puerta parabólica?

b. ¿A qué altura de deben colocar las incrustaciones, si éstas deben estar separadas medio metro en forma horizontal de los pies del arco de la puerta en el suelo?

c. Si Bernardita quiere hacer un tallado también parabólico que se encuentre a 20 cm de cada punto del arco de la puerta, ¿cuál es la nueva ecuación parabólica para este arco?

d. ¿Cuál será la altura máxima de esta última parábola (arco del tallado)?

e. Bosqueja la puerta del diseño de Bernardita.

24 Había dejado pasar todo el semestre sin estudiar mucho y ahora se había dado cuenta que debía obtener una muy buena nota en el examen si quería pasar el ramo. Miranda, se puso entonces a estudiar: "Dada la parábola de ecuación $y = 3x^2 + x + 21$, determina:

a. Los puntos de intersección de la parábola con el eje x.

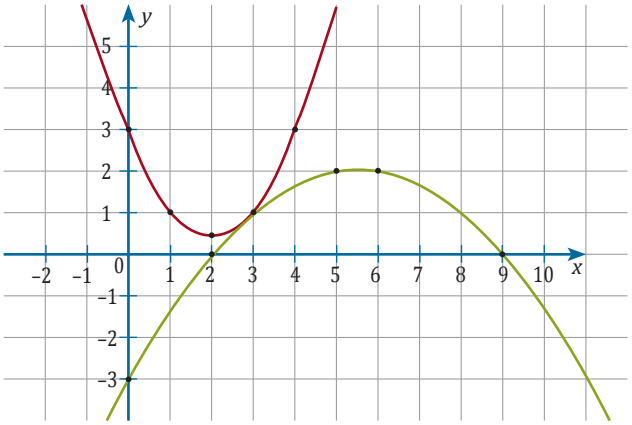
b. El punto de intersección de la parábola con el eje y.

c. Si el punto $(-2{,}31)$ pertenece a la parábola.

d. El punto donde la parábola alcanza su valor mínimo.

e. Un gráfico de la parábola.

25 Ayuden a Daniela a resolver el siguiente ejercicio de su ensayo PSU de este mes. "Dadas las parábolas de la figura, determina algebraicamente:



a. La función que determina P_1

b. La función que determina P_2

c. El vértice de ambas parábolas.

d. El punto de corte de ambas parábolas con el eje x.

e. El punto de corte de P_2 con el eje y.

Mis apuntes

Taller de profundización



Aplicando ecuaciones cuadráticas a complejos.

En la unidad anterior estudiaste que un número complejo podía quedar determinado si se sabía su módulo y el ángulo que éste formaba con el eje real positivo y se podía extraer raíz cuadrada de los números complejos escritos de aquella forma… ¿podrá hacerse lo mismo, es decir, extraer raíz cuadrada, con un número complejo escrito de la forma canónica?...

Supongamos que tenemos el número complejo $-5+12\,i$ y queremos encontrar un complejo de la forma $a+b\,i$ tal que:
$a+b\,i=\sqrt{-5+12\,i}$

Podemos escribir, entonces que,

$a+b\,i=\sqrt{-5+12\,i} \quad /(\ )^2$

$(a+b\,i)^2=-5+12\,i$

$\Rightarrow\ a^2+2ab\,i-b^2=-5+12\,i$

Igualando las partes reales e imaginarias, tendremos que,

$a^2-b^2=-5$ y $2ab=12$

Si de la 2° ecuación despejamos una de las incógnitas y la remplazamos en la 1°, obtendremos que,

$2ab=12 \qquad /:2a$

$b=\frac{6}{a}$

Reemplazando en la otra ecuación:

$a^2-\left(\frac{6}{a}\right)^2=-5$

$a^2-\frac{36}{a^2}=-5\ /\cdot a^2$

$a^4-36=-5a^2$

$a^4+5a^2-36=0$

Esto se parece a una ecuación cuadrática, ¿no?... entonces podemos escribirla así:

$(a^2)^2+5(a^2)-36=0$ Si llamamos $u=a^2$

$\Rightarrow u^2+5u-36=0$

Esto sí es una ecuación cuadrática resolvámosla factorizando.

$\Rightarrow (u+9)(u-4)=0$

$\Rightarrow u+9=0$ o $u-4=0$

$\Rightarrow u=-9$ o $u=4$

Pero los valores que queremos obtener son los de a y b, por lo tanto debemos remplazar nuevamente. Sabíamos que $u=a^2$, por lo tanto tendremos que,

si $u = 4 \Rightarrow a^2 = 4 \ / \sqrt{\ }$

$\Rightarrow a = 2 \quad$ o $\quad a = -2$ (recuerda que ambas soluciones son posibles)

Entonces como $b = \frac{6}{a}$

$\Rightarrow b = \frac{6}{2} \quad$ o $\quad b = \frac{6}{-2}$

$\Rightarrow b = 3 \quad$ o $\quad b = -3$

Por lo tanto, los complejos buscados son: $2 + 3i$ o $-2 - 3i$

Por otro lado,

si $u = -9 \Rightarrow a^2 = -9 \ / \sqrt{\ }$

$\Rightarrow a = \sqrt{-9}$

$\Rightarrow a = 3i \quad$ o $\quad a = -3i$ (recuerda que ambas soluciones son posibles)

entonces como $b = \frac{6}{a}$

$\Rightarrow b = \frac{6}{3i} \quad$ o $\quad b = \frac{6}{-3i}$

$\Rightarrow b = -2i \quad$ o $\quad b = 2i$

Por lo tanto, en este caso, los complejos buscados son (recuerda que tienen la forma $a + bi$):

$3i - 2i \cdot i = 3i - 2i^2 = 2 + 3i \quad$ o

$-3i + 2i \cdot i = -3i + 2i^2 = -2 - 3i$

Que son los mismos complejos obtenidos anteriormente.

Trabaja

Resuelve los siguientes problemas con tu grupo, no olvides revisar tus respuestas en el solucionario.

1 Calcula la raíz cuadrada de los siguientes complejos (hazlo en forma algebraica) y da tu respuesta en forma canónica o binómica.

a. $8 - 6i$

b. $-12 - 16i$

c. $\frac{65}{36} - 2i$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones en el conjunto de los complejos, encontrando el valor de z:

a. $z^2 = -10i + 5$

b. $z^2 - (3i + 5)(3i - 5) = 31 + 4i$

c. $z(z + 3i) - 3(zi + 4i) = -20i$

Revisemos lo aprendido

Marca con una ✘ según sea la evaluación de tu trabajo en esta unidad. Recuerda que hacer esta evaluación responsablemente te entregará información sobre tu proceso de aprendizaje.

Indicadores	+++	++−	+−−
Entendí como se extraía raíz cuadrada de un número complejo.			
Entendí la explicación y los procedimientos.			
Resolví correctamente los ejercicios propuestos.			
Colaboré con mis compañeros en el trabajo grupal .			

Taller

Trabaja

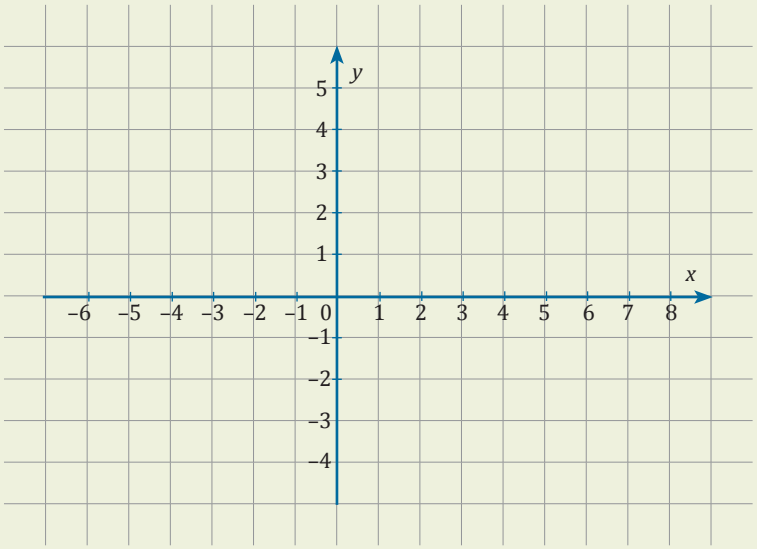
Iluminando mi parábola

Materiales por grupo:

- 1 pliego de cartulina.
- 1 linterna con foco redondo.
- Lápices.

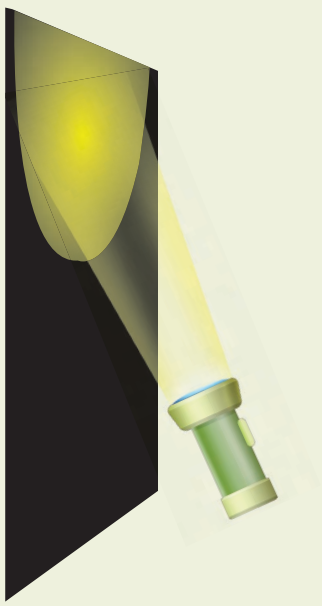
Instrucciones:

En grupos de estudiantes dibujar, en la cartulina, un plano cartesiano donde se distingan los cuadrantes con cuadrículas:



Ahora, se debe colocar la cartulina en la pared, oscurecer la sala y alumbrarla con la lámpara, de tal manera que aparezca una circunferencia en la cartulina.

Luego, el alumno que tiene la linterna deberá mover verticalmente., hacia arriba o hacia abajo, la linterna hasta formar una parábola, como indica la figura:



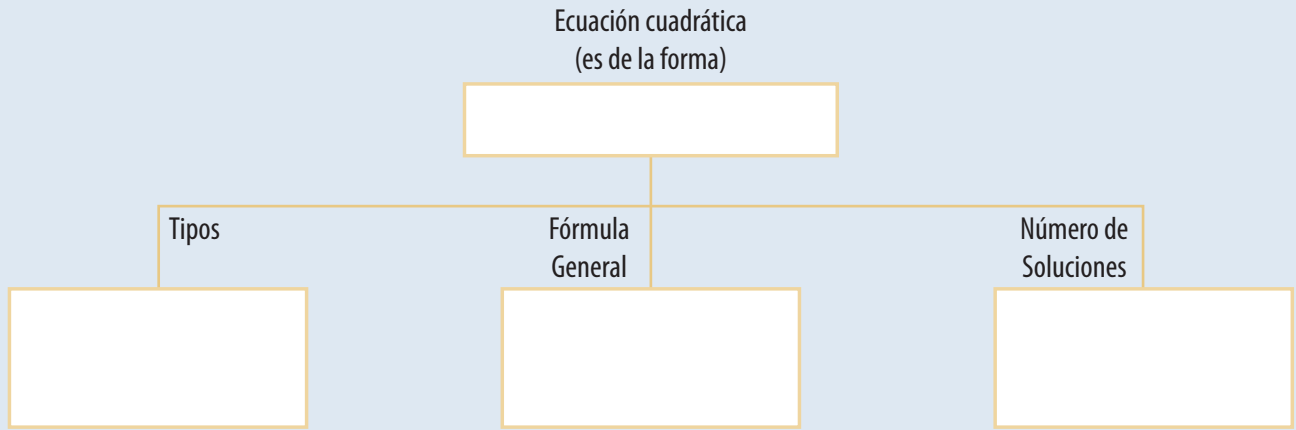
Otro alumno(a) del grupo marcará en la cartulina tres puntos por los que pasa la parábola. Con ellos el grupo deberá encontrar la función cuadrática que modela dicha parábola.

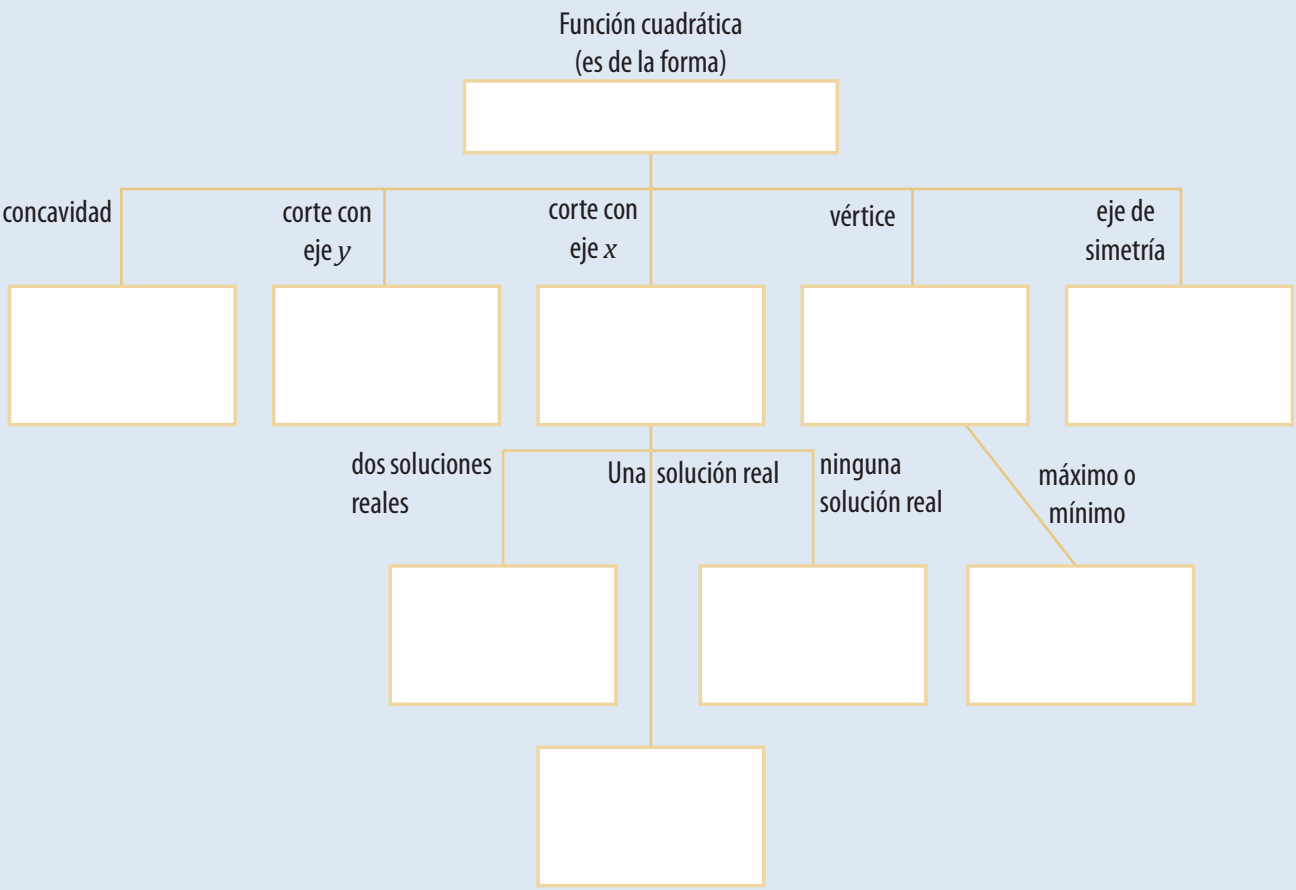
Esto se puede repetir varias veces y analizar concavidad, apertura de las ramas, etc.

Evaluación Unidad 2

Síntesis conceptual de la unidad

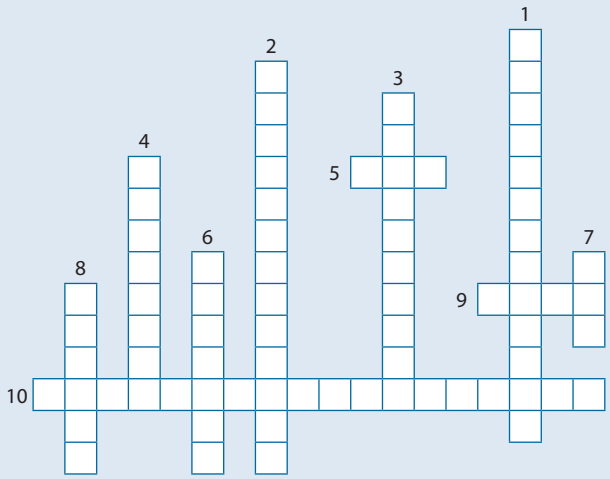
Completa los siguientes mapas conceptuales de la unidad. A medida que lo hagas, verbaliza los conceptos con tus palabras (eso te ayudará a entender mejor todo lo relacionado con la unidad)







I. Completa el siguiente crucigrama con los conceptos de la unidad.



HORIZONTALES

5. Número de soluciones de una ecuación cuadrática si el discriminante es igual a cero.

9. Número de soluciones en el conjunto de los números reales de una ecuación cuadrática si el discriminante es menor que cero.

10. Ecuación donde al menos una de las incógnitas está elevada a dos como mayor exponente de ella.

VERTICALES

1. Recta que pasa por el vértice de una parábola y la divide en dos partes iguales.

2. Cantidad subradical de la raíz de la fórmula general de la ecuación cuadrática. Determina el número de soluciones.

3. Sentido en el que se abren las ramas de una parábola.

4. Curva que representa una función cuadrática.

6. Punto máximo o mínimo de una parábola.

7. Número de soluciones de una ecuación cuadrática si el discriminante es mayor que cero.

8. Soluciones de una ecuación cuadrática.

Resuelve los ejercicios junto con tu grupo. Escribe todo el desarrollo en tu cuaderno y revisa tus respuestas.

II. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas:

1 $x^2 - 7x - 12 = 0$

2 $4x^2 + 5x - 6 = 0$

3 $(x+4)^2 + (x-3)^2 = (x+5)^2$

4 $(2x-3)(x-1) - (1-x)(1+x) = -4(x+1)(1-x)$

5 $(x+1)^2(x-2) + (x+2)(x-1)(x+1) = (2x+13)(x-1)(x-2)$

6 $\frac{1}{8}x^2 + x + \frac{3}{4} = 0$

7 $\frac{2x-3}{1-x} - 1 = \frac{4x+4}{1-x} + x$

8 $\frac{x-2}{x+1} - \frac{3-x}{x-1} = 1$

9 $\sqrt{2x + \sqrt{4x-3}} = 3$

10 $2x - 5 + 2\sqrt{6x^2 - 5} = 15$

11 $\frac{3 + \sqrt{4z+1}}{\sqrt{z-2}} = 1$

12 $2y^2 - 3y - 35 = 1$

III. Determina, sin resolver las ecuaciones, si ellas tienen o no solución en los números reales.

1 $5x^2 - 10x = 0$

2 $3x^2 + 6x + 12 = 0$

3 $18x^2 + 24x + 8 = 0$

4 $7x^2 + 14x - 7 = 0$

5 $(5 - \sqrt{5x^2})(5 + \sqrt{5x^2}) = 0$

6 $(x + \sqrt{6}x + 3)(x - \sqrt{6}x + 3) = 0$

IV. Resuelve los siguientes problemas de planteo.

1 Hoy es el primer día de trabajo del señor Moreno como encargado de la mantención de la piscina olímpica del CAR (Centro de Alto Rendimiento para deportistas) y le ha tocado colocar un revestimiento especial en los bordes. El problema es que debe poner de un tipo para los lados más largos y de otro distinto para los lados más cortos, y no ha encontrado con qué medirlos, pues aun no conoce bien el lugar. En uno de los bordes está especificado que el perímetro de la piscina es $142\ \text{m}$ y su área es de $1\,050\ \text{m}^2$. Ayúdale y encuentra las medidas de la piscina.

2 Muriel tiene que hacer un trabajo de arte en el que debe construir un triángulo rectángulo, cuya área sea igual a $96\ \text{cm}^2$ y sus catetos estén en la razón $3 : 4$. ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados del triángulo?

3 Agustín ha llegado a la casa de sus padres en el campo luego de una muy buena semana en el internado donde estudia. Conversando con su papá sobre las cosechas y las tierras, él le dice a su hijo que necesita agrandar el terreno rectangular de cultivos, que en este momento mide $10 \cdot 4\ \text{m}$, de manera que pueda tener $72\ \text{m}^2$ más para sus nuevas cosechas, pero que debe hacerlo ampliando largo y ancho en una misma medida. ¿Cuáles serán las nuevas dimensiones del terreno?

4 Pensaba Aurora, sin cesar, que $1 \cdot 2 = 2$, $2 \cdot 3 = 6$, $3 \cdot 4 = 12$, $4 \cdot 5 = 20$... y muy rápido llegó a la conclusión que por ser 1200 múltiplo de 2, 6, 12 y 20, se podía escribir como el producto de un número por su sucesor. ¿Es cierto aquello? Justifica matemáticamente.

V. Grafica las siguientes funciones cuadráticas:

1 $y = 2x^2 - 3x$

2 $y = -x^2 - 5x - 2$

3 $y = 6x^2$

4 $y = -2x^2 + 3x + 6$

5 $y = -7x^2 + 21x$

VI. Determina la concavidad, el vértice, los puntos de corte con los ejes coordenados y el eje de simetría en las siguientes parábolas:

1 $y = -3x^2 - 2x$

2 $y = 5x^2 + 2$

3 $y = 2x^2$

4 $y = -3x^2 - 2x + 7$

5 $y = x^2 + x + 2$

6 $y = -3x^2 + 4x - 1$

7 $y = x^2 + 9$

8 $y = -9x^2 + 42x - 49$

VII. Resuelve los siguientes problemas de planteo.

1 Perla había estado muy atenta a la clase de física de hoy. Su profesor les había enseñado que si se lanzaba una pelotita con una rapidez de $4\ \text{m/s}$, entonces la altura a la que llegaba la pelotita estaba determinada por el tiempo en segundos que transcurría en alcanzar dicha altura según la función $h(t) = 1{,}2 + 4t - 2t^2$. Perla, que siempre se tomaba un tiempo para pensar en lo estudiado, se preguntó: ¿cuánto tiempo, después de ser lanzada, se demorará en volver al punto de lanzamiento?
Responde tú esta pregunta.

2 Rolando está estudiando dibujo técnico y le han dado dos funciones: $f(x) = 5x - 3$ y $g(x) = 2x^2 + 3x - 3$, que representan parte del plano que está bosquejando. Él necesita saber si los gráficos de estas funciones se intersectan en algún punto y, de ser así, cuáles son esos puntos.
¿Realmente se intersectan? ¿Dónde?
(Ayuda: si se intersectan, entonces en esos puntos ambas imágenes tendrán el mismo valor).

3 Jazmín estaba muy preocupada por su promedio. Ella se había propuesto estudiar Medicina y necesitaba muy buenas notas. El profesor le había dado hoy una tarea con nota que decía así: "Encuentre dos puntos por los que pasa la función $y = ax^2 - 2x + 1$, cuyo eje de simetría es $x = 1$".
Resuelve el problema.

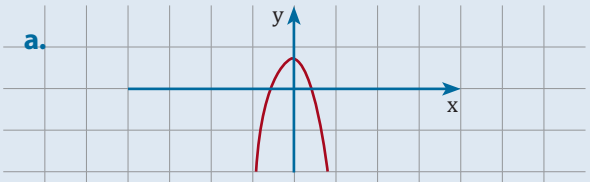


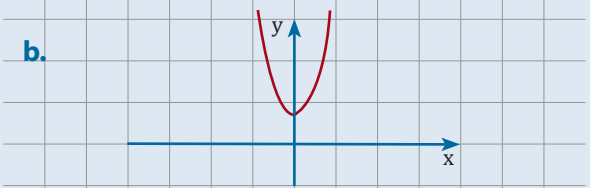
4 Christopher y Jessica están haciendo una tarea sobre las parábolas y comienzan a discutir lo siguiente: uno de ellos dice que $y = (x - 5)^2 + 8$ tiene el mismo máximo que $y = -(5 - x)^2 + 8$.
¿Qué opinas tú? Justifica matemáticamente tu respuesta.

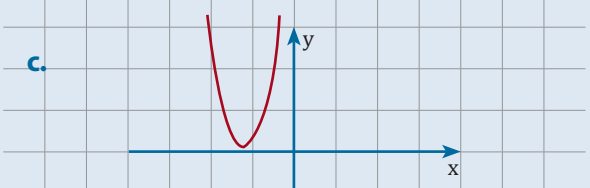
5 "La señorita Marcela entrega el siguiente desafío a su curso: encontrar los puntos de intersección de las siguientes parábolas: $y = -x^2 + 2x + 2, y = 3x^2 - x + 1$, indicando en qué cuadrantes están".

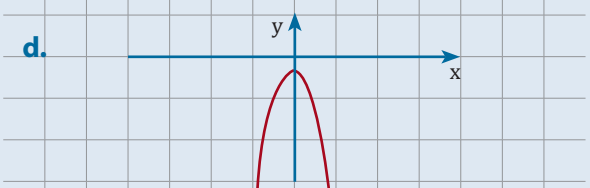
VIII. Desarrolla los siguientes ejercicios y marca la alternativa correcta. Revisa tus respuestas en el solucionario.

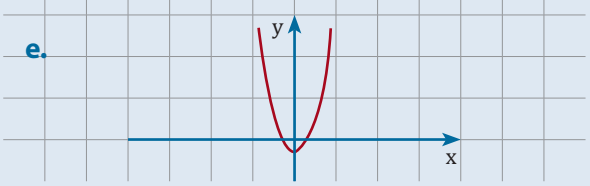
1 ¿Cuál de los gráficos representa mejor a la función $f(x) = -x^2 + 1$?

a.


b.


c.


d.


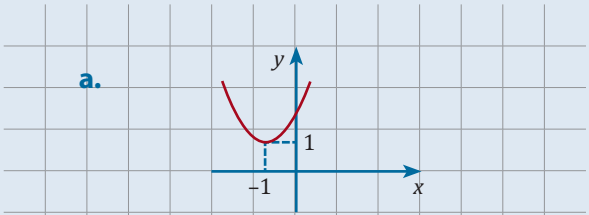
e.


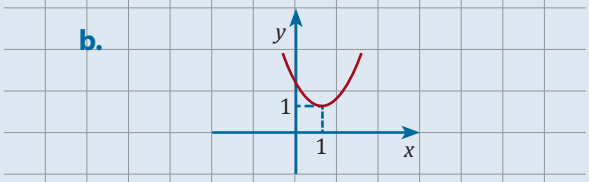
2 La trayectoria de un proyectil está dada por la ecuación $y(t) = 90t - 5t^2$, donde t se mide en segundos y la altura $y(t)$ se mide en metros. Entonces, ¿en cuál(es) de los siguientes valores de t estará el proyectil a 400 m de altura sobre el nivel del suelo?

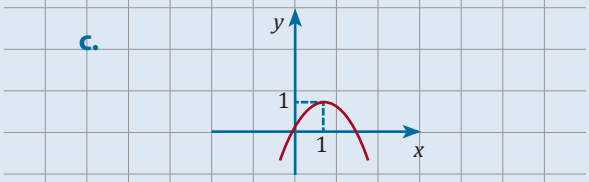
I. 8 s **II.** 9s **III.** 10s

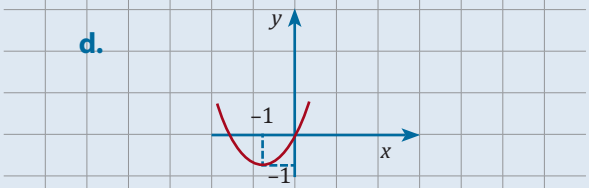
a. Solo en I.
b. Solo en II.
c. Solo en III.
d. Solo en I y en II.
e. Solo en I y en III.

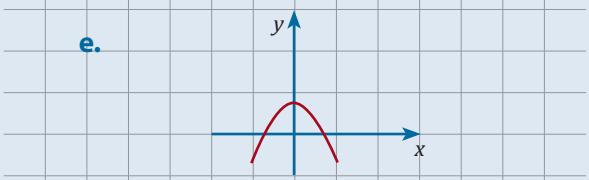
3 ¿Cuál de los siguientes gráficos representa mejor a la función real $f(x) = x^2 + 2x$?

a.


b.


c.


d.


e.


4 Considera la parábola $y = \frac{1}{2}(x+1)^2$.

¿Cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) verdadera(s)?

I. La parábola se abre hacia arriba.
II. Su vértice se encuentra en $\{-1,0\}$.
III. Su eje de simetría es $x = -1$.

a. Solo I.
b. Solo I y II.
c. Solo I y III.
d. Solo II y III.
e. I, II y III.

5 ¿Cuál es el <u>menor</u> valor para la expresión $x^2 + \frac{6}{x}$ cuando x satisface la igualdad $x + \frac{20}{x} = 12$?

a. 2
b. 7
c. 0
d. – 2
e. – 7

6 Las raíces (o soluciones) de la ecuación $x(x+1) = 20$ son:

a. 1 y 20
b. 2 y 20
c. 4 y 5
d. – 4 y 5
e. 4 y – 5

7 Si la base de un triángulo mide $\sqrt{3}a$ y su altura mide $\frac{\sqrt{3}a}{2}$, entonces ¿cuánto mide el lado de un cuadrado que tiene igual área que el triángulo?

a. $\frac{3a}{2}$
b. $\frac{3a}{4}$
c. $\frac{a}{2}$
d. $\frac{\sqrt{3}a}{2}$
e. $\frac{\sqrt{3a}}{2}$

8 Sea la función de números reales $f(x) = x^2 - 5$. ¿Cuál es el conjunto de los números reales t que satisfacen $f(t) = -1$?

a. $\{-2\}$
b. $\{2, -2\}$
c. $\{2\}$
d. $\{4\}$
e. No tiene solución en el conjunto de los números reales.

9 El conjunto solución (o raíces) de la ecuación $x^2 - 1 = x - 1$ es:

a. $\{0\}$
b. $\{1\}$
c. $\{0,1\}$
d. $\{0, -1\}$
e. Ninguno de los anteriores.

10 Si $f(x) = x^2 + 3x - 3$, entonces $f(x+1)$ es igual a:

a. $x^2 + 5x + 4$
b. $x^2 + 3x - 2$
c. $x^2 + 4x - 3$
d. $x^2 + 5x + 1$
e. $x^2 + x + 1$

11 Dada la parábola de ecuación $y = x^2 + 2x - a$, ¿cuál(es) de las siguientes afirmaciones es(son) correcta(s)?

I. Si $a > 1$, la parábola no intersecta al eje x.
II. Si $a = -1$, la parábola intersecta en un solo punto al eje x.
III. Si $a < 1$, la parábola intersecta en dos puntos al eje x.

a. Solo I.
b. Solo II.
c. Solo I y II.
d. Solo I y III.
e. Solo II y III.

12 ¿Cuál de las siguientes ecuaciones es equivalente a la ecuación $x^2 - 2\sqrt{2}x - 5 = 0$

a. $(x - \sqrt{2})^2 = 3$
b. $(x - \sqrt{2})^2 = 5$
c. $(x - \sqrt{2})^2 = 7$
d. $(x - 2\sqrt{2})^2 = 5$
e. $(x - 2\sqrt{2})^2 = 1$



13 El producto de dos números pares consecutivos positivos es 624. ¿Cuál es la suma de estos?

a. 24
b. 26
c. 28
d. 50
e. 54

14 Las soluciones de la ecuación $(x+5)(x-5)-(5-x)(5+x)=0$, son números que pertenecen al conjunto:

a. $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -5\}$
b. $\{x \in \mathbb{R} / -5 < x \leq -3\}$
c. $\{x \in \mathbb{R} / -6 < x \leq 5\}$
d. $\{x \in \mathbb{R} / x \geq -5\}$
e. $\{x \in \mathbb{R} / x \leq -6\}$

15 Las soluciones de la ecuación $(6t-9)^2=9$ son:

a. 2 y 1
b. 2 y 3
c. –2 y –1
d. 0 y 2
e. 0 y 1

16 Sea $g(x)$: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $g(x)=x^2-x-6$, entonces el conjunto de todos los valores de x para los cuales $g(x)=0$ es:

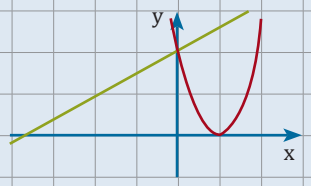
a. $\{3,-2\}$
b. $\{-2\}$
c. $\{-3,2\}$
d. $\{3\}$
e. $\{-3,-2\}$

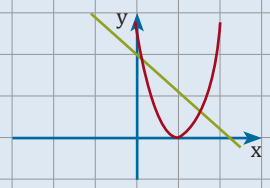
17 ¿Cuál(es) de los siguientes puntos pertenece(n) a la función $y=-x^2-3x+2$?

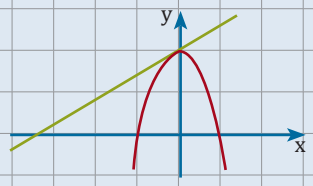
I. $(0,2)$
II. $(1,-2)$
III. $(-1,4)$

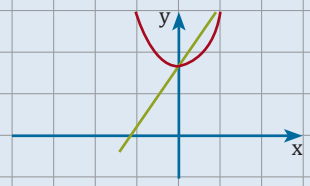
a. Solo I.
b. Solo II.
c. Solo I y II.
d. Solo II y III.
e. I, II y III.

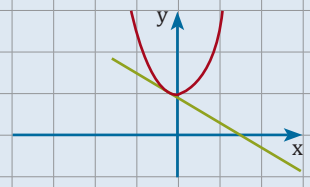
18 El gráfico que representa correctamente a las funciones $f(x)=4x+3$ y $g(x)=x^2+3$, es:

a.


b.


c.


d.


e.


19 Se puede determinar la suma de las raíces de la ecuación: $x^2+px+q=0$ si:

(1) El valor de p es el triple de q.
(2) El valor de q es 2.

a. (1) por sí sola.
b. (2) por sí sola.
c. Ambas juntas, (1) y (2).
d. Cada una por sí sola, (1) o (2).
e. Se requiere información adicional.

20 La distancia que recorre un móvil viene dada por la función $x = 2t - \frac{t^2}{2}$ con x expresado en metros y el tiempo t en segundos.

Entonces, la distancia máxima que recorre el cuerpo es:

a. 0 m
b. 1 m
c. 2 m
d. 4 m
e. 6 m

21 La(s) solución(es) de la siguiente ecuación $\frac{3}{x-5} + \frac{2x}{x-3} = 5$ es(son):

a. 7
b. 4
c. 7 y 4
d. –7 y 4
e. 7 y –4

22 Dado el polinomio $p(x) = 6x^2 - 5x + 1$, entonces el valor de $p(0{,}5)$ es equivalente a:

a. $p(-1)$
b. $p(0)$
c. $p\left(\frac{1}{3}\right)$
d. $p(1)$
e. $p(2)$

23 Sea $g(x)$: $\mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = 3x^2 - x - 6$, determine el valor de $\frac{g(2) + 2 \cdot g(3)}{g(1)}$:

a. – 10
b. 10
c. – 11
d. 27
e. – 27

24 La altura de un cono mide 12 cm. Para que su volumen sea de $100\,\pi$ cm^3, su radio basal debe medir:

(Recuerda que el volumen de un cono se calcula como $V = \frac{\pi \cdot r^2 \cdot h}{3}$)

a. $\frac{3}{5}$ cm
b. 5 cm
c. $\frac{5}{3}$ cm
d. 3 cm
e. 3,5 cm

25 Una caja abierta se construye a partir de una plancha metálica rectangular, cortando cuadrados de lados x en cada una de sus esquinas y doblando los lados hacia arriba. Si la plancha es de 15 cm de ancho por 25 cm de largo, entonces el volumen de la caja es:

a. $x(15 - x)(25 - x)$
b. $x(13 - x)(23 - x)$
c. $x(7{,}5 - x)(12{,}5 - x)$
d. $x(15 - 2x)(25 - 2x)$
e. $x(15 - 2x)(25 - x)$

26 La suma de las soluciones de la ecuación $2x^2 + 5x - 3 = 0$ es:

a. –2,5
b. 0,5
c. 1
d. 2,5
e. 3

27 Con respecto a las soluciones de una ecuación cuadrática del tipo $ax^2 = bx$, siempre se puede afirmar que:

a. Tiene 2 soluciones, donde una de ellas es el opuesto de la otra.
b. Tiene 2 soluciones iguales.
c. Tiene 2 soluciones, donde una de ellas es siempre 0.
d. Tiene solo una solución.
e. Nunca tiene solución en $\mathbb{R}$.

28 ¿Cuál(es) de los siguientes números es(son) solucion(es) de la ecuación $2x(x + 3) - 5(x + 1) = 5x + 1$?

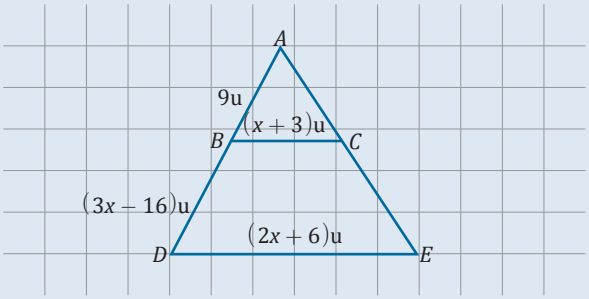
I. 3
II. – 4
III. – 1

a. Solo I.
b. Solo II.
c. Solo III.
d. I y II.
e. I y III.

29 ¿Cuál de las siguientes ecuaciones NO tiene solución en los números reales?

a. $2x^2 - 5x - 5 = 0$
b. $2x^2 - 7x - 10 = 0$
c. $3x^2 - 8x + 1 = 0$
d. $3x^2 + 2x + 1 = 0$
e. $4x^2 + 7x + 3 = 0$

30 En la figura adjunta, $\overline{BC} // \overline{DE}$. ¿Cuál es el valor del segmento BD?



a. $\frac{25}{3}$
b. 9
c. $\frac{34}{3}$
d. $\frac{49}{3}$
e. $\frac{68}{3}$

31 El cociente entre el triple de un número natural disminuido en 11 y el sucesor del número es igual al doble del número disminuido en 24. ¿Cuál es el número?

a. 13
b. 4
c. 2
d. $\frac{1}{2}$
e. $-\frac{1}{2}$

32 ¿Cuál es el valor de a en la ecuación

$a(x + a) - 3x(a + 3) = -4x + \frac{a}{2}$,

cuando $x = 5$?

a. 12,5
b. 2
c. –2
d. –12,5
e. (a) y (c)

33 Dada la función cuadrática $f(x) = 4x^2 + 3x + 1$, se puede afirmar que:

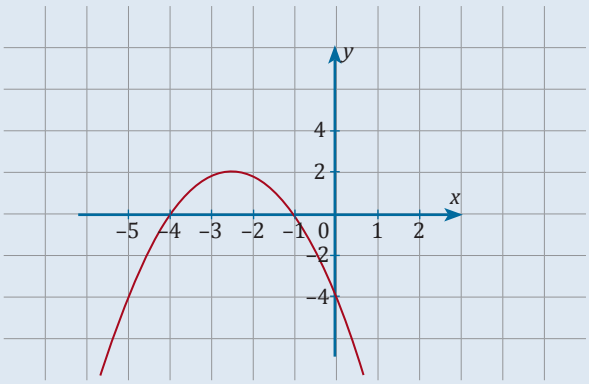
a. La parábola es cóncava hacia abajo.
b. La parábola corta al eje y en el punto $(0, -1)$.
c. El vértice de la parábola es el punto $(-4, -3)$.
d. El eje se simetría de la parábola es la recta de ecuación $x = \frac{3}{8}$.
e. La parábola no corta al eje x.

34 ¿En cuál(es) de los siguientes puntos se intersectan las parábolas asociadas a las funciones $f(x) = x^2 + 5x + 7$ y $g(x) = -2x^2 + 3x + 8$

I. $\left(\frac{1}{3}, \frac{79}{9}\right)$
II. $(-1,3)$
III. $\left(-\frac{1}{3}, \frac{79}{9}\right)$

a. Solo I.
b. Solo III.
c. Solo I y II.
d. Solo II y III.
e. Solo I y III.

35 La función cuadrática que representa la parábola del gráfico adjunto es:



a. $f(x) = x^2 + 5x + 4$
b. $f(x) = -x^2 - 5x - 4$
c. $f(x) = x^2 + 5x - 4$
d. $f(x) = -x^2 + 5x - 4$
e. $f(x) = -x^2 + 5x + 4$

36 ¿Cuál(es) de los siguientes puntos pertenece(n) a la parábola de función $f(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3x + 6$?

I. $(4, -2)$

II. $(-2{,}13)$

III. $\left(-1, \frac{37}{4}\right)$

a. Solo II.
b. Solo I y II.
c. Solo I y III.
d. Solo II y III.
e. I, II y III.

37 ¿Cuál(es) de las siguientes funciones cuadráticas tiene(n) el mismo mínimo?

I. $f(x) = x^2 + 2x + 1$

II. $f(x) = -x^2 - 2x - 1$

III. $f(x) = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$

a. I y II.
b. I y III.
c. II y III.
d. I, II y III.
e. Ninguna de ellas.

38 La parábola asociada a la función $f(x) = x^2 - 10x + 25$ corta al eje x en el(los) punto(s):

a. $(-5{,}0)$
b. $(5{,}0)$
c. $(10{,}0)$
d. $(-10{,}0)$
e. (a) y (b)

39 La imagen de -3 bajo la función $f(x) = \frac{2}{5}x^2 - 3x + 4$ es:

a. $-\frac{43}{5}$
b. $\frac{47}{5}$
c. $\frac{53}{5}$
d. $\frac{77}{5}$
e. $\frac{83}{5}$

40 La preimagen de 6 bajo la función $f(x) = -3x^2 + 11x$ es:

a. $\frac{2}{3}$
b. $-\frac{2}{3}$
c. 3
d. (a) y (b)
e. (a) y (c)

Mis apuntes



Criterios para autoevaluar tu aprendizaje

Marca con una ✘ según la evaluación de tu trabajo en esta unidad. Recuerda que hacer esta evaluación responsablemente te entregará información sobre tu proceso de aprendizaje.

Indicadores	+++	++−	+−−
Pude completar el mapa conceptual de la síntesis sin necesidad de mirar mi libro.			
Hice el crucigrama de la síntesis conceptual sin dificultad.			
Colaboré con mis compañeros en la realización de las actividades propuestas.			
Anoté lo que más me cuesta para luego repasar y volver a revisar estos contenidos.			
Soy capaz de explicar a otros los contenidos y los procedimientos para resolver los ejercicios de esta unidad.			
Entiendo el tipo de problemas cotidianos que se pueden resolver con estos contenidos.			
Me siento seguro de mis conocimientos sobre lo tratado en esta unidad y creo que podría resolver cualquier ejercicio que se me planteara.			

Calcula el porcentaje de logro que obtuviste en la sección VIII.

Porcentaje de logro

$$PL = \frac{\text{Nº de respuestas correctas}}{40} \cdot 100$$

Porcentaje de logro	Nota obtenida	Nivel de mi aprendizaje	Cómo mejorar
29 % a 0 %	1,0 a 2,5	Alerta	Los contenidos no han sido comprendidos. Debes repasarlos nuevamente y rehacer los ejercicios. Fíjate muy bien en los ejercicios resueltos. Debes pedir ayuda. ¡Ánimo! con trabajo y estudio se puede.
49 % a 30 %	2,6 a 3,5	Muy bajo	La mayoría de los contenidos no han sido comprendidos. Debes volver a repasarlos y rehacer los ejercicios incorrectos. Pídeles ayuda a tus compañeros o compañeras. Vuelve a estudiar; seguro que lo lograrás.
59 % a 50 %	3,6 a 3,9	Bajo	Una gran parte de los contenidos no han sido comprendidos en su totalidad. Rehaz aquellos ejercicios incorrectos, pero antes, vuelve a estudiar los contenidos. Trata nuevamente.
69 % a 60 %	4,0 a 4,7	Medio bajo	Adquiriste una parte de los contenidos, pero aún faltan. Debes corregir aquellos ejercicios incorrectos y revisar los contenidos de los temas en que fallaste. Bien, has avanzado, aunque aún queda camino por andar.
79 % a 70 %	4,8 a 5,4	Medio	Has logrado entender una buena parte de los contenidos; sin embargo, aún faltan otros y afianzar los primeros. Corrige las respuestas erróneas; puedes pedir ayuda si lo deseas. Revisa los contenidos. ¡Puedes hacerlo mucho mejor!
89 % a 80 %	5,5 a 6,2	Medio alto	Has logrado adquirir gran parte de los contenidos. Revisa los ejercicios en los que fallaste y repasa aquellos contenidos. ¡Lo has hecho bien!
100 % a 90 %	6,3 a 7,0	Alto	Has logrado aprender todos o casi todos los contenidos tratados. ¡Muy bien! has logrado los objetivos propuestos. Sigue así.

Evaluación de síntesis 1 (Unidades 1 y 2)

I. Completa cada una de las siguientes afirmaciones según corresponda:

1 El único complejo que al multiplicarlo por $(-3{,}5)$ da por resultado la unidad compleja es _____

2 Una representación gráfica en el plano complejo de una de las soluciones de una ecuación cuadrática determinada, muestra que su parte imaginaria está por cinco unidades bajo el eje real, sin embargo, su parte real también es cinco, entonces la expresión binómica de la otra solución es _____

3 El módulo de un complejo imaginario puro es 144. Entonces dicho complejo escrito en forma binómica es _____ o _____

4 El único número imaginario que no tiene inverso multiplicativo es _____

5 Al representar los números reales puros en el plano complejo, éstos representan siempre _____

6 Con respecto a $y = -x^2$, una parábola se encuentra desplazada a tres unidades a la derecha del eje vertical, y a dos unidades por debajo del otro eje de un plano cartesiano. Entonces la ecuación reducida de esta parábola es _____

7 La suma de los ceros de la función $f(x) = (15 - 3x)(x + 4)$ es _____

8 La multiplicación de las raíces de la ecuación $9x^2 - 6x + 1 = 0$ es _____

9 Una ecuación cuadrática que tiene siempre una solución igual a cero es de la forma _____

10 Toda ecuación cuadrática tiene siempre solución en el conjunto de los _____

II. Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno:

1 Dada $f(x) = 2(x + 5)^2 - 12$, señala $Dom\, f$ y $Rec\, f$

2 Dada la siguiente ecuación:
$6x^2 + 9x - 2 = 0$

a. Haz su resolución.

b. Si x_1 y x_2 son las soluciones obtenidas en **a.** y $x_1 < x_2$, entonces remplázalas en $\frac{x_1 - x_2 i}{x_2 + x_1 i}$ y efectúa esta división.

c. ¿Cuál es el valor del módulo del complejo obtenido anteriormente?

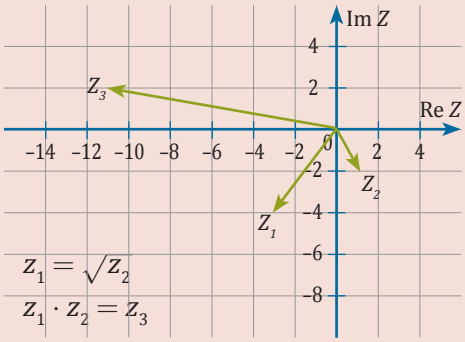
3 El cuadrado del complejo $11x - 3yi$ es igual a $40 + 198i$:

a. Establece el sistema de ecuaciones necesarios para encontrar los valores de x e y.

b. Elige una de las ecuaciones del sistema anterior y resuelve para ambas incógnitas si se sabe que $y = x - 4$.

c. Usando los valores obtenidos anteriormente, escribe el complejo conjugado del complejo involucrado.

4 En el gráfico se han representado tres complejos que satisfacen ciertas condiciones descritas en el recuadro.



Haciendo los cálculos correspondientes, responde:

a. ¿Es verdad que $z_3 = z_1^{\frac{3}{2}}$? Justifica tu respuesta.

b. ¿Cuál es el valor de $\left|z_1^{\frac{5}{2}}\right|$?

c. Halla el inverso aditivo de $(z_2 - z_3)^6$

5 La altura de un proyectil está dada por $h(t) = 9t - 3t^2$, donde $h(t)$ se mide en kilómetros y t, que es el tiempo de permanencia del proyectil en el aire, está expresado en minutos.

a. ¿Qué altura lleva a los treinta segundos después del lanzamiento?

b. ¿A los cuántos minutos desde el lanzamiento el proyectil alcanza su máxima altura?

c. ¿Cuál es la diferencia de alturas que recorre este proyectil, entre los 90 segundos transcurridos desde del lanzamiento hasta los veinte segundos antes de volver al suelo?

d. ¿A cuántos minutos de impulsado, aterriza?

III. Resuelve los siguientes problemas, coloca todo el desarrollo en tu cuaderno:

1 "Jacinta te quiero pedir que subas de inmediato a ayudar a tu hermana menor, no entiendo eso de que el mínimo común múltiplo entre dos enteros primos positivos sea 4 087" le dice su madre. La muchacha de 17 años acude, y mientras se dirige a la pieza de su hermana, ésta le grita acercándose: "y cuya diferencia sea de seis unidades"... Sin hacer uso de calculadora, encuentra dichos números.

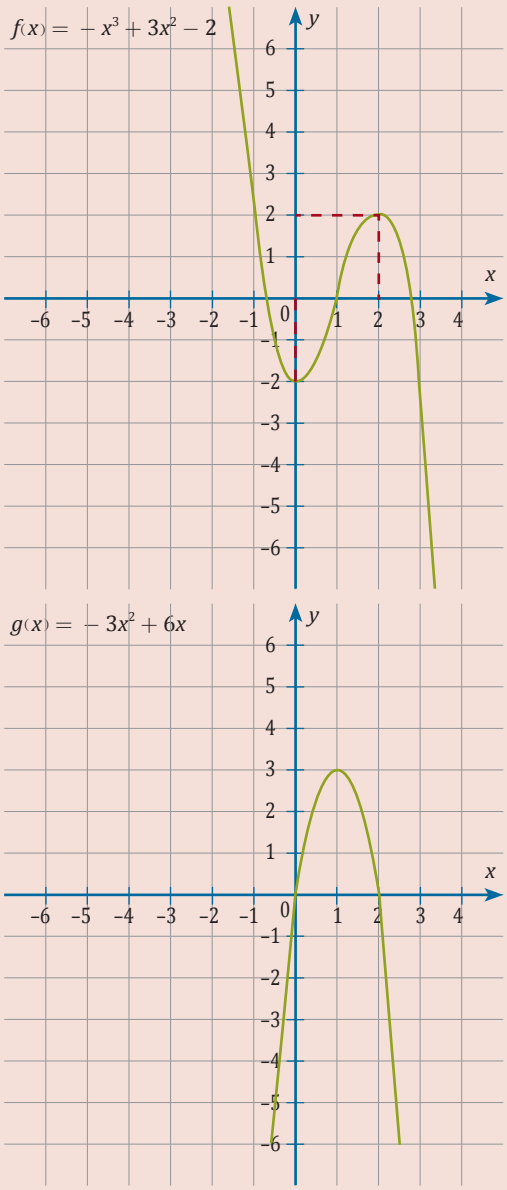
2 Elsa, tía abuela de Joaquín y él tienen un gran sentido del humor y siempre se apoyan mutuamente... "Joaquín, ¿puedes anotar la receta de los quequitos mármol que te voy a dictar? Te comento primero que, la base es compleja..." Complejo es esto tía - Joaquín empezó a decir – "la base para expresar el complejo $(6{,}5)$ son los complejos $(14{,}13)$ y otro del tipo $(x^2 - 4{,}2x)$. A dos veces $(14{,}13)$ hay que agregar cuatro veces el opuesto aditivo de mi complejo $(x^2 - 4{,}2x)$... Y todo lo anterior es igual a ocho veces $(6{,}5)$ Encuentra el complejo $(x^2 - 4{,}2x)$. ¡A trabajar amiga y amigo!

3 ¿De cuál discapacidad física me hablas? ¡No!. Para tu conocimiento, ella es la mejor en Matemática y en gimnasia de barras y de caballete, y la mejor compañera en este tercero medio. Fíjate que, la penúltima clase, el profesor nos había pedido que encontráramos un complejo de módulo 13. Y sin ni hacer grandes cálculos, ella dio cuatro ejemplos empezando por $5 + 12i$. El profesor la felicito y después le pidió " un complejo de módulo 34, tal que la diferencia entre su parte real con la parte imaginaria sea 14". Desarrolló en su cuaderno y brevemente mencionó, en voz alta, solo dos complejos... finalmente la aplaudimos.

a. Basándose en $5 + 12i$, ¿cuáles son los otros tres complejos posibles de módulo 13?

b. Haz un desarrollo para hallar cuatro complejos que reúnan las características requeridas por el profesor después de la felicitación que dio a la alumna aludida.

4 Pablo, a continuación te muestro un gráfico de una función de tercer grado, que estudiarás en la universidad, y otro de una función de las que ya conoces. Pero necesito que me ayudes respondiendo:



a. Encuentra los puntos de intersección de la parábola con los ejes coordenados.

b. Compara la abscisas de los puntos de intersección que obtuviste anteriormente, con las abscisas de los puntos que te he señalado con trazos segmentados en rojo en el gráfico de la izquierda. ¿Coinciden? ¿De qué valores se trata?

c. Dime las coordenadas del vértice de la parábola.

d. Si te fijas bien hay un vértice en el primer cuadrante de cada gráfico. Puedes observar además, que en el gráfico de la izquierda el valor máximo que tiene esa función de tercer grado, es 2. Dime si el valor máximo de la función cuadrática supera este valor y porqué.

5 "... Un día, viendo que el tornero me engañó en la fabricación de un repuesto completamente cilíndrico que necesitaba mi auto, le pregunté. La pieza quedaba completamente suelta. Incluso él mismo lo comprobó, pero no lo aceptó. Discutimos hasta que reconoció que la pieza en cuestión tenía que tener 2 mm más de diámetro, es decir $78{,}5$ mm^2, medida de área que yo había calculado previamente..." Tío Liborio, quien me ayuda en Matemática, terminó su relato y de inmediato me pidió que calculara el perímetro de la pieza que inicialmente había fabricado el tornero, ¿me pueden ayudar? (Haz uso de tu calculadora solo si es necesario y considera $\pi = 3{,}14$).

6 ¿Aló Mamá?... te cuento que de nuevo me tiene bien intrigada mi compañera y amiga Coné. ¿Es inteligente o astuta?...: el profesor después de terminar con la materia de ecuaciones cuadráticas nos pidió que aplicando esta materia, buscáramos un número entre cuatro y cinco, que estuviera a x décimas de cuatro y a $4x$ décimas de cinco. Además, que al elevarlo al cuadrado resultara $17{,}64$. Excepto Coné, todas

reclamamos diciendo que había formas más fáciles para buscarlo. Ella autorizada por el profesor, fue a la pizarra y empezó a escribir… Sea $a = 4 + x$ y, por otro lado, también $a = 5 - 4x$ y finalmente nos sentimos como tontas... ¿aló? ¿Qué marqué mal nuevamente el número de teléfono? ¡Coné!... ¡perdóname, otra vez!... ¡No más vergüenzas! , por tanto, te invitamos a encontrar dicho número empezando como lo hizo Coné.

7 "En un local de comida rápida, Lorena comparte la mesa con un joven estudiante abrumado por los ejercicios que intenta entender en su cuaderno. *Disculpa, ¿qué estás estudiando?* Potencias de números complejos. *¿Y que te aflige tanto?* ...es que no sé cómo resolver $\left(-2 + \frac{1}{2}i\right)^5$. *Bueno, tú sabes que primero puedes empezar elevando al cuadrado y luego... ¡Oh se me hace tarde y debo abordar el bus de las* $15{:}30$, *que me lleva de vuelta a la sede de mi universidad en Antofagasta!*.... Gracias, ¿volveré a verte?..." Conforme a lo narrado, ¿Cuál es el complejo resultante? ¿En qué cuadrante debe ser representado? ¿Por qué?

8 Ahora que estoy en tercero medio, he aprendido que mucha de la matemática que nos están pasando tiene un poco de juego, un poco de arte y mucho de ciencia, como lo añade de vez en cuando nuestra profesora. ¿Cómo me di cuenta? Estábamos en clase haciendo una tabla de valores para graficar la ecuación $y = 25x^2 + 5x + 1$. Primero me di cuenta que esta ecuación se puede rescribir como $y = x^2 \cdot 5^2 + x \cdot 5^1 + 5^0$, y esto se parece a escribir números en base cinco. Por ejemplo 111 se puede expresar como $111 = 2^2 \cdot 5^2 + 2 \cdot 5^1 + 1 \cdot 5^0$ (remplazando $x = 2$ en la función cuadrática anterior) y lo escribí así $(421)_5$ (tomando en orden los números en rojo). Pero me hecho algunas preguntas, al respecto, que tú podrías ayudarme a responder:

a. ¿Qué número estoy expresando cuando escribo $(931)_5$?

b. ¿Existe algún número dígito menor que cinco, para expresar $4\ 021$? Y si existiera tal dígito ¿cómo quedaría escrito $4\ 021$ usando el tipo del paréntesis que les indiqué?

c. ¿Con qué dígito podemos escribir $1\ 641$?

d. ¿Habrá un número real positivo menor que cinco para expresar 13?¿Cuál?

9 *"Lamento no haber podido traer el gráfico de la trayectoria parabólica del objeto volador que detectamos con nuestros aparatos. Como el fenómeno nos pilló afuera de la base, lo único que puedo indicar es que el punto más cercano estuvo precisamente a unos* $60\ \text{m}$ *por sobre nosotros , y a una distancia de* $50\ \text{m}$ *de la base , tomando ésta como referencia de nuestro sistema de coordenadas..."* el investigador después de haber escuchado aquella vieja cinta grabada en 1957 intentó buscar una fórmula que modelara los desplazamientos del objeto volador para así poder estudiar el fenómeno más cabalmente ¿Puedes ayudar a encontrar esta fórmula que es del tipo $h(x) = 0{,}02x^2 + bx + c$? ,donde $h(x)$ es la altura del objeto volador y x la distancia de observación, tomando la base como referencia del sistema.

10 "No me voy a poner nerviosa frente a este ejercicio. Me piden que indique un número complejo de la forma (x,y) tal que $7\left(x, -\frac{8}{7}y\right) - 3(-3{,}2) + 6\left(x^2, \frac{5}{6}y^2\right) = (22{,}106)$. Luego que escriba el inverso multiplicativo de él. No me voy a poner nerviosa, ni me voy a dejar vencer.... es el compromiso que he hecho conmigo misma."

IV. Marca la alternativa correcta:

1 $1 - 3i$ es una de las raíces cuartas de un complejo. Entonces este complejo es:

a. $4 - 12i$
b. $1 + 81i$
c. $4 - 24i$
d. $-32 + 24i$
e. $-32 - 24i$

2 Para que $\sqrt{2}y^2 - 6y + c = 0$ tenga solución única en la variable y, el valor de c debe ser:

a. $40{,}5$
b. $\sqrt{40{,}5}$
c. 81
d. $\sqrt{81}$
e. 9

3 Consideremos el complejo $z = (x^2, x)$ en el cuarto cuadrante, cuya parte real es igual a la parte real de $(25{,}9)$, por tanto, z^{-1} es:

a. $\left(\frac{1}{26}, \frac{1}{130}\right)$
b. $\left(\frac{1}{26}, -\frac{1}{130}\right)$
c. $\left(\frac{1}{25}, \frac{1}{5}\right)$
d. $\left(\frac{1}{25}, -\frac{1}{5}\right)$
e. Ninguna de las anteriores.

4 Si $f(x) = -2x^2 + 3x - 0{,}\overline{3}$, entonces $\frac{f(a) - f(-a)}{2}$ es igual a:

a. $-2a^2 + 3a - 0{,}\overline{3}$
b. $0{,}\overline{6}$
c. $3a$
d. 0
e. $-4a^2 - 0{,}\overline{6}$

5 Los únicos complejos, que tienen el valor de sus módulos igual a 5 son:

a. $-5 + 0i$, $5 + 0i$, $0 - 5i$ y $0 + 5i$
b. $-3 - 4i$, $-3 + 4i$, $3 - 4i$ y $3 + 4i$
c. Los que al sumar su parte real y su parte imaginaria dan 5.
d. Los que al sumar su parte real y su parte imaginaria, y luego elevar al cuadrado, dan 5.
e. Aquellos cuyos pares ordenados, forman una circunferencia de radio 5 en el plano complejo.

6 El vértice de una parábola representa un mínimo y $(-5, -7)$ son sus coordenadas. Por tanto, una posible ecuación de la parábola es:

a. $y = (x + 5)^2 + 7$
b. $y = (x + 5)^2 - 7$
c. $y = (x - 5)^2 + 7$
d. $y = (x - 5)^2 - 7$
e. $y = (x - 5)^2 - 7$

7 El complejo conjugado de $\frac{\sqrt{-18} - \sqrt{-8}}{(\sqrt{-18} + \sqrt{-8})^2}$ es:

a. $0 - \frac{\sqrt{2}}{25}i$
b. $0 + \frac{\sqrt{2}}{25}i$
c. $0 - \frac{\sqrt{2}}{50}i$
d. $0 + \frac{\sqrt{2}}{50}i$
e. $0 - \frac{\sqrt{2}}{10}i$

8 Una ecuación cuadrática en la variable x tiene solución:

a. Siempre que el coeficiente que acompaña a x sea distinto de cero.
b. Si su discriminante es un número real no negativo.

c. Si el valor de su discriminante es cero.

d. Si la raíz cuadrada de su discriminante sea un número real.

e. Ninguna de las anteriores.

9 Un complejo es real puro, si:
(1) Su conjugado es un complejo real puro.
(2) El producto de éste y su conjugado es un número real.

a. (1) por sí sola.

b. (2) por sí sola.

c. (1) y (2), ambas juntas.

d. (1) o (2), cada una por sí sola.

e. Se requiere información adicional.

10 Para determinar el vértice de una parábola cuyas ramas se abren hacia abajo, basta con saber:
(1) La ecuación de su eje de simetría.
(2) El valor de su máximo.

a. (1) por sí sola.

b. (2) por sí sola.

c. (1) y (2), ambas juntas.

d. (1) o (2), cada una por sí sola.

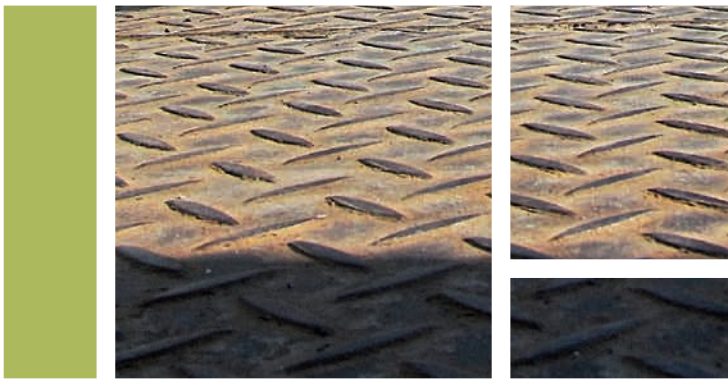
e. Se requiere información adicional.

Mis apuntes

UNIDAD 3

Plano cartesiano y homotecia... un nuevo paso en geometría











Plano cartesiano y homotecia

- Definición analítica del plano cartesiano.
- Elementos del plano cartesiano.

- Distancia entre dos puntos.
- Punto medio de un trazo.

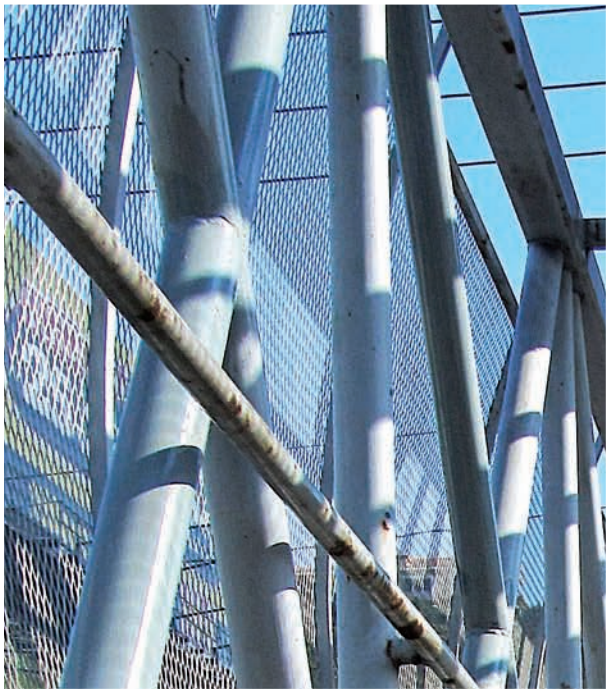
- Homotecia.

Aplicación a elementos de geometría y problemas de cálculo de distancias, áreas y perímetros de figuras geométricas.

Desplazamiento de figuras homotéticas en el plano cartesiano.

Resolución de problemas cotidianos.





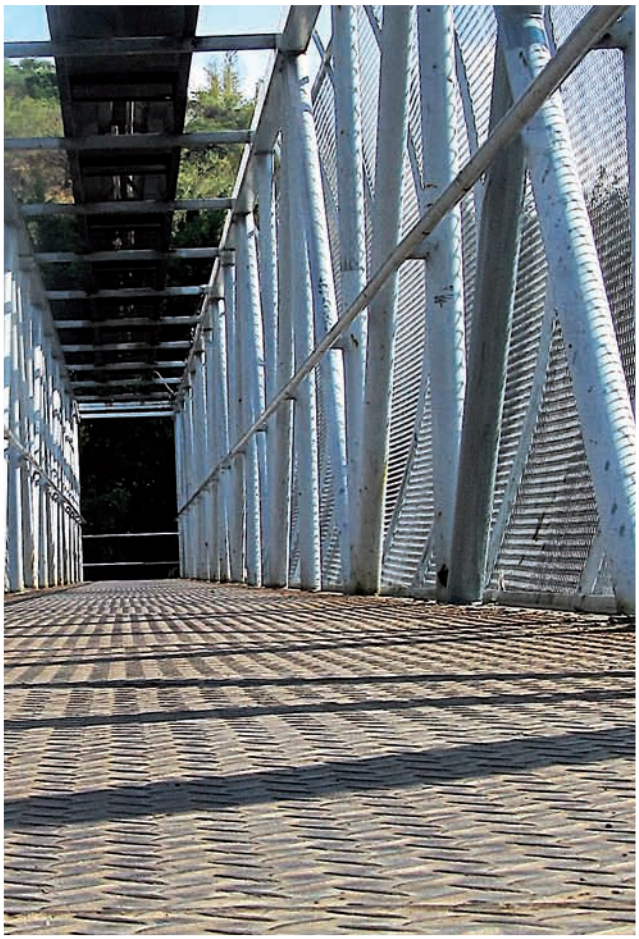


















EN ESTA UNIDAD APRENDERÁS A:

1. Deducir la distancia entre dos puntos en el plano cartesiano y aplicarla al cálculo de magnitudes lineales en figuras planas.
2. Describir la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar.
3. Usar un procesador geométrico para visualizar las relaciones que se producen al desplazar figuras homotéticas en el plano.

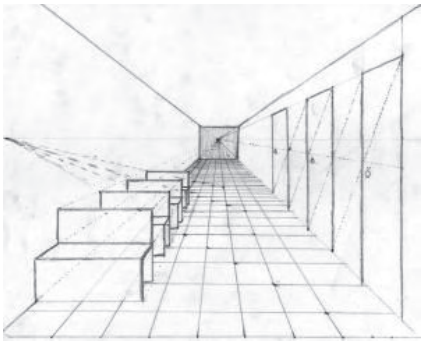


Antiguamente, los matemáticos se habían dedicado a estudiar y dar respuestas a variados temas matemáticos y a establecer relaciones entre los elementos de dos grandes áreas: los números y las figuras. La aritmética y la geometría habían ido desarrollándose por caminos paralelos, y era impensable poder reunir ambas disciplinas tan distintas en un mismo estudio. Aunque ya en el año 350 a. C. un matemático llamado Menecmo había convertido el problema geométrico de construir un cubo con el doble de volumen de otro dado en una ecuación, fue hasta el siglo XVII cuando René Descartes formalizaría uno de los más brillantes aportes a la matemática y su desarrollo. Así lo expresó en su libro llamado "La Geometría" que consta de tres tomos. En el primero de ellos, Descartes dirá: "Y yo no temeré introducir estos términos de aritmética en la geometría, a fin de hacerme más inteligible". Fue así como Descartes imaginó y formalizó el estudio de la geometría a través del álgebra. Si bien es cierto que Descartes solo trabajó con los ejes positivos, él dio las bases para que luego matemáticos como Fermat, Newton y Leibniz, entre otros, pudieran utilizarlas para desarrollar lo que hoy conocemos como geometría analítica, herramienta que sustentaría disciplinas como el cálculo, la geometría infinitesimal y otras que actualmente se estudian.



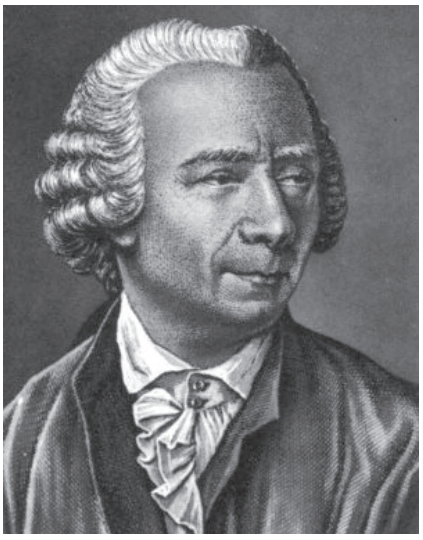
La geometría está reflejada en nuestro entorno, un ejemplo de ello son las construcciones.

Otro aporte de los tiempos de Descartes lo hizo Fermat, quien estableció la verdadera relación entre una curva y una ecuación, tema fundamental de la geometría analítica. Sin embargo, la geometría analítica, tal como la conocemos hoy en día, fue desarrollada por el matemático Leonhard Paul Euler.



Para realizar una construcción como la anterior, los bosquejos nos ayudan a ordenar nuestras ideas.

Pero la geometría analítica no solo ha permitido el desarrollo de ramas más algebraicas o analíticas, también ha permitido el estudio de temas como las transformaciones isométricas, tema que ya has estudiado en años anteriores. El mirar aquellas transformaciones en el plano como resultantes de operaciones angulares y vectoriales hace que su estudio sea más sencillo y mucho más rico en aplicaciones, que si solo se estudiara bajo un punto de vista geométrico euclidiano. En esta unidad te mostraremos otras aplicaciones de la geometría analítica al estudio de variación de figuras geométricas llamado homotecia. Sin duda, algo ya sabes de ella; si piensas en figuras dibujadas en perspectiva encontrarás allí figuras homotéticas. Además, aplicaremos los principios básicos de la geometría analítica para el cálculo de distancias y temas relacionados con áreas y perímetros y la demostración de algunos teoremas de la geometría. Te invitamos a estudiar y a aprender…



Leonhard Euler (1707 – 1783)

Conocimientos previos

Recordaremos un concepto fundamental en matemática, que ya has trabajado en años anteriores: el de **razón**.

Una razón es la comparación de dos cantidades, mediante cociente. Por ejemplo, se podrían comparar las horas trabajadas con el sueldo recibido. Entonces, si la razón es $3\,200 : 1$, podríamos interpretar que una persona gana $\$\,3\,200$ por cada hora que trabaja.

Lo primero que se debe saber al trabajar con razones es que, tanto el antecedente como el consecuente no representan necesariamente, las cantidades reales involucradas en una situación. Por ejemplo, si la razón entre los niños y niñas en un curso es $2 : 3$, esto no quiere decir que en el curso haya 2 niños y 3 niñas, sino que *por cada 2 niños hay 3 niñas*.

$\frac{a}{b}$ — a: *antecedente*; b: *consecuente*

Recuerda que en una razón los términos se llaman antecedente y consecuente.

Otro concepto muy importante para abordar los contenidos de esta unidad, es el de **vector**:

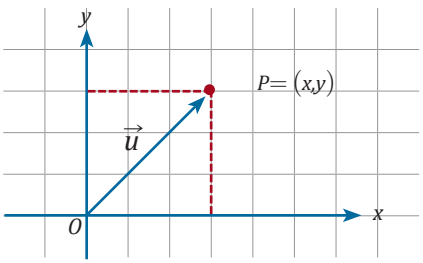
Un vector es un segmento de recta orientado en el espacio, este posee ciertas características que son: origen o punto de aplicación, módulo, dirección y sentido. Usualmente para representar las magnitudes vectoriales se utiliza una letra con una flecha sobre ella, por ejemplo $\vec{u}$.

Módulo: Es la longitud o tamaño del vector. Denotamos el módulo como $|\vec{u}\,|$.

Dirección: Corresponde a la inclinación del segmento de recta y representa al ángulo entre este segmento de recta y un eje horizontal imaginario.

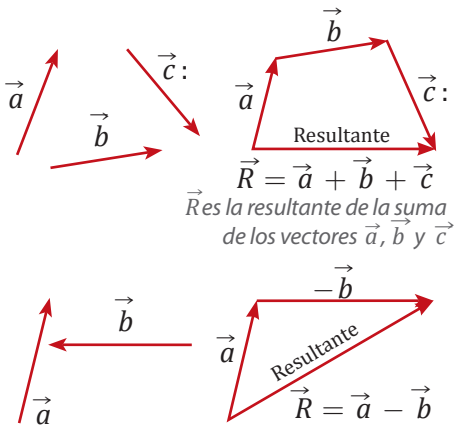
Sentido: Se indica mediante una punta de flecha situada en el extremo del vector y que muestra hacia qué lado de los dos sentidos posibles sobre la recta que lo contiene, se dirige.

Representación geométrica de un vector: Los vectores cuyo punto inicial es el origen O, y el punto final es P, se denotan como



$\overrightarrow{OP}$, si $\vec{u}$ es un vector tal que $\vec{u} = \overrightarrow{OP}$ las componentes de $\vec{u}$ serán las coordenadas del punto P.

Adición de vectores: Para sumar vectores trazamos, en un mismo plano, los vectores uno a continuación del otro, respetando su magnitud, sentido y dirección y se une el origen del primero con el extremo del último y este trazo es la resultante (en el dibujo se indica como $\vec{R}$) con su magnitud, sentido y dirección. Por ejemplo $\vec{a}, \vec{b}$ y $\vec{c}$:



Sustracción de vectores: Se realiza el mismo procedimiento anterior pero el vector o vectores que se restan se trazan en sentido contrario. Por ejemplo $\vec{a}$ y $\vec{b}$:

Trabaja

Resuelve las siguientes actividades:

1 Escribe la razón entre:

- **a.** 2 L de aceto y 250 cm^3 de aceite.
- **b.** 3 kg de harina y $2\,800$ g de azúcar.
- **c.** El número de alumnos de tu curso que miden $1{,}60$ m o más y el número de alumnos que miden menos de $1{,}60$ m.
- **d.** El número de países cuyo nombre empieza con "C" y aquellos cuyo nombre empieza con "B" en el continente americano.

2 Si una razón tiene consecuente 12 y antecedente 32, ¿cuál es la razón?

3 El largo y el ancho de un rectángulo están en la razón $4{:}3$. Si el largo es 48 cm, ¿cuál es el ancho?

4 El sueldo de una persona y los días hábiles que trabaja están en la razón $6\,500 : 1$. Si una persona trabaja 25 días hábiles, ¿cuánto dinero recibe?

5 Escribir la razón como fracción y reducir a los términos de menor valor:

- **a.** La razón 5 kg a 15 kg
- **b.** $\$\ 18 : \$\ 12$
- **c.** $16 : 4$
- **d.** 6 m a 30 cm
- **e.** $5\ p$ a $15\ p$
- **f.** $5\frac{1}{3} : 2\frac{2}{3}$

6 Escribe la razón inversa y anota su antecedente y su consecuente en cada caso (recuerda que una razón inversa es una razón con los términos intercambiados):

a. $\frac{5}{9}$ **b.** $7 : a$ **c.** $2\frac{1}{5}$ es a $\frac{3}{4}$

7 Determinar el valor de m en cada caso:

- **a.** $(m-1) : 3$ para que la razón tenga un valor igual a 2.
- **b.** $\frac{5}{2m+1}$ para que la razón tenga un valor de $\frac{3}{4}$

8 Resuelve los siguientes problemas:

- **a.** Una persona, al comprar una caja que contiene 30 manzanas, observa que seis salieron malas ¿Cuál es la razón entre el total de manzanas y las manzanas buenas? ¿Cuál es su valor?
- **b.** El valor de una razón es 3. El menor de los números tiene 10 unidades menos que el mayor ¿Cuáles son términos de la razón?

9 Una prueba de matemática tiene 20 preguntas, un alumno responde correctamente 12 de estas preguntas y omite dos. Escribe la razón entre:

- **a.** El número de preguntas incorrectas y el número de preguntas correctas.
- **b.** El número de preguntas correctas y el total de preguntas.
- **c.** El número de preguntas omitidas y el número total de preguntas.

10 Los lados de dos terrenos cuadrados miden respectivamente 15 m y 25 m. ¿En qué razón están sus áreas?

11 Las aristas de dos cubos miden respectivamente $8\ \text{m}$ y $12\ \text{m}$. ¿En qué razón están sus volúmenes?

12 En un curso, la razón entre el número de niños y de niñas es $3:2$. Si el número de niños es 18.

a. ¿Cual es el número de niñas?

b. Si se van cinco niñas y llegan tres niños, ¿en que razón quedan las niñas y los niños?

13 La escala de un diseño es la razón entre el dibujo y la correspondiente longitud real expresada ambas en la misma unidad.

a. ¿Cuál fue la escala utilizada en el diseño de una casa, si una longitud de $6\ \text{m}$ fue representada por una longitud de $3\ \text{cm}$?

b. El alto de una puerta es de $2{,}8\ \text{m}$ ¿Con cuántos centímetros en el dibujo queda representada?

14 La razón entre las edades de un padre y su hija es de $11:4$. Si la hija tiene 12 años ¿cuál es la edad del padre?

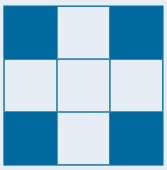
15 Valentina e Isidora ganaron en un negocio $\$1\,400\,000$. Como ambas no trabajaron lo mismo, se repartieron las ganancias en la razón $4{:}3$ ¿Qué cantidad de dinero le corresponde a Valentina?

16 Un estanque es llenado por una llave que bombea agua a razón de $120\ \text{L}$ cada tres segundos ¿Cuál es la capacidad del estanque si se llena en $120\ \text{s}$?

17 En la república de Haití, en 1970 la razón entre el número de kilómetros cuadrados de superficie y el número de habitantes estaba en la razón 1 es a 175. Si el número de habitantes en ese momento era de $4\,856\,250$ ¿Qué superficie tiene Haití?

18 La cantidad de litros de vino que contienen dos recipientes están en la relación 5 es a 8. Si agregamos 22 litros de vino a cada recipiente, la nueva relación será 7 es a 9 ¿Cuántos litros de vino tenía al inicio cada recipiente?

19 Las baldosas cuadradas del piso de la cocina de Daniela tienen el siguiente patrón:



a. ¿Cuál es la razón de baldosas blancas a baldosas de color del patrón?

b. El piso de cocina entera contiene $1\,000$ baldosas de color ¿Cuántas baldosas blancas tendrá?

c. Si un piso con este patrón tuviera $2\,880$ baldosas en total ¿Cuántas baldosas blancas tendría?

20 Encontrar el número que falta utilizando proporciones (recuerda que si $\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \Rightarrow a\cdot d=b\cdot c$).

a. $\frac{x}{4}=\frac{6}{8}$

b. $2\frac{1}{3}:\frac{5}{2}=x:\frac{8}{7}$

c. $\frac{3{,}\overline{2}}{x}=\frac{0{,}\overline{5}}{2{,}8}$

21 Qué valor debe tomar k en cada caso para que exista proporción.

a. $k+3:5=k:3$

b. $\frac{k-2}{k+2}=\frac{k-3}{k+2}$

22 Un paquete de 500 gramos de café se vende a $\$\ 4\ 000$ ¿A qué precio se debe vender un paquete de 450 gramos del mismo café?

23 Dos analgésicos A y B han sido experimentados en dos grupos de personas de edades y situaciones médicas similares, como remedio para la jaqueca.

Se han obtenido los datos siguientes:

	mejoran	no mejoran
Analgésico A	40	60
Analgésico B	90	210

a. ¿Son igualmente efectivos los dos analgésicos?

b. ¿Cuántos pacientes debieran mejorar con el tratamiento B para que sea igual de efectivo que el A?



24 Montserrat y Sofía deben entregar su trabajo de lenguaje, escrito en el computador. Han demorado 3 horas en digitar 16 páginas del trabajo, en total son 24 paginas y les queda una hora y media de trabajo, ¿lograrán entregarlo a tiempo?

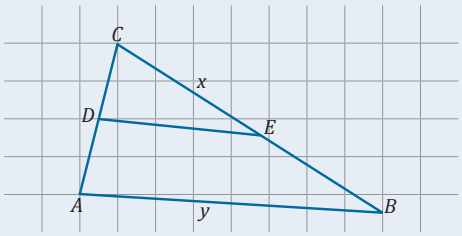
25 En una fábrica de gaseosas, una bebida de 2 litros es llenada en 30 segundos. ¿Cuánto tiempo demorará en llenarse una botella de 3 litros?

26 Se tiene un trazo de 52 cm. Si se prolonga de tal forma que el trazo dado sea a la prolongación como 4 : 9 ¿Cuánto mide la prolongación?

27 Manuel estaba intrigado con la altura de su edificio y decide poner en práctica sus conocimientos sobre triángulos semejantes. Para ello, mide la sombra del edificio obteniendo 18 m, luego mide la sombra de un árbol de 2 m obteniendo un valor de 2,5 m ¿Qué valor obtuvo Manuel para la altura su edificio?

28 Un segmento de 20 cm se divide en tres partes que son proporcionales a 3,2 y 5. Determina el valor de cada segmento.

29 En el triángulo ABC, se tiene que: $\overline{AC} = 4$ cm; $\overline{DC} = 2$ cm; $\overline{DE} = 4$ cm; $\overline{CB} = 6$ cm; $\overline{CE} = x$; $\overline{AB} = y$ y además $\overline{DE} \;//\; \overline{AB}$.

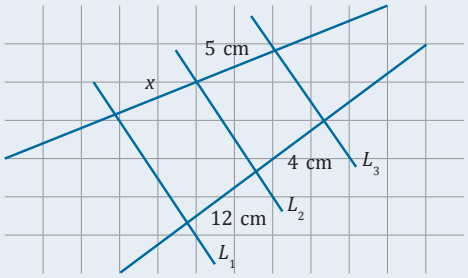


Determina:

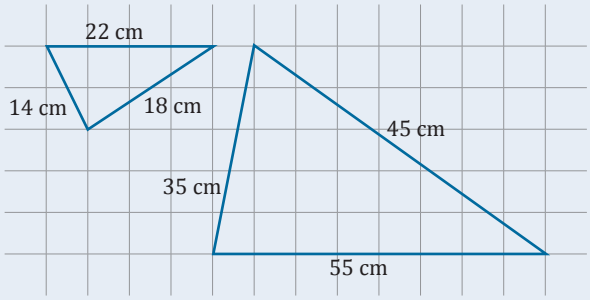
a. El valor de x

b. El valor de y

30 Las rectas L_1, L_2 y L_3 son paralelas. Determinar la longitud de x.



31 Dado los triángulos de la figura, señala:



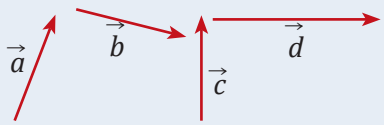
a. Si son semejantes.

b. Determina el valor de la razón de semejanza.

c. ¿En qué razón están los perímetros de ambos triángulos?

32 Los lados de un triángulo miden 70 cm; 90 cm y 105 cm. ¿Cuánto mide el lado más largo de un triángulo semejante con él y cuyo lado menor mide 20 cm?

33 A partir de los siguientes vectores:



Realiza las siguientes operaciones y denota el vector resultante como $\vec{r}$:

a. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d}$

b. $\vec{a} - \vec{b} - \vec{c} + \vec{d}$

34 Realiza las siguientes sumas y denota el vector resultante como $\vec{r}$:

a. $\vec{a} + \vec{c}$ y $\vec{c} + \vec{a}$ ¿Las longitudes de los vectores obtenidos tienen igual o distinta medida?

b. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}$ y $\vec{b} + \vec{a} + \vec{c}$ ¿Las longitudes de los vectores obtenidos tienen igual o distinta medida?

c. $\vec{a} + \vec{d} + \vec{c} + \vec{b}$ y $\vec{c} + \vec{d} + \vec{b} + \vec{a}$ ¿Las longitudes de los vectores obtenidos tienen igual o distinta medida?

d. ¿Qué propiedad cumple la adición de vectores, de acuerdo a las sumas realizadas anteriormente?

Plano cartesiano y sus elementos... volvamos a mirarlo

En esta sección aprenderás

Cómo se define el plano cartesiano, cuáles son sus elementos principales y sus características

Desarrollarás las siguientes habilidades:

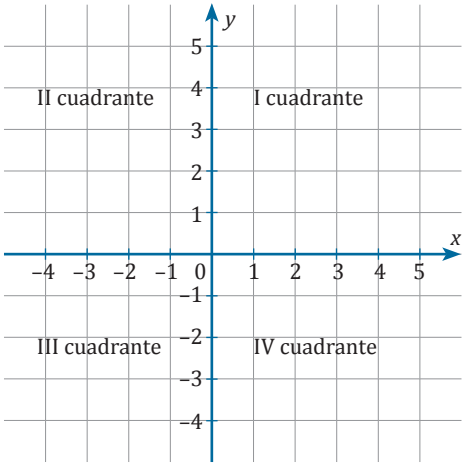
- Identificar, calcular, interpretar y resolver problemas.

Habilidades por actividad:

- Identificar y calcular: 1 – 2 – 4
- Interpretar y resolver problemas: 3 – 5 – 6 – 7

Para introducirte en esta nueva unidad, es necesario que recuerdes y refuerces formalmente algunos de los conocimientos aprendidos en años anteriores. Para ello volveremos a recordar algunas de las características del plano cartesiano.

Definiremos un plano cartesiano como un plano que contiene un sistema de referencia que está formado por dos rectas numéricas perpendiculares. Ellas se intersectan en un punto llamado origen, denotado por la forma O. Los números positivos de ambas rectas van hacia la derecha y hacia arriba, y los negativos a la izquierda y hacia abajo. Como en la siguiente figura.

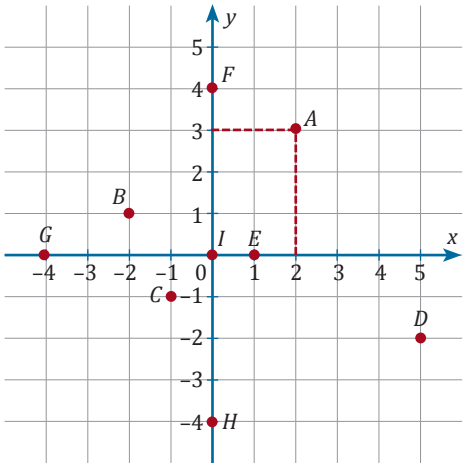


Si te fijas, el plano queda dividido en 4 partes llamadas cuadrantes, los que se nombran con números romanos y en sentido contrario a los punteros del reloj, empezando por aquel cuadrante que queda por encima del eje horizontal y a la derecha del eje vertical. Los ejes coordenados se llaman eje de las abscisas (x) y eje de las ordenadas (y). Los ejes no pertenecen a ningún cuadrante.

Como el plano está formado por puntos, la idea en un plano cartesiano es poder determinar la ubicación de un punto de él con precisión. Para esto, nombraremos un punto del plano según su posición con respecto al origen por las dos coordenadas que lo forman, la primera será la de las abscisas (x) y la segunda la de las ordenadas (y), así cada punto estará definido por el par ordenado (x, y).

Mira el siguiente ejemplo:

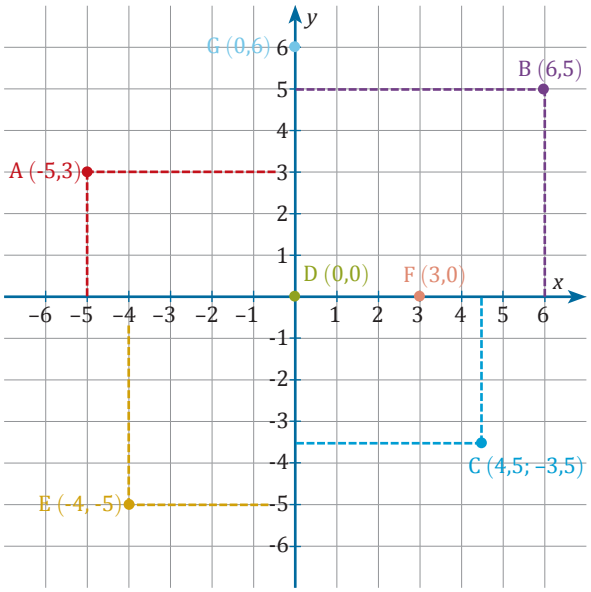




El punto A tiene coordenadas $(2,3)$, para ubicarlo en el plano debes moverte 2 unidades hacia la derecha sobre el eje x con respecto al origen y luego desde el 2 ubicado sobre el eje x debes subir 3 unidades en forma paralela al eje y. Así, las coordenadas del resto de los puntos son B: $(-2,1)$, C: $(-1,-1)$, D: $(5,-2)$, E: $(1,0)$, F: $(0,4)$, G: $(-4,0)$, H: $(0,-4)$ e I: $(0,0)$, este último se llama origen del plano cartesiano.

Si te fijas, podemos generalizar algunas ideas aquí, con respecto a los puntos y los cuadrantes, dado que en ellos se cumplen ciertas regularidades.

- Todo punto en el I cuadrante tiene ambas coordenadas positivas.
- Todo punto en el II cuadrante tiene las abscisas (coordenadas de las x) negativas y las ordenadas (coordenadas de las y) positivas.
- Todo punto en el III cuadrante tiene ambas coordenadas negativas.
- Todo punto en el IV cuadrante tiene las abscisas positivas y las ordenadas negativas.
- Todo punto que está en el eje de las abscisas tiene ordenada cero.
- Todo punto que está en el eje de las ordenadas tiene abscisa cero.



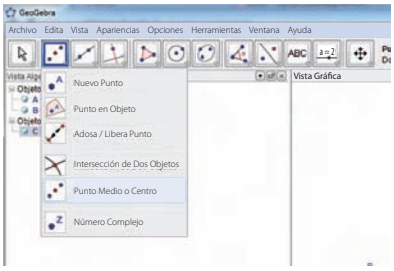
Para entretenerse

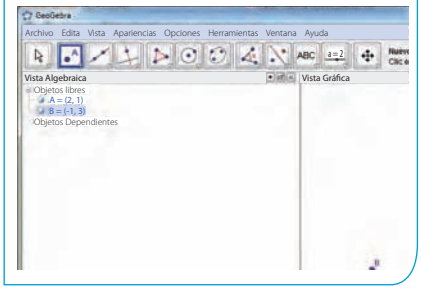
En la siguiente página de Internet, ubica puntos en el sistema de coordenadas cartesianas y descubre si has acertado.

http://www.sectormatematica.cl/flash/coordenadas.swf

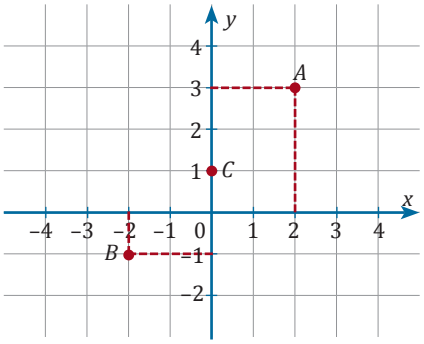
Para saber más

Como ya aprendiste en la unidad 1, el programa geogebra nos ayuda con algunas representaciones geométricas. En este caso, podemos determinar el punto medio entre dos puntos. Para ello ubica los puntos dados (extremos del segmento) y luego haz clic en el ícono de punto medio, luego haz clic en ambos puntos y aparecerá el punto medio graficado y sus coordenadas en la ventana de la izquierda.





Otra noción que debes tener en cuenta es la idea de que si tienes dos puntos en un plano, siempre puedes encontrar el punto que está al medio, en el siguiente dibujo este punto se denota como C.



Si te fijas, como es lógico, la abscisa del punto C se encontrará en la mitad del segmento que une las abscisas de los puntos A y B (sobre el eje x), o sea en la mitad entre -2 y 2, es decir, será 0. Lo mismo para las ordenadas, y entonces la ordenada de C será la mitad del segmento que une -1 y 3 en el eje y, es decir, 1. Con lo que C tendrá coordenadas $(0,1)$. Si podemos generalizar, y llamamos al punto $A\ (x_1, y_1)$ y a $B\ (x_2, y_2)$, el punto medio del trazo $\overline{AB}$, estará dado por la semi suma de las coordenadas respectivas, o sea, por

$$M_{\overline{AB}} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$$

Por ejemplo, si queremos calcular el punto medio del segmento que une los siguientes puntos hacemos:

a. Si $A = (2,5)$ y $B = (-3, -9)$, entonces el punto medio del segmento AB será

$$M_{\overline{AB}} = \left(\frac{2 + (-3)}{2}, \frac{5 + (-9)}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{4}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}, -2\right)$$

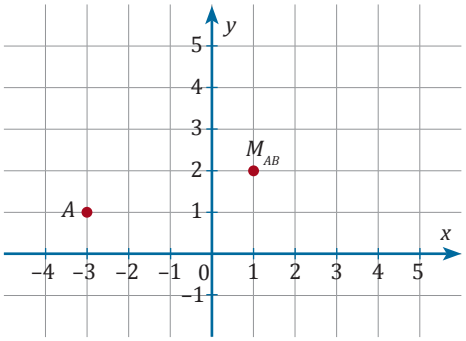
b. Si $A = \left(\frac{5}{3}, -\frac{2}{5}\right)$ y $B = \left(\frac{7}{3}, -1\right)$,

entonces el punto medio del segmento AB será

$$M_{\overline{AB}} = \left(\frac{\frac{5}{3} + \frac{7}{3}}{2}, \frac{-\frac{2}{5} - 1}{2}\right) = \left(\frac{4}{2}, \frac{-\frac{7}{5}}{2}\right) = \left(2, -\frac{7}{10}\right)$$

Realizaremos otro ejemplo:

A partir del siguiente dibujo determina las coordenadas del punto B, ubicado en el I cuadrante.



Sabemos que $M_{AB} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$ y conocemos las coordenadas de los puntos $A = (-3,1)$ y $M_{AB} = (1,2)$, por lo que podemos hacer: $(1,2) = \left(\frac{-3 + x_2}{2}, \frac{1 + y_2}{2}\right)$, determinando así un sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{-3 + x_2}{2} \\ 2 &= \frac{1 + y_2}{2} \end{aligned}$$

De esta manera, obtenemos: $x_2 = 5$ e $y_2 = 3$. Así las coordenadas de este punto son: $B = (5,3)$.

- Un plano cartesiano es un sistema de referencia que está formado por dos rectas numéricas, perpendiculares, que se intersectan en un punto llamado origen de coordenadas $(0,0)$.
- El plano está dividido en 4 cuadrantes, los que se nombran con números romanos y en sentido contrario al movimiento de los punteros del reloj.
- Los ejes coordenados x e y no pertenecen a ningún cuadrante.
- Si x e y son números positivos, entonces:
  - (x, y) pertenece al I cuadrante
  - $(-x, y)$ pertenece al II cuadrante
  - $(-x, -y)$ pertenece al III cuadrante
  - $(x, -y)$ pertenece al IV cuadrante
- Todos los puntos que pertenecen al eje x son de la forma $(x, 0)$, con x perteneciente a los números reales.
- Todos los puntos que pertenecen al eje y son de la forma $(0, y)$, con y perteneciente a los números reales.
- Si se tienen los puntos A: (x_1, y_1) y B: (x_2, y_2), el punto medio del trazo $\overline{AB}$, será $M_{\overline{AB}} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Links de interés

La geometría que usualmente estudiamos está basada en planos, pero ¿es el mundo en que vivimos plano? Algunos matemáticos han pensado en esto y han meditado que si nuestro mundo es redondo, pues la tierra en que vivimos es esférica, entonces, debería existir una geometría que explicara esto. Ellos han desarrollado la llamada geometría esférica... Para averiguar más, puedes visitar el siguiente *link*:

http://ocw.upm.es/geometria-y-topologia/geometria-de-ayer-y-hoy/contenidos/unidad4/unidad42.htm

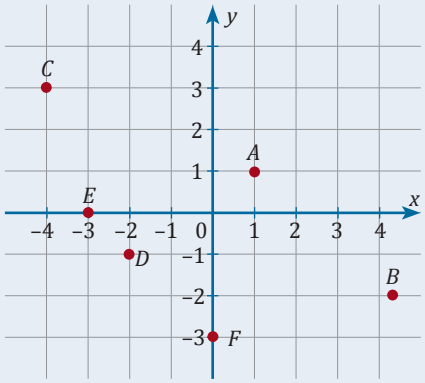
Trabaja

Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios. No olvides chequear tus respuestas en el solucionario.

1 Ubica en un plano cartesiano los puntos:

A: $(1,3)$; B: $(-2,5)$; C: $(3,-2)$;
D: $(-3,-1)$; E: $(-1,0)$; F: $(0,-3)$

2 Dados los puntos del plano, determina las coordenadas de cada uno.



3 Dados los puntos A: $(m-3,7)$ y B: $(-3,2m-1)$, qué valor debe tomar m para que:

a. El punto A se encuentre sobre el eje y.

b. El punto B se encuentre sobre el eje x.

c. El punto A pertenezca al II cuadrante.

4 Para cada par de puntos, determina su punto medio.

a. A: $(3,5)$ y B: $(7,-3)$

b. C: $\left(2\frac{1}{3},2\right)$ y D: $\left(\frac{5}{3},\frac{3}{4}\right)$

c. E: $(-0,\bar{3}\ ;-8)$ y F: $\left(-\frac{1}{2};3,\overline{02}\right)$

5 Se sabe que el punto medio entre dos puntos A y B es $M_{\overline{AB}}$: $(6,7)$. Si A: $(3,2)$, ¿cuáles son las coordenadas del punto B?

6 Cuando Miriam vio la tarea de su hermano pensó que aquello era muy difícil. Sin embargo, después de que él le explicó, ella se atrevió a ayudarlo a calcular el valor de la incógnita en cada uno de los siguientes casos:

a. Los extremos de un segmento son los puntos $(2,1)$ y $(4,2)$, su punto medio (x,y).

b. Los extremos de un segmento son los puntos $(3,b)$ y $(-a,1)$, su punto medio $(-2,5)$.

c. Los extremos de un segmento son los puntos (a,b) y $(6,4)$, su punto medio $(8,-3)$.

d. Los extremos de un segmento son los puntos $(4,2)$ y $(-9,0)$, su punto medio (a,b).

e. Los extremos de un segmento son los puntos $(a,3)$ y $(-5,b)$, su punto medio $(-3,-4)$.

7 A Genaro su profesor le pidió que escribiera, usando variables distintas para las coordenadas x e y, dos puntos: A y B. Estos son los puntos que escribió Genaro: A: $(a,2b)$ y B: $(3b,-5a)$. Entonces, su profesor le pidió que determinara, para cada uno de los siguientes casos, los valores de a y b. A Genaro le costó un poco hacerlo, pero tú los resolverás más rápido…

a. El punto medio del trazo de extremos A y B es $(2,-1)$.

b. A es el punto medio del trazo de extremos B y $(-5,-7)$.

c. B es el punto medio del trazo de extremos A y $(3,-9)$.

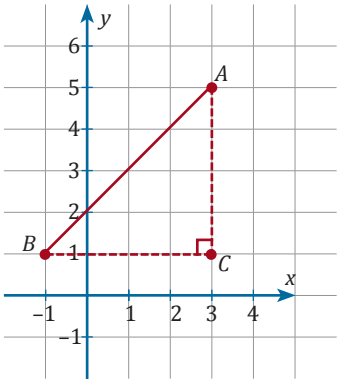


Distancia entre dos puntos y sus aplicaciones

A continuación, veremos un conocimiento que no es nuevo, pero que ha sido revisado desde un punto de vista distinto durante la unidad de números complejos. Sin embargo, es importante por dos razones: lo utilizaremos para abordar bajo otra mirada algunos temas de geometría y preparará el camino para la próxima unidad que abordaremos.

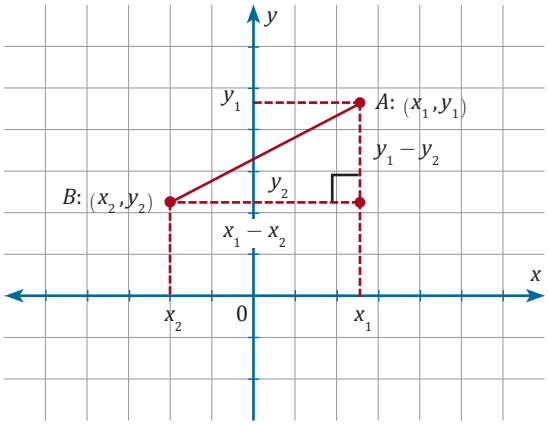
Estos conocimientos pertenecen a una rama de la matemática llamada geometría analítica, que nos ayuda a trabajar la geometría usando el álgebra. El desarrollo de este tipo de geometría permitió grandes avances a través de los años.

Ubiquemos dos puntos en el plano $A = (3,5)$ y $B = (-1,1)$ y determinemos la medida del segmento $\overline{AB}$.



Fíjate que en el dibujo hemos determinado también el punto C, dado que esto nos facilitará determinar el valor de algunas medidas.

Para obtener la medida del cateto $\overline{BC}$ del triángulo rectángulo formado, podemos contar cuántas unidades hay desde el -1 al 3. De forma equivalente, es posible efectuar la resta entre 3 y -1. Es así como es necesario determinar las abscisas de los puntos C y B. Debes hacer lo mismo con las ordenadas de los puntos A y C para obtener la medida del cateto $\overline{AC}$. Dibujaremos lo anterior:



En esta sección aprenderás

Cómo se calcula la distancia entre dos puntos dados del plano cartesiano y cuáles son sus aplicaciones a la geometría

Desarrollarás las siguientes habilidades:

- Identificar, calcular, interpretar, resolver problemas, analizar, sintetizar, investigar y comunicar.

Habilidades por actividad:

- Identificar y calcular: 1 – 2 – 5 – 6 – 7 – 8 – 9a – 9b – 9d – 9e – 10a – 10b – 10c – 10e – 10f
- Interpretar y resolver problemas: 1 – 2a – 2b – 2c – 2e – 2f – 3 – 4 – 5 – 6 – 7 – 8b – 8c – 8d – 8e. 3 – 4 – 9c – 10d
- Analizar y sintetizar: 2d – 8a. 9f
- Investigar y comunicar: 2g

Si se tienen dos puntos de coordenadas A: (x_1, y_1) y B: (x_2, y_2), al aplicar el teorema de Pitágoras al triángulo formado en la figura, se tendrá que:

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (d_{\overline{AB}})^2$$

$$\Rightarrow \; d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

La fórmula encontrada, nos permite calcular la distancia entre dos puntos cualesquiera del plano cartesiano. Como las diferencias de las coordenadas de las abscisas y de las ordenadas están elevadas al cuadrado, el resultado será positivo. Entonces no importará si a las coordenadas del punto A les llamamos x_1 e y_1 o las del punto B. Haremos algunos ejemplos.

Recordar y archivar

Recuerda que para resolver ejercicios del tipo $(4 - 6)^2$, conviene restar primero y luego elevar al cuadrado.
Así: $(4 - 6)^2 = (-2)^2 = 4$.

- Si quisieras, podrías resolver este tipo de ejercicios como el desarrollo de un cuadrado de binomio, esto sería:
  $(4 - 6)^2 = 4^2 - 2 \cdot 4 \cdot 6 + 6^2$
  $= 16 - 48 + 36 = 4$
- Nota también que
  $(6 - 4)^2 = 2^2 = 4$, por lo tanto, $(4 - 6)^2 = (6 - 4)^2$

1 Calcula la distancia entre los puntos A:$(8,9)$ y B:$(7,4)$

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(8 - 7)^2 + (9 - 4)^2} = \sqrt{1^2 + 5^2} = \sqrt{1 + 25} = \sqrt{26}$$

2 Calcula el perímetro del triángulo de vértices A:$(-3, -5)$, B:$(3, -2)$ y C:$(-2,4)$

Si bien es cierto que podemos calcular esto sin necesidad de ubicar los puntos en el plano, lo haremos para que sea más claro el desarrollo. (Recuerda que un buen dibujo ayuda a resolver mejor los problemas)

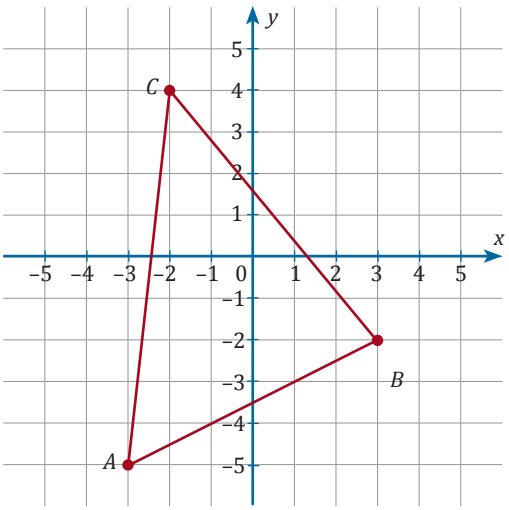
Para calcular el perímetro del ΔABC, debemos sumar las medidas de los lados, es decir, las distancias respectivas:

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(-3 - 3)^2 + (-5 - (-2))^2} = \sqrt{36 + 9} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

$$d_{\overline{BC}} = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (-2 - 4)^2} = \sqrt{25 + 36} = \sqrt{61}$$

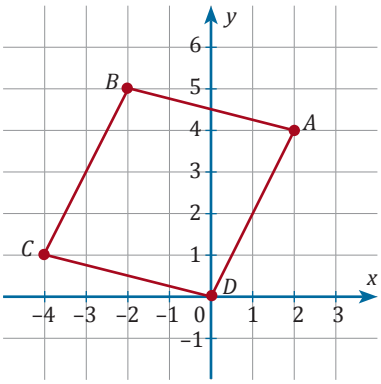
$$d_{\overline{AC}} = \sqrt{(-3 - (-2))^2 + (-5 - 4)^2} = \sqrt{1 + 81} = \sqrt{82}$$

$$\therefore \; P_{\Delta ABC} = (3\sqrt{5} + \sqrt{61} + \sqrt{82})\ \text{u}$$



3 Verifica que el cuadrilátero que tiene por extremos los puntos $A{:}(2,4)$, $B{:}(-2,5)$, $C{:}(-4,1)$ y $D{:}(0,0)$ es un paralelogramo.

Ubiquemos los puntos en el plano para tener un buen dibujo de la situación:



Para verificar que es un paralelogramo, deberíamos comprobar que sus lados opuestos tienen la misma medida. Calculemos las distancias correspondientes:

$$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(2-(-2))^2+(4-5)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$d_{\overline{BC}} = \sqrt{(-2-(-4))^2+(5-1)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

$$d_{\overline{CD}} = \sqrt{(-4-0)^2+(1-0)^2} = \sqrt{16+1} = \sqrt{17}$$

$$d_{\overline{DA}} = \sqrt{(0-2)^2+(0-4)^2} = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

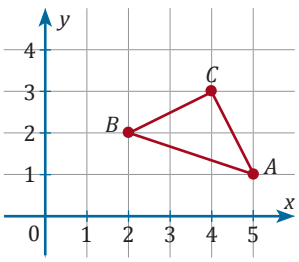
Como la medida de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son iguales y también lo son las medidas de $\overline{BC}$ y $\overline{AD}$, entonces el cuadrilátero es efectivamente un paralelogramo.

4 Los vértices de un triángulo son los puntos $A{:}(5,1)$, $B{:}(2,2)$ y $C{:}(4,3)$, comprueba que:

a. El triángulo ABC es isósceles.

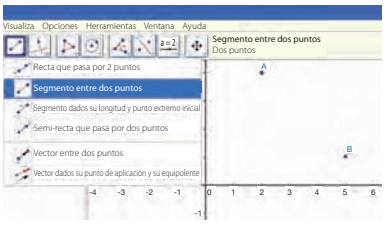
b. Las transversales de gravedad trazadas desde los vértices opuestos a los lados congruentes, tienen la misma medida.

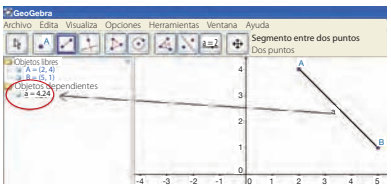
Ubiquemos los puntos en el plano:



Para saber más

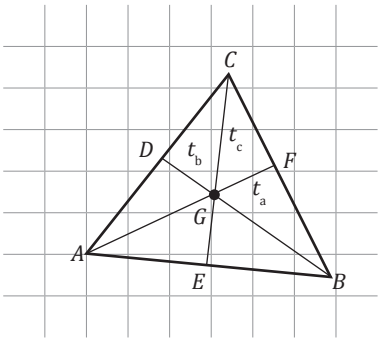
También puedes usar el programa Geogebra para estimar la distancia de un trazo. Para ello debes colocar los dos puntos que son los extremos del trazo y luego hacer clic en el ícono de segmento por dos puntos. Luego hacer clic en los puntos y aparecerá dibujado el trazo correspondiente. A la izquierda de la pantalla, verás la medida aproximada a dos decimales del trazo dibujado. Observa:





Recordar y archivar

La transversal de gravedad es el segmento que une el punto medio de un lado del triángulo con el vértice del lado opuesto. Hay tres transversales de gravedad correspondientes a cada lado (t_a, t_b y t_c), y el punto de intersección de la tres transversales de gravedad se llama baricentro (G)o centro de gravedad.



a. Para comprobar que es un triángulo isósceles, dos de sus lados deben ser de igual medida, calculemos entonces la medida de sus lados:

$d_{\overline{AB}} = \sqrt{(5-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{9+1} = \sqrt{10}$

$d_{\overline{BC}} = \sqrt{(2-4)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$

$d_{\overline{CA}} = \sqrt{(4-5)^2 + (3-1)^2} = \sqrt{1+4} = \sqrt{5}$

Como las medidas de $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$ son iguales, entonces el triángulo es isósceles de base $\overline{AB}$

b. Para esta segunda comprobación, debemos recordar que las transversales de gravedad son aquellos trazos dibujados desde un vértice al punto medio del lado opuesto. Entonces, para comprobar lo pedido debemos primero determinar los puntos medios de los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, y luego calcular la medida de las transversales de gravedad correspondientes:

$M_{\overline{AC}} = \left(\frac{5+4}{2}, \frac{1+3}{2}\right) = \left(\frac{9}{2}, 2\right)$, $M_{\overline{BC}} = \left(\frac{2+4}{2}, \frac{2+3}{2}\right) = \left(3, \frac{5}{2}\right)$.

Entonces:

- La transversal trazada desde el vértice B es el segmento de extremos $(2,2)$ y $\left(\frac{9}{2}, 2\right)$, por lo tanto, la medida es ella es

  $t_b = \sqrt{\left(2 - \frac{9}{2}\right)^2 + (2-2)^2} = \sqrt{\frac{25}{4} + 0} = \frac{5}{2}$

- La transversal trazada desde el vértice A es el segmento de extremos $(5,1)$ y $\left(3, \frac{5}{2}\right)$, por lo tanto, la medida de ella es

  $t_a = \sqrt{(5-3)^2 + \left(1 - \frac{5}{2}\right)^2} = \sqrt{4 + \frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{25}{4}} = \frac{5}{2}$

  Por lo que hemos comprobado lo que se pedía.

5 Marcelo había cuadriculado su cartulina para hacer el dibujo de la tarea de arte para la próxima semana. Decidió valerse del plano cartesiano que había estudiado. Colocó en el centro de ella el origen, norte, sur, este y oeste a los ejes. Marcó un punto en la cartulina como A:$(6,2)$, pero ahora tenía un problema, necesitaba colocar otro punto que estuviera a 12 unidades de A y que estuviera alejado 2 unidades hacia el este desde el centro. ¿Podría encontrar aquel punto?

Con la información dada, sabemos que el punto buscado por Marcelo tiene coordenadas $(2, y)$ y que la distancia entre este punto y el punto A, debe ser 12 unidades. Si planteamos la fórmula de distancia, podremos encontrar el valor de y, con esto encontraremos el punto pedido...

Si A:$(6,2)$ y B:$(2, y)$, entonces, $12 = \sqrt{(6-2)^2 + (2-y)^2}$, si elevamos al cuadrado tendremos que:

$144 = (6-2)^2 + (2-y)^2$

$144 = 16 + 4 - 4y + y^2$



Pero esta es una ecuación cuadrática. Resolvámosla...

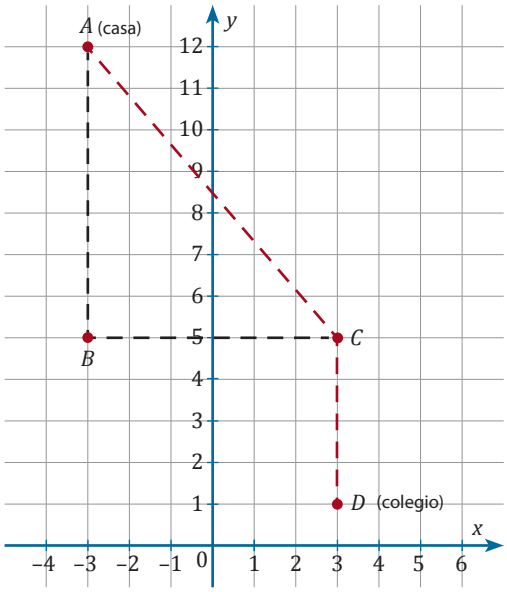
$y^2 - 4y - 124 = 0$

$y = \frac{4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-124)}}{2} = \frac{4 \pm 16\sqrt{2}}{2} = 2 \pm 8\sqrt{2}$

Por lo tanto, hay dos resultados posibles para y: $y_1 = 2 + 8\sqrt{2}$ e $y_2 = 2 - 8\sqrt{2}$, ¿cómo saber si ambos son solución al problema?

Según sus datos, no existían restricciones para la coordenada y, ambos valores indican que habrán dos puntos que cumplan con lo pedido, uno en el I cuadrante (donde y será positivo) y otro en el IV cuadrante (donde y será negativo). Por lo tanto, las soluciones son los puntos $(2,\ 2 + 8\sqrt{2})$ y $(2,\ 2 - 8\sqrt{2})$

6 Carolina camina 17 cuadras desde su casa a su colegio, siguiendo el camino $A - B - C - D$ de la figura, pero ella cree que sería más corto por el camino $A - C - D$, ¿Qué le recomendarías?



En este dibujo cada cuadra corresponde a una unidad de cada eje, así la ruta seguida por Carolina corresponde a 17 unidades. Por otro lado al seguir el camino $A-C-D$, recorre 4 cuadras o unidades entre los puntos C y D. Para determinar la distancia entre A y C, utilizamos la fórmula para calcular la distancia entre ellos, es decir, $d_{\overline{AC}} = \sqrt{(-3-3)^2 + (12-5)^2} = \sqrt{(-6)^2 + (7)^2} = \sqrt{36 + 49} = \sqrt{85} \approx 9$

Así, la distancia entre A y D, al realizar la ruta $A - C - D$ es de $9 + 4$ unidades, lo que equivale a 13 unidades. ¿Qué camino le recomendarías?

Si A: (x_1, y_1) y B: (x_2, y_2), son puntos del plano, entonces la distancia entre A y B, o la medida del segmento $\overline{AB}$ se calcula mediante la fórmula $d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

Trabaja

Resuelve con tu grupo los siguientes ejercicios. No olvides corregirlos, chequeando las respuestas en el solucionario.

1 Calcula la distancia entre los siguientes pares de puntos:

a. $(3,5)$ y $(-3,7)$
b. $(0,1)$ y $(-3,0)$
c. $(2,-8)$ y $(-7,-5)$
d. $\left(-\frac{1}{3},-\frac{1}{5}\right)$ y $\left(-\frac{7}{8},\frac{1}{9}\right)$
e. $(0,\overline{5}\,;\,2,3)$ y $(2,-1)$

2 Los siguientes puntos son los vértices de un polígono, A: $(2,1)$, B: $(1,4)$, C: $(-2,2)$, D: $(-4,0)$ y E: $(-3,3)$. Determina:

a. La longitud de $\overline{BC}$.
b. La longitud de $\overline{DE}$.
c. La medida de la diagonal $\overline{AC}$.
d. La medida de la diagonal $\overline{DA}$.
e. La longitud del lado $\overline{CD}$.

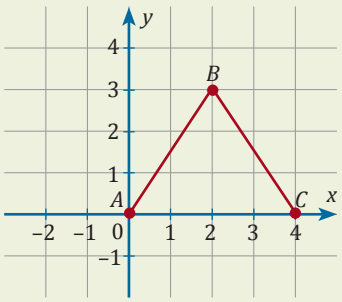
3 Determina el valor de cada una de las incógnitas para cada una de las siguientes situaciones:

a. La distancia entre $(5,2)$ y $(a,3)$ es $\sqrt{12}$.
b. La medida del trazo de extremos $(-3,b)$ y $(4,4)$ es 5.
c. La medida del trazo que une los puntos $(2,1)$ y $(a,2a)$ es el doble de la medida del trazo que une los puntos $(5,1)$ y $(-1,-1)$.
d. La distancia entre $(b,-b)$ y $(3b,2b)$ es 1.
e. La distancia entre $(2,5a)$ y $(a,3)$ es la misma que la distancia entre $(2,-2)$ y $(-3,3)$.

4 Usando el cálculo de distancia entre dos puntos, verifica que:

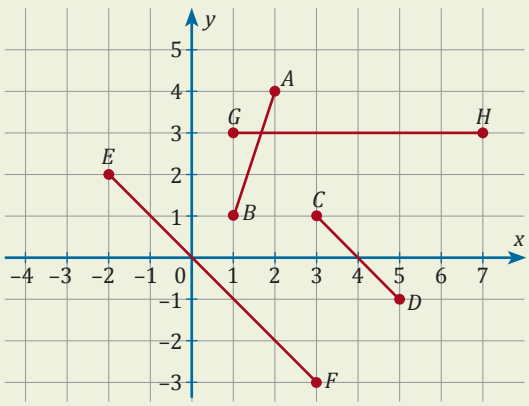
a. Los puntos A: $(0,0)$, B: $(1,2)$ y C: $(2,4)$ son colineales.
b. El triángulo de vértices A: $(-2,2)$, B: $(2,1)$ y C: $\left(1,\frac{11}{2}\right)$ es isósceles.
c. El cuadrilátero de vértices A: $(-3,4)$, B: $(-1,3)$, C: $(1,4)$ y D: $(-1,5)$ tiene todos sus lados de igual medida.
d. Si en el triángulo de vértices A: $(-2,0)$, B: $(2,0)$ y C: $(0,4)$ se trazan las transversales de gravedad a los lados $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, estas son de igual medida
e. El triángulo de vértices A: $(-1,2)$, B: $(8,0)$ y C: $(0,4)$ es rectángulo en C.

5 Para el triángulo de la figura, determina:



a. La distancia $\overline{AC}$.
b. La distancia $\overline{AB}$.
c. La distancia $\overline{BC}$.
d. El perímetro de la figura.

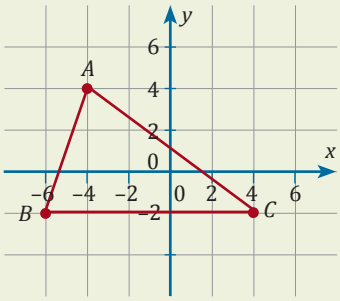
6 Dado los segmentos de la figura, determina:



a. Coordenadas de E, D y H.
b. La distancia $\overline{CD}$ y $\overline{AB}$.
c. El punto medio de $\overline{HG}$ y $\overline{FC}$.

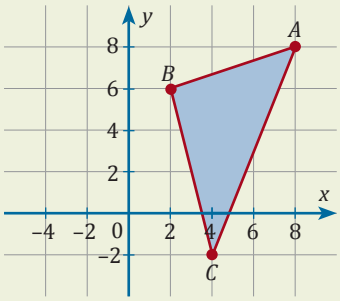


7 Para el triángulo de la figura, determina:



a. Su perímetro **b.** Su área

8 La transversal de gravedad de un triángulo es el trazo que une un vértice con el punto medio del lado opuesto. Según esto, para el triángulo de la figura, determina la medida de:

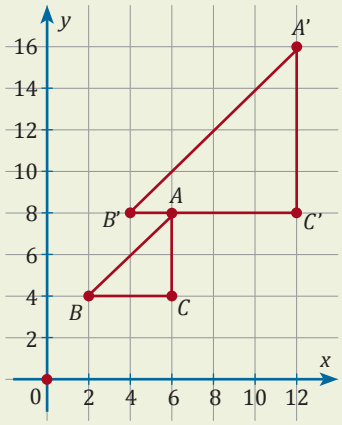


a. La transversal de gravedad trazada desde el vértice A.

b. La transversal de gravedad trazada desde el vértice B.

c. La transversal de gravedad trazada desde el vértice C.

9 Dados los triángulos ABC y $A'B'C'$ de la figura, determina:



a. El perímetro de ambos.

b. El área de ambos.

c. La razón de los tres lados homólogos.

d. La razón entre los perímetros.

e. La razón entre las áreas.

f. ¿Qué conclusión puedes sacar de los puntos **c.** , **d.** y **e.**?

10 Dado los puntos $A(2,1)$; $B(6,-1)$ y $C(-2,-1)$. Determina:

a. $d_{\overline{AB}}$ $d_{\overline{BC}}$ y $d_{\overline{AC}}$

b. El punto medio M del trazo BC.

c. La distancia entre A y M.

d. ¿Qué tipo de triángulo se forma?

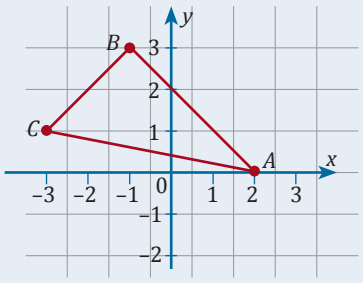
e. El perímetro del triángulo.

f. El área del triángulo.

Trabaja

Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios. No olvides chequear tus respuestas en el solucionario.

1 Eugenio ha cuadriculado el plano donde hará su maqueta y en él ha dibujado el siguiente triángulo:



Su profesor de matemática ha mirado el bosquejo y le ha dicho que puede demostrar que en él se cumple que:

a. $(\overline{AB})^2 + (\overline{BC})^2 = (\overline{AC})^2$

b. Si se determina el punto D, como el punto medio de $\overline{AC}$, se tendrá que $\overline{AD} = \overline{DB}$.

Haz tú también los desarrollos para comprobar estas afirmaciones.

2 Asunción leyó en algún sitio de Internet que si se construía un polígono cualquiera y se determinaban los puntos medios de sus lados, entonces, el polígono resultante de unir esos puntos medios tendría exactamente la mitad del perímetro y la cuarta parte del área del polígono original. Ella, para comprobar esto, tomó los puntos A:$(1{,}5)$, B: $(-2{,}3)$, C: $(-1,-3)$, D: $(4,-4)$ y E: $(5{,}1)$. Ahora, responde tú:

a. ¿Cuál es el perímetro del polígono $ABCDE$?

b. ¿Cuáles son los puntos medios de los lados del polígono?

c. ¿Cuál es el perímetro del polígono que resulta de unir dichos puntos medios?

d. ¿Se cumple lo que leyó Asunción?

e. Realiza nuevamente estos pasos con un nuevo polígono determinado por los puntos medios de los lados del polígono menor, ¿se cumple lo enunciado para los perímetros?

f. Calcula el área de ambos polígonos: $ABCDE$ y el que resulta de unir los puntos medios, ¿se cumple lo enunciado respecto de las áreas?

g. ¿En qué tipo de polígonos se cumple este enunciado?

3 Cristóbal era uno de los alumnos de su curso al que le gustaba la matemática. Un día hizo una apuesta con su profesor, debía contestar a las siguientes preguntas, a partir de dos puntos dados en el plano, A: $(2{,}1)$ y B: $(4{,}5)$. Ayuda a Cristóbal a ganar su apuesta:

a. Determina un punto C, en el II cuadrante, de modo que el ΔABC que se forma sea equilátero.

b. Encuentra los puntos medios de los lados del triángulo ABC.

c. Determina la medida de la bisectriz del ángulo $\measuredangle ABC$.

d. Determina la medida de la altura trazada con respecto al lado $\overline{CB}$.

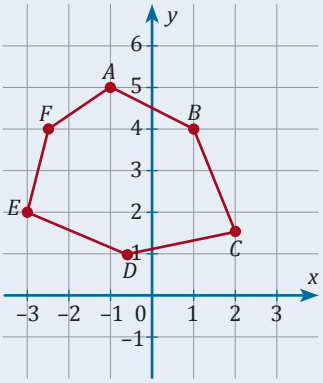
e. Determina la medida de la transversal de gravedad trazada desde el vértice C.

f. Determina la medida de las medianas del triángulo ABC.

g. Determina el perímetro del triángulo ABC.

h. Determina el área del triángulo ABC.

4 Mauricio trabaja en una empresa que construye piscinas en casas particulares. Él ha recibido una petición para una piscina hexagonal y ha hecho el siguiente plano a escala $1\text{ cm} : 100\text{ cm}$, como muestra la figura:



Él debe determinar los siguientes datos para hacer el presupuesto, ayúdalo en sus cálculos (aproxima a la centésima tus respuestas):

a. El perímetro de la piscina.

b. La medida de la diagonal $\overline{BE}$.

c. La medida de la diagonal $\overline{CF}$.

d. El área del hexágono.

e. Si la piscina debe tener $1{,}20\text{ m}$ de profundidad, ¿cuál será su capacidad en litros?

f. Si Mauricio debe colocar la piscina usando un rectángulo como marco de esta, ¿cuáles son las dimensiones del menor rectángulo posible de anclaje?

g. Si el terreno entre la piscina y el rectángulo de referencia (de la pregunta anterior) debe estar plantado con pasto y flores, ¿cuál es la medida de la superficie a plantar?

5 Patricio estaba buscando más ejercicios para estudiar para su prueba de matemática. Él encontró el siguiente ejercicio: "Dado el triángulo de vértices A: $(-2,-1)$, B: $(0,-1)$ y C: $(-1{,}0)$, que es el triángulo formado por las medianas de otro triángulo de vértices E, F y G, determina:

a. Los puntos E, F y G.

b. El perímetro del triángulo ABC.

c. El perímetro del triángulo EFG.

d. El área del triángulo ABC.

e. El área del triángulo EFG.



6 Berta está haciendo una tarea de dibujo técnico para la universidad y se ha encontrado con el siguiente enunciado: "Se construye un cuadrilátero con los siguientes vértices $(-3,4)$, $(0,6)$, $(-1,1)$ y $(2,3)$". En base a estos datos:

a. Determina qué clase de cuadrilátero es.

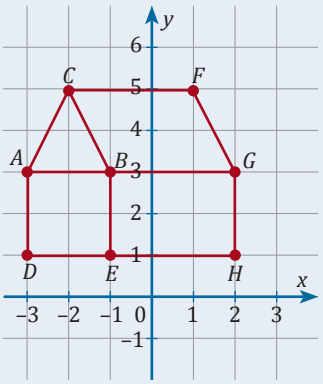
b. Determina la medida de sus lados.

c. Determina su perímetro y su área.

d. Determina los puntos medios de los lados del cuadrilátero.

e. Determina el perímetro del cuadrilátero que resulta de unir los puntos medios de los lados.

7 El profesor de Julia pidió hacer un dibujo en el plano cartesiano. Como ella no era muy buena para dibujar hizo el siguiente dibujo:



Su profesor miró el dibujo y le dijo que calculara lo siguiente. Ayúdala tú...

a. El punto medio de los trazos que componen el techo.

b. El perímetro de la casa.

c. El área del techo.

d. La medida de los trazos $\overline{AF}$ y $\overline{BH}$.

e. El área total de la casa.

8 ¡Ay, Consuelo! –se decía a sí misma–, por dejar la tarea para último momento, ahora estás complicada.
Ayuda a Consuelo, respondiendo lo siguiente:

a. ¿Al unir los puntos A: $(1,4)$, B: $(0,1)$ y C: $(-2,2)$ se formará un triángulo rectángulo?

b. ¿Cuál será el perímetro del triángulo ABC?

c. ¿Cuál será la medida de la transversal de gravedad trazada desde el vértice B?

d. Si se sabe que s es el semiperímetro y que el área de un triángulo se puede calcular mediante la fórmula $A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, donde a, b y c son los lados del triángulo, ¿cuál es el área del triángulo ABC?

e. Comprueba que el valor obtenido en la pregunta anterior está correcto, calculando ahora el área del triángulo mediante diferencias de áreas.

Revisemos lo aprendido

Marca con una cruz el casillero correspondiente, según la evaluación que hagas de tu trabajo…

MB:	Muy bien	(7,0 - 6,0)	**S:**	Suficiente	(4,9 - 4,0)
B:	Bien	(5,9 - 5,0)	**I:**	Insuficiente	(3,9 - 1,0)

Indicador	MB	B	S	I
Soy capaz de explicar el concepto de distancia entre dos puntos.				
Soy capaz de calcular la distancia entre dos puntos.				
Entendí cómo se aplica este concepto a ejercicios y problemas de otras áreas.				
Entendí los ejercicios resueltos.				
Fui capaz de resolver correctamente los ejercicios propuestos.				
Trabajé con mi grupo, aportando cuando fue necesario.				

Si tienes 4 casilleros o más con nota suficiente (S) o Insuficiente (I), debes repasar lo visto y volver a hacer los ejercicios que fueron más difíciles de hacer.

Homotecia... una mirada en perspectiva

En esta sección aprenderás

Qué son las figuras homotéticas, cómo se construyen.

Desarrollarás las siguientes habilidades:

- Identificar, calcular, interpretar, resolver problemas, analizar, sintetizar, investigar y comunicar.

Habilidades por actividad:

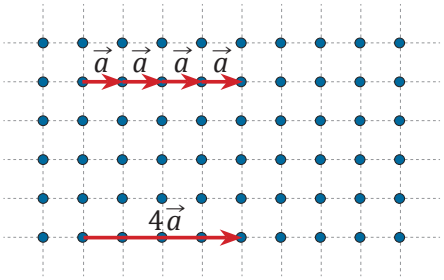
- Identificar y calcular: 1 – 2 – 3 – 6 – 7 – 9 – 10a – 10b – 10c. 4d.
- Interpretar y resolver problemas: 4 – 5 – 8. 1 – 2 – 3 – 4e – 5.
- Analizar y sintetizar: 10d. 4a – 4b.
- Investigar y comunicar: 4c.

Siguiendo con los conocimientos de esta unidad, te presentamos un concepto nuevo relacionado con la noción de "perspectiva". Como podrás recordar, la perspectiva se define como el arte de representar los objetos en la forma y disposición en que aparecen a la vista o dicho de una manera más formal es la "técnica de representar en una superficie plana, como un papel o un lienzo, la tercera dimensión de los objetos, dando sensación de profundidad y volumen". Fuente: *http://www.wordreference.com/definicion/perspectiva*

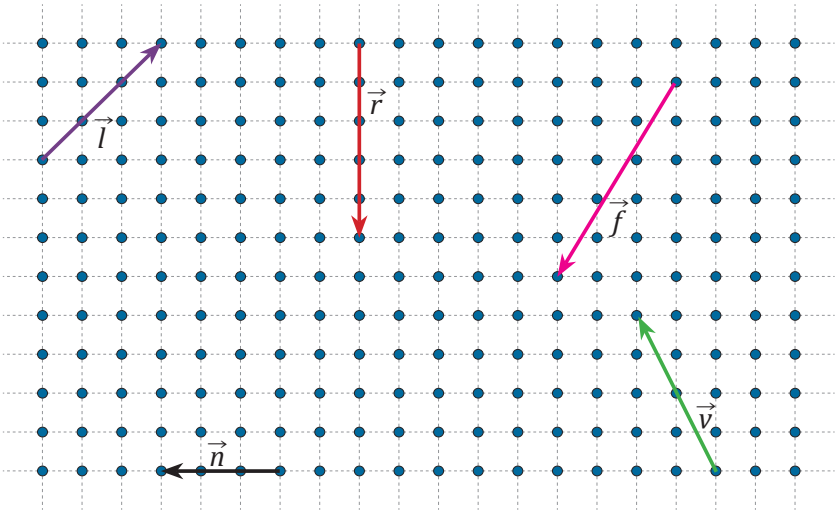
A través de esta técnica los artistas dan la ilusión de profundidad de los dibujos que son hechos en un papel, lo que equivale a dos dimensiones, es decir, dan la ilusión de objetos tridimensionales a dibujos bidimensionales.

Para que comprendas la homotecia, es necesario primero recordar y repasar algunos conceptos que te serán imprescindibles al momento de aprender sobre ella.

¿Recuerdas el concepto de vector? En primer lugar debes recordar que era equivalente dibujar $\vec{a} + \vec{a} + \vec{a} + \vec{a}$ a un vector que podemos llamar $4\vec{a}$. Veamos:



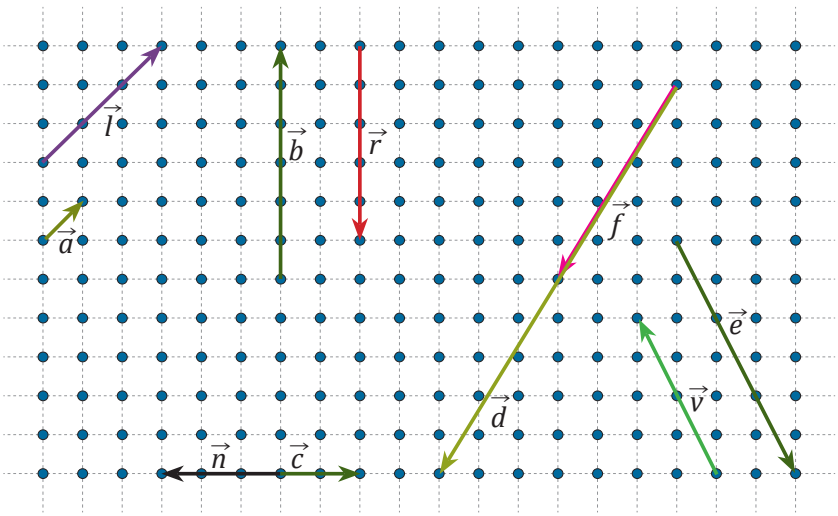
Analizaremos ahora el producto entre un vector y un escalar de manera gráfica:



$\vec{v}$, es el vector de color verde; $\vec{r}$, corresponde al vector rojo; $\vec{n}$, al negro; $\vec{f}$, al de color fucsia, y finalmente $\vec{l}$, simboliza el vector de color lila.

A partir de estos dibujaremos lo siguiente y analizaremos cuáles se agrandan o dilatan, o por el contrario, aquellos que sufren una reducción o contracción.

- Un vector paralelo a $\vec{l}$, con el mismo sentido, y que mida un tercio de su longitud, se identificará como $\vec{a}$.
- Un vector paralelo a $\vec{r}$, de sentido contrario y que mida los $\frac{6}{5}$ de su módulo, se identificará como $\vec{b}$.
- Un vector coincidente con $\vec{n}$, en su origen pero que sea dos tercios de él, en sentido contrario, se identificará como $\vec{c}$.
- Un vector coincidente con $\vec{f}$, de igual sentido pero doble tamaño a éste, se identificará como $\vec{d}$.
- Un vector paralelo a $\vec{v}$, con sentido contrario y que sea una y media veces su módulo, se identificará como $\vec{e}$.



De esta manera podemos concluir que $\vec{l}$ y $\vec{n}$ se contraen o reducen su tamaño; y los otros se dilatan o amplían su tamaño.

Ahora dibujaremos otros vectores en el plano cartesiano usando el programa Geogebra.

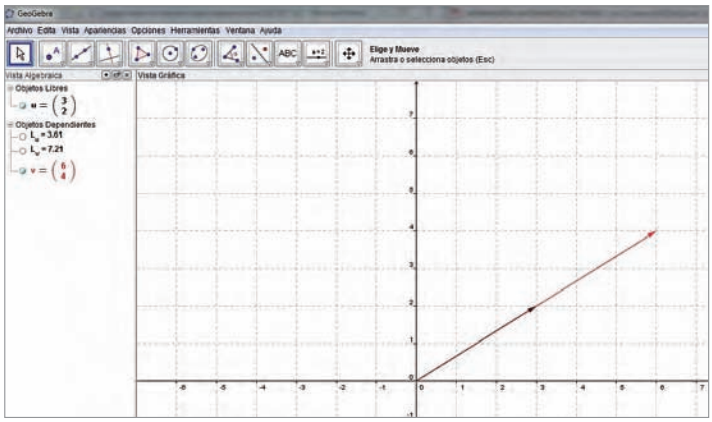
Para ello tomemos, por ejemplo $\vec{u} = (3,2)$, $2\vec{u}$, $0{,}5\vec{u}$ y $-1{,}5\vec{u}$. En primer lugar, debo escribir en la ventana inferior de la pantalla, llamada "Entrada", $u = (3,2)$ y aplicar la tecla "Enter" del teclado. De manera automática aparecerá dibujado el vector u. Para $2\vec{u}$, simplemente debo escribir en esa misma ventana: $2*u$, y el programa lo mostrará con el nombre de vector v. Observen que en la ventana izquierda van apareciendo las informaciones de los vectores que se han representado. Noten que ambos tienen el origen común en $(0,0)$. Ahora bien, de manera gráfica pueden ver que ambos vectores están en la misma dirección, y que tienen el

Toma nota

En esta sección se hace uso de un software libre para hacer matemática, lo puedes obtener de Internet e instalarlo en un computador al que tengas acceso.

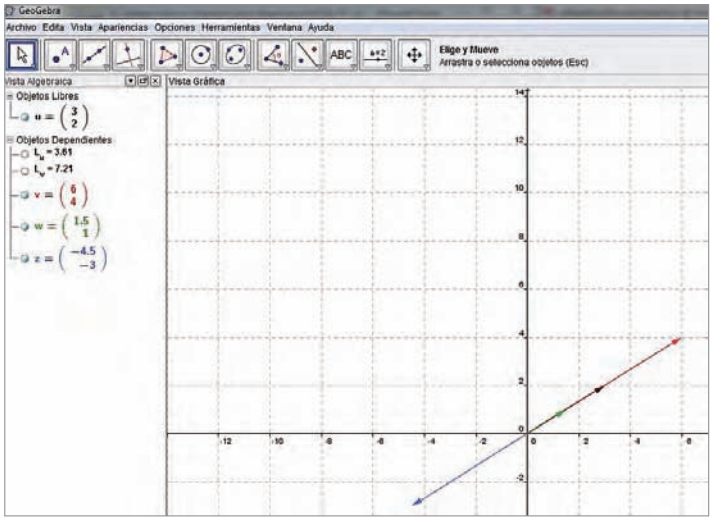
Para esto ingresa al sitio web www.geogebra.org

mismo sentido. También pueden corroborar rápidamente que la longitud o módulo de $\vec{v}$ es el doble de $\vec{u}$. Para esto, anotamos nuevamente en la ventana "Entrada": L_u=longitud[u] y aplicamos nuevamente la tecla "Enter". Así, en la pantalla izquierda o vista algebraica aparecerá $L_u = 3{,}61$ que corresponde al módulo de $\vec{u}$. Análogamente se hace lo mismo para $\vec{v}$, y se tiene que $|\vec{v}| = 7{,}21$. Nótese que estos son valores aproximados que proporciona el programa.



Tampoco es difícil mirar que la abscisa del extremo de $\vec{v}$ es el doble de la de $\vec{u}$, e igualmente sucede con sus ordenadas. Además, podemos ver que $\vec{v} = 2\vec{u}$, es decir, $\vec{v} = 2(3{,}2) = (2 \cdot 3,\ 2 \cdot 2) = (6{,}4)$.

Ahora continuaremos graficando mediante este programa. Graficaremos $0{,}5\vec{u}$ y $-1{,}5\vec{u}$.



Se agregaron los vectores $\vec{w}$ y $\vec{z}$ respectivamente. Nuevamente observemos que cada uno de ellos tiene su origen en $(0{,}0)$, que gráficamente están en la misma dirección de $\vec{u}$, pero que, no se puede decir lo mismo de sus sentidos. Así, mientras $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ tienen el mismo sentido, $\vec{z}$ tiene sentido contrario. Es decir, mientras $2\vec{u}$ y $0{,}5\ \vec{u}$, ambos formados por el producto de un real positivo y $\vec{u}$, conservan el mismo sentido de este, $-1{,}5\vec{u}$, que proviene del producto de un real negativo y $\vec{u}$, lleva el sentido contrario de $\vec{u}$.



Anteriormente en esta unidad, vimos la fórmula de distancia entre dos puntos. Podemos utilizarla, en este caso, para determinar los módulos de estos vectores. Por ejemplo, para el caso del vector $\vec{u} = (3,2)$, tomamos como coordenadas x_1 e y_1 el origen del plano cartesiano, es decir, $(0,0)$, y el desarrollo de esta fórmula queda:

$|\vec{u}| = \sqrt{(0+3)^2+(0+2)^2} = \sqrt{9+4} = \sqrt{13}$.

De la misma manera, $|\vec{v}| = \sqrt{(0+6)^2+(0+4)^2} = \sqrt{36+16} = \sqrt{52}$.

Y $|\vec{w}| = \sqrt{3{,}25}$, $|\vec{z}| = \sqrt{29{,}25}$.

Si te fijas $|\vec{u}| = \sqrt{13}$ y $|\vec{v}| = \sqrt{52}$, por lo que podemos decir que $|\vec{v}| = \sqrt{4 \cdot 13}$, porque dividiendo 52 por 13 obtenemos 4, y aplicando la descomposición de raíces en factores, tendremos que $|\vec{v}| = \sqrt{4} \cdot \sqrt{13}$. Entonces, $|\vec{v}| = 2 \cdot \sqrt{13}$ y, por esto podemos decir que $|\vec{v}| = 2 \cdot |\vec{u}|$.

Así, tenemos también que:

$|\vec{w}| = \sqrt{0{,}25 \cdot 13} = 0{,}5 \cdot \sqrt{13}$, es decir, $|\vec{w}| = 0{,}5 \cdot |\vec{u}|$.
Análogamente, $|\vec{z}| = \sqrt{29{,}25}$, pero $\sqrt{2{,}25 \cdot 13} = 1{,}5 \cdot \sqrt{13}$, es decir, $|\vec{w}| = 1{,}5 \cdot |\vec{u}|$.

Ahora, sintetizaremos las conclusiones anteriores diciendo lo siguiente:

El producto de un número (escalar) k por un vector $\vec{u}$ es otro vector denotado por $k \cdot \vec{u}$ o bien $k\vec{u}$, y que tiene las siguientes características:

- Igual dirección que el vector $\vec{u}$.
- El mismo sentido que el vector $\vec{u}$, si k es positivo, y de sentido contrario, si k es negativo.
- Finalmente, el módulo de $k\vec{u}$, que se denota por $|k\vec{u}|$, y que es igual al producto entre $|k| \cdot |\vec{u}|$.

En particular, si $\vec{u} = (a,b)$, con a y b reales, y k también real, entonces $k\vec{u} = k(a,b) = (ka,kb)$. Además, $|k\vec{u}| = |k| \cdot |\vec{u}|$.

El producto de un número k por un vector $\vec{u}$, también se llama ponderación del vector $\vec{u}$ por el escalar k. Si $\vec{v} = k\vec{u}$, entonces se dice que $\vec{v}$ es el vector ponderado de $\vec{u}$, con factor de ponderación k.

Veremos ahora que es lo que ocurre si k es igual a cero.

Si $k = 0$, tenemos que $k\vec{u} = 0(a,b) = (0 \cdot a, 0 \cdot b)$, es decir, se obtiene el vector $(0,0)$, llamado vector nulo.

Ahora, determinaremos k sabiendo que un vector dado es el ponderado de otro.

Si $\vec{a} = (-7,6)$ y $\vec{b} = (0,35\,;\,-\,0,3)$ es el vector ponderado de $\vec{a}$, con un factor de ponderación k, determinaremos k.
Por esto, $\vec{b} = k\vec{a} = (-7k,6k)$.

Como $\vec{b} = (0,35\,,\,-0,3)$, entonces, necesariamente $-7k$ debe ser igual a $0,35$, y al mismo tiempo, $6k$ tiene que ser igual a $-0,3$. De cada caso se tiene que:
$k = -\frac{0,35}{7} = -0,05$ y $k = -\frac{0,3}{6} = -0,05$. Finalmente el valor del factor de ponderación es $-0,05$.

Trabaja

1 Si $\vec{a} = (-1,4)$, encuentra $\vec{b} = 3\vec{a}$ y $\vec{c} = -2\vec{a}$. Luego dibújalos.

2 Considera $\vec{u} = (x,y)$ con x e y reales, y $\vec{v} = (-3,9\,;1,8)$. Ahora bien, si $\vec{v} = 0,3\vec{u}$, halla previamente x e y, para luego escribir $\vec{u}$.

3 Si $\vec{t} = (31,5\,;\,-73,5)$ y además es un vector ponderado de $\vec{w} = (3,-7)$. ¿Cuánto vale el factor de ponderación?

4 ¿Es $\vec{d} = (-3,-8)$ un vector ponderado de $\vec{c} = (21,26)$?
¿Por qué?

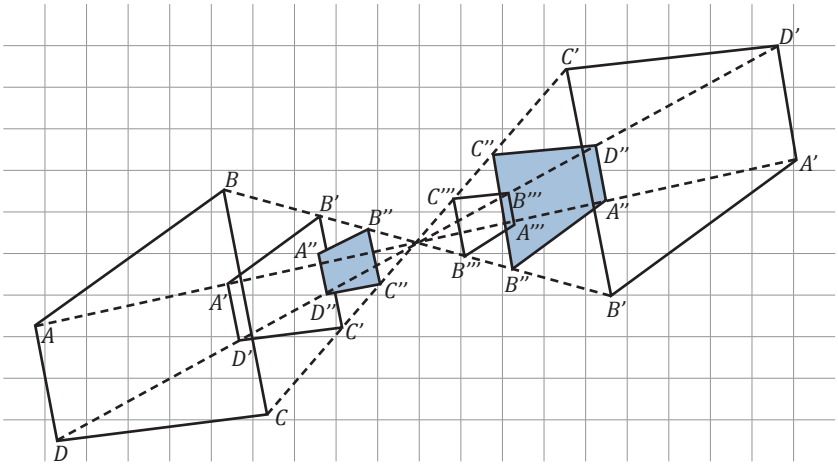
5 $\vec{r}$ tiene su origen en $(1,1)$, y su extremo en $(4,5)$. Determina el punto del extremo de $\vec{s} = 0,4\vec{r}$, si ambos vectores tienen el mismo punto de origen.

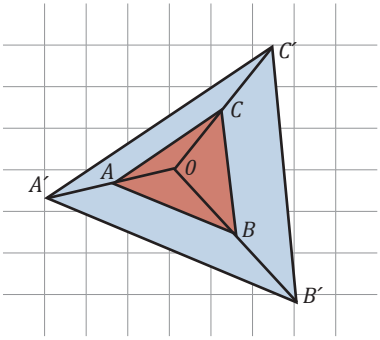
Definición de Homotecia

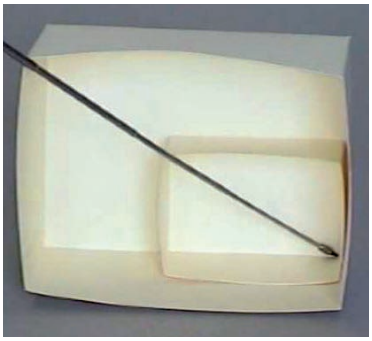
Todos los conocimientos que has recordado hasta ahora te serán útiles para el tema principal de esta unidad: el concepto de homotecia que no es otra cosa que la transformación de una figura en el plano.

Para comprender este concepto debes manejar muy bien la noción de vector, sus características y las operaciones que puedes realizar entre estos objetos matemáticos.

Comenzaremos identificando algunos dibujos que pueden parecerte comunes pero que encierran muchos de estos conceptos. Observa las siguientes figuras:



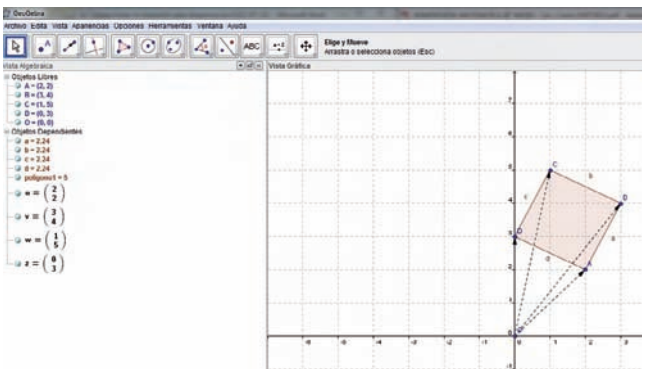




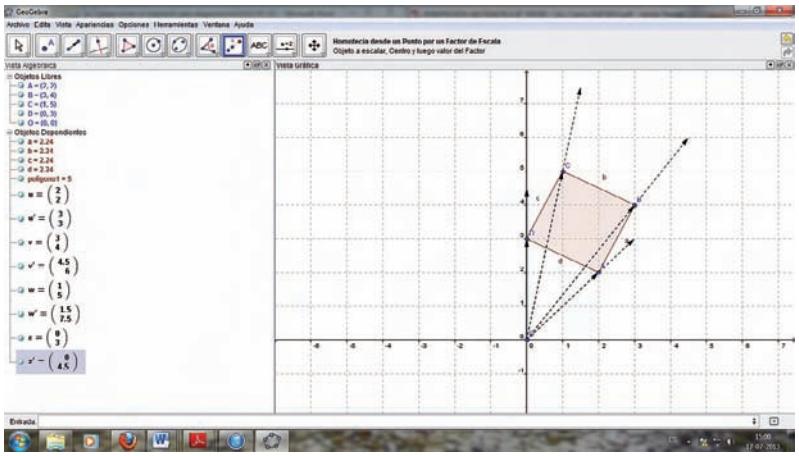
Si te fijas bien, en estas figuras es posible observar perspectivas, figuras semejantes y rotaciones. Además, como puedes ver, algunas de estas figuras están dibujadas sobre planos similares al plano cartesiano que hemos recordado recientemente.

Volvamos al plano cartesiano y ayudémonos con el programa Geogebra. Escribamos en la ventana inferior en "Entrada" $O = (0,0)$, así aparecerá este punto destacado en el origen del sistema. De igual manera, ubicamos los puntos: A:$(2,2)$, B:$(3,4)$, C:$(1,5)$ y D:$(0,3)$ que serán los vértices de un cuadrilátero. Luego, seleccionamos la opción "Polígono" que se encuentra en el 5° casillero de izquierda a derecha, y formamos el polígono $ABCD$.

En primer lugar vamos a trazar todos los vectores cuyo origen esté en O, y cuyos extremos están en cada vértice del cuadrilátero anterior. En esta ocasión los dibujaremos con línea punteada.

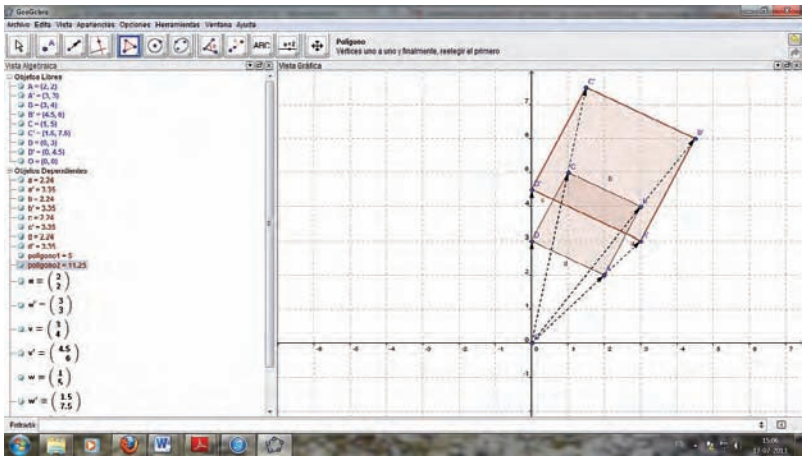


En segundo lugar, vamos a ponderar cada uno de estos vectores por un factor k. En esta oportunidad elijamos $k = 1{,}5$, y representemos estos nuevos vectores.



Finalmente, destaquemos sus extremos, colocando los puntos respectivos. Así escribimos en la ventana inferior, "Entrada", el punto del extremo de $\overrightarrow{u}$: $A' = (3{,}3)$. Del mismo modo, se procede con los otros puntos B', C' y D'.

Ahora bien, nuevamente seleccionamos la opción "Polígono" para formar el polígono $A'B'C'D'$.



Hemos obtenido entonces un cuadrilátero semejante al primero. Además, cada lado de la figura resultante resulta ser una vez y media el lado homólogo de la figura original.

Ahora, vamos a justificar matemáticamente esta última afirmación. Para ello vamos a mirar los triángulos OAD y $O'A'D'$ y tendremos que:

$$|\overrightarrow{OA'}| = 1{,}5 \cdot |\overrightarrow{OA}| \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{OA'}|}{|\overrightarrow{OA}|} = 1{,}5 \text{ y } |\overrightarrow{OD'}| = 1{,}5 \cdot |\overrightarrow{OD}| \Rightarrow \frac{|\overrightarrow{OD'}|}{|\overrightarrow{OD}|} = 1{,}5$$

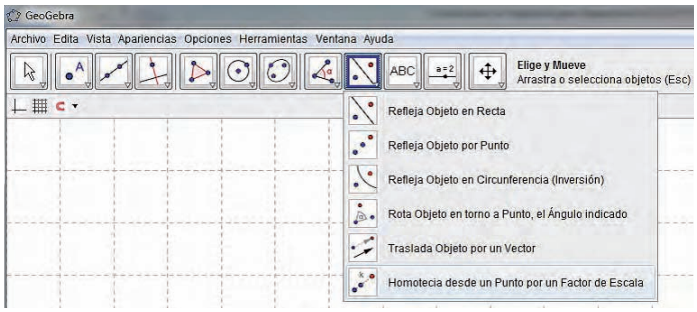
Por lo tanto, se cumple el teorema de Tales, con lo que se puede afirmar que: $\frac{|\overrightarrow{OA}|}{d_{AD}} = \frac{|\overrightarrow{OA'}|}{d_{A'D'}} \Rightarrow \frac{d_{A'D'}}{d_{AD}} = \frac{|\overrightarrow{OA'}|}{|\overrightarrow{OA}|} = 1{,}5.$



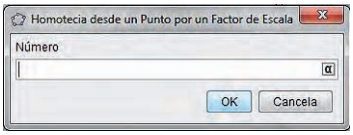
Por lo tanto los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{A'D'}$ son paralelos y proporcionales $\overline{A'D'} = 1{,}5 \cdot \overline{AD}$, con lo que los ángulos interiores de ambos triángulos son iguales y por lo tanto los triángulos son semejantes. Se puede hacer el mismo análisis para cada uno de los lados del cuadrilátero, con lo que se tiene que ambos cuadriláteros son semejantes de razón $\frac{3}{2}$.

Ahora, te explicaremos rápidamente como utilizamos el programa Geogebra para realizar una homotecia.

Contado de izquierda a derecha, abre el noveno casillero y selecciona mediante un clic la opción "Homotecia desde un Punto por un Factor de Escala"



A contiuación, se hace un clic en el objeto para el cual se aplicará la homotecia, que puede ser un vértice, un trazo, una figura, etc. y luego clic en el punto que representa el centro de la homotecia, mediante el cual se desplegará el siguiente cuadro:



Repasaremos ahora lo que hemos hecho, pero de manera algebraica.

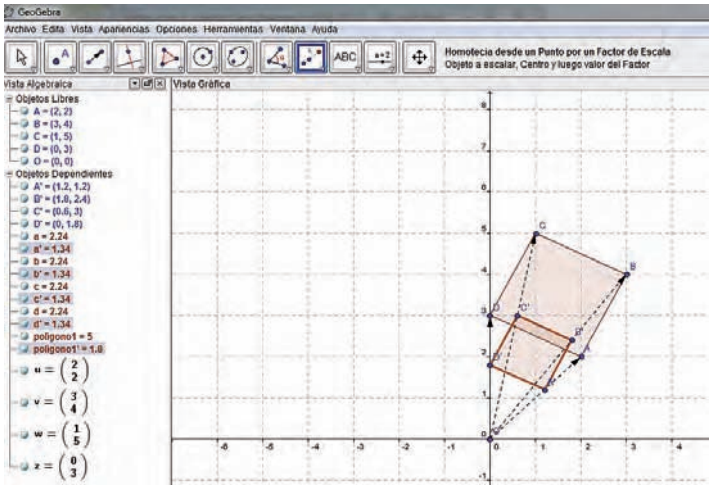
Vértice A:$(2{,}2)$; $\overrightarrow{OA} = (2{,}2) \rightarrow \overrightarrow{OA'} = 1{,}5(2\ ,\ 2) = (1{,}5 \cdot 2\ ;\ 1{,}5 \cdot 2) = (3{,}3)$ se determina $A' = (3{,}3)$.

Vértice B:$(3{,}4)$; $\overrightarrow{OB} = (3{,}4) \rightarrow \overrightarrow{OB'} = 1{,}5(3\ ,\ 4) = (1{,}5 \cdot 3\ ;\ 1{,}5 \cdot 4) = (4{,}5\ ;\ 6)$ se determina $B' = (4{,}5\ ;\ 6)$.

Vértice C:$(1{,}5)$; $\overrightarrow{OC} = (1{,}5) \rightarrow \overrightarrow{OC'} = 1{,}5(1\ ,\ 5) = (1{,}5 \cdot 1\ ;\ 1{,}5 \cdot 5) = (1{,}5\ ;\ 7{,}5)$ se determina $C' = (1{,}5\ ;\ 7{,}5)$.

Vértice D:$(0{,}3)$; $\overrightarrow{OD} = (0{,}3) \rightarrow \overrightarrow{OD'} = 1{,}5(0\ ,\ 3) = (1{,}5 \cdot 0\ ;\ 1{,}5 \cdot 3) = (0\ ;\ 4{,}5)$ se determina $D' = (0\ ;\ 4{,}5)$.

Esto también se puede hacer a mano, utilizando solo regla, cuando las medidas son fáciles de estimar. Así, cuando el factor de ponderación k es mayor que uno, agrandaremos la figura. Y si este factor es menor que uno se obtendrá una figura más pequeña, como vemos a continuación considerando $k = 0{,}6$:



De esta manera, calcularemos las coordenadas de los vértices de la nueva figura de manera algebraica.

Vértice A:$(2,2)$; $\overrightarrow{OA} = (2,2) \rightarrow \overrightarrow{OA'} = 0{,}6(2\ ,\ 2) = (0{,}6 \cdot 2\ ;\ 0{,}6 \cdot 2) = (1{,}2\ ;\ 1{,}2)$ se determina $A' = (1{,}2\ ;\ 1{,}2)$.

Vértice B:$(3,4)$; $\overrightarrow{OB} = (3,4) \rightarrow \overrightarrow{OB'} = 0{,}6(3\ ,\ 4) = (0{,}6 \cdot 3\ ;\ 0{,}6 \cdot 4) = (1{,}8\ ;\ 2{,}4)$ se determina $B' = (1{,}8\ ;\ 2{,}4)$.

Vértice C:$(1{,}5)$; $\overrightarrow{OC} = (1{,}5) \rightarrow \overrightarrow{OC'} = 0{,}6(1\ ,\ 5) = (0{,}6 \cdot 1\ ;\ 0{,}6 \cdot 5) = (0{,}6\ ;\ 3)$ se determina $C' = (0{,}6\ ;\ 3)$.

Vértice D:$(0{,}3)$; $\overrightarrow{OD} = (0{,}3) \rightarrow \overrightarrow{OD'} = 0{,}6(0\ ,\ 3) = (0{,}6 \cdot 0\ ;\ 0{,}6 \cdot 3) = (0\ ;\ 1{,}8)$ se determina $D' = (0\ ;\ 1{,}8)$.

Como puedes observar, se ha obtenido una figura más pequeña dado que el factor considerado corresponde a $0{,}6$, o sea, $k < 1$.

Ahora pensemos que significará amplificar cada vector por un factor negativo, por ejemplo, el factor de ponderación -2. Siguiendo el mismo razonamiento anterior, es decir, si $k > 1$, se obtiene una figura más grande que la original y si $k < 1$, se obtiene una figura más pequeña, debiéramos esperar que la figura obtenida estuviera hacia el otro lado de O.

En este caso, lo determinaremos primero algebraicamente.

Vértice A: $(2,2)$;$\overrightarrow{OA} = (2,2) \rightarrow \overrightarrow{OA'} = -2(2,2) = (-2 \cdot 2, -2 \cdot 2) = (-4, -4)$ se determina A': $(-4, -4)$.

Vértice B: $(3,4)$;$\overrightarrow{OB} = (3,4) \rightarrow \overrightarrow{OB'} = -2(3,4) = (-2 \cdot 3, -2 \cdot 4) = (-6, -8)$; se determina B': $(-6, -8)$.

Vértice C: $(1,5)$;$\overrightarrow{OC} = (1,5) \rightarrow \overrightarrow{OC'} = -2(1,5) = (-2 \cdot 1, -2 \cdot 5) = (-2, -10)$; se determina C': $(-2, -10)$.

Vértice D: $(0,3)$;$\overrightarrow{OD} = (0,3) \rightarrow \overrightarrow{OD'} = -2(0,3) = (-2 \cdot 0, -2 \cdot 3) = (0, -6)$; se determina D': $(0, -6)$.

Para entretenerse

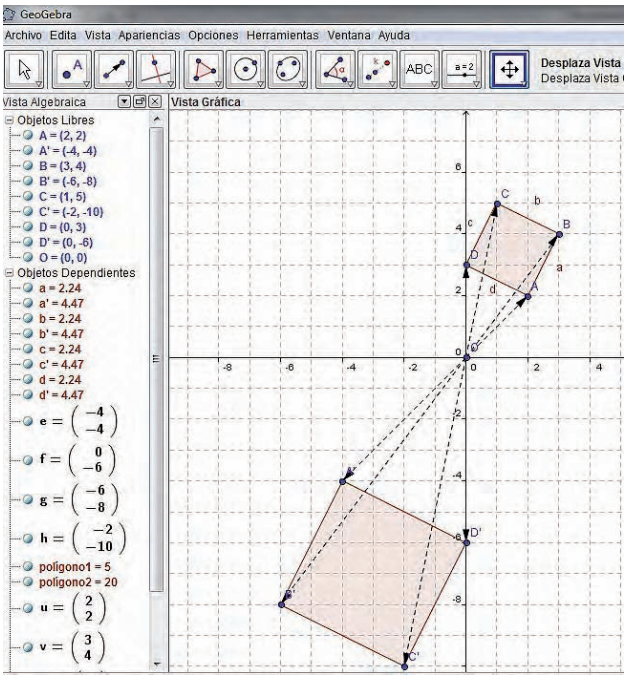
Resuelve el siguiente problema:

El dibujo de arriba representa a un dinosaurio y está a escala 1:200 Averigua a qué escala está representado el dibujo de abajo y halla su altura real.

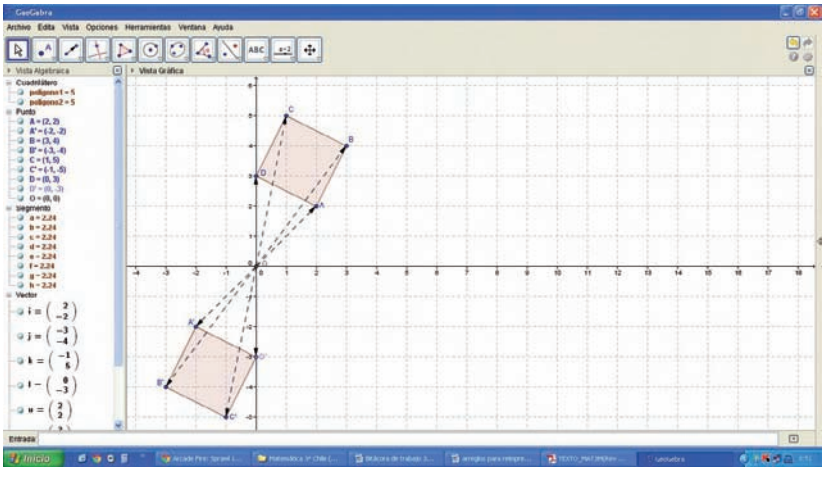




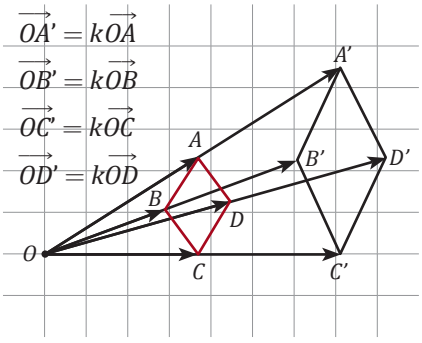
A continuación te mostramos esta figura realizada con el programa Geogebra.



Si se fijan, si la constante por la que multiplicamos fuera -1, entonces nuestra nueva figura sería también una rotación de la primera o una reflexión con respecto al punto O. El centro de homotecia se ubica entre ambas figuras. Veamos la figura.



Hemos estado aplicando una homotecia a una figura dada, obteniendo otra semejante. Formalizaremos ahora este concepto: una homotecia es la transformación de una figura en otra (figura homotética), en que, a partir de un punto fijo O (llamado centro de homotecia), todos los vectores cuyo origen común es este punto y cuyos extremos están en cualquier punto de la figura inicial, se ponderan por un mismo factor k. Este factor de ponderación lo



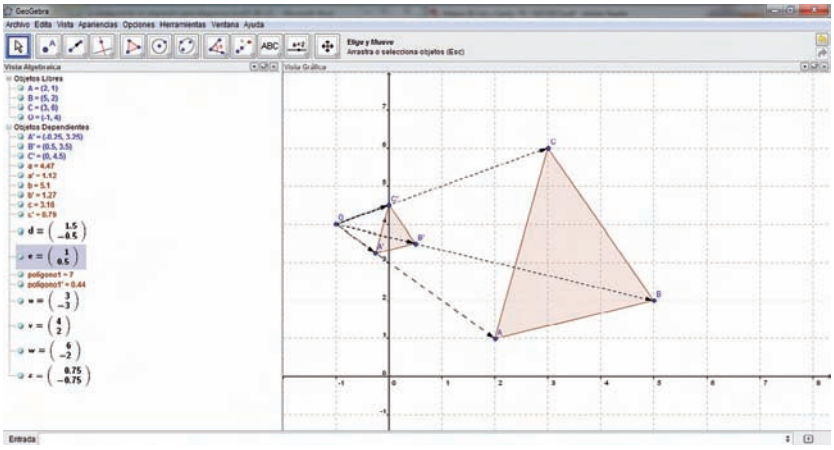
Toma nota

Como las figuras homotéticas son figuras semejantes se cumplirá que, si su razón de semejanza es r, entonces:

- la razón entre sus perímetros será también r
- la razón entre sus áreas será r^2
- la razón entre sus volúmenes (en caso de ser tridimensionales) será r^3

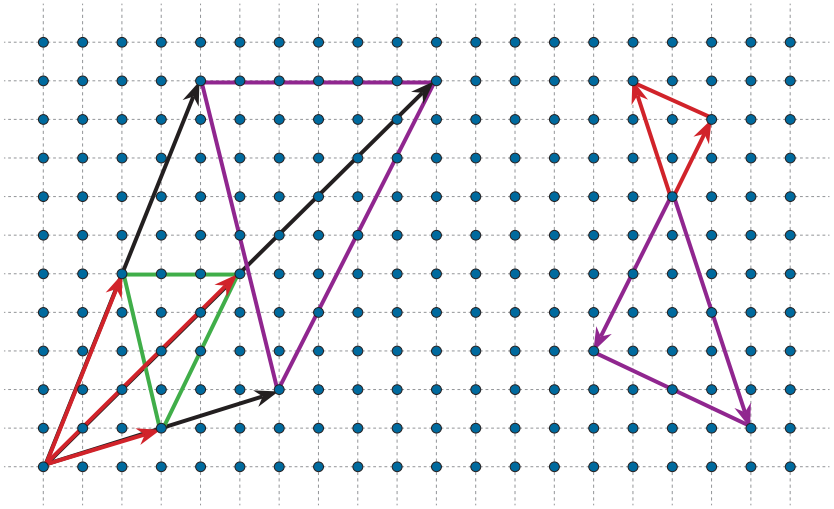
llamaremos razón de homotecia. De esta manera, los extremos de dichos vectores ponderados serán los puntos de la figura homotética.

Veremos ahora qué ocurre con el centro de homotecia O. Para esto vamos a dibujar el triángulo ABC, con los vértices $A=(2,1)$, $B=(5,2)$ y $C=(3,6)$ y haremos una homotecia de razón $\frac{1}{4}$ y centro de homotecia en $(-1,4)$ usando Geogebra.



El triángulo homotético es semejante al triángulo original, como la razón de homotecia es positiva y menor que 1, la figura homotética es una reducción de la figura original.

Dibujaremos algunas homotecias en un geoplano.



La representación de la izquierda muestra la homotecia del triángulo verde con razón positiva igual a dos. Por tanto el triángulo violeta es el homotético, y constituye una ampliación del triángulo verde. También es posible ver la transformación de manera inversa, si el triángulo homotético es el verde, la razón de homotecia es 0,5, siendo una reducción del triángulo violeta.

Recordar y archivar

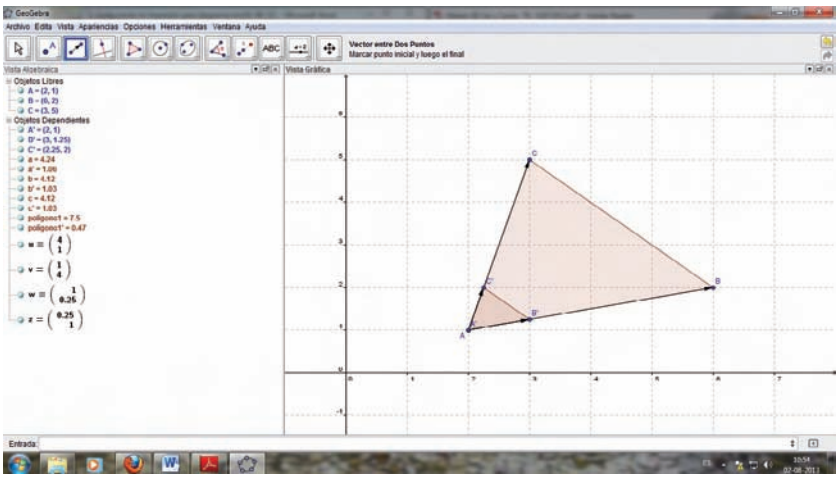
Cuando la razón de homotecia es 1 o -1 se obtienen figuras congruentes.

Cuando la razón de homotecia es igual a 0, la imagen se reduce a un punto que coincide con el centro de homotecia.



La figura de la derecha representa una homotecia aplicada al triángulo de color rojo con razón negativa igual a 2. Por tanto el triángulo homotético es el violeta, pero a la inversa, si la razón de homotecia es $-0{,}5$ entonces el triángulo homotético es el de color rojo. Nota que el centro de homotecia es un punto común en ambas figuras.

Veremos ahora que ocurre cuando el centro de homotecia pertenece a la figura, para ello nuevamente utilizaremos el triángulo ABC, con los vértices $A=(2{,}1)$, $B=(5{,}2)$ y $C=(3{,}6)$ y similarmente haremos una homotecia de razón $\frac{1}{4}$, pero en este caso el centro de homotecia será el vértice A.

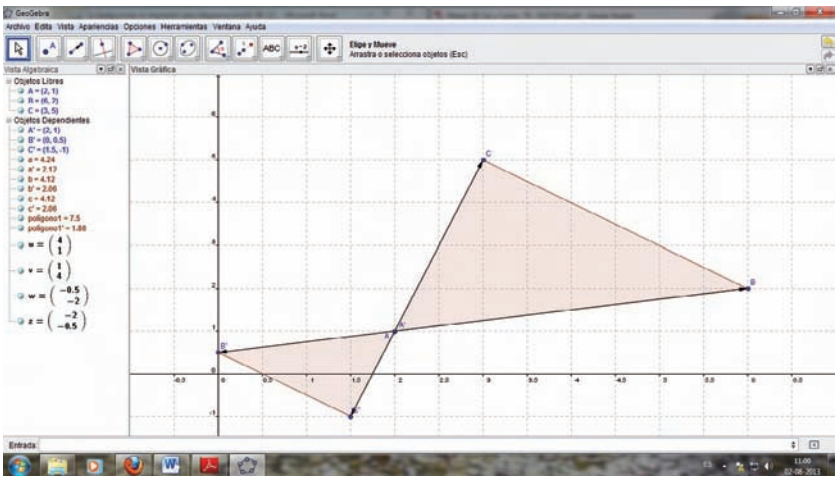


Como ves la nueva figura queda dentro de la primera por ser más pequeña, ya que, la razón es positiva, pero menor que 1.

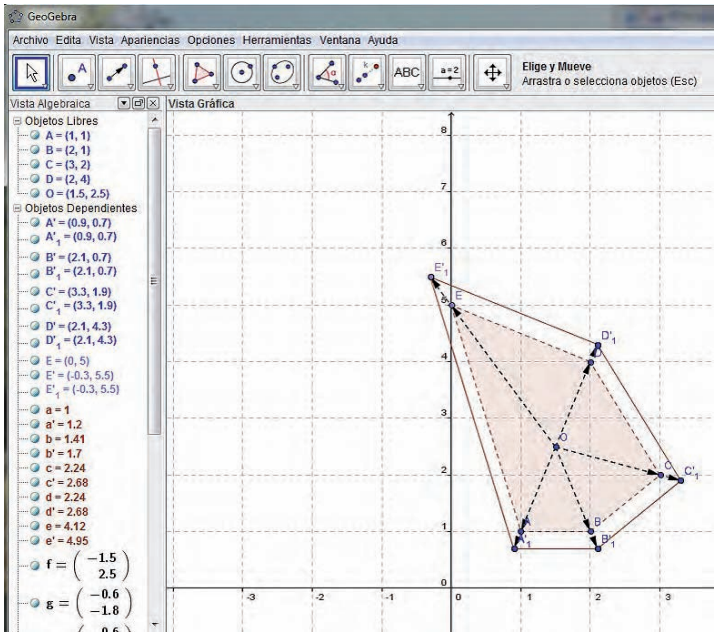
Además, $|\overrightarrow{AB'}|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|$ y $|\overrightarrow{AC'}|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{AC}|$

Y el sentido de $\overrightarrow{AC}$ es el mismo que el de $\overrightarrow{AC'}$ y pasa lo mismo para los sentidos de $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AB'}$.

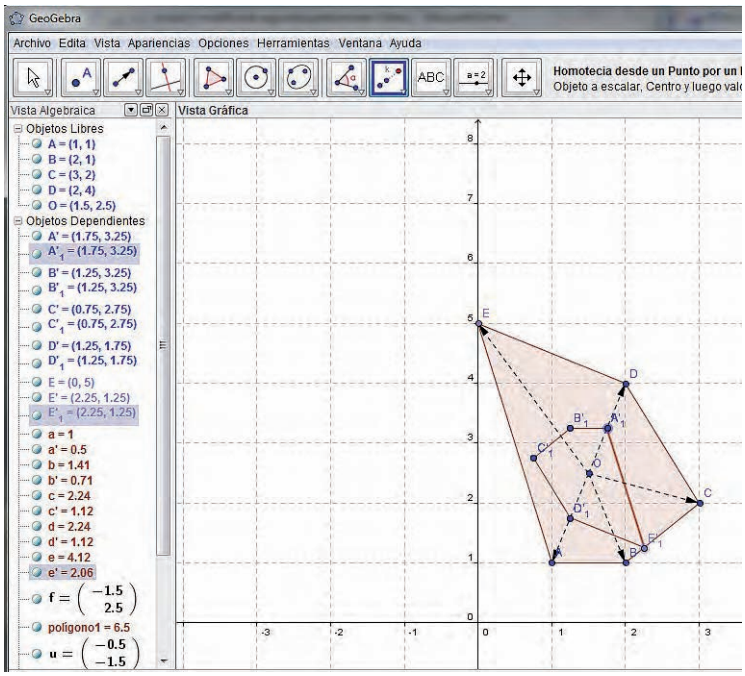
Ahora, utilizando nuevamente el triángulo ABC anterior, vamos a encontrar otro triángulo homotético a él, pero de razón $-\frac{1}{2}$.



Siguiendo con nuestro aprendizaje sobre la homotecia, y considerando que según la razón de homotecia y centro de homotecia escogidos, es la figura homotética que obtendremos, realizaremos ahora una homotecia de razón $\frac{6}{5}$, es decir con factor de ponderación 1,2, y con centro de homotecia dentro de ella.



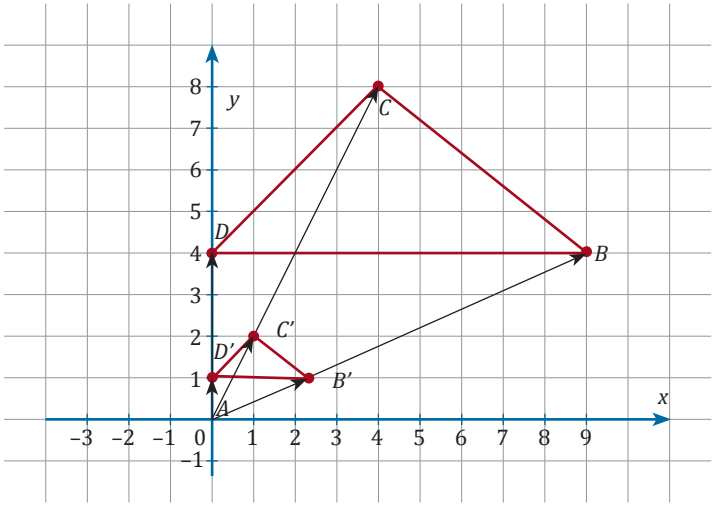
Si ahora la razón de homotecia es $-\frac{1}{2}$, obtenemos:





Veamos los siguientes ejemplos:

1 Dadas las siguientes figuras homotéticas determina su razón de homotecia



Para encontrar la razón de homotecia, basta determinar el número (escalar k) tal que al ponderar $\overrightarrow{AD}$ se obtenga $\overrightarrow{AD'}$.

Calculemos las componentes de dos vectores que nos sirvan para calcular la razón. En la figura apreciamos que $\overrightarrow{AD} = (0,4)$ y $\overrightarrow{AD'} = (0,1)$. Además, como el triángulo $B'C'D'$, homotético del triángulo BCD, es más pequeño, la razón debe ser positiva y menor que 1, esto es:

$k\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD'}$

$k(0,4) = (0,1)$

$(0 \cdot k, 4 \cdot k) = (0,1)$

$4 \cdot k = 1$

$k = \frac{1}{4}$

2 Dos pentágonos son homotéticos de razón de homotecia $-\frac{13}{5}$. Si los lados del pentágono mayor miden 2 dm; 3 dm; 2,5 dm; 3,5 dm; 2,8 dm ¿Cuánto miden los lados del pentágono menor?
Como las figuras son homotéticas, entonces son también semejantes y, por lo estudiado anteriormente, la razón de semejanza de las figuras es la razón de homotecia.

Así, se tiene que si llamamos a, b, c, d y e a los lados homólogos de los lados dados, respectivamente, tendremos:

$\frac{13}{5} = \frac{2}{a} \Rightarrow a = \frac{5 \cdot 2}{13} = \frac{10}{13} \Rightarrow a = \frac{10}{13}$ dm

$\frac{13}{5} = \frac{3}{b} \Rightarrow b = \frac{5 \cdot 3}{13} = \frac{15}{13} \Rightarrow b = \frac{15}{13}$ dm

$\frac{13}{5} = \frac{2,5}{c} \Rightarrow c = \frac{5 \cdot 2,5}{13} = \frac{12,5}{13} \Rightarrow c = \frac{25}{26}$ dm

$\frac{13}{5} = \frac{3,5}{d} \Rightarrow d = \frac{5 \cdot 3,5}{13} = \frac{17,5}{13} \Rightarrow d = \frac{35}{26}$ dm

$\frac{13}{5} = \frac{2,8}{e} \Rightarrow e = \frac{5 \cdot 2,8}{13} = \frac{14}{13} \Rightarrow e = \frac{14}{13}$ dm

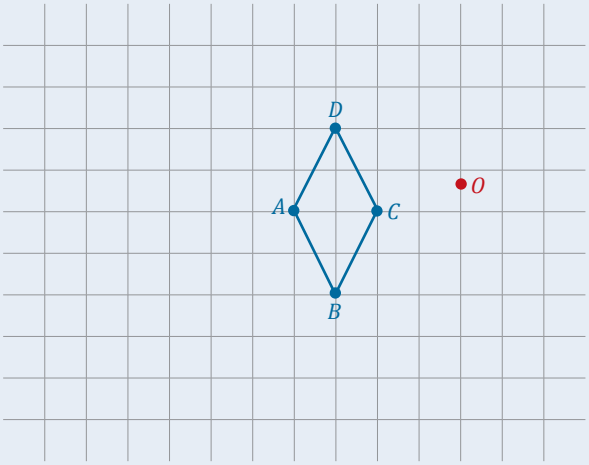
- Una homotecia en la transformación de una figura en otra semejante a ella, con respecto a punto en plano, llamado centro de homotecia, y a una razón dada, llamada razón de homotecia.
- La homotecia se puede realizar a partir de una operación vectorial , mediante la ponderación de vectores dirección (cuyos orígenes común conforman el centro de homotecia y cuyo extremos está en cada punto de la figura) por un escalar (razón de homotecia), los vectores ponderados tienen también sus puntos de orígenes en el centro de homotecia, pero sus extremos conformarán los puntos de la figura homotética.
- Una homotecia transforma un segmento en otro paralelo, haciéndolo $|k|$ veces el primero, siendo k la razón de homotecia. De aquí que, ésta se pueda obtener dividiendo la longitud del segmento homotético por la longitud del segmento original.
- Si la razón de homotecia es positiva y mayor que 1, la figura semejante será más grande y estará en el mismo sentido de la original. Se produce una ampliación de la figura original.
- Si la razón de homotecia es positiva y menor que 1, la figura semejante será más pequeña y estará en el mismo sentido de la original. Se produce una reducción de la figura original.
- Si la razón de homotecia es negativa y menor que -1 la figura semejante será más grande, pero habrá experimentado una rotación con respecto a la figura original.
- Si la razón de homotecia es negativa y mayor que -1, la figura semejante será más pequeña, pero habrá experimentado una rotación con respecto a la figura original.
- Si el centro de homotecia está en el exterior de la figura original y la razón de homotecia es distinto de 1, su figura homotética estará separada de la original.
- Si el centro de homotecia está en uno de los vértices de la figura original, su figura homotética estará unida a la primera por dicho vértice.
- Si el centro de homotecia está dentro de la figura original y el valor absoluto de la razón de homotecia es mayor que 1, entonces la figura original se encontrara dentro de su homotética.
- Si el centro de homotecia está dentro de la figura original y el valor absoluto de la razón de homotecia es menor que 1, entonces la figura homotética se encontrará dentro de la original.

Trabaja

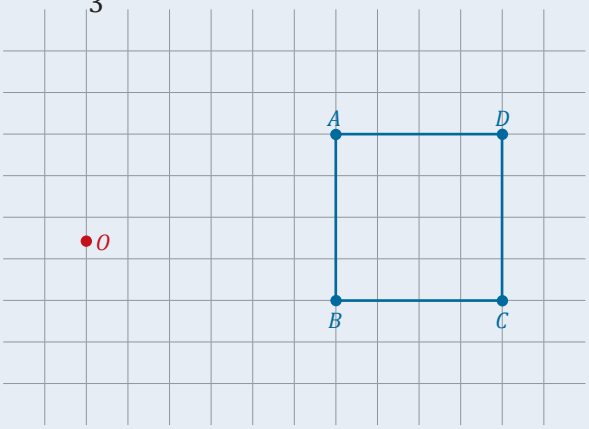
Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios. No olvides chequear tus respuestas en el solucionario.

1 Dadas las siguientes figuras, construye la figura homotética de centro (O) y razón de homotecia (r) correspondiente en cada caso:

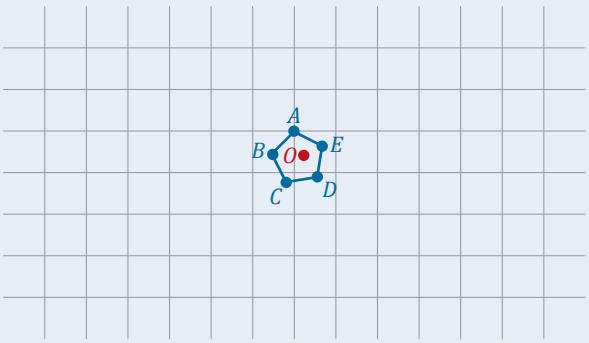
a. $r = 2$



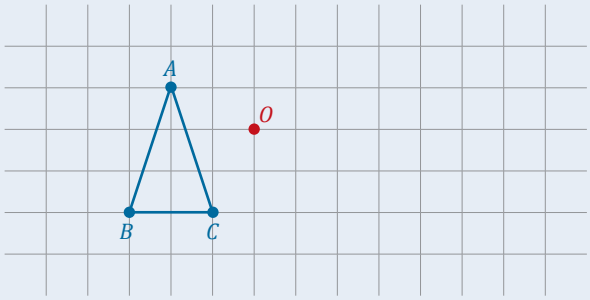
b. $r = \frac{1}{3}$



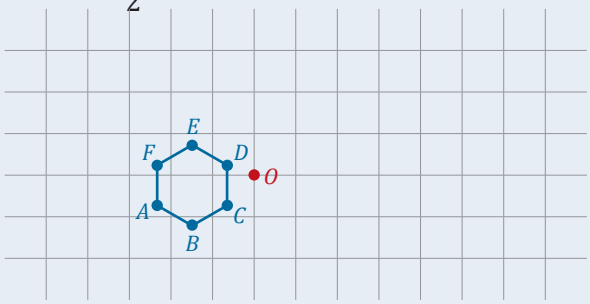
c. $r = 3$



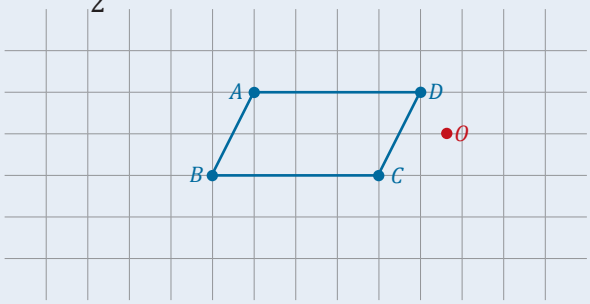
d. $r = -1$



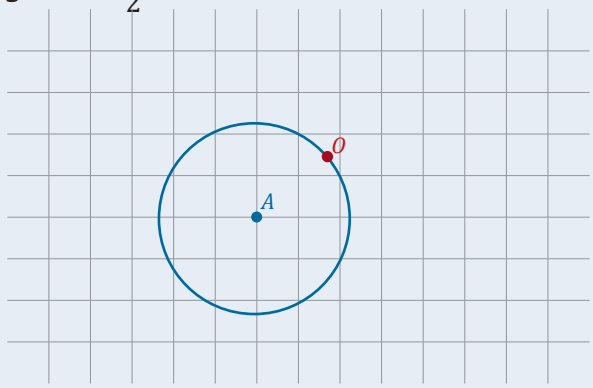
e. $r = -\frac{5}{2}$



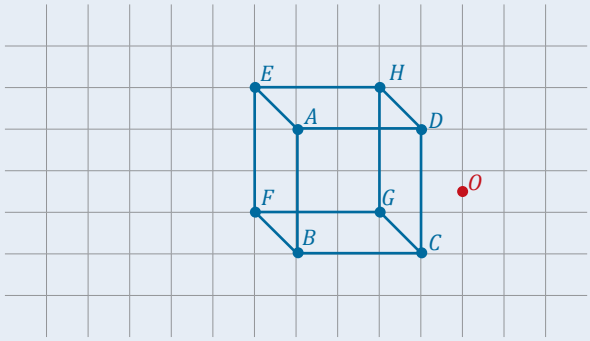
f. $r = \frac{3}{2}$



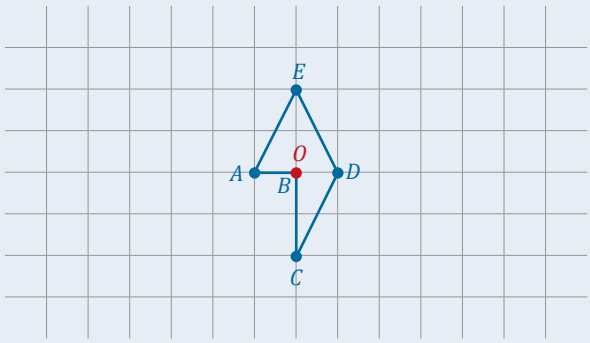
g. $r = -\frac{1}{2}$



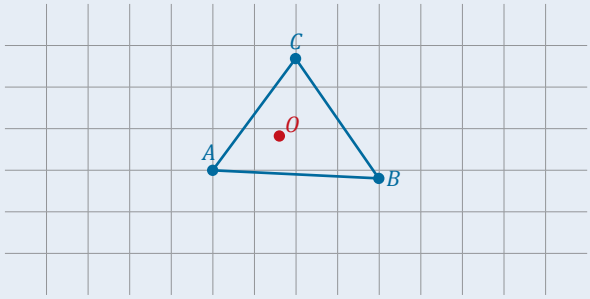
h. $r = \frac{7}{5}$



i. $r = 1{,}2$

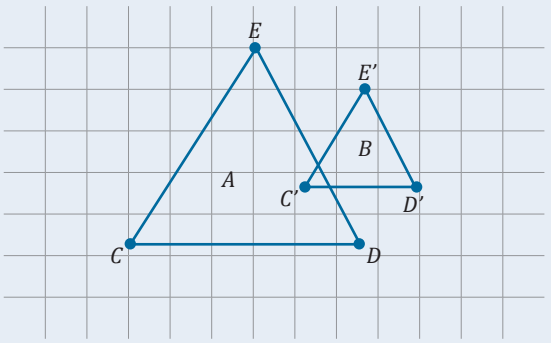


j. $r = -\frac{3}{2}$

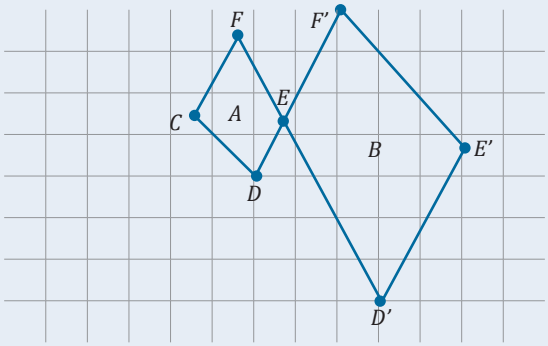


2 Dadas las siguientes figuras, donde a A se le ha aplicado una homotecia (y B es la homotética de A), determina el centro y la razón de homotecia:

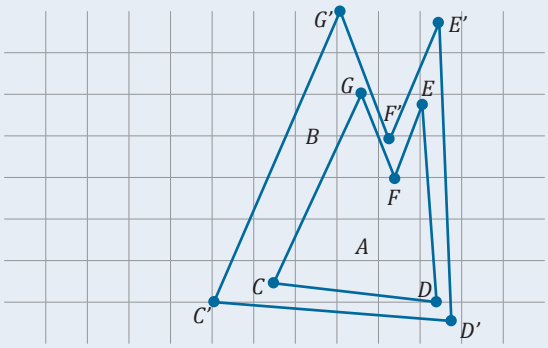
a.



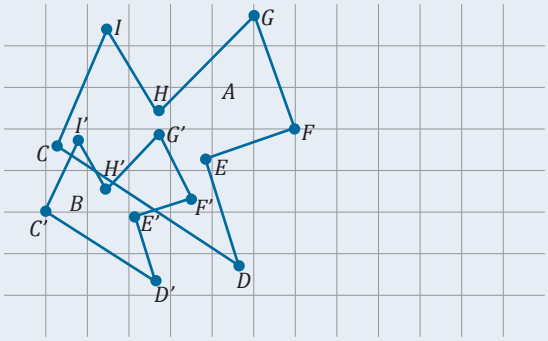
b.



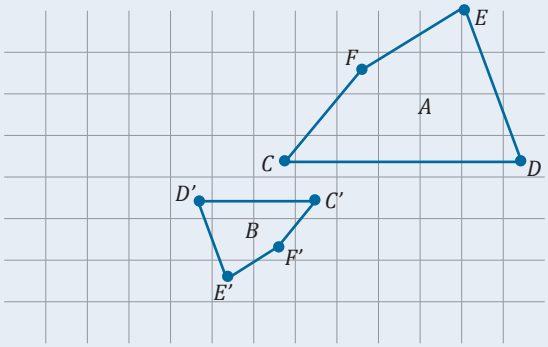
c.



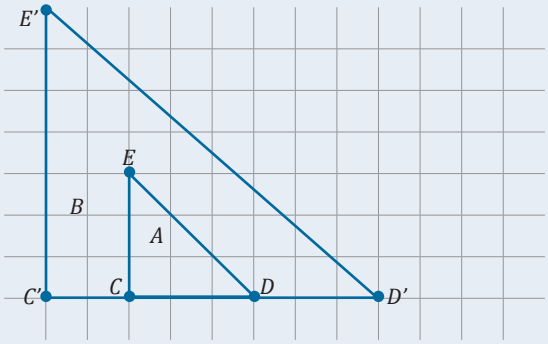
d.



e.

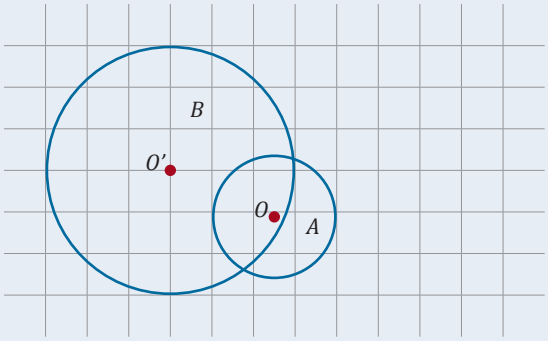


f.

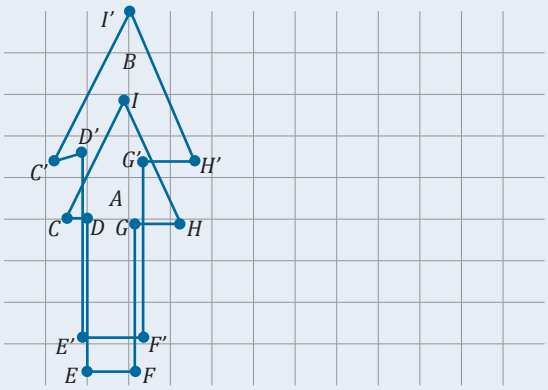




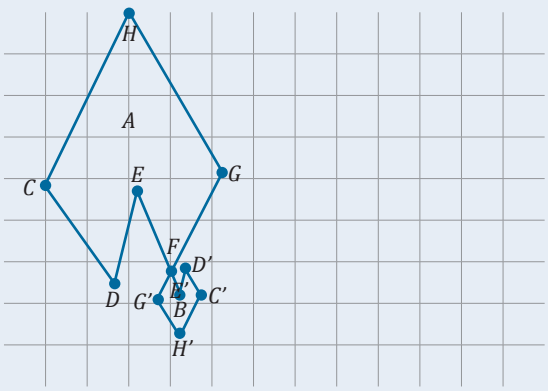
g.



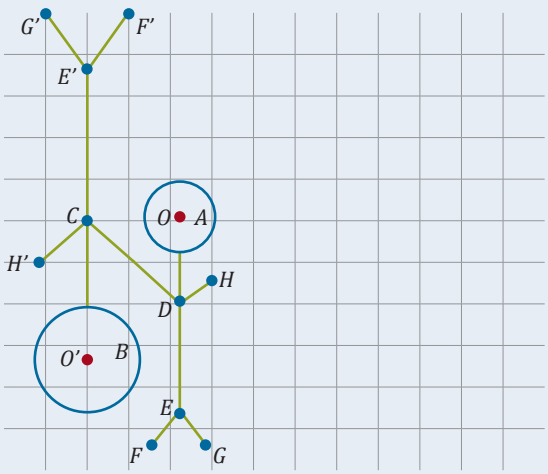
h.



i.



j.



3 En cada uno de los siguientes ejercicios se ha dado la medida de un trazo y la razón de homotecia que se le aplicará a esta. Encuentra la medida del trazo homotético al dado bajo la razón dada:

a. $\overline{AB} = 6$ cm, $r = -3$

b. $\overline{AB} = \frac{4}{3}$ cm, $r = \frac{5}{2}$

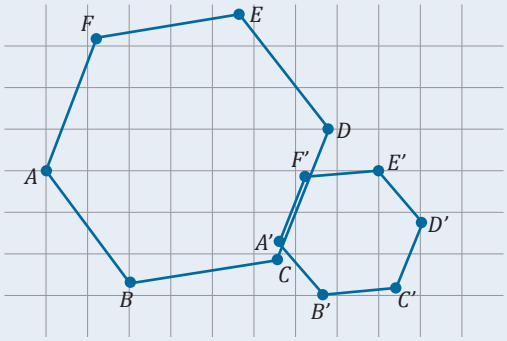
c. $\overline{AB} = 9$ cm, $r = \frac{\sqrt{3}}{5}$

d. $\overline{AB} = \frac{12}{7}$ cm, $r = -\frac{2}{5}$

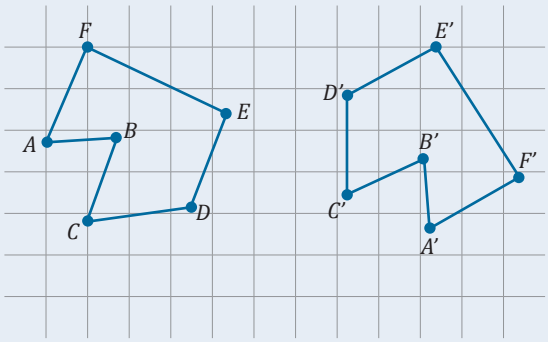
e. $\overline{AB} = \frac{3\sqrt{2}}{5}$ cm, $r = -\frac{3\sqrt{2}}{7}$

4 ¿En cuál de los siguientes pares de figuras existe homotecia? Justifica tu respuesta:

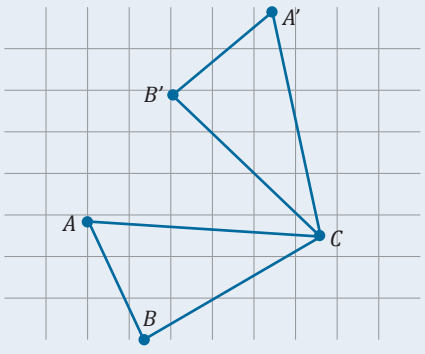
a.



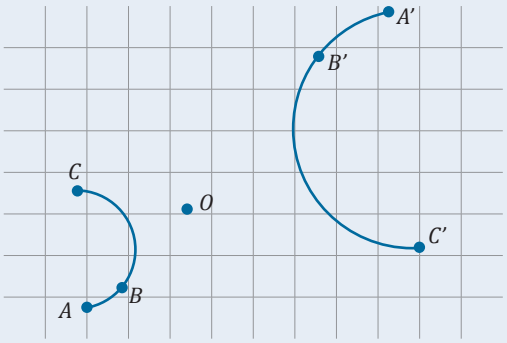
b.



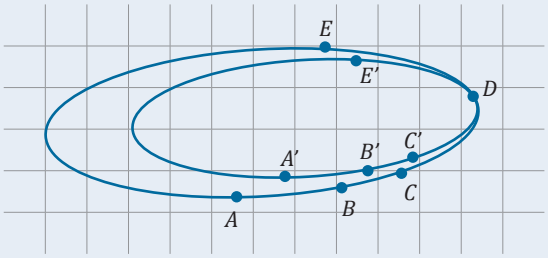
c.



d.



e.



5 Los trazos $\overline{A'B'}$ que se dan a continuación son los homotéticos de los trazos $\overline{AB}$. Encuentra la razón de homotecia aplicada:

a. $\overline{A'B'} = 12$ cm, $\overline{AB} = 7$ cm

b. $\overline{A'B'} = 15$ cm, $\overline{AB} = \sqrt{2}$ cm

c. $\overline{A'B'} = \frac{12}{5}$ cm, $\overline{AB} = \frac{1}{3}$ cm

d. $\overline{A'B'} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$ cm, $\overline{AB} = 2\sqrt{2}$ cm

e. $\overline{A'B'} = \frac{9}{8}$ cm, $\overline{AB} = \frac{1}{2}$ cm

6 Se ha medido el área o el perímetro de diferentes polígonos, según se indica a continuación. Determina el área o perímetro de un polígono homotético al del dato dado, si la razón de homotecia es la indicada: (A y P corresponden al área y al perímetro de la figura original respectivamente, y A' y P' son el área y el perímetro de figura homotética respectivamente)

a. $P = 41$ cm, $r = \frac{2}{3} \Rightarrow P' = ?$

b. $A = 52$ cm^2, $r = -\frac{1}{5} \Rightarrow A' = ?$

c. $P = \frac{82}{3}$ cm, $r = \frac{9}{5} \Rightarrow P' = ?$

d. $A = 46$ cm^2, $r = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow A' = ?$

e. $A = \frac{\sqrt{3}}{2}$ cm^2, $r = \frac{3}{4} \Rightarrow A' = ?$

7 Al triángulo de vértices A: $(2,2)$, B: $(4,2)$ y C: $(3,4)$ se le ha aplicado una homotecia de centro A y razón -2. Determina:

a. Dibuja en el plano cartesiano el triángulo homotético $A'B'C'$.

b. El perímetro del triángulo ABC.

c. El área del triángulo ABC.

d. El perímetro del triángulo $A'B'C'$.

e. El área del triángulo $A'B'C'$

8 La figura de vértices A': $(1,5)$, B': $(0,4)$, C': $(1,2)$ y D': $(4,3)$ es la homotética de otro cuadrilátero. Si el centro de homotecia se encuentra en el origen del plano cartesiano y la razón de homotecia aplicada fue de -3, determina (puedes usar el programa GeoGebra, aproxima tus resultados a la centésima):

a. El perímetro del cuadrilátero $ABCD$ (figura original).

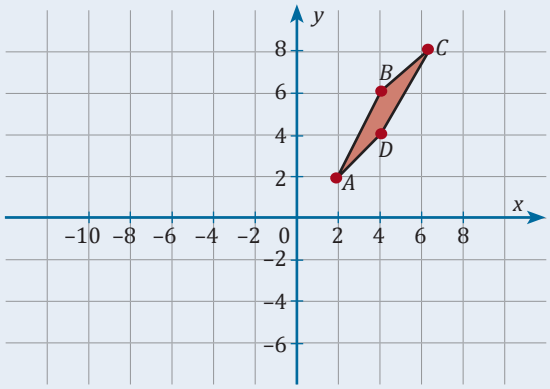
b. La medida de la diagonal $\overline{BD}$.

c. La medida de la diagonal $\overline{AC}$.

d. El área del cuadrilátero $A'B'C'D'$.

e. El área del cuadrilátero $ABCD$

9 Se tiene la siguiente figura:

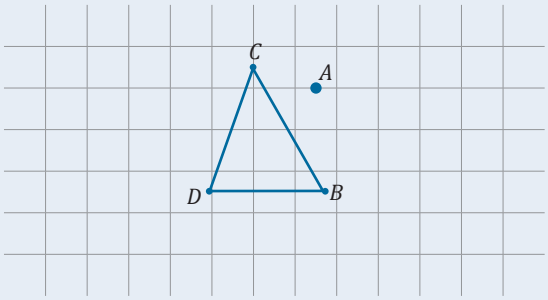


Y se sabe que la razón de homotecia es $k = -\frac{2}{5}$ y el centro de homotecia está en el vértice A determina los vértices de la figura homotética.

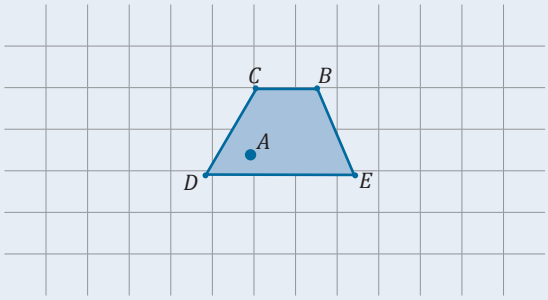


10 Dadas las siguientes figuras, construye dos figuras homotéticas a ellas: una de razón 2 y centro de homotecia el punto A, y la otra, homotética a la construida anteriormente con centro en el vértice B y razón $-\frac{1}{2}$:

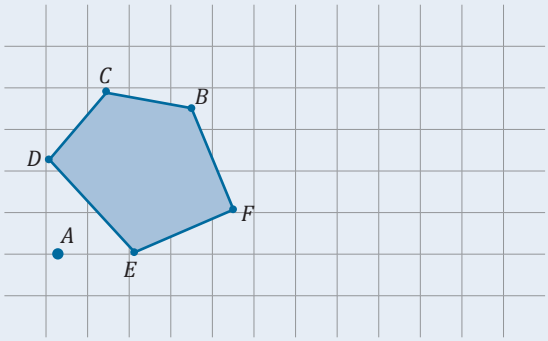
a.



b.



c.



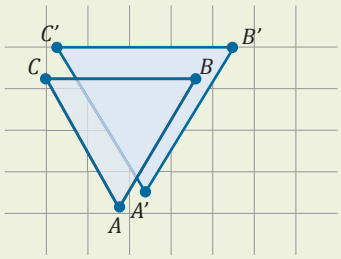
d. ¿Son homotéticas la figura dada con la última construida?

Trabaja

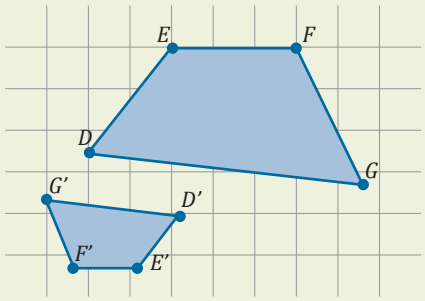
Resuelve con tu grupo los siguientes ejercicios. No olvides corregirlos, chequeando las respuestas en el solucionario.

1 Sebastián está estudiando diseño industrial y en uno de sus cursos le han pedido que defina el centro de homotecia de las siguientes figuras, y que diga si la razón de homotecia es positiva o negativa, y dé una estimación de su valor. Tú ya sabes hacer esto... Ayuden a Sebastián en su tarea:

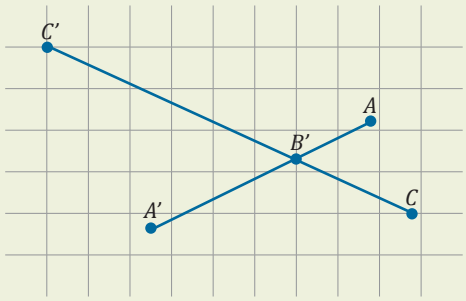
a.



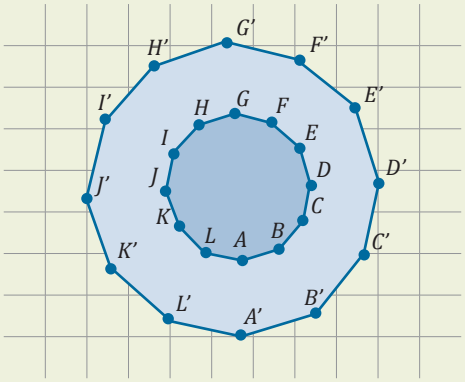
b.



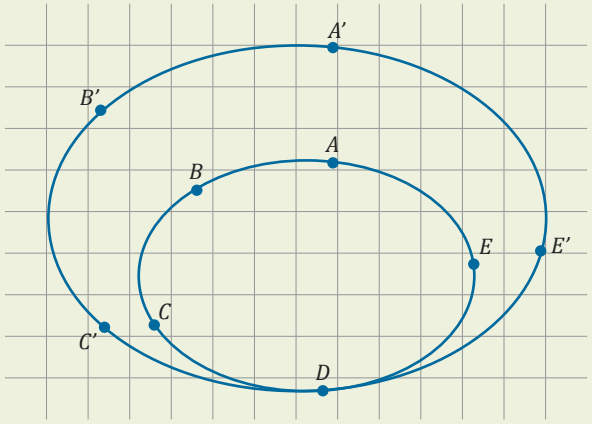
c.



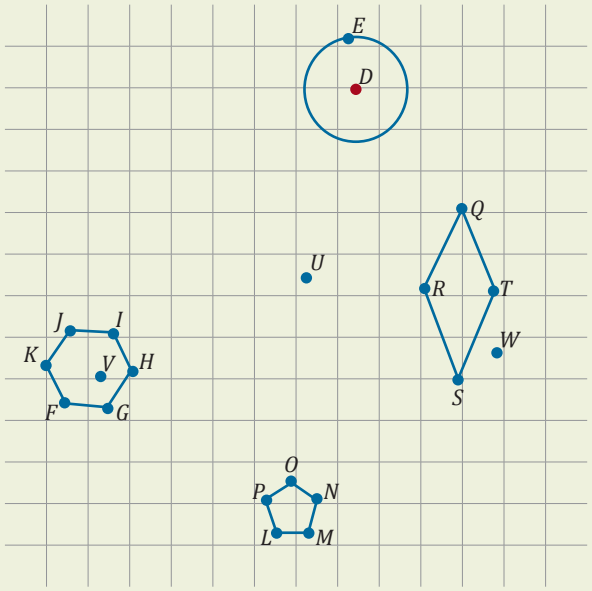
d.



e.



2 Mariela es paisajista y está trabajando en un jardín. Para ello, debe dibujar las figuras homotéticas de cada una de las siguientes figuras, según las instrucciones que se detallan a continuación… ¿Cómo quedará su jardín?... Averíguenlo trazando las homotecias pedidas (pueden usar el programa GeoGebra).



a. Homotecia del hexágono con centro en V y razón 0,5.

b. Homotecia del pentágono con centro en U y razón 1,5.

c. Homotecia del cuadrilátero con centro en W y razón $\frac{2}{3}$.

d. Homotecia de la circunferencia con centro en U y razón $-\frac{1}{3}$.

3 Paulo está haciendo su práctica en una compañía de diseño inmobiliario. Hoy, su jefe le ha dicho que, en un plano cuadriculado (sistema de coordenadas cartesianas) que simula el tapiz de un sofá, se ha bordado un triángulo de vértices $(0,4)$, $(2,1)$, $(3,3)$. Luego, se debe aplicar una homotecia de centro en el origen y razón $\frac{1}{2}$. Ayuden a Paulo a responder las siguientes preguntas que debe contestar en un informe para su jefe:

a. ¿Cuáles son las medidas de los lados del triángulo homotético?

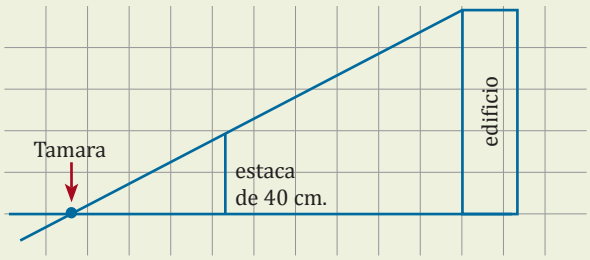
b. ¿Cuál es la razón de semejanza de ambos triángulos?

c. ¿Cuál es el área del triángulo mayor?

d. ¿Cuál es el área del triángulo menor?

e. Dibuja un plano cartesiano con ambas figuras.

4 Tamara quería medir el edificio que está frente a su casa. Para ello se le ha ocurrido una solución muy ingeniosa. Observen el bosquejo que ella hizo,



Tamara pensó que si conseguía mirar el extremo superior de la estaca y del edificio alineadamente y, si pudiera medir su distancia a la estaca, lograría saber la altura del edificio. De acuerdo a lo que ella propone, respondan:

a. ¿Están de acuerdo con Tamara? ¿Por qué?

b. ¿Es una homotecia la figura representada en el dibujo?

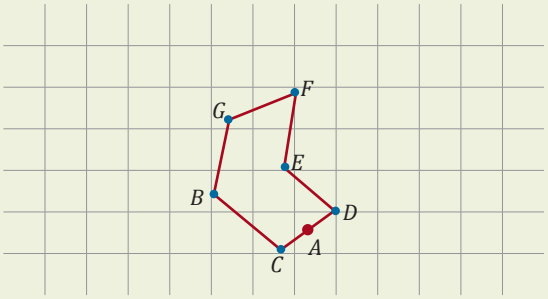
c. Pueden usar aquí también el teorema de Tales, ¿es la homotecia una aplicación del teorema de Tales?

d. Si la distancia de Tamara a la estaca y al edificio son de $1{,}2$ m y 30 m respectivamente, ¿cuál es la altura del edificio?

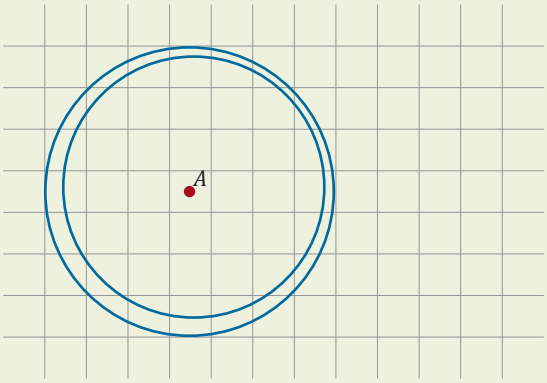
e. Si Tamara hubiera querido usar una estaca de 80 cm, ¿a qué distancia del edificio se debería haber colocado si deseaba mantener la medida de su estaca?

5 Su compañero de curso, Alonso, debe disertar en su curso sobre homotecias. Luego de su disertación, que por cierto estuvo muy bien según lo que le dijo su profesor, Alonso les plantea los siguientes problemas a modo de ejercitación sobre lo que disertó:

a. Dibujen la figura homotética a la dada con centro en A y razón $\frac{5}{4}$



b. Encuentren el centro de homotecia en la siguiente figura:



c. Si un triángulo equilátero tiene perímetro 66 cm y su homotético tiene lado 4 cm, ¿cuál es la razón de homotecia?

d. Si una figura tiene área 34 cm^2 y la razón de homotecia es $\frac{2}{3}$, ¿qué porcentaje del área original es la nueva área?

e. Si una figura tiene perímetro 48 cm y la razón de homotecia es $-\frac{5}{4}$, ¿cuál es el perímetro de la nueva figura?

Sintetizando

- Un plano cartesiano está dividido en cuadrantes, que se nombran con números romanos y en sentido contrario al movimiento de los punteros del reloj, formados por dos rectas numéricas, perpendiculares, que se intersectan en un punto llamado origen de coordenadas $(0,0)$.
- Podemos calcular el punto medio entre dos puntos, A: $(x_1 y_1)$ y B: $(x_2 y_2)$ mediante la fórmula: $M_{\overline{AB}} = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right)$, donde $\overline{AB}$ denota el trazo formado por los puntos A y B.
- De la misma forma, la distancia entre A y B, o la medida del segmento $\overline{AB}$ la podemos calcular mediante la fórmula: $d_{\overline{AB}} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$
- La homotecia puede considerarse como una operación vectorial, ya que es la resultante de ponderar vectores dirección (del centro de homotecia hasta cada punto de la figura) por un escalar (razón de homotecia).

Trabaja más...

I. Plano cartesiano y punto medio

1 Dibuja en tu cuaderno un plano cartesiano y ubica en él, los siguientes puntos:

a. A: $(1,3)$; B: $(5,2)$; C: $(2,5)$; D: $(4,1)$

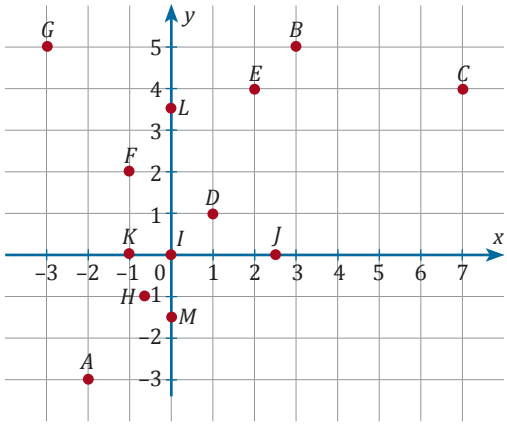
b. E: $(-3,-2)$; F: $(1,4)$; G: $(4,-2)$; H: $(5,-1)$

c. I: $(0,-3)$; J: $(7,0)$; K: $(0,4)$; L: $(-3,0)$

2 ¿Cuál es el valor de la ordenada para todos los puntos que están sobre el eje x?

3 ¿Cuál es el valor de la abscisa para todos los puntos que están sobre el eje y?

4 Para los puntos representados en el plano cartesiano, escribe sus coordenadas.



5 En tu cuaderno, dibuja los segmentos que unen los siguientes pares de puntos.

a. A: $(-1,2)$ y B: $(2,5)$

b. C: $(2,0)$ y D: $(0,-3)$

c. E: $(1,3)$ y F: $(4,-2)$

d. G: $(-3,4)$ y H: $(-2,2)$

e. I: $(-1,-1)$ y J: $(3,-3)$

6 Dibuja en tu cuaderno la figura que se forma al unir los siguientes puntos. Hazlo en orden alfabético e indica su nombre en cada caso:

a. A: $(2,5)$; B: $(-2,2)$ y C: $(2,1)$

b. D: $(3,3)$; E: $(4,1)$; F: $(6,2)$ y G: $(5,4)$

c. H: $(-3,1)$; I: $(-3,-2)$; J: $(1,-2)$ y K: $(1,-1)$

7 Determina las coordenadas del punto medio para cada par de puntos.

a. A: $(-2,4)$ y B: $(2,4)$

b. C: $(1,2)$ y D: $(1,-3)$

c. E: $(2,6)$ y F: $(1,4)$

d. G: $\left(\frac{1}{4},2\right)$ y H: $\left(\frac{7}{2},3\right)$

e. I: $(-5,-4)$ y J: $(-3,-8)$

8 Determina en cada caso, las coordenadas de un segundo punto, dado el primer punto y el punto medio (M) entre ambos:

a. A: $(-4,3)$; M: $(-1,3)$

b. C: $(4,5)$; M: $\left(4,\frac{3}{2}\right)$

c. E: $(-3,-2)$; M: $(1,2)$

9 Determina los valores de x e y en cada caso, sabiendo que M es el punto medio de los otros dos puntos.

a. A: $(x,2)$; B: $(3,y)$; M: $(5,-3)$

b. C: $(3,x)$; D: $(y,-2)$; M: $(-4,5)$

c. E: $(x+3,\ 5)$; F: $(-2,\ y-3)$; M: $\left(\frac{1}{2},-3\right)$

10 Una pelota se suelta desde un punto a 10 metros de altura. Al chocar contra el suelo, rebota alcanzando justo la mitad del recorrido original. En el segundo rebote, vuelve a llegar a la mitad y así sucesivamente. Grafica esta situación en un plano cartesiano, donde el eje x representa el suelo y el eje y representa la altura:

a. Las coordenadas de la pelota en el primer rebote (suponiendo que se mueve solo verticalmente).

b. Las coordenadas de la pelota en el tercer rebote.

11 ¿Cuál es la condición para que un punto del plano cartesiano se encuentre

a. sobre el eje de las abscisas?

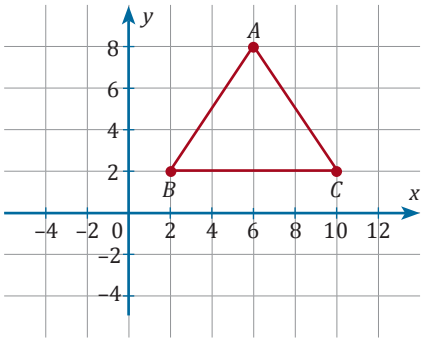
b. sobre el eje de las ordenadas?

12 Señala cuál es la figura geométrica que se forma al unir los vértices: A: $(0,3)$; B: $(3,3)$; C: $(4,-1)$ y D: $(-3,-1)$.



13 Ubicar cuatros puntos del plano que estén en una línea recta y que esta pase por el punto P: $(-2,5)$.

14 Dado el triángulo de la figura.



Determina:

a. Las coordenadas de los puntos medios de cada lado.

b. Las transversales de gravedad, uniendo cada vértice con el punto medio del lado opuesto.

c. Las coordenadas del punto donde se intersectan las transversales de gravedad.

15 Para responder las siguientes preguntas, previamente debes hacer una representación gráfica de los segmentos o polígonos, conforme a los puntos dados. Luego, analiza las relaciones entre las medidas de los trazos involucrados (que deben estar expresadas con dos decimales).

a. ¿Cuál es la medida del $\measuredangle SIN$, si S: $(-4,-1)$, I: $(0;2,2)$ y N: $(1,3)$? ¿Por qué?

b. Indica la medida del $\measuredangle CON$. Justifica tu respuesta.

c. Si P: $(2,1)$, S: $(1,77\ ;4,6)$ y R: $(5,3)$, ¿cuánto mide $\measuredangle PSR$? Justifica tu respuesta

d. El $\measuredangle AOB$ mide $60°$ siendo $A(-1,5\ ;0)$, O: $(0,0)$ y B: $(-1,5\ ;2,6)$. ¿Cuánto es la medida de $\measuredangle ABO$? ¿Por qué?

e. Encuentra el valor del $\measuredangle GFC$, sabiendo que C: $(2,-1)$, F: $(5;4,2)$ y G $(5,-1)$, ¿por qué?

f. Las coordenadas de los vértices del cuadrilátero $ABCD$ son: A: $(-2,-1)$, B: $(0,-4)$, C: $(2,-1)$ y D: $(0,4)$. El ángulo en B mide $67{,}38°$, en cambio la medida del ángulo en D es $43{,}6°$. ¿Cuánto mide el ángulo en A?

16 En un plano cartesiano, ubica A: $(6,-4)$ y luego un punto B, que cumpla la siguiente condición:

a. Tenga igual ordenada que A, pero diste trece unidades a la izquierda del eje y.

b. Esté a cinco unidades a la izquierda, y además a siete unidades hacia abajo del punto A.

c. El valor de su abscisa sea el inverso multiplicativo del que tiene A, pero su ordenada equivalga al cuadrado del valor de la ordenada del otro.

17 Justificando tu respuesta, indica en qué cuadrante debiera ubicarse el punto medio M del segmento que tiene por extremos a:

a. $(-1;-1,2)$ y $(0,9\ ;1,3)$

b. $(135,-211)$ y $(-112,135)$

18 M: $(2,5\ ;1)$ es el punto medio entre A: $(6,-4)$ y B. Encuentra las coordenadas de B.

19 Sabiendo que x e y son números reales, N: $\left(-x,-\frac{3}{4}y\right)$ y M: $\left(5x,\frac{y}{4}\right)$ puntos del plano cartesiano y A: $(-11,-15)$ es el punto medio de $\overline{MN}$.

a. ¿Cuáles son las coordenadas de M y N?

b. Sin considerar A, ¿cuál de los puntos mencionados dista más del eje horizontal? Justifica tu respuesta.

c. Escribe las coordenadas de un par de puntos, S y T, de tal manera de formar un rectángulo con M y N y cuyos lados estén paralelos a los ejes coordenados.

d. Haciendo los desarrollos necesarios, ¿por qué A es el punto de intersección de las diagonales del rectángulo formado anteriormente?

20 Se desea construir la simetral del trazo cuyos extremos son $(11,13)$ y $(-1,5)$. ¿Cuáles son las coordenadas del punto por la cual dicha simetral lo intersecta? (Recuerda que la simetral es la perpendicular que pasa por el punto medio de cada lado).

II. Distancia entre dos puntos

1 Calcula la distancia entre los siguientes pares de puntos:

a. $(-5,-3)$ y $(-2,-9)$

b. $(2{,}10)$ y $(5{,}7)$

c. $\left(\frac{1}{3},3\right)$ y $\left(2,\frac{1}{2}\right)$

d. $\left(2\frac{1}{4},3\frac{1}{2}\right)$ y $(-1{,}3)$

e. $(\sqrt{2},\sqrt{3})$ y $(2\sqrt{2},3\sqrt{3})$

2 Determina en cada caso la medida del trazo pedido:

a. El radio de la circunferencia de centro $(2{,}2)$, que pasa por el punto $(1{,}4)$.

b. El diámetro de la circunferencia de centro $(-3,-2)$, que pasa por el punto $(6,-4)$.

c. El trazo que une el punto $(-7{,}5)$ con el punto medio del trazo de extremos $(1{,}3)$ y $(-4{,}8)$.

d. La altura del triángulo equilátero de vértices $(0{,}0)$, $(0{,}6)$ y $(-5{,}2\ ;3)$.

e. La diagonal del cuadrado de vértices $(2,-4)$, $(1,-1)$, $(6{,}2)$ y $(3{,}7)$.

3 Ubica los puntos A: $(-3{,}1)$; B: $(0{,}4)$; C: $(3{,}4)$ y D: $(3{,}1)$ en un plano cartesiano y luego determina:

a. Los puntos medios de cada segmento.

b. Calcula el perímetro de la figura que resulta de unir los puntos medios.

c. ¿Qué tipo de figura se forma con los puntos originales?, ¿qué figura se forma con los puntos medios?

4 Tres de los vértices de un rectángulo son los puntos A: $(-2{,}3)$; B: $(1{,}3)$ y C: $(-2,-1)$ determina:

a. El cuarto vértice.

b. El área del rectángulo.

5 Dada la figura de vértices A: $(4{,}5)$, B: $(2{,}3)$, C: $(2,-2)$ y D: $(5,-1)$, determina:

a. Los puntos medios de sus lados.

b. El perímetro de la figura formada al unir los puntos medios determinados en la parte **a.** Aproxima tu respuesta a la centésima.

c. ¿Qué tipo de cuadrilátero es $ABCD$? Justifica tu respuesta.

6 Un polígono tiene vértices A: $(-4{,}6)$, B: $(-6{,}2)$, C: $(-3,-2)$, D: $(2{,}0)$ y E: $(2{,}6)$. Determina:

a. Si existen lados de igual medida en el pentágono.

b. El lado de mayor longitud.

c. El perímetro del pentágono.

d. La medida de la diagonal $\overline{AD}$.

e. La longitud del trazo que une el vértice B con el punto medio del lado $\overline{ED}$.

7 Usando un plano cartesiano, dibuja en él un triángulo cualquiera. Demuestra, usando los contenidos de esta unidad, que:

a. La suma de dos de sus lados es mayor que el tercer lado.

b. Las medianas del triángulo miden la mitad del lado opuesto del triángulo. (La mediana es el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo).

8 El triángulo ABC tiene por vértices los puntos A: $(-10{,}6)$, B: $(-8{,}2)$ y C: $(-4{,}4)$:

a. Demuestra que el triángulo ABC es rectángulo.

b. Encuentra la medida del radio de la circunferencia circunscrita al triángulo. (Para circunscribir una circunferencia en un triángulo, en primer lugar debes dibujar una simetral de uno de los lados y luego dibujar lo mismo para otro de los lados. El punto donde ambas simetrales se intersecten será el centro de la circunferencia y con respecto a este punto y al radio, dado por la distancia entre este punto y uno de los vértices que contienen a este trazo, dibujas la circunferencia)

c. Calcula la medida de las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

d. Determina el perímetro del triángulo ABC.

e. Calcula el área del triángulo ABC.



9 Al resolver las siguientes ecuaciones $2x^2 + 3x - 20 = 0$; $-3y^2 - 10y + 25 = 0$, se obtienen dos valores para cada variable. Se forman dos puntos cuyas abscisas son los valores de x y las ordenadas son los otros valores, de tal manera que los puntos formados pertenezcan al segundo y cuarto cuadrante.

a. ¿Cuáles son las coordenadas de estos puntos?

b. ¿A qué distancia se encuentran entre sí?

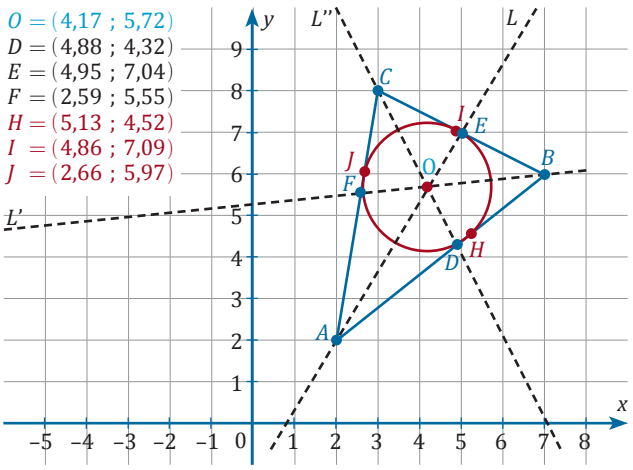
c. Encuentra el centro de la circunferencia que pase por ambos.

d. Trasladando cada uno de los puntos de **a.**, en cuatro unidades hacia la derecha y tres hacia abajo, indica en qué posición han quedado.

e. ¿De qué manera se puede obtener el nuevo punto medio, a partir del centro la circunferencia hallada en **c.**?

10 En un plano cartesiano se han representado un triángulo, tres rectas que se intersectan en un punto, y una circunferencia con centro en esta intersección y que está tangente con los lados del triángulo. Además se agregan las coordenadas de algunos puntos. Aplicando la fórmula de distancia, responde usando tu calculadora aproximando a la centésima.

$O = (4{,}17\ ;\ 5{,}72)$
$D = (4{,}88\ ;\ 4{,}32)$
$E = (4{,}95\ ;\ 7{,}04)$
$F = (2{,}59\ ;\ 5{,}55)$
$H = (5{,}13\ ;\ 4{,}52)$
$I = (4{,}86\ ;\ 7{,}09)$
$J = (2{,}66\ ;\ 5{,}97)$



a. ¿A qué distancia se encuentran D y E?

b. ¿Cual debiera ser la longitud del trazo cuyos extremos fueran E y F?

c. ¿A cuántas unidades se encuentra D de F?

d. ¿Cuál es el valor del radio de la circunferencia inscrita?

e. Encuentra la longitud de $\overline{BI}$.

f. ¿Cuánto es la medida de $\overline{AH}$?

g. ¿A qué distancia se encuentran C y J?

h. Los valores que has encontrado en **e.**, **f.** y **g.** también se repiten en relación a otras distancias entre los vértices y los puntos destacados en rojo. Indica a cuáles trazos se refieren y por qué.

i. Si formáramos un triángulo con los puntos C, J y O, ¿sería rectángulo? Justifica tu respuesta.

11 Demuestra, usando la fórmula de distancia entre dos puntos, que los siguientes tríos de puntos son colineales:

a. A: $(1{,}5)$, B: $(-3, -7)$ y C: $(5{,}17)$

b. A: $(8{,}7)$, B: $(6{,}5)$ y C: $(-2, -3)$

c. A: $\left(\frac{1}{2}, 1\right)$, B: $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ y C: $\left(3, \frac{7}{2}\right)$

d. A: $(1, 3\sqrt{3})$, B: $(-3, -\sqrt{3})$ y C: $(0, 2\sqrt{3})$

e. A: $\left(6, \frac{5}{2}\right)$, B: $\left(-\frac{15}{2}, -2\right)$ y C: $\left(-1, \frac{1}{6}\right)$

12 Usando la fórmula de distancia, prueba que el punto A, es el punto medio del segmento que une los puntos B y C dados en cada caso:

a. A: $\left(\frac{5}{2}, \frac{15}{2}\right)$ de B: $(3{,}6)$ y C: $(2{,}9)$

b. A: $(-4{,}3)$ de B: $(-5{,}4)$ y C: $(-3{,}2)$

c. A: $\left(1, \frac{3}{2}\right)$ de B: $(2{,}0)$ y C: $(0{,}3)$

d. A: $(1{,}3)$ de B: $(-3{,}9)$ y C: $(5, -3)$

e. A: $\left(1, \frac{5}{4}\right)$ de B: $\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{4}\right)$ y C: $\left(\frac{5}{3}, \frac{9}{4}\right)$

13 Se ha dibujado un cuadrado de vértices $(0{,}0)$, $(2, -2)$, $(4{,}0)$ y $(2{,}2)$. Determina:

a. El perímetro del cuadrado.

b. El área del cuadrado.

c. Los puntos medios de los lados del cuadrado.

d. La medida de las diagonales del cuadrado.

e. El área del cuadrado formado, al unir los puntos medios de los lados del cuadrado.

14 Los siguientes puntos son los vértices de diferentes triángulos. Clasifícalos según sus lados y calcula su perímetro y área:

a. $(0,0)$, $(2,0)$ y $(1,2)$

b. $(-1,1)$, $(2,1)$ y $(2,3)$

c. $(-1,-1)$, $(1,1)$ y $(-1,3)$

d. $(3,-1)$, $(2,2)$ y $(-1,1)$

e. $(-2,-2)$, $(0,0)$ y $(1,-2)$

15 Dados los puntos A y B, vértices de un triángulo, determina un punto C en el plano, de modo que el triángulo ABC sea equilátero:

a. A: $(1,4)$ y B: $(3,2)$

b. A: $(-6,5)$ y B: $(-2,1)$

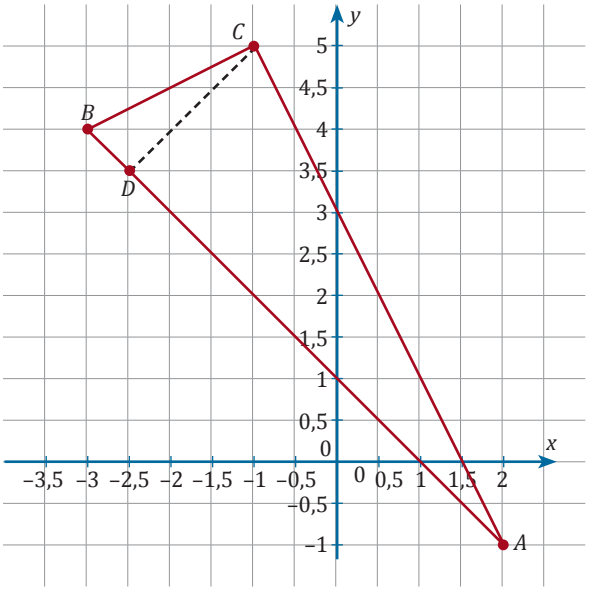
16 Las coordenadas del centro de una circunferencia son C: $(3,1)$ y se mencionan tres puntos de ellas P: $(4,3)$, Q: $(6,2)$ y R: $(2,-1)$. Sin embargo, hay uno de estos tres últimos que no corresponde. ¿Cuál es? ¿Por qué? Responde haciendo los cálculos necesarios.

17 Usando la fórmula de la distancia entre dos puntos, determina cuál de los siguientes tríos son puntos colineales; es decir, que están en una misma recta:

a. P: $(1,4)$, Q: $(4,-2)$ y R: $(-1,8)$

b. G: $(-2,3)$, H: $(-6,5)$ e I: $(-10,9)$

18 Con la información dada en el gráfico siguiente, responde a lo que se requiere en cada letra:

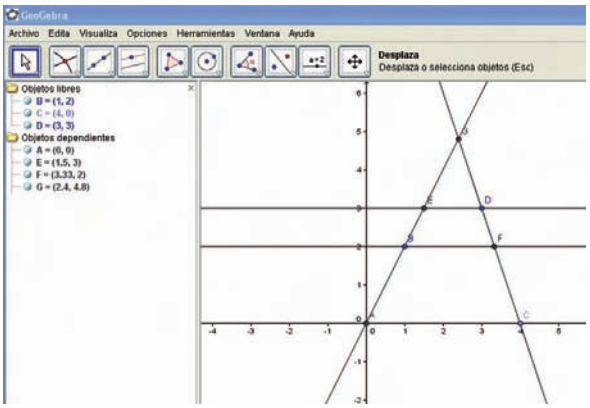


a. ¿Es el $\triangle ABC$, rectángulo en C? Justifica tu respuesta.

b. Haciendo uso solo de la fórmula de distancia estudiada, indica cuántas unidades mide $\overline{CD}$.

c. Obtén el valor de $\overline{CD}$, utilizando uno de los teoremas de Euclides.

19 Se ha hecho el siguiente dibujo en el programa GeoGebra. Con las coordenadas de los puntos que allí aparecen: haciendo uso de tu calculadora y, aproximando a la centésima las medidas de los trazos, prueba las siguientes igualdades deducidas del teorema de Thales:



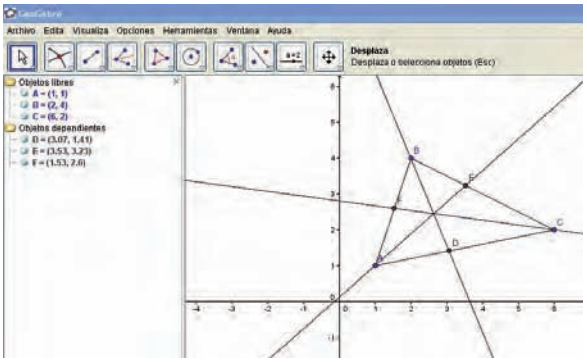
a. $\dfrac{\overline{GE}}{\overline{BG}} = \dfrac{\overline{GD}}{\overline{GF}}$

b. $\dfrac{\overline{GE}}{\overline{EB}} = \dfrac{\overline{GD}}{\overline{DF}}$

c. $\dfrac{\overline{GE}}{\overline{ED}} = \dfrac{\overline{GB}}{\overline{BF}}$

d. $\dfrac{\overline{GD}}{\overline{DE}} = \dfrac{\overline{GF}}{\overline{BF}}$

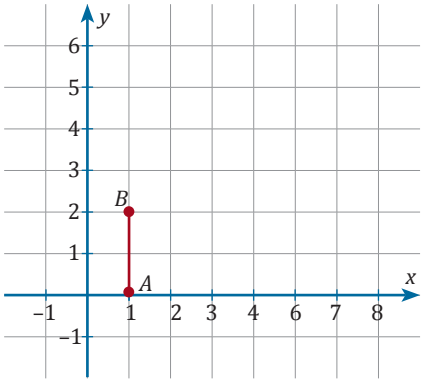
20 En el triángulo de la figura se han trazado las bisectrices de los ángulos interiores. Con la información de los puntos dados, prueba las siguientes proporciones (teorema de las bisectrices). Aproxima tus resultados a la centésima:



a. $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{BA}} = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{BC}}$ **b.** $\dfrac{\overline{AF}}{\overline{CA}} = \dfrac{\overline{BF}}{\overline{BC}}$ **c.** $\dfrac{\overline{BE}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{EC}}{\overline{AC}}$

III. Homotecia

1 Para el segmento de la figura, determina:



a. La figura homotética de $\overline{AB}$, con razón 3 y centro en el origen de coordenadas.

b. Indica las coordenadas de A' y B'.

c. La razón de homotecia (r) si al aplicar otra homotecia al segmento $\overline{AB}$, las coordenadas homotéticas son A': $(-2, -4)$ y B': $(-2,0)$.

d. ¿Cuál es la distancia entre A y A'?

2 Dado un cuadrilátero de vértices A: $(-4,4)$; B: $(-2,0)$; C: $(4,4)$ y D: $(2,8)$, determina los vértices de los cuadriláteros que resultan de:

a. Aplicar una homotecia de razón 2 y centro $(0,0)$.

b. Aplicar una homotecia de razón $0,5$ y centro $(0,0)$.

c. Aplicar una homotecia de razón $-1,5$ y centro $(0,0)$.

3 Se tiene el punto B: $(1,5)$ y el punto A: $(3,2)$, se realiza una homotecia de B con centro en A y una razón -2, obteniendo la imagen o punto homotético B: $(7, -4)$. ¿Puedes explicar cómo se obtuvo el punto B?

4 Se tiene el triángulo de coordenadas A: $(-4,4)$, B: $(4,2)$ y C: $(-1, -5)$. Si se aplica una homotecia de razón -2 y centro D: $(2,1)$. Determinar:

a. A'

b. B'

c. C'

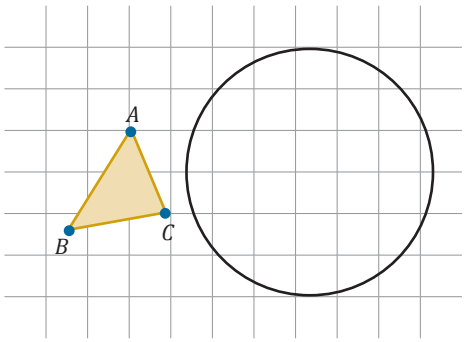
d. Punto medio de $A'B'$

e. $d_{\overline{AB}}$ y $d_{\overline{A'B'}}$

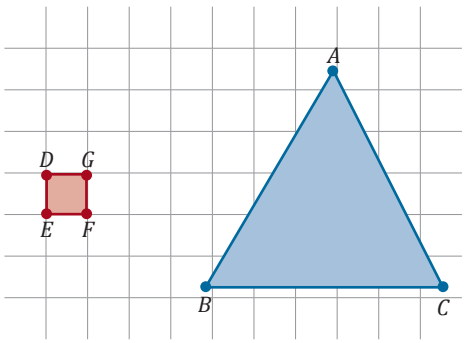
f. ¿Se cumple la razón de homotecia para $\overline{AB}$ y $\overline{A'B'}$?

5 Inscribir cada figura según lo pedido, aplicando homotecia:

a. Inscribir el triángulo ABC en la circunferencia de forma invertida.



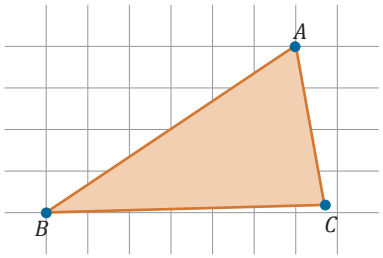
b. Inscribir el cuadrado $DEFG$ en el triángulo ABC.



6 Martín y Sofía, encargados de la decoración de la sala en la fiesta de aniversario, decidieron construir un heptágono regular, pero se complicaron porque querían que la diagonal de él fuera de 20 cm. ¿Puedes ayudarlos a resolver este problema con homotecia?

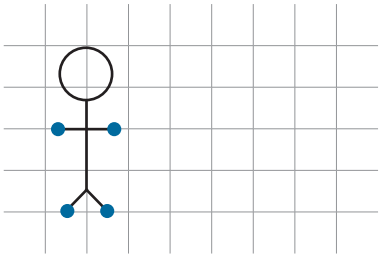
7 El curso superior al de Martín y Sofía, estaba adornando el carro alegórico. Isidora decía: "Tenemos que colocar un cuadrado dentro de este triángulo, ¿alguien sabe matemática?"... "Yo me acuerdo de las homotecias y creo que puedo hacerlo", –dijo Matías.

Intenta ahora tú inscribir un cuadrado dentro del triángulo de la figura.

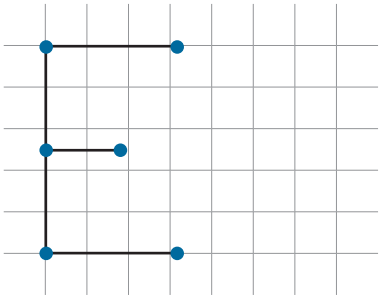


8 Dadas las siguientes figuras, dibuja en tu cuaderno, usando homotecia, otra figura invertida y del tamaño que se indica. Para cada una de ellas indica centro y razón de homotecia:

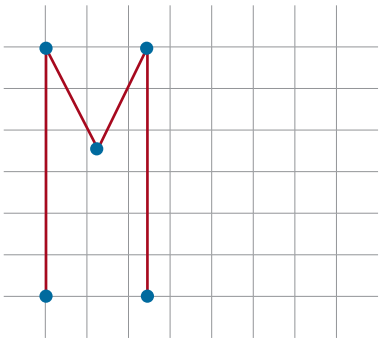
a. Tamaño de la figura homotética: un tercio de la original.



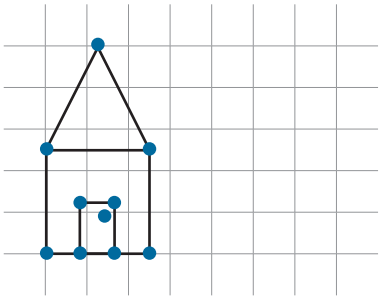
b. Tamaño de la figura homotética: el doble de la original.



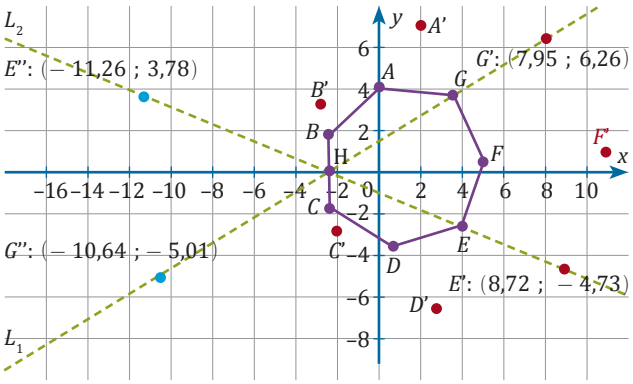
c. Tamaño de la figura homotética: la cuarta parte de la original.



d. Tamaño de la figura homotética: el triple de la original.



9 En el gráfico se muestran dos homotecias con el mismo centro H: $(-2{,}38\ ;0)$. La primera de ellas, se inicia con el heptágono para producir una figura homotética y cuyos vértices están en rojo. La segunda, se ha hecho para producir, en esta oportunidad, solamente dos puntos que son E'' y G''. Además, se han agregado dos rectas L_1 y L_2.



Responde a lo solicitado, haciendo uso de tu calculadora:

a. Une sucesivamente los vértices en rojo. ¿Qué polígono se ha formado? ¿Cómo podemos afirmar que es semejante?

b. ¿Cuál es la razón de homotecia del polígono homotético, sabiendo que $\overline{G'H} - \overline{GH} = 5{,}37$ y $\overline{GH} = 6{,}71$?

c. ¿A qué se debe que el lado $\overline{BC}$ del polígono original quede completamente incluido en $\overline{B'C'}$?

d. Encuentra la distancia entre E' y G'. Aproxima tu respuesta a dos decimales.

e. ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia que permite obtener E'' y G''?

10 Continuando con toda la información dada anteriormente:

a. Gráficamente, cada una de las rectas, L_1 y L_2, nos permiten apreciar la colinealidad o no colinealidad de puntos. ¿Son H, G, G', y G'' colineales? ¿Por qué? ¿Cuál es el punto común a ambas rectas? ¿A qué se debe esto?

b. Efectúa $x_H + (-0{,}8)(x_{G'} - x_H)$ y $y_H + (-0{,}8)(y_{G'} - y_H)$. Aproxima tu respuesta a la centésima. ¿Qué relación tienen los números obtenidos con G''?

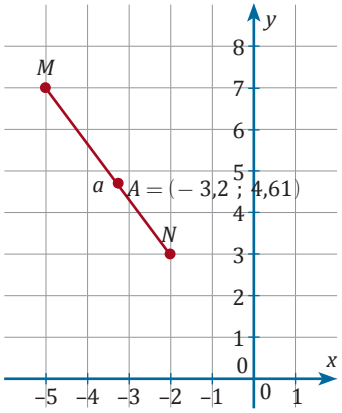
c. Repite lo realizado en **b.**, pero en relación a E".

d. Conjetura una regla que generalice la idea planteada en **b.** y **c.**

e. Realiza $x_H + \frac{1}{1{,}8}(x_G - x_H)$ y $y_H + \frac{1}{1{,}8}(y_G - y_H)$. Aproxima tu respuesta a la centésima. ¿Qué relación tienen los números obtenidos con G?

f. Propón una regla que generalice la idea planteada en **e.**

11 Dada la información en el gráfico:



a. Verifica que realmente estos puntos sean colineales. Usa dos decimales en tus cálculos.

b. Ahora bien, únicamente usando estos tres puntos, supongamos que dos de ellos son vértices de polígonos homotéticos. Entre estos tres puntos, establece la razón de homotecia, eligiendo:

i. El punto M como centro de homotecia, A como vértice del polígono original y N como homotético de A.

ii. El punto A como centro de homotecia, M como vértice del polígono original y N como homotético de M.

iii. El punto N como centro de homotecia, M como vértice del polígono original y A como homotético de M.

iv. El punto M como centro de homotecia, N como vértice del polígono original y A como homotético de N.

v. El punto A como centro de homotecia, N como vértice del polígono original y M como homotético de N.

vi. El punto N como centro de homotecia, A como vértice del polígono original y M como homotético de A.

12 Conforme a lo que has respondido en la parte **b.** de la pregunta anterior, responde ahora:

a. Para dos homotecias que tienen el mismo centro, ¿qué relación hay al comparar las dos razones de homotecias respectivas?

b. Propón una forma de establecer una transformación homotética entre tres puntos colineales dados.

c. ¿Son todas ellas las posibles homotecias que se pueden realizar usando únicamente M, A, N? ¿Qué vínculo se puede establecer entre el número de relaciones homotéticas que has escrito anteriormente y el número total de permutaciones, sin repetición, a partir de estos tres elementos?

d. A partir de solamente cuatro puntos colineales dados, ¿cuántas posibles homotecias se pueden efectuar? ¿Y con cinco?

e. Propón una fórmula que te permita calcular el número de homotecias posibles, usando únicamente n puntos colineales distintos, con $n \geq 3$.

13 Haciendo uso del programa GeoGebra:

a. Ubica los puntos A: $(9{,}8)$, B: $(4, -2)$, C: $(-2{,}4)$ y D: $(5{,}7)$ para formar un cuadrilátero.

b. Obtén el perímetro respectivo.

c. Localiza H, de tal manera que esté a tres unidades del eje y, y la unidad sobre el eje x. Este es el centro de homotecia de razón $-0{,}3$ y que se aplica al polígono formado anteriormente. Obtén el polígono homotético.

Ahora bien, con respecto a éste polígono:

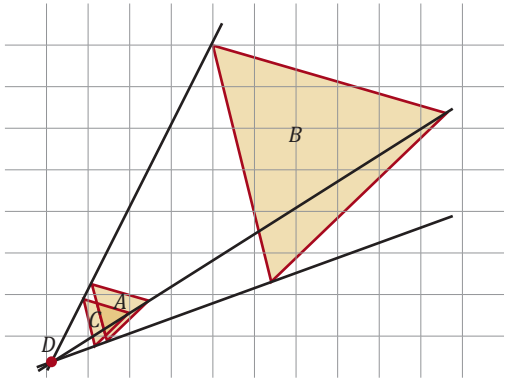
d. Escribe las coordenadas de sus vértices.

e. Obtén las medidas de cada lado de este último.

f. ¿Por qué H es exterior al polígono homotético?

g. Encuentra $-\frac{\overline{CH}}{\overline{C'H}}$ y explica su significado.

14 Tres triángulos equiláteros (A, B y C) son homotéticos con el mismo centro de homotecia, como se muestra en la figura. La razón de homotecia entre A y B es 4 y entre B y C es $\frac{1}{5}$. Determina:



a. La medida del lado del triángulo B, si la medida del triángulo A es $1{,}5$ cm.

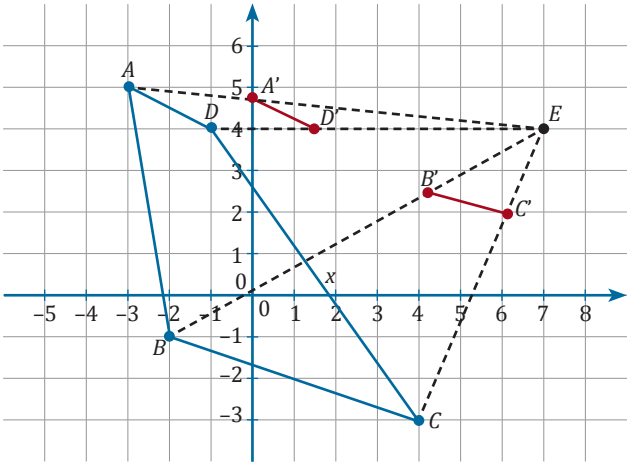
b. La medida del lado del triángulo C, en el caso anterior.

c. La razón de homotecia de C con respecto a A.

d. El perímetro de los tres triángulos, si el lado del triángulo A es 9 cm.

e. El área de los tres triángulos, si el lado del triángulo B es 12 cm.

15 Observa el gráfico que aparece más abajo, en el cual se destacan dos segmentos en rojo, como resultado de dos homotecias con razones diferentes.



a. ¿A qué distancia de A se encuentra el centro de la homotecia?

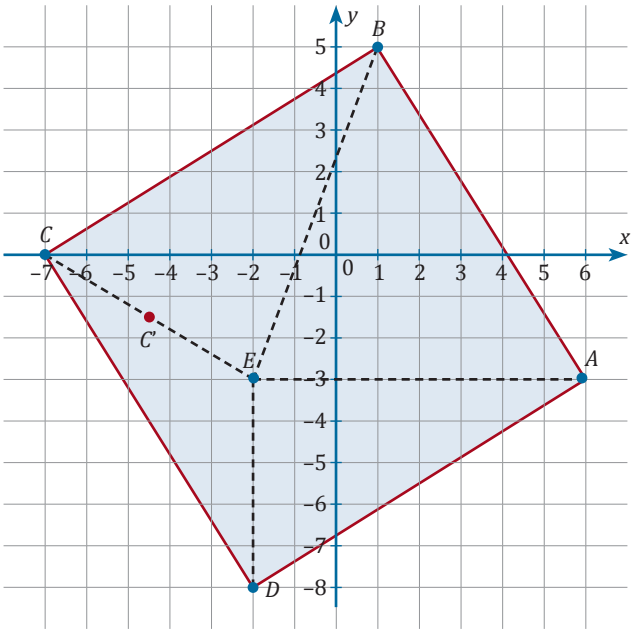
b. Encuentra la razón de la homotecia que genera a $\overline{A'D'}$ con A': $(0;\ 4{,}7)$.

c. Si $\overline{B'C'} = 1{,}9$, ¿cuánto más debiera medir este segmento, para que el cuadrilátero $A'B'C'D'$ fuera homotético del cuadrilátero que aparece en azul?

d. Encuentra el valor de $\frac{\overline{ED'}}{\overline{D'D}}$.

e. Supongamos que se unen los puntos C' y D', mediante un trazo si $D'(1{,}4\ ;4)$ ¿Cuánto es el perímetro del triángulo $C'D'E$?

16 El gráfico que a continuación te presentamos, muestra al cuadrilátero $ABCD$, y además, se destacan dos puntos interiores: E es el centro de una homotecia , y C' un extremo de un cuadrilátero homotético.



a. Verifica que $ABCD$ sea un cuadrado.

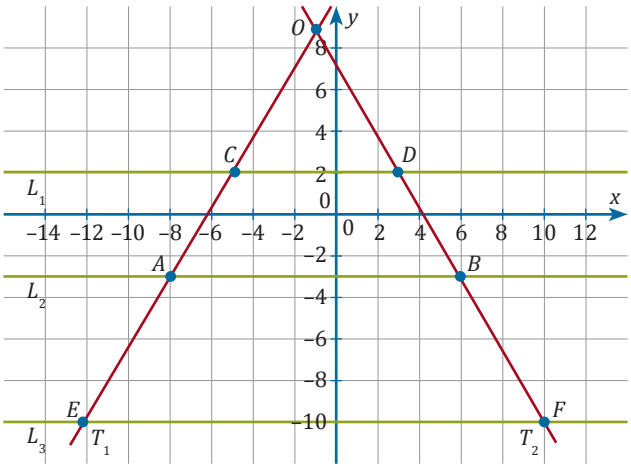
b. Determina las coordenadas de C', sabiendo que $\overline{CC'} = \overline{C'E}$.

c. ¿Cuál es la razón de esta homotecia para el punto C'?

d. Dibuja el cuadrilátero homotético correspondiente y encuentra las coordenadas de sus vértices.

e. Supongamos que manteniendo la razón de homotecia, C' y E se trasladan de tal manera que pasan a ser puntos de $\overline{AC}$, y quedando C' en la intersección de las diagonales $ABCD$. ¿La longitud del trazo será mayor a $3{,}35$ unidades? Justifica tu respuesta.

17 La gráfica siguiente está formada por las rectas L_1, L_2 y L_3 que son paralelas y dos transversales T_1 y T_2. Las coordenadas de todos los puntos son números enteros, excepto E y F cuyas abscisas son $-12{,}2$ y $10{,}2$ respectivamente, pero sus ordenadas son números enteros también. La ordenada del punto O es $8{,}67$.



a. Encuentra el perímetro del triángulo mayor.

b. ¿Son C y D los puntos medios de dos de los lados del $\triangle ABC$? ¿Por qué?

c. Supongamos que $\triangle CDO$ y $\triangle EFO$ son homotéticos de $\triangle ABO$, y con centro de homotecia O. Hallar ambas razones.

18 En un plano cartesiano dibuja un rectángulo $ABCD$. Luego, marca los puntos medios de los lados AB y AD, como E y F, respectivamente. Realiza las siguientes homotecias (puedes ayudarte con el programa GeoGebra):

I. Homotecia de centro en E y razón -1.

II. Homotecia de centro en F y razón -1.

III. Homotecia de centro en B y razón -1.

Ahora responde:

a. ¿Cuál es la figura resultante?

b. ¿Cuántas veces el área del rectángulo original está contenida en la nueva figura?

c. Si la razón hubiera sido $-\frac{1}{2}$, ¿cuál hubiera sido la figura resultante?

d. Si la razón hubiera sido $\frac{3}{2}$, ¿cuál hubiera sido la figura resultante?

e. Si la razón hubiera sido 1, ¿cuál hubiera sido la figura resultante?

IV. Ejercicios misceláneos

1 Un segmento $\overline{AB}$ está determinado por los puntos A: $(-4{,}2)$ y B: $(2{,}2)$. Si el punto B se mueve dos unidades, horizontalmente a la derecha, se obtiene un punto C. Según esto, determina:

a. La distancia entre A y B.

b. Las coordenadas del punto medio entre A y B.

c. La razón entre $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

2 Dados los puntos A: $(-3, -2)$ y B: $(2, -2)$, responde las siguientes preguntas:

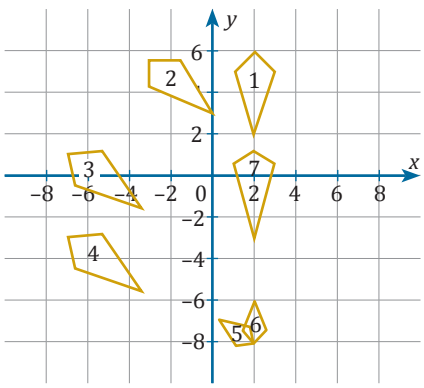
a. ¿Cuántas unidades debe moverse horizontalmente el punto A, para que el punto medio entre A y B ahora se ubique en las coordenadas $(-4, -2)$, este punto se llamará A'?

b. ¿Cuales son las coordenadas del punto A'?

c. ¿Cuál es la distancia entre A' y B?

3 Dado los puntos A: $(2{,}2)$ y B: $(x{,}6)$, ¿qué valor(es) puede tomar x para que la distancia entre ellos sea de 5 unidades?

4 Al cuadrilátero de la figura se le han aplicado sucesivas transformaciones. Señala cuáles fueron:



a. La transformación de 1 a 2.

b. La transformación de 5 a 6.

c. La transformación de 3 a 4.

d. La transformación de 6 a 7.

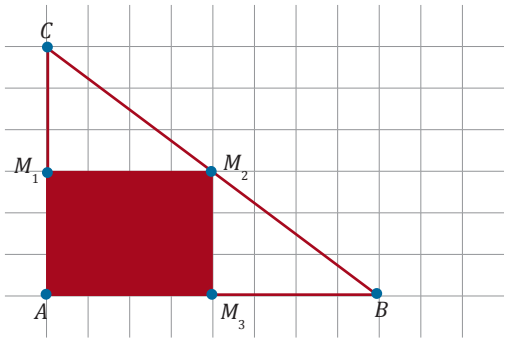
5 Se dice que tres puntos A, B y C son colineales (están sobre una misma línea), con A y C como extremos. Si $d_{\overline{AB}} + d_{\overline{BC}} = d_{\overline{AC}}$, determina si los siguientes tríos son o no colineales.

a. $A: (-4,3)$; $B: (-4,-1)$ y $C: (-4,5)$

b. $D: (-1,1)$; $E: (2,7)$ y $F: (3,9)$

c. $M: (-2,4)$; $N: (0,2)$ y $R: (3,-11)$

6 Se tiene un triángulo rectángulo de coordenadas $A: (-3,-2)$; $B: (1,-2)$ y $C: (-3,1)$. Se inscribe un rectángulo en el triángulo, uniendo los puntos medio de los catetos con el punto medio de la hipotenusa, como muestra la figura. Encuentra, según lo señalado:



a. Las coordenadas M_1, M_2 y M_3.

b. El perímetro del rectángulo inscrito en el triángulo.

c. El área del triángulo CM_1M_2.

7 Se tiene el punto $A: (2,3)$ y se le aplica una homotecia de centro $C: (0,0)$ y razón de homotecia $r = 0{,}5$. Determina:

a. Las coordenadas de A_1 (homotético de A).

b. La distancia entre A y A_1.

c. Las coordenadas del punto medio entre el origen $C: (0,0)$ y el homotético A_1.

8 A un triángulo de coordenadas $A: (0,0)$; $B: (1,2)$ y $C: (1,0)$ se le aplica una homotecia de razón $r = 2$. Encuentra:

a. El perímetro del triángulo original.

b. El perímetro del triángulo homotético.

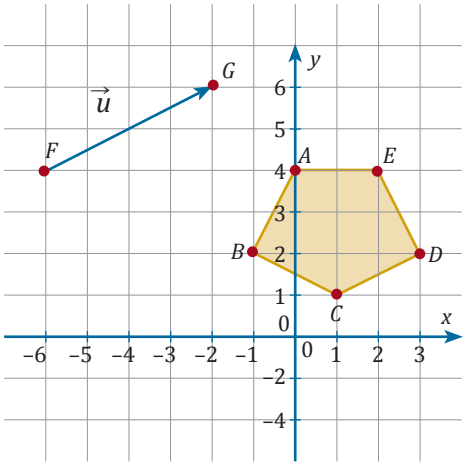
c. La razón entre ambos perímetros.

d. El área del ΔABC y del $\Delta A_1'B_1'C_1$

e. La razón entre las áreas.

f. ¿Qué razón de homotecia debes aplicar al triángulo para que el área mayor sea 9 veces el área original?

9 Utilizando el *software* GeoGebra, dibuja un polígono de cincos lados y un vector, como se muestra en la figura. Aplica siempre al polígono original las siguientes transformaciones.



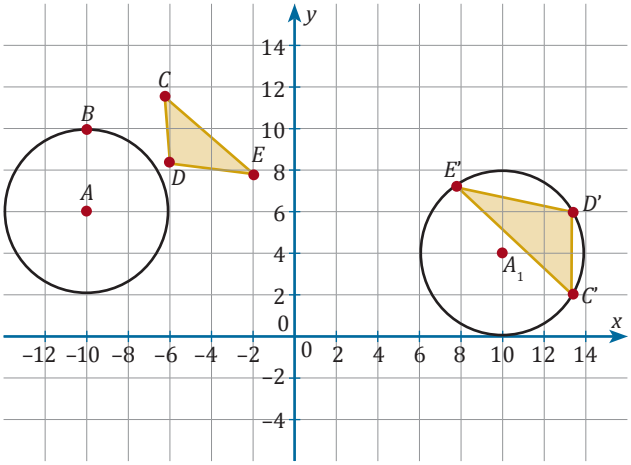
a. Una simetría respecto al eje x.

b. Una traslación respecto al vector $\vec{u}$.

c. Una homotecia con razón 0,5 y centro $O: (0,0)$

d. Una rotación respecto al origen, con un ángulo de 90°.

10 En la figura, se han transformado las figuras del II cuadrante, de modo que queden como se muestra en el I cuadrante. Determina:

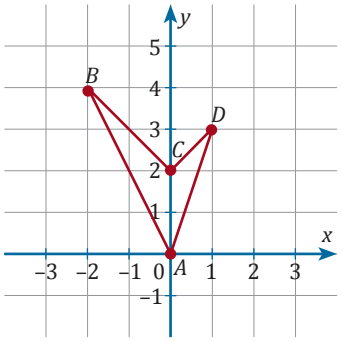


a. El vector que traslada la circunferencia desde el II cuadrante al I cuadrante.

b. Las coordenadas aproximadas del centro de

homotecia (H) que deja al triángulo CDE inscrito en la circunferencia de forma invertida.

11 Para el polígono de la figura, determina con GeoGebra.



a. El polígono homotético de la figura $ABCD$ respecto al punto E: $(0,1)$ y razón de homotecia -2.

b. El área del triángulo ABC.

12 Si P: $(x+1{,}2x+1)$ y Q: $(5x-3{,}19)$, el punto medio es M: $(2x-5{,}6)$.

a. ¿Cuál es el valor de x?

b. Indica en qué cuadrante está cada punto.

c. ¿Cuál la distancia entre P y Q?

Supongamos que se elige a M como centro de una homotecia de razón $-\frac{3}{2}$ y aplicada a un lado de un polígono definido P y Q, obteniéndose los puntos P': $(-28;\ 25{,}5)$ y Q': $(2;\ -13{,}5)$.

d. Muestra que todos estos puntos son colineales.

e. Indica las coordenadas del punto medio entre P' y Q'.

13 Con ayuda del programa GeoGebra u otro similar, construye una figura de vértices $(2,1)$, $(0,3)$, $(-1,1)$, $(-4,0)$, $(-2,-2)$ y $(-1,0)$. A partir de ella, determina:

a. El polígono formado al unir los puntos medios de la figura. ¿Qué tipo de polígonos son ambos?

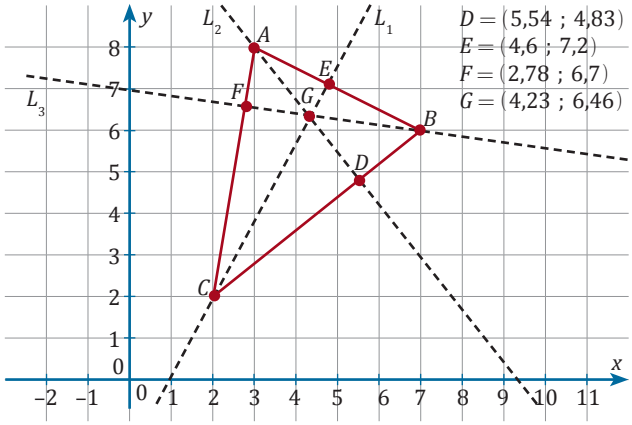
b. El perímetro de la figura original.

c. El perímetro de la figura formada por los puntos medios.

d. El polígono homotético al original, con centro en $(-1,0)$ y razón -1.

e. El área del polígono homotético determinado en el ejercicio anterior.

14 A continuación, te presentamos una representación de un triángulo y tres rectas que se intersectan en un punto al interior de este. Además, se agregan las coordenadas de algunos puntos. Conforme a toda esta información, responde usando aproximaciones a dos decimales, aplicando la fórmula de distancia cuando sea necesario y mediante tu calculadora:



a. Verifica que A, G y D sean colineales.

b. ¿Por qué F, G y B son colineales?

c. Muestra que $\overline{CG} + \overline{GE} = \overline{CE}$.

d. ¿Por qué D no es un punto medio de $\overline{CB}$?

e. ¿Es el $\triangle\ BCF$ rectángulo en F? Justifica tu respuesta.

f. Suponiendo que G sea el centro de una homotecia, ¿pueden ser $\triangle\ CDG$ y $\triangle\ AEG$ homotéticos? Justifica tu respuesta.

15 En un plano cartesiano, aparece un segmento cuyos extremos son A: $(-10{,}2)$, C: $(4{,}6)$ y el $\triangle\ ABG$, siendo B el punto medio del trazo anterior y G: $(-5{,}5;\ -0{,}5)$. Además, está presente, el $\triangle\ PRS$ cuyos vértices tienen por coordenadas a P: $(-7{,}21\ ;\ -7{,}77)$, R: $(6{,}11\ ;\ -4{,}66)$ y S: $(1{,}49\ ;\ -11{,}7)$.

a. Encuentra el valor de los lados del $\triangle\ ABG$.

b. ¿Cuánto mide el ángulo $\measuredangle\ CBG$?

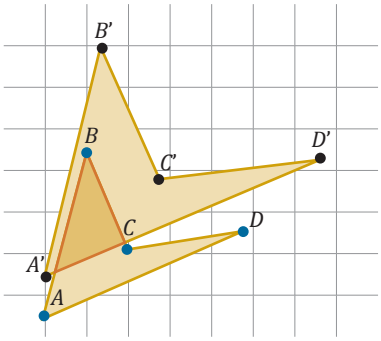
c. Determina la medidas de $\overline{PR}$, $\overline{RS}$ y $\overline{SP}$.

d. ¿Se puede establecer alguna homotecia entre ambos triángulos? ¿Por qué?

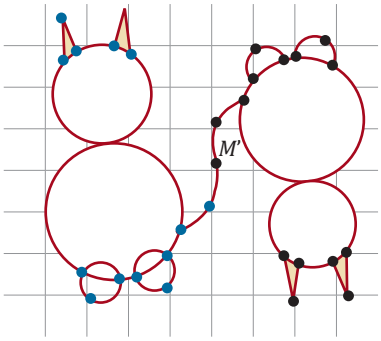


16 Dadas las siguientes homotecias, determina el centro de homotecia y la razón de homotecia:

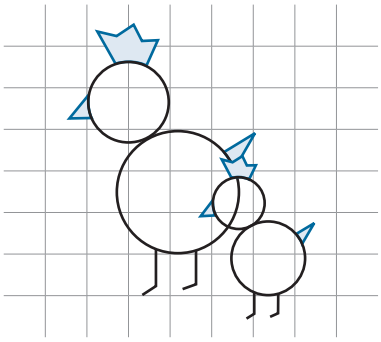
a.



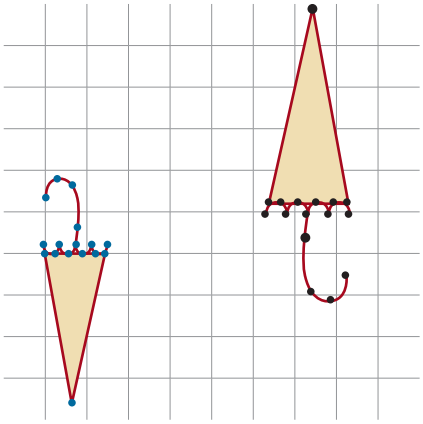
b.



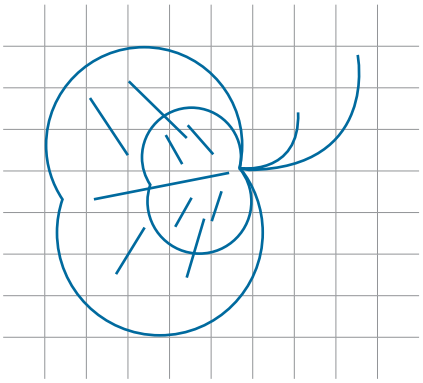
c.



d.



e.



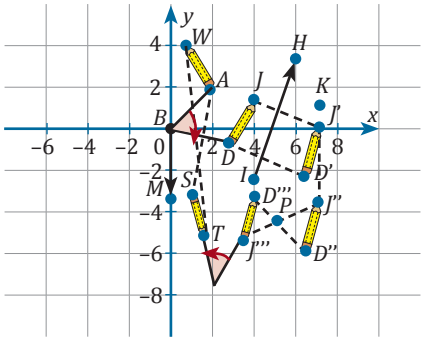
17 Una figura B en el plano es la homotética de otra figura A con una razón de homotecia $\frac{7}{2}$. Determina:

- **a.** La medida de los lados de la figura B, si la figura A, es un rectángulo de perímetro $36\ \text{cm}$ y donde su largo es el doble de su ancho.
- **b.** La medida de la hipotenusas de la figura B, si los catetos de la figura A son 12 y $5\ \text{cm}$.
- **c.** El perímetro del triángulo equilátero B, si la medida del lado del triángulo A es $29\ \text{cm}$.
- **d.** El área de la figura A, si la figura B es un cuadrado de perímetro $72\ \text{cm}$.
- **e.** La medida de las diagonales de la figura A, si la figura B es un rectángulo de lados 26 y $10\ \text{cm}$.

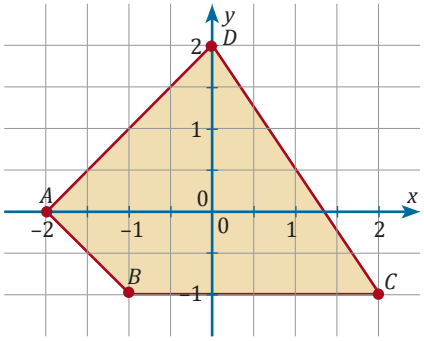
18 Dado el triángulo de vértices $(1,1)$, $(2,2)$ y $(-1,-3)$, determina (expresando tu respuesta aproximada a la centésima):

- **a.** El triángulo homotético al dado que tiene por centro de homotecia el punto $(0,0)$ y razón de homotecia $\frac{1}{3}$.
- **b.** El perímetro del triángulo homotético al de vértices dados.
- **c.** El área de ambos triángulos.
- **d.** El área de la sección del plano comprendido en la intersección de los interiores de los triángulos.

19 Al lápiz que une los puntos W y A, se le han realizado varias transformaciones sucesivas que tú debes determinar, de manera de hacer coincidir la última figura transformada con la inicial, como muestra la figura:



20 Dado el polígono de la figura, determina:



a. La figura homotética a la dada, de razón $\frac{1}{2}$ y centro el origen.

b. El perímetro de la figura original.

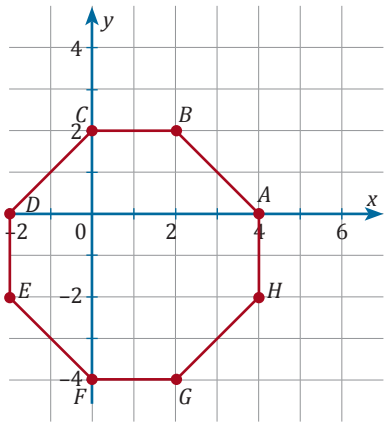
c. El perímetro de la nueva figura.

d. El área de la figura original.

e. El área de la nueva figura.

f. El área comprendida entre ambas figuras.

21 Dada la siguiente figura, y con ayuda del programa GeoGebra, construye:



a. Una figura homotética a la dada, con centro en G y razón $\frac{2}{3}$.

b. Una figura homotética a la dada, con centro en el punto medio de $\overline{BC}$ y razón $-\frac{3}{2}$.

c. Una figura homotética a la dada, con centro en el punto $(2,2)$ y razón $\frac{5}{4}$.

d. Una figura homotética a la dada, con centro en el origen y razón -2.

e. Una figura homotética a la dada, con centro en el punto medio de la diagonal $\overline{AF}$ y razón $\frac{8}{3}$.

22 Se ha dibujado un heptágono en el primer cuadrante del plano cartesiano. Define una homotecia que haga que el heptágono homotético:

a. Esté completamente contenido en el II cuadrante.

b. Esté completamente contenido en el III cuadrante.

c. Esté completamente contenido en el IV cuadrante.

d. Esté completamente contenido en el I cuadrante.

e. Tenga parte de él en todos los cuadrantes.

23 Siempre los mapas me han despertado especial curiosidad... Fíjense que navegando por Internet averigüé la distancia entre Santiago y Viña del mar: $124{,}79$ CH. Y leí por allí que CH significa: "Distancias (en kilómetros) calculadas considerando rutas por Chile y en base a conectores insulares". Entonces, se me ocurrió una idea y obtuve el mapa que se muestra:



Te invito a que juntos estudiemos un poco más acerca de esto. Puse un sistema de coordenadas y te doy inmediatamente esta información:

Las coordenadas de algunas ciudades son: Santiago $(11{,}3\ ;\ 1{,}32)$, Viña del Mar $(3{,}62\ ;\ 4{,}94)$, Curacaví $(7;\ 1{,}4)$, Casablanca $(5{,}2)$. Además, que M: $(0{,}15\ ;\ 0{,}86\ )$ y B: $(1{,}79\ ;\ 0{,}86)$

Te sugiero que dibujes todo los trazos que se van sugiriendo a lo largo que vayas desarrollando preguntas, y expresa tu respuesta aproximando a la centésima, a menos que te indique lo contrario.

a. ¿A cuántos km equivale una unidad (u), medida en este mapa? Aproxima tu respuesta a las cien milésimas.

b. Indica la cantidad de unidades (u) que mide el trazo que une Curacaví con Casablanca.

c. ¿Cuántos kilómetros separan directamente Viña del Mar de Santiago?

d. Al comparar lo requerido en **c.** con la cantidad de kilómetros que se viaja por el camino señalado en azul, ¿cuánto vale esta diferencia? ¿A qué se debe?

e. ¿A qué distancia se encuentra, en trayecto recto, Casablanca de Viña del Mar?

f. ¿Curacaví se encuentra más cerca de Santiago que de Viña del Mar? ¿Por qué? Haz una estimación directamente, a través de una observación del trayecto azul y otra mediante la medida, en u, del trayecto directo.

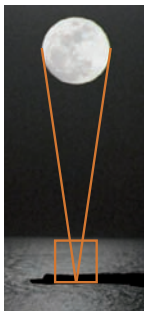
g. Señala la cantidad de km que se obtienen al sumar la distancias del trayecto Santiago-Casablanca-Viña del Mar.

h. Al hacer una comparación entre la cantidad total de km del trayecto Santiago-Casablanca-Viña del Mar, con el número total de km del trayecto Santiago- Curacaví-Casablanca-Viña del Mar, ¿quién de éstos se aproxima mejor al valor de la ruta desde Santiago a Viña del Mar, y cuál está señalada en azul? ¿Por qué?

i. De acuerdo a lo respondido **h.**, propón una manera de cómo se puede ir mejorando la aproximación sugerida en la pregunta anterior.

j. Si las coordenadas de Algarrobo son $(2{,}84\ ;2)$, y considerando el trayecto rectilíneo entre Santiago y esta ciudad ¿En cuántos metros en E y N, debiera moverse la ciudad de Curacaví para que quedara a mitad de éste camino?

24 –"He perdido la cuenta de los días en que estamos prisioneros en esta cámara oscura, de dos metros y medio de profundidad. Apenas cae este haz de luz de la luna por ese orificio del techo. Max, ¿por qué estas midiendo con tus dedos el ancho del círculo que forma esta luz en el suelo?



–Sé que soy científico, lo que quiero averiguar es si tenemos luna llena, y parece que así es, ya que el haz de luz es muy intenso y brillante... Además, estimo el radio de esta circunferencia en $1{,}2\ \mathrm{cm}$. Ahora bien, la distancia de la Tierra a la Luna es $3{,}84 \cdot 10^8\ \mathrm{m}$, entonces el diámetro de...

–El diámetro de la Luna para que nos interesa en este momento... ¿No te das cuenta que nuestros enemigos están tratando en todo momento que perdamos la noción del tiempo? Y más aún, perder para siempre nuestro planeta...

–Sí, estamos en luna llena, ya que nos muestra completamente su diámetro. Algunos hombres usan un calendario lunar. Lo conozco, sé que estamos cambio de mes, sé que celebran, pero también cómo se convierte este dato en la fecha aproximada en que estamos... Vienen a liberarnos...

La fotografía muestra lo que Max tuvo en su mente, en aquel momento de prisionero. Con esta información:

a. Encuentra el radio aproximado de la Luna.

b. Compáralo con el valor aproximado y aceptado del radio lunar. ¿En cuánto está errado? ¿Es muy significativo?

c. ¿Cuál es el centro de la homotecia que has usado?

d. Indica el valor de la razón, y explica por qué necesariamente es menor que -1.

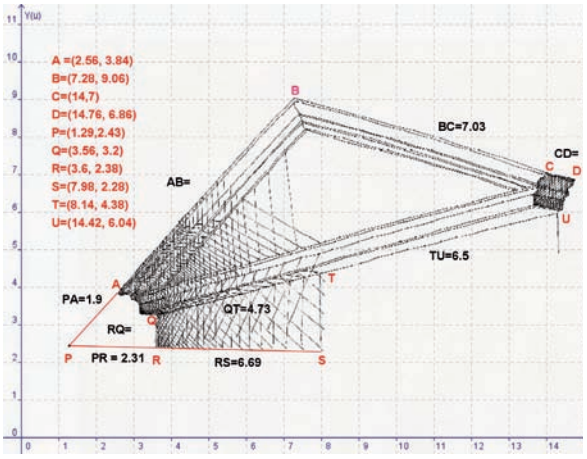
e. Supongamos que esta experiencia se lleva a cabo, en otras condiciones, pero referida al Sol. Más aún que el diámetro formado del círculo en el suelo de una cámara similar mide $2{,}32\ \mathrm{cm}$ y que la distancia entre el Sol y la Tierra es $1{,}5 \cdot 10^{11}\ \mathrm{m}$, averigua el diámetro aproximado del Sol.



f. En el caso del Sol, ¿es la razón de homotecia aún más pequeña que la de la Luna? ¿Por qué?

g. Averigua si hay algún experimento que puedas realizar, y hacer tus propias mediciones, aplicando los conocimientos de homotecia que has aprendido en el presente capítulo.

25 Este es un boceto de un frontón colonial, realizado a mano que conseguí por Internet.



Como ves, he elegido un punto P, porque deseo ampliarlo, y posteriormente conseguir las medidas reales. Así podré ver qué materiales son los más apropiados y las medidas para mi maqueta. Ahora, Chanito, quiero que me ayudes a algunas resolver algunas inquietudes y despejar ciertas dudas:

a. Completa las distancias que me faltan en mi dibujo... ¡Sí , exprésalas con dos decimales!

b. Revisa las otras medidas para ver si están correctas, y no olvides usar dos decimales a las que faltan. ¿Cuáles son las que hay que modificar? ¿Cómo van a quedar?

c. Mira, parece que P, R y S son colineales. ¿Será verdad? ¿Por qué?

d. Lo mismo que en **c.**, pero para P, Q y T. ¿Y cuál es la razón para decir eso?

e. Dime cuánto mide el trazo de Q a R.

f. Claro, el grosor lo estaría dando $\overline{CD}$. No te olvides, revísalo y escríbelo con dos decimales.

g. Quiero aumentar cada lado en un $40\,\%$. Y después ir reproduciendo la figura completa. Dime, ¿cuál es la razón de homotecia si elijo a P como centro de ella?

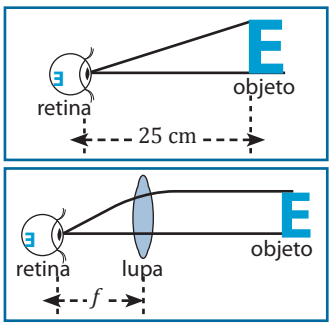
h. Oye, Chanito, ¿Y a qué distancia de P, va a quedar el punto homólogo a B?

i. Y con lo que me acabas de responder, indícame cuánto van a ser las nuevas medidas de los lados homólogos a $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$.

j. Chanito, perdona. Según lo que veo hasta el momento, va a quedar muy grande. Para no perder estos resultados: ¿por qué número debo multiplicar los nuevos valores para bajarlos a un $30\,\%$ sobre el original?

k. Discúlpame, ¿qué debo hacer también con la razón homotética?...
¡Chanito, no te vayas. ¿No sabes lo que es un frontón?... ¡Te asustaste con mis inquietudes y dudas!
¡Nosotros sabemos como hacerlo! ¡Manos a la obra y a responder las preguntas!

26 Mamá, te llamo porque otra vez Coné me sorprende con sus aciertos. Fuimos juntas a una feria científica y al mirar estas imágenes, las entendió perfectamente.



Me dijo... "Es fácil, son puras homotecias, como las que vimos en clases. Es como si el ojo, cuando mira, participara en reproducciones homotéticas. ¡Ah¡, y los $25\ cm$ es la distancia promedio que podemos observar un objeto, sin que mayormente, nuestra vista se incomode". Más tarde asistimos a una ponencia, al respecto, y sorprendió al expositor públicamente por todo su conocimiento demostrado, a través de sus preguntas.

Conforme al relato, y en referencia a la figura de la derecha, responde:

a. ¿Dónde estaría el centro de homotecia sugerido por Coné?

b. Al leer la letra E, ¿en qué lugar se forma su imagen homóloga?

c. Si el diámetro ocular se considera como $250\ \text{mm}$, ¿cuál es la razón de esta homotecia? En las siguientes respuestas debes hacer uso de la razón homotética cuando proceda, y tus respuestas deben estar expresadas en mm, con aproximación a la centésima:

d. Supongamos que la letra E objeto mide $7\ \text{cm}$, ¿cuál debiera ser el tamaño de la imagen que se forme en la retina?

e. ¿Por qué en este ejemplo, la letra E objeto, no puede considerarse como una posible imagen homotética de la E invertida?

f. Supongamos que la letra formada en la retina es de $2\ \text{mm}$, ¿cuál debiera ser el tamaño de la letra, el objeto de la cual proviene?

***Con la información de* f.*, responde de* g. *a* j.**

g. Si la letra objeto se aleja $10\ \text{cm}$ más en línea recta, en qué porcentaje varía el tamaño de la letra invertida con respecto de la formada con $25\ \text{cm}$? ¿Qué ocurre con la razón de homotecia?

h. Por el contrario si la letra objeto se acerca $10\ \text{cm}$ más hacia el ojo, desde los $25\ \text{cm}$ en que estaba, ¿en qué porcentaje aumenta o disminuye el tamaño de la letra imagen? ¿Crece o decrece la razón homotética?

i. ¿Qué debiera ocurrir con el tamaño de la letra imagen, si la letra el objeto se aleja cada vez más de esta distancia promedio? ¿Decrece el módulo de la razón homotética?

j. Ídem si la letra objeto se acerca cada vez más hacia el ojo. ¿Qué relación tiene que ver esta variación con el valor de la razón homotética?

k. Escribe una fórmula que exprese la razón entre el tamaño de la letra imagen con respecto al tamaño de la letra objeto y la razón homotética.

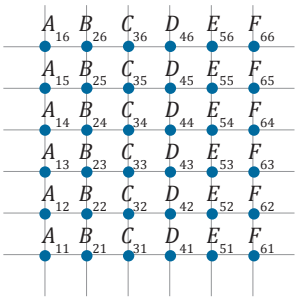
27 La profesora se puso disfónica en el transcurrir de la hora de la clase. Entonces me llamó y me pidió que resolviera el siguiente ejercicio, en voz alta para mi curso:

"Encuentra el área de una circunferencia concéntrica a otra, de centro en $C = (-30; 30)$ y donde $P = (-25; 42)$ es un punto de la circunferencia mayor".

Obtuve $42{,}25\ \pi$.

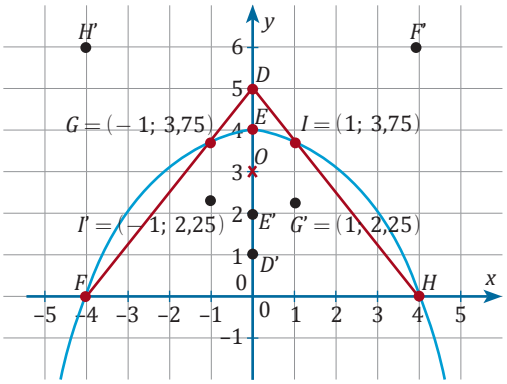
Haz el desarrollo completo en tu cuaderno e indícame si mi respuesta es correcta.

28 Lilo llevó el siguiente tablero a nuestro grupo de estudio, al que él también pertenece. Nos hizo el siguiente desafío: "Inventen dos preguntas con sus respuestas, usando la información que aquí les muestro".



María Ignacia escogió $A_{13}E_{54}B_{25}$ para graficar un triángulo, tomando el primer número como abscisa, y el segundo por ordenada. Según insistió Lilo, este triángulo era rectángulo. Yo le rebatí, se indignó y me lanzó el tablero, alejándose. Los demás le gritaron: "Fea la actitud". ¿Estaba realmente Lilo equivocado?

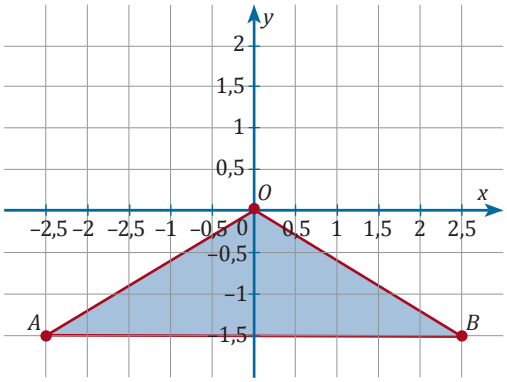
29 Fue aquel día domingo 25 de marzo, a las $19{:}38$. Marcelo no alcanzó a unir los puntos negros, producto de una homotecia realizada en un triángulo y una parábola, tal como se muestra en la siguiente figura:



Lo único que hoy tú tienes que hacer, es unir los puntos para reconstituir las figuras homotéticas e indicar el valor de la razón correspondiente.



30 –Aníbal, al otro lado hay un sendero gris idéntico a este:

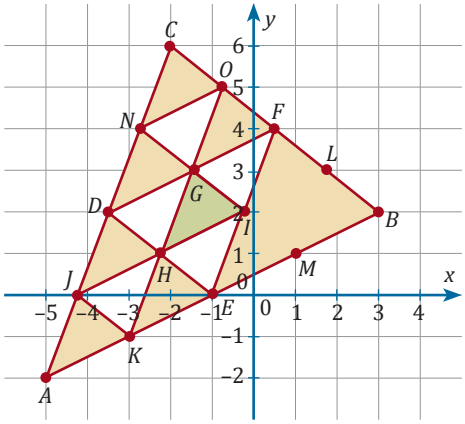


Tendrás que viajar lo más rápido que puedas. En tu monitor aparecerá algo similar a esta rejilla. Cada lado del cuadrado base, mide media unidad de trayecto cósmico. En el trayecto, escucharás voces que te insinuarán que vuelvas. No lo hagas. Tú no perteneces a este universo paralelo. Al momento en que tú inicies el trayecto, otro similar a ti, vendrá en sentido contrario... Al otro lado aparecerás en las afueras de Puerto Aysén, en tu ciudad, en tu universo. Este es un sendero en perspectiva, y representado por el $\Delta\ AOB$.

a. ¿Cuánto mide el lado menor?

b. Supongamos que cada unidad medida en el lado menor, equivale a $1{,}82$ unidades del trayecto cósmico que deba viajar Aníbal. ¿Cuántas unidades de estas debiera moverse para llegar a Puerto Aysén?

31 En Internet leí que el triángulo de Sierpinski está constituido por triángulos cada vez más pequeños que se pueden construir, a partir de cualquier triángulo dado, con los puntos medios de los triángulos, como aparece en el siguiente dibujo ¡Ah, y tiene que ver con la homotecia!



Lo que te pido es que completes la figura y además:

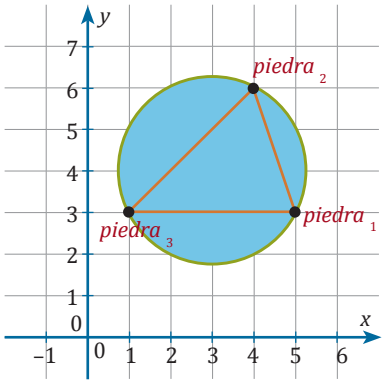
a. Indiques el centro de homotecia y la razón que se aplica al $\Delta\ ABC$ para obtener $\Delta\ AED$

b. Hagas lo mismo que en **a.** pero para obtener $\Delta\ EBF$.

c. Respondas: ¿Es G el punto medio entre C y E? ¿Por qué?

d. Escribas alguna pregunta diferente a las anteriores, pero con su respuesta, basándote en la información de este problema.

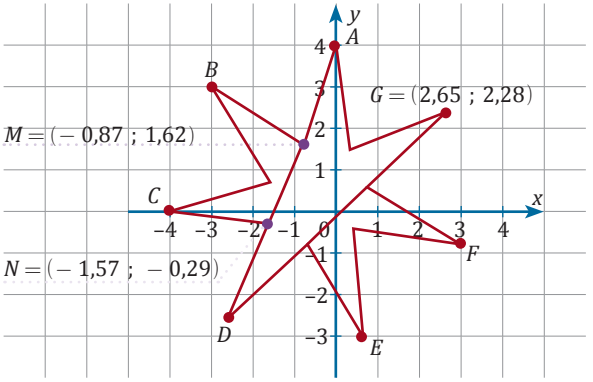
32



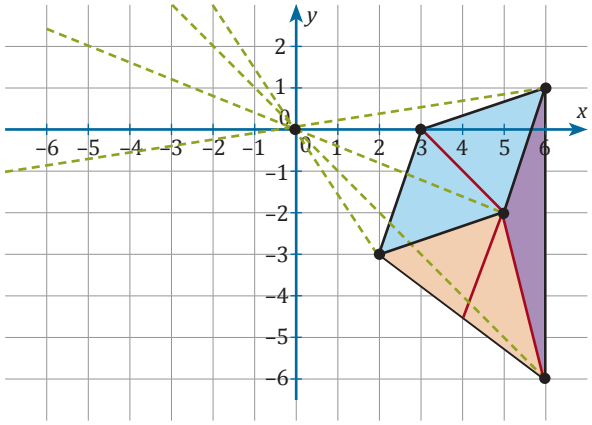
...Y con los años se te van olvidando algunas cosas matemáticas, Claudita. Me sentí tan avergonzada cuando no pude estimar dónde quedaba el centro de la pileta redonda que tenemos instalada en nuestra parcela. Entonces, ese chiquillo pillo de la parcela aledaña, que nos acompañaba, tomó tres piedras que colocó en el borde de nuestra pileta, formando un triángulo. Arrancó una varilla de un árbol, suficientemente larga para ir marcando las medidas de los lados de este. Nos habló de unas coordenadas del centro de la pileta que es donde se juntan las simetrales... ¡no entendí nada!

Halla los valores que están insinuados en verde. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

33 Lupita dibujó su estrella de siete puntas mediante el computador, pero debe hacer algunos retoques borrando todos los trazos interiores, como por ejemplo $\overline{NM}$. Además, ella necesita conocer algunas medidas, como la distancia entre punta y punta, el valor del lado de su estrella y, naturalmente, saber el largo total del contorno para posteriormente bordarlo para un logo. ¿Puedes ayudarle en sus requerimientos? Empieza calculando la cantidad de centímetros que debe borrar.



34

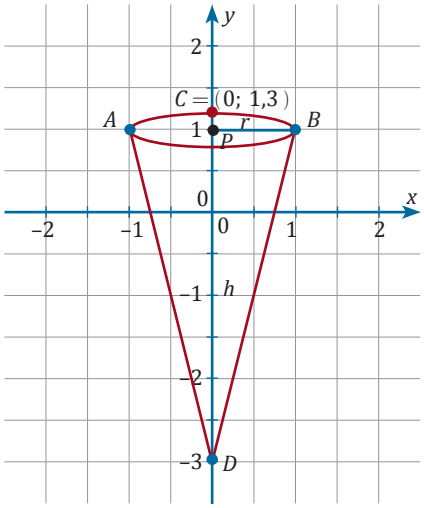


Alguien cortó la otra parte de la gráfica y se llevó la homotecia de esta figura, con centro en el origen...

¡Debes completar la figura agregando las líneas punteadas que necesites!... ¿Puntos sin poder determinar sus coordenadas?... Son puntos medios de trazos... ¿La razón? ¡Sí tienes razón!... Déjame ver... Era negativa y aumentaba cada valor en un 25 %... ¿Te parece que tú la reconstruyas completamente?...

Reconstruye tal homotecia, haciendo uso de un graficador.

35

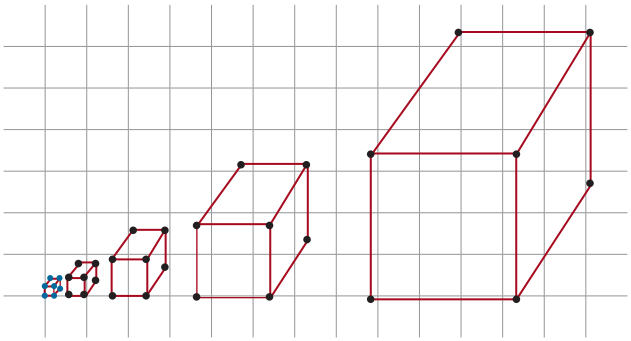


Ha llegado la noche y aún no puedo obtener las medidas en cm, de la base y la altura de la ampliación de un cono recto. Les muestro enseguida el gráfico del cual debo empezar la resolución de mi problema, porque luego debo fabricarlo y proponerlo para su comercialización. ¡Ah!... Pero de antemano, es con el compromiso que ustedes me ayuden y me den la respuesta.

Usando un graficador (como GeoGebra) y una razón de homotecia, sugerida igual a raíz cuadrada de dos y centro de homotecia el punto D, obtén la figura homotética respectiva, y encuentra las medidas requeridas, aproximando a la centésima.

36 A partir de la misma imagen del ejercicio anterior, y dejando fijo D, amplifica las componentes de A,B,C y P, grafica los nuevos puntos, completa la figura y responde con esta información lo solicitado en el enunciado.

37 Mónica está jugando con su lego y ha puesto varias piezas, como muestra la figura:



De pronto, su hermano entró en su pieza y al verlo le pareció que estaba frente a una homotecia, de esas que había estudiado la semana pasada en su colegio. Sí, efectivamente, Carlos tenía razón y luego de unos cálculos estimó que la razón de homotecia entre cada par consecutivo de figuras es 2 y que la figura central tiene un volumen de $8\ \text{cm}^3$. Con esta información, tú puedes contestar las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es el volumen de cada una de las otras figuras?

b. ¿Cuál es la razón de homotecia entre la primera y la última figura?

c. ¿Cuál es la razón de homotecia entre la segunda y la cuarta figura?



Mis apuntes

Taller

Trabaja

Coloreemos nuestro colegio

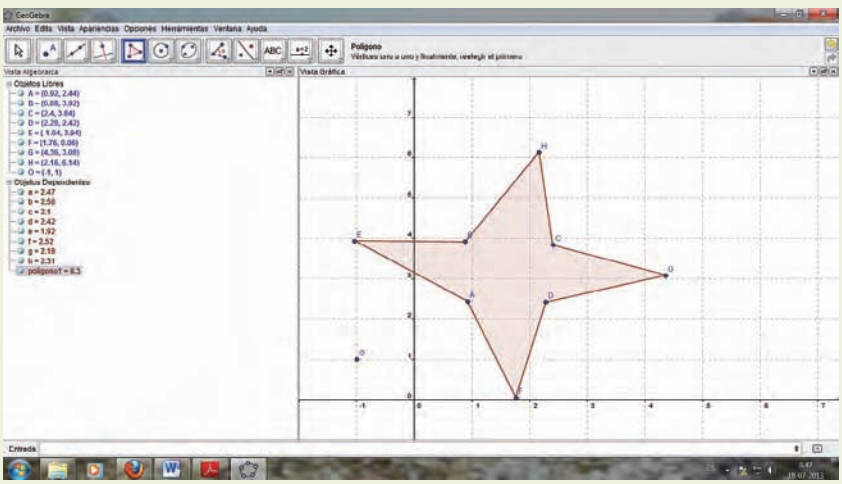
Te invitamos a través de este taller a hermosear tu colegio. Haremos cuadros que podrás enmarcar y luego colocar en los pasillos o lugares importantes de tu colegio. Podemos hacer esto utilizando el programa geométrico Geogebra o también sólo con herramientas geométricas. Haz de tu colegio un lugar más grato y una comunidad más unida con tu aporte.

Materiales:

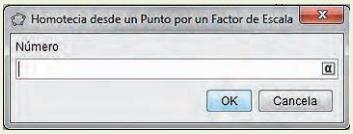
- Computador con programa Geogebra (se puede bajar gratuitamente del siguiente sitio www.geogebra.org, es fácil y rápido de instalar).
- Hoja de bloc.
- Lápices de colores (pueden ser también lápices pastel, témpera o acuarela).
- Lápiz grafito y goma.
- Regla.
- Transportador.
- Compás.

Instrucciones:

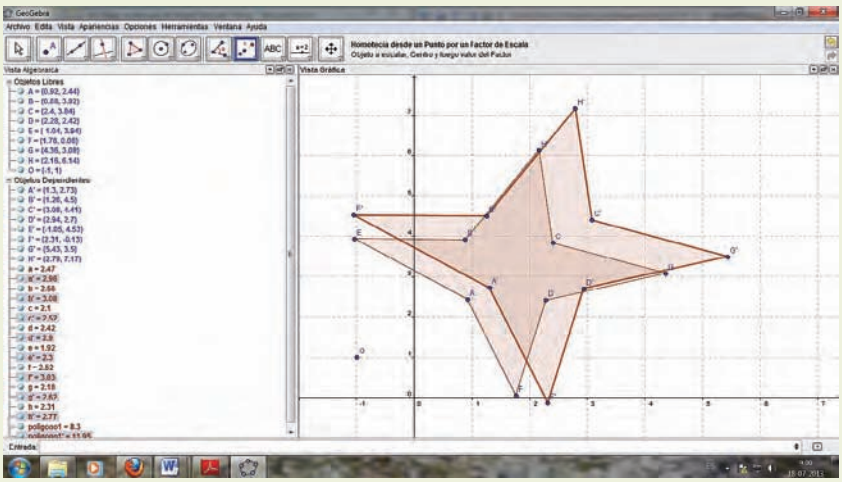
- Elige una figura cualquiera y luego cópiala, usando homotecia varias veces, luego píntala de varios colores y crea tu cuadro.
- Crea la figura sobre la que harás la homotecia, coloca un punto en la hoja (centro de homotecia). Así...



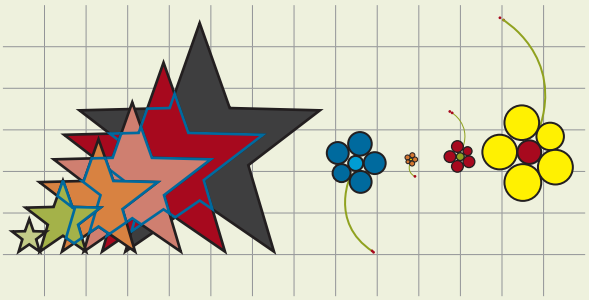
- Haz clic en el casillero de homotecia, el noveno de izquierda a derecha y selecciona "Homotecia desde un Punto por un Factor de Escala", luego, haz clic en la figura y luego en el centro de homotecia ante lo cual aparecerá el siguiente cuadro:



Debes escribir el factor de homotecia que deseas, por ejemplo 1,2 (recuerda que este número debe introducirse con punto y no con coma). Así se tiene...



- Puedes cambiar el color de una figura, haciendo clic en la Vista Algebraica sobre el nombre de ella, y con un clic con el botón derecho de tu mouse se muestra la ventana emergente Propiedades, selecciona la pestaña Color. Con el puntero elige un color en uno de ellos. Puedes aprovechar la pestaña Estilo y graduar el Grosor del Trazo, Ver el Estilo del Trazo y Sombreado. Finalmente haz clic en Cierra.
- Para terminar puedes eliminar el centro de Homotecia o hacer desaparecer algún segmento haciendo clic con el botón derecho de mouse directamente sobre él, y en el menú contextual que aparece, quita el √ que está frente a Muestra Objeto. También puedes cambiar el fondo, haciendo clic con el botón derecho del mouse, sobre alguna zona blanca de la ventana , y en la ventana emergente Vista Gráfica, elegir la opción vista gráfica, seleccionar Color de fondo, etc.
- También lo puedes hacer en forma manual... Ya aprendiste a dibujar figuras homotéticas...
  Te damos aquí algunos ejemplos...



Evaluación Unidad 3

Síntesis conceptual

I. Resuelve la siguiente sopa de letras, con los conceptos fundamentales de la unidad que completan las frases dadas abajo:

G	D	N	A	B	H	C	U	A	F	Z	G	M	N	O	J	R	Q	L	H
P	V	A	D	X	T	U	Z	P	X	E	P	R	U	F	N	A	T	O	F
D	D	N	I	A	X	J	N	G	C	O	N	T	R	A	E	Q	V	R	T
Q	U	I	T	C	C	K	Y	C	V	T	K	I	F	I	O	T	H	N	K
W	Y	T	R	A	E	I	U	X	U	L	W	H	B	I	R	L	O	G	J
N	U	O	E	Q	R	T	T	H	D	A	V	D	D	N	E	T	M	U	T
D	D	X	V	R	Y	T	O	P	G	Y	A	E	Q	A	I	G	O	K	S
M	L	B	N	J	Z	W	E	M	O	G	M	I	N	M	O	U	T	J	U
F	I	L	I	R	P	N	N	A	O	O	Z	A	L	X	H	G	E	J	V
B	R	J	F	X	K	L	M	T	T	H	A	Q	A	P	X	I	C	I	J
C	N	V	A	B	J	N	K	N	S	Y	E	B	C	V	M	J	I	Y	F
G	W	G	E	D	E	P	U	P	Y	C	M	D	N	T	F	A	A	T	W
B	D	M	G	P	V	P	U	R	M	X	H	Y	O	Q	X	M	C	G	Z
P	A	Z	L	N	N	V	G	G	I	S	V	D	W	R	X	H	W	P	D
O	K	F	Q	B	G	W	M	O	Y	J	H	F	X	E	T	E	W	I	E
T	R	N	Y	Q	X	M	E	Y	D	N	K	L	H	J	Z	N	K	O	M
G	D	Z	K	Z	R	R	T	B	N	B	Y	N	Y	M	V	S	E	G	B
U	R	A	Z	O	N	D	E	H	O	M	O	T	E	C	I	A	T	C	M
T	X	D	H	Q	S	W	C	N	M	N	L	U	X	T	R	N	Q	A	V
S	M	K	S	W	R	C	K	Z	E	M	T	J	R	E	L	G	L	T	Z

1 Una homotecia de razón mayor que 1 o menor que -1 _____ la figura.

2 Uno de los campos de aplicación de la homotecia, que dice relación con la plástica es el _____.

3 Punto desde donde se construye una homotecia. _____

4 Una homotecia de razón mayor que -1 o menor que 1, distinta de 0, _____ la figura.

5 La transformación de una figura en una semejante a ella, según un punto y una razón, se llama _____

6 Una figura homotética de razón negativa resulta en otra figura _____ con respecto a la primera.

7 Un campo de la física relacionado con la homotecia es la _____.

8 El punto que está a igual distancia de otros dos puntos del plano se llama _____ entre estos puntos.

9 En una homotecia, el cociente de los lados homotéticos de dos figuras representa la _____

Ejercicios de resumen de la unidad

I. Completa cada una de las siguientes oraciones según corresponda:

1 Se define _____ como un sistema de referencia de un plano que está formado por dos rectas numéricas _____, que se intersectan en el punto $(_,_)$.

2 Usando el sistema cartesiano, el _____ queda dividido en _____ partes llamadas _____, los que se nombran con números _____ y en sentido _____ a los punteros del reloj.

3 Si A: (x_A, y_A) y B: (x_B, y_B), entonces el _____ del trazo $\overline{AB}$, será $M_{\overline{AB}} = (_____,_____)$.

4 La _____ del segmento cuyo extremos son P: (x_1, y_1) y Q:(x_2, y_2), se calcula usando $d_{\overline{PQ}} =$ _____.



5 Una _____ es una transformación de una figura en otra _____ a ella, con respecto a un punto en plano, llamado _____, y a una razón dada, llamada _____.

6 Si la razón de homotecia es positiva y mayor que 1, la figura homotética tendrá _____ tamaño, pero estará en el mismo sentido de la original.

7 Para que la figura homotética tenga igual tamaño, pero esté girada con respecto a la figura original, el valor de la razón de homotecia debe ser _____.

8 Si el _____ está en uno de los vértices de la figura original, su figura homotética estará unida a la primera por dicho vértice.

9 Para que la figura obtenida mediante una homotecia sea igual tamaño y esté en el mismo sentido con respecto a la figura de origen, la razón debe valer _____.

10 Si el centro de homotecia está dentro de la figura original y la razón, en módulo, es menor que 1, entonces la figura homotética se ubicará _____ de la original.

II. Resuelve los siguientes ejercicios, coloca todo el desarrollo en tu cuaderno y no olvides revisar tus respuestas en el solucionario:

1 ¿En cuál (es) cuadrante(s), o bien, eje(s), se ubica un punto:

- **a.** Cuya abscisa es 0, y su ordenada negativa?
- **b.** Si el producto entre la abscisa y la ordenada es positivo?
- **c.** Tal que su abscisa corresponde a la raíz cuadrada de su ordenada?

2 ¿En cuál (es) cuadrante(s), o bien, eje(s), se localizan dos puntos si:

- **a.** Su punto medio es $(0,0)$?
- **b.** Tienen la misma ordenada negativa, pero sus abscisas tienen el mismo signo?

3 ¿En cuál (es) cuadrante(s) se localizan todos los puntos, si cada uno de ellos tiene:

- **a.** Su ordenada igual a 14, pero su abscisa no es nula?
- **b.** Su abscisa y su ordenada con signo contrario, pero de igual valor absoluto entre sí, y no está en el origen?
- **c.** Su abscisa vale $2\,012$ y su ordenada es negativa.

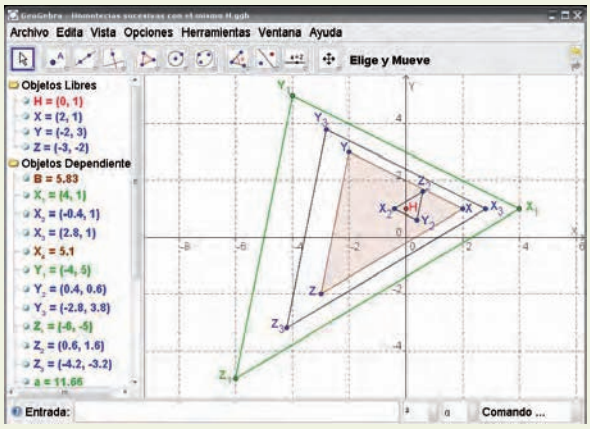
4 Los puntos P: $(-9, -7)$, R: $(11,8)$ y S: $(-9,8)$ se unen entre sí. Ahora bien, haciendo uso de desarrollos con fórmulas, responde:

- **a.** Muestra que P, R y S no son colineales.
- **b.** ¿Es este un triángulo acutángulo? Justifica claramente tu respuesta.
- **c.** Sabiendo que la intersección de la altura con el lado mayor está en H: $(-1,8\,;-1,6)$ determina el valor de ella.
- **d.** ¿Cuáles son las coordenadas del punto medio, M, del lado mayor?
- **e.** ¿Cuántas veces cabe $\overline{HM}$ con la longitud del trazo que representa la transversal de gravedad que intersecta al lado mayor? Expresa tu respuesta redondeando la décima.

5 Por el vértice V: $(2, -1)$ de un polígono, se realiza una homotecia, cuyo centro H, es el punto medio del trazo cuyos extremos son A: $(-6,7)$ y B: $(4,3)$. Si V': $(-7,17)$ es el vértice homólogo del polígono homotético: (haz uso de tu calculadora).

- **a.** Indica las coordenadas de H.
- **b.** ¿Cuál es la distancia entre H y V?
- **c.** Encuentra longitud de $\overline{HV'}$.
- **d.** ¿Cuál es la razón homotética?
- **e.** Explica el significado del valor obtenido en **d**.

6 En el programa GeoGebra se han hecho varias homotecias sucesivas conservando el centro de homotecia H. Se inicia con $\Delta\ XYZ$ para obtener $\Delta\ X_1Y_1Z_1$, luego a partir de este, se realiza una nueva homotecia para obtener $\Delta\ X_2Y_2Z_2$. El proceso se repite para detenerse en $\Delta\ X_3Y_3Z_3$, que te presentamos a continuación. Advertimos que en la ventana de la izquierda no alcanza a aparecer toda la información de los objetos dependientes, por la cual tendrás que hacer cálculos adicionales, usando tu calculadora.



Llamando r_1, r_2 y r_3 a las razones de homotecias respectivas, y con la información dada en la pantalla, responde a lo que te solicitamos:

a. ¿Cuál es el perímetro del triángulo original?

b. ¿Cuál es el perímetro del $\Delta\ X_3Y_3Z_3$? Aproxima tu respuesta a la centésima.

c. Halla r_1, r_2 y r_3.

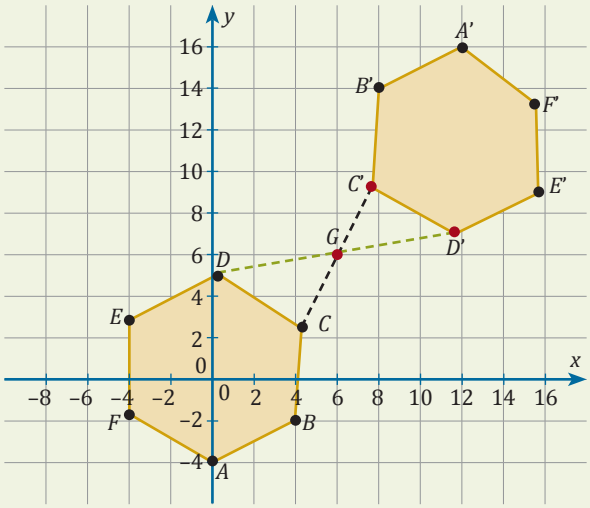
d. ¿Qué se obtiene al efectuar el producto de las razones de homotecia r_1, r_2 y r_3 con el perímetro del $\Delta\ XYZ$?

e. Verifica que Z, Z_1, Z_2, Z_3 y H sean colineales. Usa dos decimales en tus cálculos.

f. Con el uso de una regla, comprueba que los vértices homólogos y H sean colineales.

g. Haciendo uso de las razones de homotecias, ¿de qué manera puede obtenerse la razón de homotecia que permite obtener el triángulo invertido, si tomamos como referencia $\Delta\ XYZ$? ¿Cuál es este valor?

7 Observa con mucha atención los polígonos regulares que, a continuación, se han dibujado en un plano cartesiano.



Algunos puntos con sus coordenadas son: $C = (4{,}27\ ;\ 2{,}46)$, $D = (0{,}54\ ;\ 4{,}93)$, $C' = (7{,}73\ ;\ 9{,}54)$, $D' = (11{,}46\ ;\ 7{,}07)$ y $F' = (15{,}73\ ;\ 13{,}54)$

a. ¿Cuál es la medida del lado de cada hexágono? ¿Son congruentes? ¿Por qué?

b. Determina las coordenadas del centro de la circunferencia circunscrita al polígono que está completamente en el primer cuadrante.

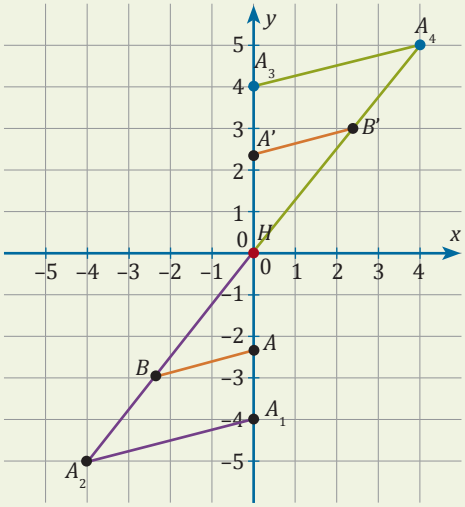
c. Encuentra las coordenadas de los puntos medios de $\overline{CC'}$ y $\overline{DD'}$. ¿Con qué punto del gráfico coincide cada uno?

d. Suponiendo que el hexágono $ABCDEF$ es homotético del otro polígono y siendo G el centro de homotecia, ¿cuál es la razón de esta homotecia?

e. Y si el hexágono $ABCDEF$ es el polígono de origen, y siendo G el centro de homotecia. ¿El valor de la razón es la misma? ¿Por qué?



8 En un plano ubica los puntos H, A_1 y A_2, tal como se presentan a continuación.



a. Si H es el centro de la homotecia y la razón es $0{,}6$, ¿cuáles son las coordenadas de A?

b. Obtén la coordenadas de B, multiplicando cada coordenada de A_2, por el valor de la razón de homotecia. ¿Cuáles son ellas?

c. Comprueba que $\frac{\overline{HB}}{\overline{HA_2}}$ es el valor de la razón, y por tanto tu punto B está correcto.

d. Conservando el centro de homotecia, pero efectuando una nueva transformación en la figura completa que aparece tercer cuadrante, ¿cuál es el valor de la nueva razón de homotecia que se debe aplicar para obtener la figura que aparece en el primer cuadrante y que son congruentes?

e. Indica las coordenadas de los nuevos puntos que has encontrado.

f. Se requiere repetir ambas figuras en los demás cuadrantes, de tal manera, que quede una figura simétrica con respecto a los ejes. Indica, en el menor número de pasos posibles, el o los nuevos centros de homotecia, con sus razones correspondientes.

9 Consideremos una homotecia cuya razón sea estrictamente mayor a uno y que está aplicada a un triángulo de lados 5, 12 y 13 centímetros, desde un centro de homotecia H, responde:

a. Si la razón opera aumentando en dos unidades el lado menor ¿cuántas veces aparece aumentado el lado mayor en el triángulo homotético?

b. Si el valor de la razón indica que por cada $1\ \text{cm}$ que se mide en un lado del triángulo original, se miden $2{,}5\ \text{cm}$ en el lado homólogo. ¿Cuánto es su valor?

c. Suponiendo que la razón valga $1{,}8$, encuentra el área del triángulo homotético.

d. Dividiendo el área anterior por el área del triángulo original, ¿qué relación existe entre este cociente y el valor de la razón en **c.**?

III. Resuelve los siguientes problemas, coloca el desarrollo en tu cuaderno y revisa tus respuestas en el solucionario:

1 Tracy cuadriculó muy mal el retrato del desaparecido Elliot, para ampliarlo. Incluso la gran mancha triangular que lleva, inspector Adams, observe sus vértices. Si lo llevamos a coordenadas para ser más precisos, lo que aparece en "A", por llamar así a esta punta, está a tres unidades a la derecha y dos hacia arriba de donde debiera haber estado. Pero mire esta otra, la manchita que está en la punta de oreja "B", no coincide con esta otra punta que es la verdadera... ve, está desviada tres unidades hacia la izquierda. Sin embargo, la otra punta "C"está bien....en medio de la frente, en el $(0{,}9)$... ¿Quiere la relación que tiene este punto con "A" y "B"? ok, se lo diré...."A" está a diez unidades hacia abajo y una a la izquierda, y "B", tres unidades hacia abajo y seis a la derecha... Conforme al relato, encuentra las coordenadas correctas y las incorrectas de los puntos mencionados.

2 Como te contaba, en mis tiempos, las clases eran muy estrictas. Un día, el profesor de matemática preguntó: "¿Cuál es la mitad de uno?".

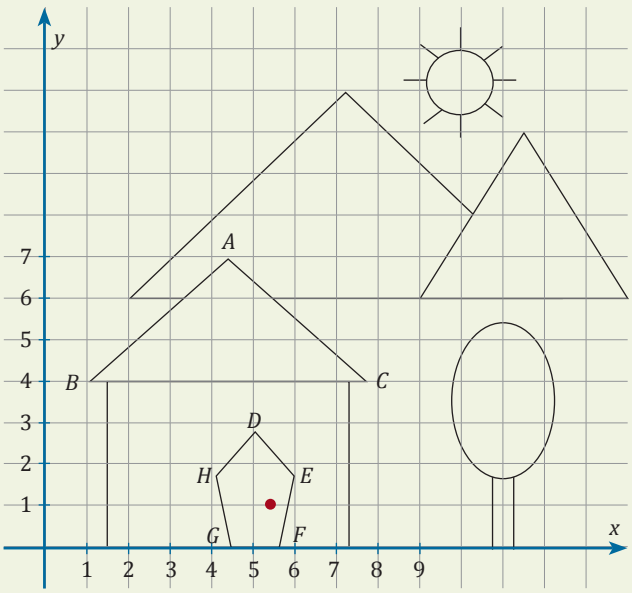
Alguien en la clase gritó: "El ombligo". Todos empezamos a reír, incluso el profesor. Pero enseguida dijo: "¿Qué característica tienen dos puntos en un plano, que para conocer su punto medio, basta saber la semisuma de sus ordenadas?", prosiguió pero riéndose, "¿y cómo serán aquellos dos puntos que para averiguar su punto medio, es suficiente calcular el total de sus abscisas y dividirla por dos?... ¡quién ríe último, ríe mejor!".... Terminé de escuchar el ingrato relato de tío Liborio, y empecé a responder las preguntas de su cuento... ¿cuáles son tus respuestas? ¿Puedes dar un ejemplo de cada pregunta para entender mejor?

3 Ustedes ya no me recuerdan. Aquí les traigo otro maravilloso problema para que ustedes integren sus materias. Se los dicto: "Imaginen ustedes que han dibujado en un plano complejo $-4+5\,i$ y $3-2\,i$. ¿Qué tan "lejos" está uno del otro? ¿Qué tiene que ver el resultado anterior, con el módulo de la diferencia entre ellos? ¿Qué pueden concluir en general, a partir de las dos preguntas anteriores?".

Pueden utilizar la fórmula de distancia entre dos puntos que ustedes ya han aprendido, aproximando a dos decimales sus respuestas. No olviden escribirme a mi correo electrónico. Soy la abuela que vive en Quillota.

4 ¿Cuál es el perímetro de los polígonos?... Miren, papá y mamá, les cuento que me hicieron hacer un plano cartesiano, ubicar unos puntos... Me acuerdo clarito de sus coordenadas porque tomé $(-1,-1)$ y dibujé un trazo hasta llegar a $(-1{,}5)$. Luego, y siempre siguiendo con trazos, llegué a $(1{,}3)$ y después a $(3{,}5)$. ¡Ah! y de ahí bajé con un trazo cruzando el eje x para detenerme en $(-1,-1)$ y de allí terminé formando un polígono... No me fijé que había realizar una homotecia de razón $-2{,}7$ con centro en el origen para responder la pregunta... Responde tú lo solicitado, con aproximación a la centésima.

5 El profesor de matemática de Dominique les ha dado como tarea que calculen algunos datos sobre el dibujo que él realizó a partir de figuras geométricas. No ha podido avanzar en su tarea pues necesita saber:



a. El perímetro del triángulo ABC

b. El área del triángulo ABC

c. El perímetro del pentágono $DEFGH$

6 ¡Mamá, apúrate, ven a ver a mi amiga Coné, que está participando en el lanzamiento de dos dados electrónicos no cargados, tres veces seguidas, en el programa de televisión «Sábados Titánicos»! Mira, acaba de pedir un papel y un lápiz para hacer unos cálculos y jugar a un número. Decide jugar al siete... ¡No lo puedo creer! Ha lanzado tres veces, apareciendo cada vez este mismo número, y ¡se ha ganado $USD\ 3\ 000$! El animador ahora la está entrevistando, solo muestra pares ordenados con los posibles resultados, dibujados en un plano...

Haciendo uso de tus conocimientos sobre el plano cartesiano y las probabilidades, responde a:

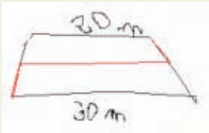


a. Gráfica todos los puntos que representen los posibles resultados de este tipo de lanzamientos.

b. ¿Cuáles son los pares ordenados cuya suma de su abscisa y de su ordenada resulten 7? Destácalos en el gráfico de la pregunta anterior.

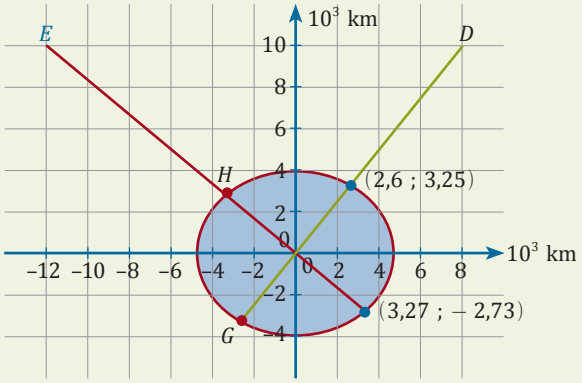
c. ¿Cuáles son los pares ordenados que son los únicos que representan un determinado resultado? Indica dos características que tengan sus coordenadas.

7 Había caminado toda la noche para llegar a su casa. Tuvo que hacer una división de un terreno y luego allí, colocar unas rejillas para separar ambos sectores. Fatigado miró por última vez, un rústico dibujo que había confeccionado para la tarea anterior:



"… cercar con alambre de cuatro hileras de alambre de púas, como lo indica la línea roja, y pasando por la mitad de los lados laterales...". Arrugó el papel, lo echó a la chimenea, exclamó: ¡Misión cumplida!"... Han pasado muchos años desde que escuché este breve cuento. Se trataba de un trapecio cuyos vértices de la izquierda tienen por coordenadas $(5,2)$ y $(7,10)$, todo medido en metros. Calcula aproximadamente la cantidad de alambre de púas que tuvo que haber ocupado este hombre en su tarea, sin dejar de mencionar las coordenadas y los puntos medios aludidos en el relato.

8 –¿Y cuándo ocurrió la destrucción de mi planeta, maestro Roy? –Preguntó el joven mientras veía en la pantalla flotante la siguiente representación:



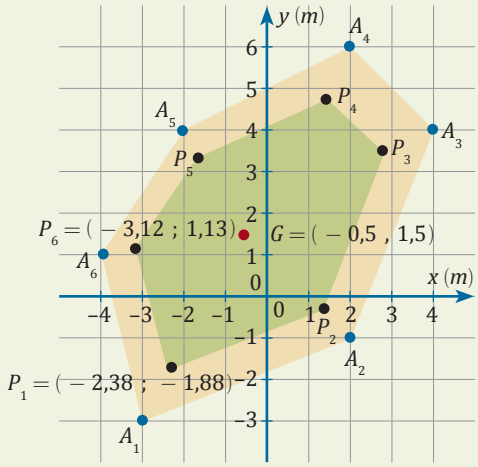
– 2015, según el calendario que se manejaba en la Tierra. Como puedes apreciar en la figura azulada, vivías en un planeta llamado Elipsoide 1 953. Desde los puntos del espacio E y D, enviaron dos rayos destructivos e hicieron desaparecer Hitania (H), y Glitania (G) , los últimos dos bastiones que quedaban defendiendo tu planeta natal.

a. ¿Cuántos kilómetros tuvo que viajar cada rayo destructor para impactar la superficie de Elipsoide 1 953?

b. ¿Cuánto demoró el rayo destructor después de impactar a Hitania en atravesar dicho planeta, si iba a una velocidad de $280\,000\ \frac{\text{km}}{\text{min}}$?

c. Escribe una pregunta y su respuesta, que tenga que ver con el relato y la información dada en la representación gráfica.

9 –La vista aérea del terreno se ve como el siguiente dibujo, escala $1{:}100$. Si nuestro problema, Joaquín, es ver de qué manera puede reducirse esa área verde que aparece allí, que en verdad está llena de maleza, en un...



–Espera Sonia, pero el dibujo está distorsionado.

–No, la forma es caprichosa pero tomamos la foto directamente, y ya que no la tengo a mano, me adelanto un poco para el futuro análisis.

–¿En qué razón están los lados de ambos hexágonos?

–Bueno, tendríamos que establecer a G como el centro de referencia, para hacer las mediciones correspondientes, siendo el hexágono mayor el polígono de origen... ¡Hagámoslo de inmediato!

Ahora responde tú las siguientes preguntas:

a. Encuentra los valores fundamentales para establecer una homotecia.

b. Si queremos aumentar cada lado del hexágono menor en un $10\ \%$, ¿cuál sería el nuevo valor de la razón de la homotecia para el nuevo hexágono homotético?

c. Inventa una pregunta que se pueda responder, de acuerdo a la información dada en el enunciado.

IV. Marca la alternativa correcta:

1 Un triángulo tiene por vértices a $(3{,}1)$, $(9{,}4)$, y el tercero a un punto situado a siete unidades por sobre el eje y, y a tres unidades a la derecha de este. Entonces, la medida de su área es:

a. $15\ \text{u}^2$
b. $18\ \text{u}^2$
c. $24\ \text{u}^2$
d. $30\ \text{u}^2$
e. $36\ \text{u}^2$

2 Los vértices de un triángulo son $(-7{,}0)$, $(0, -8)$ y el origen. Al unir el punto medio del lado mayor del triángulo con los otros puntos medios, se forma un cuadrilátero, donde uno de sus vértices es también el origen. ¿En qué punto se dimidian las diagonales de dicho cuadrilátero?

a. $(-3{,}5\ ;\ -4)$
b. $(-3{,}75\ ;\ -2)$
c. $(-3{,}75\ ;\ -4)$
d. $(-1{,}75\ ;\ -4)$
e. $(-1{,}75\ ;\ -2)$

3 ¿A qué distancia se encuentra $(5, -3)$ del punto $(4{,}1\ ;\ -6{,}9)$?

a. $\sqrt{11}$
b. $\sqrt{16}$
c. $\sqrt{16{,}42}$
d. $\sqrt{8{,}8}$
e. Ninguna de las anteriores.

4 Se ha efectuado una transformación homotética al $\Delta\ ABC$, a partir del centro de homotecia H que está exterior a dicha figura para obtener el triángulo homotético $A'B'C'$. Si $\overline{HA} = 16$ y $\overline{HA'} = \overline{HA} + 20$, entonces, la razón homotética es:

a. $\frac{4}{9}$
b. $\frac{4}{5}$
c. $\frac{5}{4}$
d. $\frac{9}{4}$
e. $\frac{21}{16}$

5 Se sabe que la razón de homotecia entre dos trapezoides homotéticos y que tienen un vértice común, es $\frac{6}{7}$. Si uno de los lados del trapezoide de mayor área es $9{,}8$ u, por tanto, se puede afirmar que el lado homólogo del otro trapezoide mide:

a. $8{,}4$ u
b. $10{,}66$ u
c. Aproximadamente $11{,}43$ u.
d. $1{,}4$ u
e. $0{,}14$ u

6 En un plano cartesiano, la figura que representa todos los puntos cuya ordenada es -3, corresponde a:

a. Una recta cualquiera que pase por $(0, -3)$.
b. Una recta cualquiera que pase por $(-3{,}0)$.
c. Un trazo cualquiera, uno de cuyos extremos es $(0, -3)$.
d. Una recta que es perpendicular al eje horizontal y que pasa por $(-3{,}0)$.
e. Una recta paralela al eje horizontal y que pasa por $(0, -3)$.



7 El punto medio entre A: $(1,\overline{3}\ ;\ 0,2\overline{3})$ y B: $(1,\overline{6}\ ;\ 0,0\overline{3})$ es:

a. $\left(3,\frac{13}{45}\right)$

b. $\left(3,\frac{13}{90}\right)$

c. $\left(\frac{3}{2},\frac{2}{15}\right)$

d. $\left(\frac{3}{2},\frac{4}{15}\right)$

e. Ninguna de las anteriores.

8 Los extremos del lado mayor de un triángulo son $(-7,2)$ y $(-1,-10)$. Si los otros lados miden $8{,}94$ y $8{,}25$ unidades respectivamente, entonces el perímetro de este polígono, aproximado a la centésima, es:

a. 13,42 unidades.

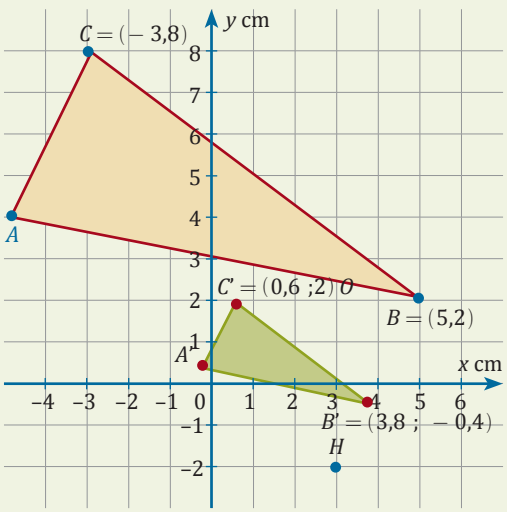
b. 21,36 unidades.

c. 21,67 unidades.

d. 30,61 unidades.

e. 32,98 unidades.

9 En el siguiente gráfico, el $\Delta\ A'B'C'$ es homotético al $\Delta\ ABC$. ¿Cuánto vale la razón de homotecia?



a. $0{,}04$

b. $0{,}4$

c. $0{,}4\ \sqrt{3}$

d. $0{,}4\ \sqrt{0{,}3}$

e. $0{,}4\ \sqrt{0{,}03}$

10 Dos pentágonos regulares y homotéticos tienen a 2,4, como el valor de la razón de la homotecia. Si el perímetro del menor es 30 u, luego el lado del mayor mide:

a. 14,4 u

b. 12,5 u

c. 12 u

d. 8,4 u

e. menos de 8,4 u

11 Se ha dibujado un triángulo equilátero cuyo lado mide una unidad. Si uno de sus vértices está en el origen, otro en el eje y, entonces las coordenadas del tercer vértice que se encuentra en el primer cuadrante es:

a. $(1,1)$

b. $(1;\ 0{,}5)$

c. $\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\frac{1}{2}\right)$

d. $\left(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

e. $\left(1,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

12 Con los puntos M: $(5,-5)$, N: $(15{,}10)$ y P: $(-10{,}0)$ se ha formado un triángulo. De las siguientes alternativas, es Falso que:

a. $(-2{,}5\ ;\ -2{,}5)$ es un punto medio de este triángulo.

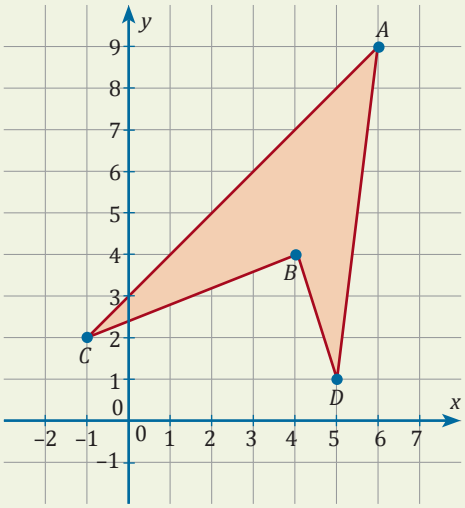
b. $(10;\ -2{,}5)$ no es el punto medio de $\overline{MN}$.

c. $(2{,}5\ ;\ 5)$ es equidistante de P y N.

d. Hay un punto medio cuya ordenada es positiva, pero su abscisa no lo es.

e. Ningún punto medio está ubicado en el cuarto cuadrante.

13 Dada la siguiente figura, indica las medidas del menor y del mayor de los trazos respectivamente.



a. $\sqrt{9}\ ;7$
b. $\sqrt{9};7\sqrt{2}$
c. $\sqrt{10};\sqrt{29}$
d. $\sqrt{9};\sqrt{65}$
e. $\sqrt{10};7\sqrt{2}$

14 Se ha efectuado una transformación homotética a un pentágono de lado 5 cm, con una razón de $\frac{7}{8}$, luego, con aproximación a la milésima, el lado del pentágono homotético mide:

a. $5{,}714$ cm
b. $4{,}375$ cm
c. $0{,}875$ cm
d. $0{,}625$ cm
e. Otro valor.

15 Dos heptágonos regulares y homotéticos tienen por medidas de sus perímetros a $24{,}5$ cm y 28 cm respectivamente. El valor de la razón es negativo. ¿Cuánto es dicho valor?

a. $-0{,}875$
b. $-0{,}975$
c. $-1{,}143$
d. Aproximadamente $-1{,}143$.
e. $-4{,}5$

16 El punto F: $(3-x\ ,-3)$ pertenecerá al tercer cuadrante, siempre y cuando el valor de x sea:

a. Solamente 0.
b. Menor que tres.
c. Igual a tres.
d. Mayor a tres.
e. Negativo.

17 Si el punto medio de $\overline{ST}$ es el origen, y T: $(-11{,}2)$, luego las coordenadas del otro extremo del trazo son:

a. $(-5{,}5\ ;-1)$
b. $(5{,}5\ ;1)$
c. $(11,-2)$
d. $(-11,-2)$
e. $(11{,}2)$

18 Considera los siguientes puntos del plano cartesiano: G: $(-11,-3)$, H: $(-13{,}4)$ y Q: $(-15{,}0)$, entonces el (los) par(es) de puntos que No dista(n) más allá de cinco unidades es (son):

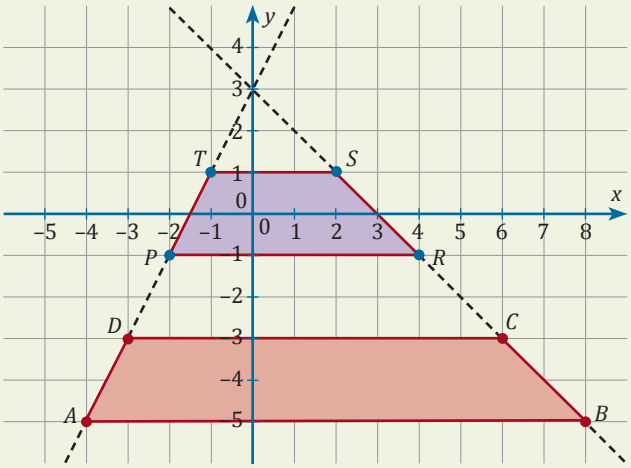
a. G y Q
b. G y Q; H y Q
c. H y Q
d. G y Q; G y H
e. G y H

19 El lado mayor de un triángulo homotético mide aproximadamente $10{,}75$ dm. Si la razón homotética es $-\frac{4}{3}$, por tanto, la medida del lado mayor del triángulo a quien se le aplicó la transformación mide aproximadamente:

a. $8{,}06$ dm
b. $6{,}05$ dm
c. $14{,}33$ dm
d. $3{,}58$ dm
e. $9{,}42$ dm



20 De la siguiente gráfica se puede decir que:



i. Los cuadriláteros son homotéticos.

ii. El centro de homotecia es $(0,3)$

iii. La razón de homotecia puede ser 3 o $\frac{1}{3}$, según a cuál de los cuadriláteros se aplique la homotecia.

Entonces es (son) verdadera(s):

a. Solo I.
b. I y II.
c. I y III.
d. I , II y III.
e. Ninguna.

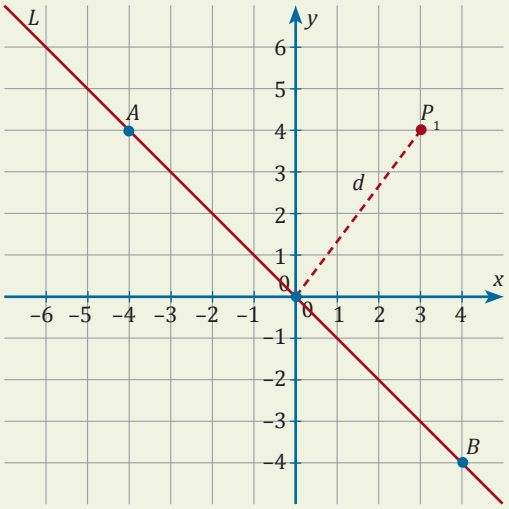
21 Si $y - x = -3$ y $2x - y = 11$, entonces el punto cuyas coordenadas son $\left(x - 2y, \frac{x+y+1}{2}\right)$ es:

a. $(8,5)$
b. $(10,5)$
c. $(10,7)$
d. $(2,7)$
e. $(-2,7)$

22 Los vértices de un triángulo están dados por la intersección de $y = -0{,}5x^2 + 8$, con los ejes coordenados. Entonces, los puntos en medio de los lados de este triángulo son:

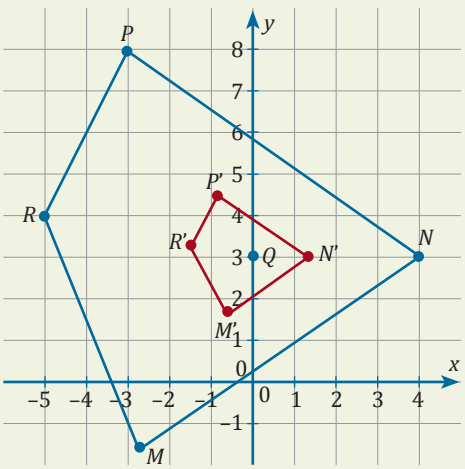
a. $(-4,0), (4,0)$ y $(8,0)$
b. $(-4,0), (4,0)$ y $(0,8)$
c. $(-2,4), (2,4)$ y $(0,4)$
d. $(-2,4), (2,4)$ y $(0,0)$
e. $(4,-2), (4,2)$ y $(0,0)$

23 ¿A qué distancia d, se encuentra P_1 de la recta L?



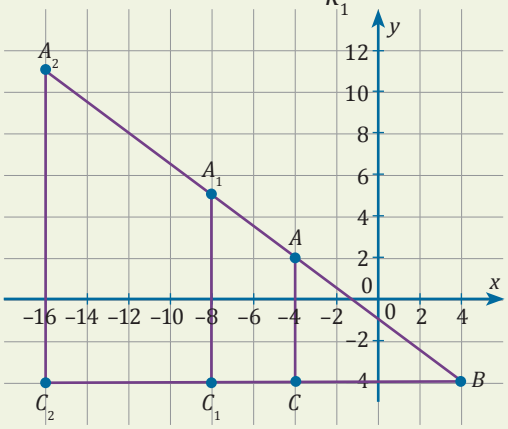
a. 4 u
b. 5 u
c. 7 u
d. Aproximadamente 5 u.
e. Otro valor.

24 La gráfica siguiente muestra el cuadrilátero $M'N'P'R'$, homotético del cuadrilátero $MNPR$, siendo Q el centro de homotecia. Además, $\overline{N'N}$ vale 2,8.Entonces la alternativa incorrecta es:



a. $\overline{P'R'}$ y $\overline{PR}$ son paralelos.
b. $\overline{M'N'} = 0{,}3\ \overline{MN}$
c. La razón de homotecia es $\frac{3}{7}$.
d. Las coordenadas del centro de homotecia son $(0,3)$.
e. El ángulo en N' es igual al ángulo N.

25 Los $\Delta\ BC_1A_1$ y $\Delta\ BC_2A_2$ son homotéticos a $\Delta\ BCA$ con razones k_1 y k_2, respectivamente. ¿Qué es lo que representa $\frac{k_2}{k_1}$?



a. El factor por la cual se debe multiplicar cada lado de $\Delta\ BC_1A_1$ para obtener cada lado homólogo del $\Delta\ BC_2A_2$.

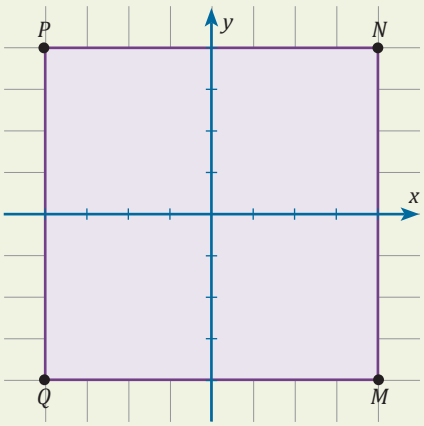
b. El factor por la cual se debe multiplicar cada lado de $\Delta\ BC_2A_2$ para obtener cada lado homólogo del $\Delta\ BC_1A_1$.

c. El número que debe restarse a cada lado de $\Delta\ BC_2A_2$ para obtener cada lado homólogo del $\Delta\ BC_1A_1$.

d. Una simple relación numérica sin ninguna interpretación de homotecia.

e. Ninguna de las anteriores.

26 En la figura adjunta, $MNPQ$ es un cuadrado con centro en el origen del plano cartesiano. Si N: $(\sqrt{a},\sqrt{a})$, luego las coordenadas del vértice Q corresponde a:



a. $(-\sqrt{2a},-\sqrt{2a})$

b. $(-\sqrt{2a},-\sqrt{a})$

c. $(-\sqrt{a},-\sqrt{a})$

d. $(\sqrt{a},-\sqrt{a})$

e. $(-\sqrt{a},\ a\ \sqrt{2})$

27 ¿Cuál es el semiperímetro del triángulo cuyos vértices son los puntos A: $(1,4)$; B: $(1,7)$ y C: $(4,4)$?

a. $(1{,}5+0{,}5\sqrt{2}\ )$ u

b. $1{,}5\sqrt{2}$ u

c. 3 u

d. $(3+1{,}5\sqrt{2})$ u

e. $(4{,}5+1{,}5\sqrt{2})$ u

28 M es el punto medio entre R y S. M': $(-4;\ -2{,}75)$ es el punto medio entre R y M, y M'': $(6;\ 7{,}75)$ es el punto medio entre M y S. Las coordenadas de M son:

a. $(-10;\ -10{,}5)$

b. $(-5;\ -5{,}25)$

c. $(2{,}5)$

d. $(1;\ 2{,}5)$

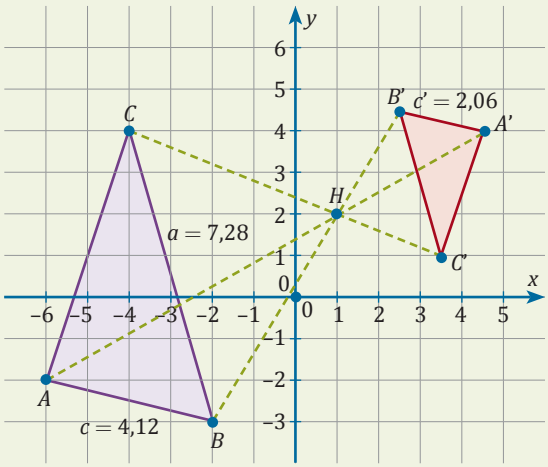
e. $(5;\ 5{,}25)$

29 La siguiente representación muestra H, el centro de una homotecia, donde $\Delta A'B'C'$ es homotético a $\Delta\ ABC$. Se puede decir que es(son) verdadera(s):

I. La razón homotética es $-0{,}5$.

II. $\overline{B'C'}$ mide 3,64 unidades.

III. C dista $\sqrt{29}$ unidades de H.



a. Solo I

b. I y II

c. I y III

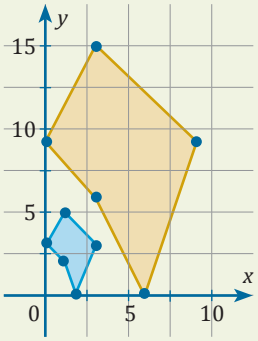
d. II y II

e. I, II y III

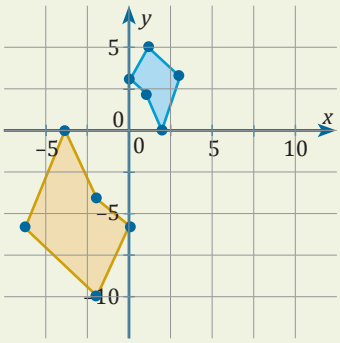


30 ¿En cuál de los siguientes gráficos las figuras que aparecen No son homotéticas?:

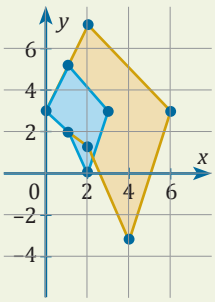
a.



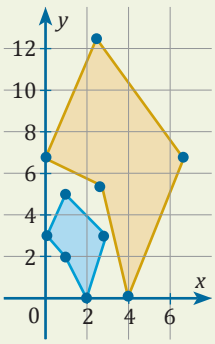
b.



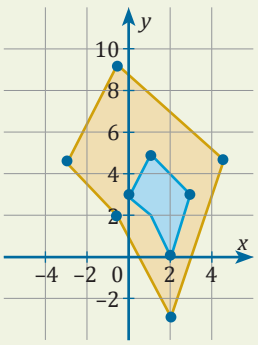
c.



d.



e.



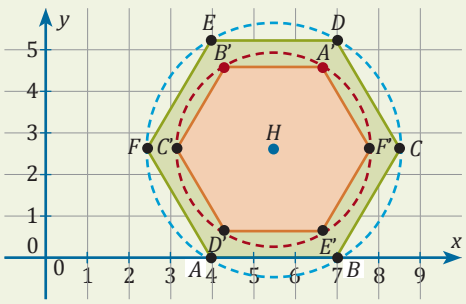
31 La abscisa de un punto varía entre -10 y -2, ambos inclusive. En cambio, su ordenada lo hace entre -2 y 10, sin incluirlos. Ahora bien, sí se triplica la abscisa y la ordenada aumenta en una unidad, se obtiene otro punto. Sobre la ubicación de este último, se puede decir que puede estar en el:

a. I o III cuadrante.
b. II cuadrante.
c. III cuadrante.
d. II o III cuadrante.
e. III o IV cuadrante.

32 Las coordenadas de los extremos de $\overline{CD}$ son $(-3{,}1)$ y $(-3{,}6)$, y los de un segundo trazo $(2, -9)$ y $(6, -6)$. ¿A qué distancia se encuentran entre sí, los puntos medios de ambos segmentos?

a. $10\sqrt{1{,}7}$
b. $5\sqrt{3{,}4}$
c. $10\sqrt{17}$
d. $40\sqrt{0{,}1}$
e. 18

33 En el gráfico se muestran dos hexágonos regulares, y los radios de las circunferencias que los suscriben están en la razón de 3:4. Si consideramos que C: $(8{,}6\ ;\ 2{,}6)$, entonces las coordenadas de H son:



a. $(4{,}5\ ;\ 2{,}6)$
b. $(5{,}4\ ;\ 2{,}6)$
c. $(5{,}5\ ;\ 2{,}6)$
d. $(5{,}6\ ;\ 2{,}6)$
e. Falta información.

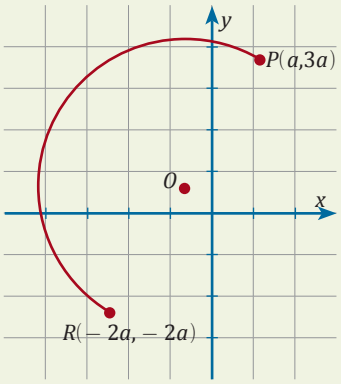
34 En el mismo gráfico, si al hexágono celeste se le efectúa una transformación de homotecia con centro en H, y que produce el hexágono menor. ¿Cuál es el valor de la razón de esta homotecia?

a. $0{,}25$
b. $0{,}75$
c. $-0{,}25$
d. $-0{,}70$
e. $-0{,}75$

35 Considerando E: $\left(4\,,\frac{26}{5}\right)$ y F: $\left(\frac{5}{2},\frac{13}{5}\right)$, entonces la longitud de $\overline{EF}$ es:

a. 3.
b. Aproximadamente 3.
c. Menor a 3.
d. 3,1.
e. Mayor a 3,1.

36 En el siguiente gráfico, P y R son los extremos de la semicircunferencia y O su centro. ¿Cuáles son las coordenadas de O, y el radio respectivo? (a es un real positivo).

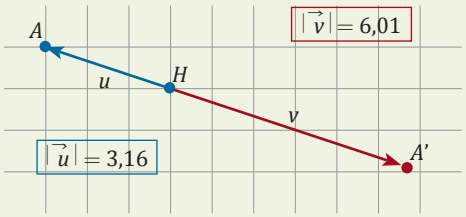


a. $(-a,a)\,;\, a\sqrt{34}$
b. $(-0{,}5\,a\,;0{,}5\,a);\, a\sqrt{34}$
c. $(-0{,}5\,a\,;0{,}5\,a);\, a\sqrt{2}$
d. $(-1{,}5\,a\,;1{,}5\,a);\, a\sqrt{30{,}25}$
e. $(-1{,}5\,a\,;1{,}5\,a);\, a\sqrt{34}$

37 Sabiendo que: $y-x=11$ y $2x+y=-1$, luego las coordenadas del punto medio entre N: $\left(0{,}4x\,;\frac{x+y}{2}\right)$ y Q: $\left(0{,}6y\,;-\frac{x-y}{2}\right)$ son:

a. $(-4{,}7)$
b. $(-2;3{,}5)$
c. $(2{,}9\,;3{,}5)$
d. $(2{,}6\,;4)$
e. $(1{,}3\,;2)$

38 La homotecia se puede considerar una operación vectorial ya que es la resultante de ponderar un vector dirección por un escalar. Observando la representación de más abajo, si $\vec{u}$ es un vector de origen H (centro de una homotecia) y extremo A (vértice de un polígono), y si $\vec{v}$ es un vector de origen H (centro de la homotecia) y extremo A' (vértice homólogo del polígono homotético al anterior), entonces la razón de esta homotecia es, aproximadamente:



a. $-2{,}85$
b. 2
c. $1{,}9$
d. $-1{,}9$
e. -2

39 Para determinar el punto medio entre dos puntos dados, basta saber:
(1) La distancia entre ellos.
(2) Las coordenadas de uno de ellos.

a. (1) por sí sola.
b. (2) por sí sola.
c. (1) y (2), ambas juntas.
d. (1) o (2), cada una por sí sola.
e. Se requiere información adicional.

40 Para conocer la razón de homotecia de una transformación sobre un polígono cualquiera, es suficiente conocer:
(1) Ambos perímetros.
(2) Las distancias de los vértices del polígono homotético al punto de la homotecia.

a. (1) por sí sola.
b. (2) por sí sola.
c. (1) y (2), ambas juntas.
d. (1) o (2), cada una por sí sola.
e. Se requiere información adicional.



Criterios para autoevaluar tu aprendizaje

Marca con una ✘, según sea la evaluación de tu trabajo en esta unidad. Recuerda que hacer esta evaluación responsablemente, te entregará información sobre tu proceso de aprendizaje.

Indicadores	+++	++−	+−−
Pude completar el crucigrama de la síntesis conceptual, sin necesidad de mirar mi libro o cuaderno.			
Respondí correctamente el ítem de la síntesis conceptual.			
Resolví correctamente los ejercicios propuestos.			
Colaboré con mis compañeros en el trabajo grupal, si lo hubo.			
Soy capaz de explicar los contenidos y procedimientos para la resolución de ejercicios de esta unidad.			
Entiendo el tipo de problemas que se pueden resolver con los contenidos de esta unidad.			
Me siento seguro de lo aprendido y creo que podría resolver otros ejercicios que me plantearan.			

Calcula el porcentaje de logro que obtuviste en tus respuestas de la sección de alternativas.

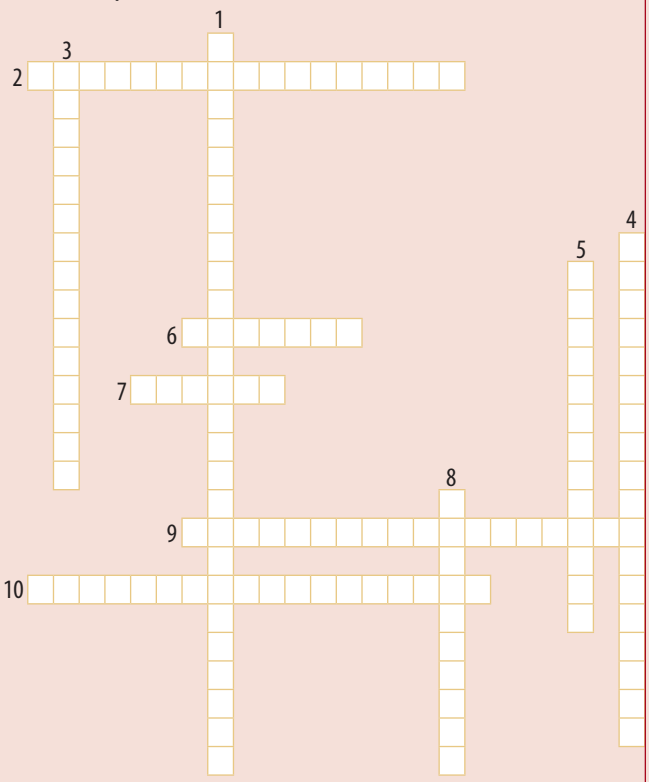
Porcentaje de logro

$$PL = \frac{\text{Nº de respuestas correctas}}{40} \cdot 100$$

Porcentaje de logro	Nota obtenida	Nivel de mi aprendizaje	Cómo mejorar
29 % a 0 %	1,0 a 2,5	Alerta	Los contenidos no han sido comprendidos. Debes repasarlos nuevamente y rehacer los ejercicios. Fíjate muy bien en los ejercicios resueltos. Debes pedir ayuda. ¡Ánimo! Con trabajo y estudio se puede.
49 % a 30 %	2,6 a 3,5	Muy bajo	La mayoría de los contenidos no han sido comprendidos. Debes volver a repasarlos y rehacer los ejercicios incorrectos. Pídeles ayuda a tus compañeros o compañeras. Vuelve a estudiar; seguro que lo lograrás.
59 % a 50 %	3,6 a 3,9	Bajo	Una gran parte de los contenidos no han sido comprendidos en su totalidad. Rehaz aquellos ejercicios incorrectos, pero antes, vuelve a estudiar los contenidos. Trata nuevamente.
69 % a 60 %	4,0 a 4,7	Medio bajo	Adquiriste una parte de los contenidos, pero aún faltan. Debes corregir aquellos ejercicios incorrectos y revisar los contenidos de los temas en que fallaste. Bien, has avanzado, aunque aún queda camino por andar.
79 % a 70 %	4,8 a 5,4	Medio	Has logrado entender una buena parte de los contenidos; sin embargo, aún faltan otros y afianzar los primeros. Corrige las respuestas erróneas; puedes pedir ayuda si lo deseas. Revisa los contenidos. ¡Puedes hacerlo mucho mejor!
89 % a 80 %	5,5 a 6,2	Medio alto	Has logrado adquirir gran parte de los contenidos. Revisa los ejercicios en los que fallaste y repasa aquellos contenidos. ¡Lo has hecho bien!
100 % a 90 %	6,3 a 7,0	Alto	Has logrado aprender todos o casi todos los contenidos tratados. ¡Muy bien! Has logrado los objetivos propuestos. Sigue así.

Evaluación de síntesis 2 (Unidades 1 a 3)

I. Completa el siguiente crucigrama con los conceptos definidos:



Horizontal

2. i.
6. Punto máximo o mínimo de una parábola.
7. Representación gráfica de un número complejo.
9. Complejo reflejo de $a + bi$ con respecto al eje x.
10. Función cuyo gráfico es una parábola.

Vertical

1. Medida de la longitud entre dos puntos del plano.
3. Número de la forma $a + bi$.
4. Razón de semejanza entre figuras homotéticas.
5. Determina la naturaleza de las soluciones de una ecuación cuadrática.
8. Característica de la parábola que está determinada por el parámetro "a" en $f(x) = (ax + b)(x + c)$.

II. Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios. No olvides revisar tus respuestas:

1 Dados los complejos $z_1 = (1,3)$, $z_2 = (-5,1)$ y $z_3 = 4 - 3i$ calcula el resultado de:

a. $z_1 + (z_2 - z_3)$

b. $z_1 \cdot (z_2 + z_3)^2$

c. $\frac{z_1}{z_2} - \frac{z_3}{z_1}$

d. $i^{25} \cdot z_1 + i^{57} \cdot z_3$

e. $|z_1 \cdot z_2| + \left|\left(\overline{z_3 \cdot z_1}\right)\right|$

2 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $(x + 1)^2 - (3x - 2)^2 = 2(x + 1)$

b. $\frac{x + 3}{x} - \frac{2x - 1}{2} = 3x + 5$

3 Dada la función cuadrática $f(x) = x^2 - x + 8$, determina:

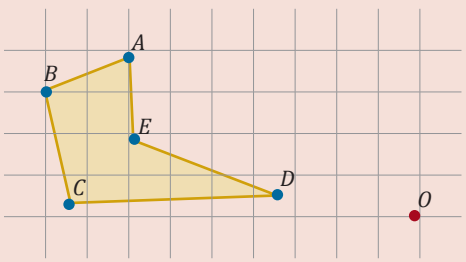
a. Los puntos de corte con el eje x.
b. El punto de corte con el eje y.
c. El vértice de la parábola.

4 Dados los puntos A: $(3,5)$, B: $(2, -9)$ y C: $(-4, -12)$, determina:

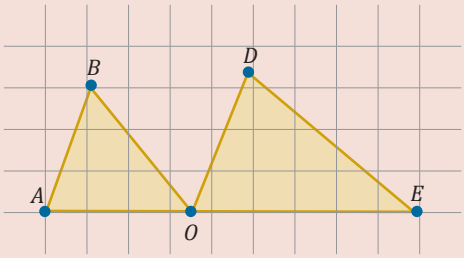
a. El punto medio del segmento $\overline{AC}$.
b. La medida del trazo $\overline{AB}$.

5 Dadas las siguientes figuras, encuentra su homotética si el centro de homotecia es O y la razón de homotecia la dada:

a. Razón: -3



b. Razón: $\frac{1}{2}$



6 A un rectángulo de lados $15\ \text{cm}$ y $20\ \text{cm}$ se le ha aplicado una homotecia de razón $\frac{3}{4}$. ¿Cuál es el área del rectángulo homotético al dado inicialmente?

III. Resuelve los siguientes problemas y luego chequea tu respuesta en el solucionario:

1 Alexis estaba explicándole a Nicole unos ejercicios de números complejos. Nicole desarrolló varios ejercicios correctamente, pero en uno de ellos no logró llegar al resultado correcto. Mira el desarrollo de Nicole y encuentra su error, luego rehazlo correctamente y da el resultado:

$$\frac{2+3i}{4i}+\frac{5-6i}{7i+1}$$
$$\frac{(2+3i)\cdot 4i}{16i^2}+\frac{(5-6i)(7i+1)}{(7i)^2+1}$$
$$\frac{8i-12}{-16}+\frac{35i+5+42-6i}{-49+1}$$
$$\frac{12-8i}{16}+\frac{-47-29i}{48}$$
$$\frac{36-24i-47-29i}{48}$$
$$\frac{-11-53i}{48}$$

2 Pamela ha estado pensando en la materia de números complejos que le acaban de enseñar en su colegio y, aunque entendió bien, quiere desarrollar un ejercicio que encontró en su libro y que se ve un poco complicado. Sabemos que tú también eres capaz de hacerlo bien... ¿Cuál es el resultado de este ejercicio?

$$|\overline{3-2i}|\cdot\left|\frac{4-7i}{2i}\right|-3\left(\left|\frac{i+2}{2-i}\right|:|(3-i)^2\cdot i^{20}|\right)$$

3 Fernando necesita construir un rectángulo que tenga $96\ \text{cm}^2$ de área, de manera que su largo exceda en $4\ \text{cm}$ a su ancho. ¿Cuál debe ser el perímetro del rectángulo?

4 Diego ha comprado para su fiesta del fin de semana cierta cantidad de botellas de bebida en $\$\ 18\,960$. Si él las hubiera comprado en el supermercado mayorista, cada botella le habría costado $\$\ 158$ menos y podría haber comprado 6 botellas más. ¿Cuánto pagó por cada botella y cuantas botellas compró?

5 La profesora de matemática de Alberto le ha planteado un desafío matemático que dice así: "El triple producto de un número natural y otro número catorce unidades mayor, da por resultado novecientos treinta y seis". Ayuda a Alberto a resolver este desafío.

6 Marisol ha dibujado dos curvas de ecuaciones $y=3x^2-6x+1$ y $f(x)=-3x^2+2x-3$, tal como se pedía en su guía de preparación para el examen. Ahora ella debe responder las siguientes preguntas, ¿puedes ayudarla, dando la respuesta correcta?

a. ¿Cuáles son los puntos de corte con los ejes en ambos casos?

b. ¿Cuál es la distancia entre los vértices de ambas parábolas?

c. ¿Se intersectan las parábolas? ¿En qué puntos? (recuerda que para que se intersecten, ambas deben tener las mismas imágenes en dichos puntos).

7 Noelia está diseñando la nueva carátula de su CD. Para ello ha cuadriculado la cartulina que usará, con cuadrados de $1 \cdot 1$ cm y ha colocado el origen de un sistema cartesiano en el extremo inferior izquierdo (de manera que la cartulina se semeje al I cuadrante). Allí ha ubicado los siguientes puntos $(6,0)$, $(9,1)$, $(6,3)$, $(3,3)$ y $(2,1)$ y ha formado un pentágono. Ayuda a Noelia a encontrar los siguientes datos para terminar su trabajo:

a. ¿Donde queda la figura si se realiza una homotecia de centro $(4,2)$ y razón $-\frac{1}{2}$? Grafica tu respuesta.

b. ¿Cuál es el perímetro de la figura original?

IV. Marca la alternativa correcta:

1 Al resolver $(2+i)^2 \cdot (i+1)^3 - 5(-1-i)^4$, se obtiene:

a. $-7-3\,i$
b. $6-2\,i$
c. $-6+2\,i$
d. $7+3\,i$
e. $-6-2\,i$

2 El inverso multiplicativo de $2-5\,i$ sumado al inverso aditivo de $3+i$ es:

a. $-\frac{1}{10}+\frac{17}{10}\,i$
b. $-\frac{17}{10}+\frac{40}{10}\,i$
c. $-\frac{85}{29}-\frac{24}{29}\,i$
d. $\frac{24}{29}+\frac{85}{29}\,i$
e. $1+i$

3 La suma de las soluciones de la ecuación $5x^2-4x+1=0$ es:

a. $\frac{4}{5}$
b. $-\frac{4}{5}$
c. $-\frac{1}{5}$
d. $\frac{1}{5}$
e. No se puede determinar.

4 ¿Cuál(es) de los siguientes números es(son) solución(es) de la ecuación $x(x+3)=2$?

I. $\frac{-3+\sqrt{17}}{2}$
II. $\frac{-3+\sqrt{17}\,i}{2}$
III. $\frac{-3-\sqrt{17}\,i}{2}$

a. Sólo I.
b. Sólo II.
c. Sólo I y II.
d. Sólo I y III.
e. Sólo II y III.

5 Con respecto a la ecuación cuadrática $ax^2+bx+c=0$, se puede afirmar que:

a. Siempre tiene soluciones reales.
b. Tiene solo una solución real $b^2=4ac$.
c. Nunca tiene solución en $\mathbb{R}$.
d. Las soluciones dependen solo del valor de c.
e. Las soluciones están dadas por la fórmula $x=\frac{b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.

6 La función cuadrática $f(x)=x^2-3x$ corta al eje x en los puntos:

I. $(0,0)$ **II.** $(3,0)$ **III.** $(0,3)$

a. Solo I.
b. Solo II.
c. Solo III.
d. Solo I y II.
e. Solo II y III.

7 El eje de simetría de la parábola $f(x)=5x^2-3x+1$, es la recta:

a. $x=\frac{3}{10}$
b. $y=\frac{3}{10}$
c. $x=\frac{10}{3}$
d. $y=\frac{10}{3}$
e. $x=-\frac{3}{10}$



8 De la parábola $y = (x + 3)^2 - 2$ se puede afirmar que:

a. Su vértice está en el origen del sistema cartesiano.

b. Está desplazada dos unidades a la izquierda del eje y, con respecto a la parábola $y = x^2$.

c. Está desplazada dos unidades hacia abajo del eje x, con respecto a la parábola $y = x^2$.

d. Está desplazada en 3 unidades hacia la izquierda del eje y y dos unidades hacia abajo del eje x con respecto a la parábola $y = x^2$.

e. Su concavidad es negativa.

9 La medida del trazo que une el punto $(3,1)$ con el punto medio del trazo de extremos $(2,2)$ y $(-4,8)$ es:

a. $\sqrt{5}$

b. $\sqrt{18}$

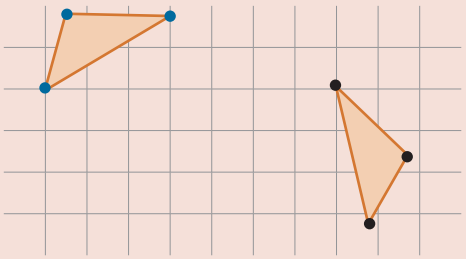
c. $\sqrt{23}$

d. $\sqrt{37}$

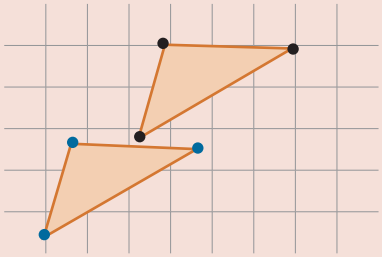
e. $\sqrt{41}$

10 ¿Cuál de las siguientes pares de figuras representan una homotecia?

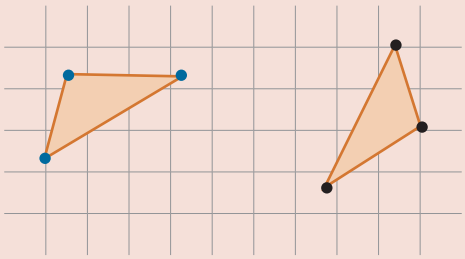
a.



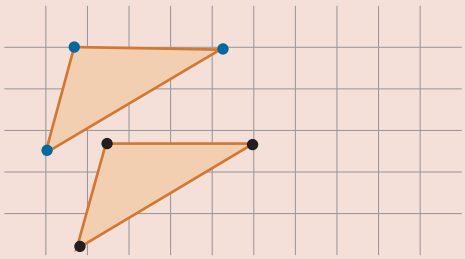
b.



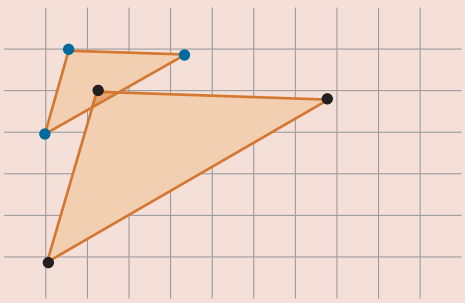
c.



d.



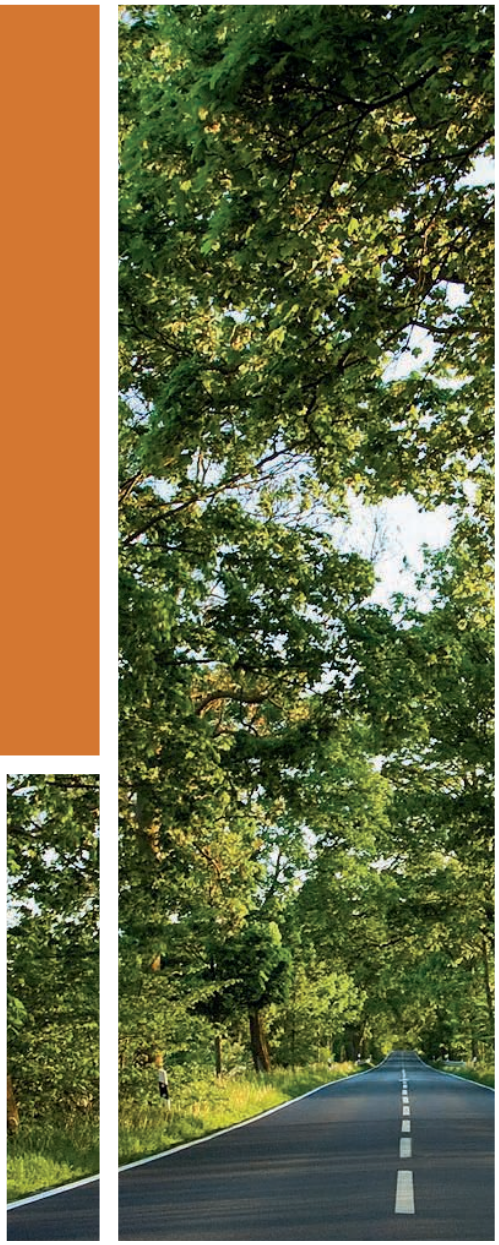
e.



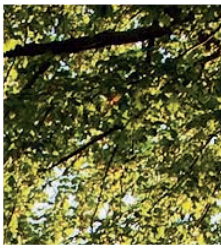
Mis apuntes

UNIDAD 4

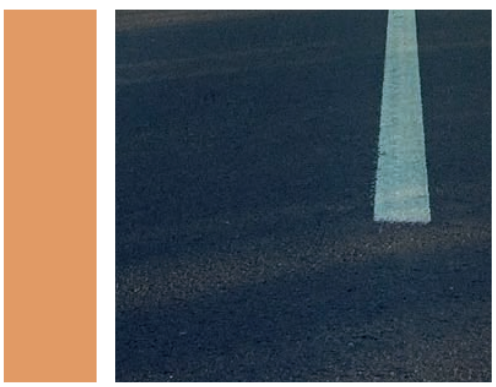
Rectas en el plano... una mirada analítica

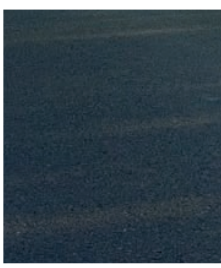


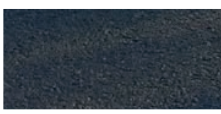














Rectas en el plano

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

Análisis de pendiente y coeficiente de posición

Aplicación a la solución de sistemas de ecuaciones lineales

Aplicación a la resolución de problemas cotidianos

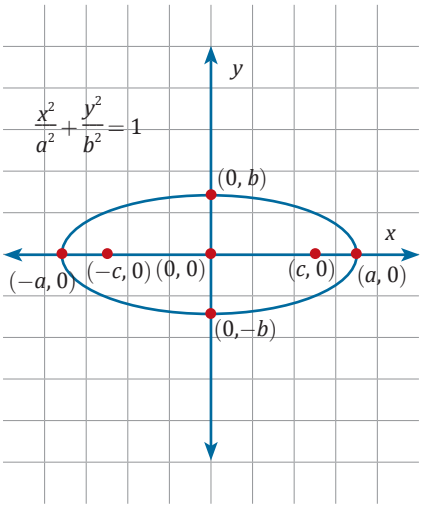


EN ESTA UNIDAD APRENDERÁS A:

1. Determinar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.
2. Deducir e interpretar la pendiente y del intercepto de una recta con el eje de las ordenadas y la relación de estos valores con las distintas formas de la ecuación de la recta.
3. Analizar los gráficos de las soluciones de sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas e interpretarlos, a partir de las posiciones relativas de rectas en el plano (paralelismo, coincidencia e intersección entre rectas).

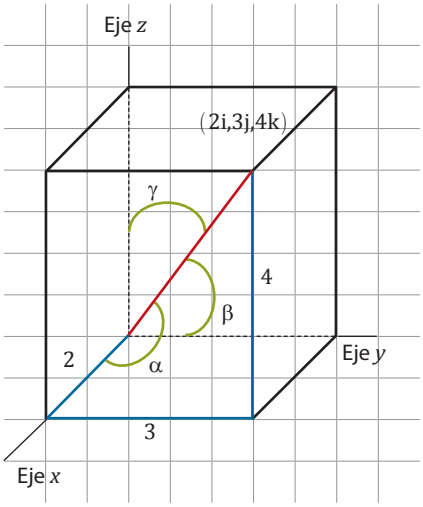
El siglo XVIII, es conocido como el siglo de la matemática ilustrada. Muchos matemáticos se dedicaron al estudio de esta y fue en este siglo, en el que el desarrollo de los conocimientos y estudios en torno a esta disciplina, dieron un gran salto hasta lo que hoy conocemos.

En la unidad anterior ya te contamos un poco acerca del desarrollo de la geometría analítica. En esta unidad trabajaremos con ella, acercándonos un poco más a lo que hicieron Descartes y Fermat. Ya aprendiste, en la unidad anterior, que la geometría analítica desarrolla el trabajo de la geometría a través del álgebra. Uno de los postulados básicos que Fermat planteó es que, a cada curva del plano le corresponde una ecuación y viceversa.



Al matemático francés Sylvestre Lacroix se le atribuye el nombre de geometría analítica a esta rama de la matemática. En el primer volumen de su obra "Tratado de cálculo diferencial e integral (1797 – 1798)" dice: "Existe una manera de ver la geometría que se podría llamar geometría analítica (géométrie analytique), y que consistiría en deducir las propiedades de extensión desde el menor número posible de los principios y los métodos analíticos en verdad".

Con sus libros se ha estudiado la geometría analítica y otros temas en muchas partes del mundo.



Ahora bien, si piensas en las funciones afines, que has estudiado en años anteriores, te acordarás que, a cada función afín (relación entre dos variables del tipo $f(x) = y = ax + b$) le corresponde una línea recta en el plano. Así también a curvas como las parábolas, que acabas de estudiar, y a otras tantas que representan funciones. Pero, ¿qué hay de aquellas curvas y rectas en el plano cartesiano que no son funciones?, por ejemplo, las circunferencias, las rectas paralelas al eje y, entre otras... Pues bien, a ellas también puede asociárseles una ecuación (relación entre dos variables). Este es un tema de estudio muy interesante y amplio que, como ya te contamos anteriormente, permitió el desarrollo de otros campos.



Sylvestre Lacroix (1765-1843)

Este tratamiento del plano geométrico como plano cartesiano, permitió más tarde a matemáticos como Gaspard Monge, en el siglo XVIII, desarrollar la geometría descriptiva. Esta geometría permite representar el espacio en un plano bidimensional. A través de la creación de las "proyecciones ortogonales concertadas" que conocemos hoy en día como sistema coordenado cartesiano tridimensional. Así, se puede asociar también a cada curva en el espacio una ecuación en tres variables.

Como ves, la matemática se abre a un sinfín de campos y de posibilidades de estudio. Te invitamos, en esta unidad, a aprender nuevos temas, a relacionarlos con lo que ya has aprendido y a crear tanto como tu mente pueda imaginar...

Conocimientos previos

El tema que nos convoca en esta unidad tiene mucha relación con las funciones lineales, ya que las rectas (salvo las paralelas al eje y) son la representación gráfica de aquellas funciones. Es por esta razón, que recordaremos aquí algunos conceptos importantes de estas funciones.

Se define una función afín como aquella función del tipo $f(x) = ax + b$, con a y b reales distintos de 0. Si $b = 0$ entonces será del tipo $f(x) = ax$, la que se conoce como función lineal. Recuerda que cuando definimos una función lineal o afín de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$, estamos diciendo que tanto el dominio como el recorrido son los números reales.

Podemos calcular la imagen o la pre-imagen de un número real bajo una función, de la siguiente manera:

1 Imagen de un elemento del dominio bajo una función $f(x)$:

a. Dada la función $f(x) = 2x - 5$, determina la imagen de 4.
Tenemos que 4 es un elemento del dominio de la función, por lo tanto, $x = 4$, entonces, para encontrar su imagen debemos remplazar este valor en la función.
$f(4) = 2 \cdot 4 - 5 = 8 - 5 = 3$. Por lo tanto, la imagen de 4 es 3.

b. Encuentra la imagen de $-\frac{4}{5}$ bajo $f(x) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3}x$
Remplazando, tenemos que:
$f\left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{2}{5} - \frac{1}{3} \cdot -\frac{4}{5} = \frac{2}{5} + \frac{4}{15} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$
Por lo tanto la imagen de $-\frac{4}{5}$ es $\frac{2}{3}$

2 Preimagen de un elemento del recorrido bajo una función $f(x)$:

a. Dada la función $f(x) = -5x + 1$, determina la pre-imagen de -9.
Como -9 pertenece al recorrido de la función, entonces debemos encontrar el valor de x, de tal forma que $f(x) = -9$.
Esto es:
$-9 = 5x + 1 \;/ -1$
$-10 = 5x \;/:5$
$-2 = x$
Por lo tanto, -2 es la pre-imagen de -9

b. Encuentra la pre-imagen de $\sqrt{3}$ bajo la función $f(x) = \frac{2}{3} + 4x$.
Igualando tenemos que:

$$\sqrt{3} = \frac{2}{3} + 4x \qquad / \cdot 3$$
$$3\sqrt{3} = 2 + 12x \qquad / - 2$$
$$3\sqrt{3} - 2 = 12x \qquad /:12$$
$$\frac{3\sqrt{3} - 2}{12} = x$$

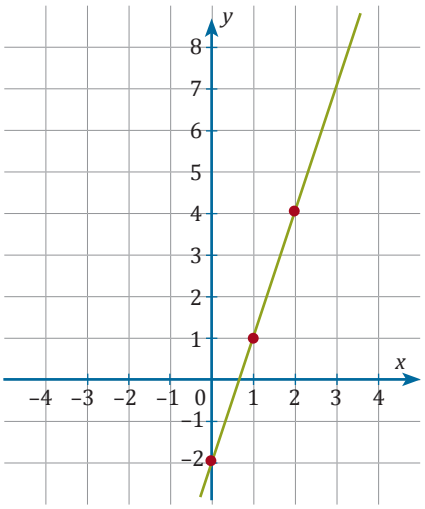
Por lo tanto, $\frac{3\sqrt{3} - 2}{12}$ es la pre-imagen de $\sqrt{3}$.

3 Gráfico de una función afín.
Como sabemos que el gráfico de una función afín es una recta, entonces bastará encontrar las imágenes de dos valores cualesquiera del dominio, luego ubicar los puntos en el plano y por último trazar la recta que pasa por dichos puntos.

a. Graficar la función $f(x) = 3x - 2$.

$f(x) = 3x - 2$

x	y	(x, y)
0	–2	(0, –2)
1	1	(1, 1)
2	4	(2, 4)



Trabaja

Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno, junto a tu grupo.

1 A partir de la siguiente función $f(x) = x + 1$ señala:

a. Dominio de la función $(\text{Dom } f)$

b. Recorrido de la función $(\text{Rec } f)$

c. La imagen de 2 según la función f.

d. La pre-imagen de 2.

2 Dada la función $f(x) = 2x - 3$. Determinar la imagen de 3

3 Para la función $g(x) = -\frac{3}{5}x + \frac{2}{3}$. Determinar la imagen de $\frac{5}{4}$

4 Dada la función $f(x) = -7x + 2$. Determina la pre imagen de -12

5 Analiza y responde cada pregunta:

a. Si $f(x) = 5x + 1$ ¿Para qué valores de x es posible calcular $5x + 1$?

b. Si tenemos el cociente $\frac{8}{x - 3}$ ¿en qué casos es posible determinar el valor de este cociente?

¿Qué valores debe tomar la letra x para que el cociente anterior sea una función?

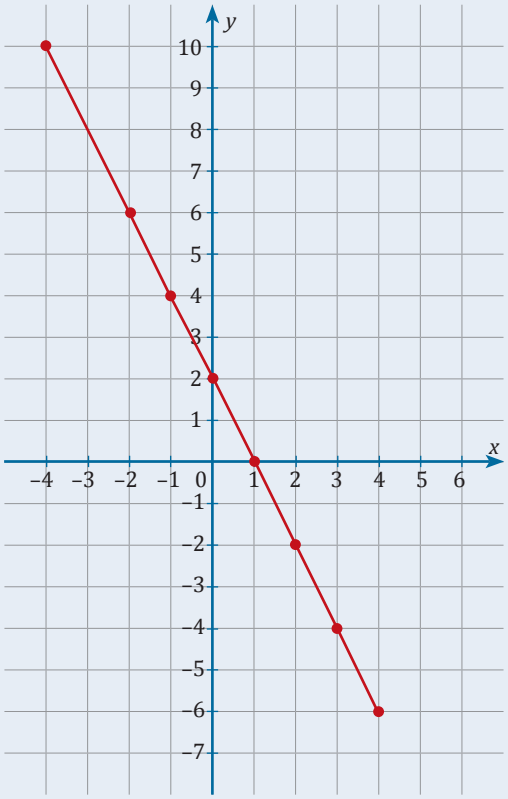
c. Si $f(x) = \sqrt{x + 4}$,
¿Cuál es el dominio de la función?

6 Dada la función $f(x) = 3x - 2$. Determina:

a. $\frac{f(1) + f(3)}{f(-3)}$

b. Su gráfica.

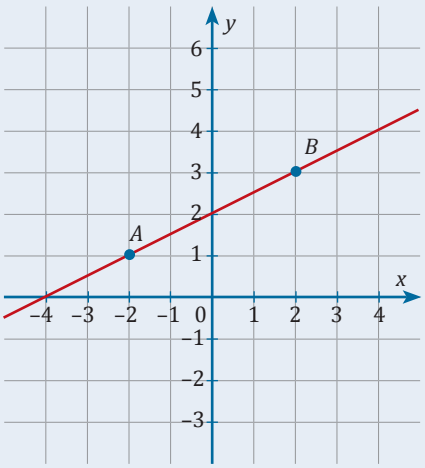
7 Dada la siguiente representación gráfica y conforme a los puntos destacados en ella:



a. Escribe la representación algebraica correspondiente.

b. ¿Cuál es el valor de a en $(a,9)$ de tal modo que este punto pertenezca a la representación gráfica de esta variación?

8 La siguiente línea recta es el gráfico de la función $f(x)$.



Determina:

a. $f(2)+f(0)$

b. $f(2)-f(-2)$

c. $-5\cdot f(-4)$

d. $4\cdot f(0)-f(2)$

9 Dada la función $f(x)=-5x-2$.

a. Completa la siguiente tabla:

x	-7	-3	-1	0	1	$\frac{1}{5}$	2
$f(x)$							

b. Grafica la función dada.

10 Determina para cada función, si el punto dado pertenece o no al gráfico de la función.

a. $f(x)=2x$; A: $(3,6)$

b. $f(x)=5x$; B: $(-2,-10)$

c. $f(x)=-3x+1$; C: $(4,-12)$

d. $f(x)=-3x$; D: $(0,0)$

e. $f(x)=\frac{7}{2}x$; E: $\left(\frac{2}{7},1\right)$

11 Dada la función $f(x)=3x-8$ indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F):

a. ____ $f\left(\frac{1}{3}\right)=7$

b. ____ El punto $(5,7)$ pertenece al gráfico de la función.

c. ____ si $x=8$, la función se anula.

d. ____ si $y=10$, entonces $x=6$.

e. ____ el recorrido de la función es el conjunto de los reales.

12 ¿Por qué las funciones siguientes son lineales? Haz las reducciones pertinentes, reescribe cuando sea necesario, e indica los coeficientes a y b que la caracterizan.

a. $f(x)=2013$

b. $g(u)=-\frac{15}{16}-\frac{4}{7}u$

c. $h(t)=-\frac{2}{11}(11-330t)$

d. $r(v)=\frac{6+13v}{12}-\frac{2-3v}{45}$



13 Si $f(x) = 11x + 19$ y $g(x) = -6x - 10$

a. ¿Cuáles son las pre-imágenes de 9?

b. Halla las imágenes de $-\frac{8}{5}$ y luego multiplícalas.

c. ¿Cuál es la fórmula de $h(x)$ que se obtiene haciendo $f(x) - g(x)$?

d. ¿Es lineal la función que has obtenido en **c.**? ¿Por qué?

14 Si $g(x) = -5x + \frac{5}{3}$

a. ¿Cuál debe ser el valor de x para que $g(x)$ sea igual a $-\frac{7}{13}$?

b. Conforme a lo respondido en **a.** ¿En cuántas unidades debiera variar x, para que $g(x)$ aumente en $\frac{7}{13}$?

c. ¿Será verdad que la pre-imagen de n^2 es $\frac{n^2}{5} - \frac{1}{3}$? Justifica tu respuesta haciendo los desarrollos necesarios.

d. Halla el valor t del dominio, tal que $g(t) = t$.

15 Si $h(x) = \frac{8}{9} - 2{,}\overline{3}x$:

a. Encuentra un valor que anule esta función.

b. ¿Será verdad que $h(3 + 4) = h(3) + h(4)$? Justifica tu respuesta.

c. ¿Por qué la expresión $3{,}\overline{2}x - h(x)$ es una función lineal?

d. ¿Cuál es el valor de a que permite que $h(a) = 2a$?

16 El perímetro de un paralelogramo no recto, donde un lado mide 8 cm, está modelado por la función $P(l) = 16 + 2l$, donde l es la medida del otro lado, también en cm. Responde:

a. ¿Por qué $P(l)$ es una función lineal?

b. ¿Cuáles son los posibles valores que puede tomar l?

c. ¿Que valores puede tomar $P(l)$? Justifica tu respuesta.

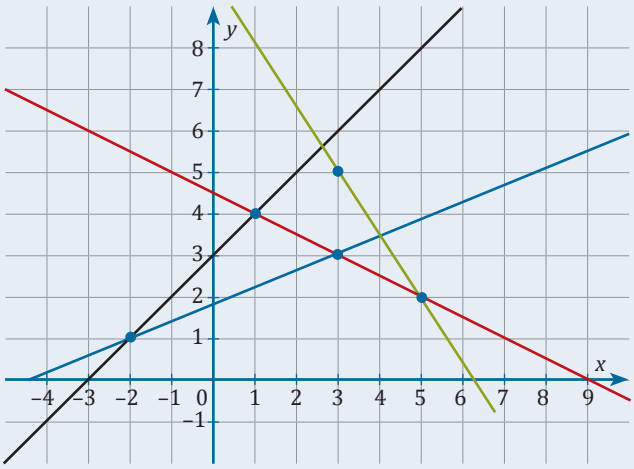
d. ¿Cuánto vale el perímetro de un romboide, si uno de sus lados es 5 cm?

e. Si los valores de l, varían entre 1 cm y los 10 cm, ambos inclusive, ¿entre qué valores oscila $P(l)$?

f. ¿Para qué valor de l, el perímetro es 28,5 cm?

g. Si los valores que resultan al aplicar la fórmula están entre 22,75 cm y 55,05 cm sin incluirlos, ¿cuáles son todos los valores posibles que toma l, para obtener estos resultados?

17 La siguiente representación de funciones corresponde a $f(x) = -1{,}5x + 9{,}5$; $g(x) = -0{,}5x + 4{,}5$; $h(x) = 0{,}4x + 1{,}8$ y $t(x) = x + 3$



a. Identifica cada función con el color de la recta que la representa.

b. Indica los valores de $f(3)$, $g(3)$, $h(-2)$, y $t(-2)$.

c. ¿Cuál es la imagen de 3 bajo t?

d. ¿Cuál es la pre-imagen de 2 bajo g? ¿y f?

e. ¿Son iguales las imágenes de 2,6 bajo t y f, respectivamente? Justifica tu respuesta.

18 La relación que existe entre una temperatura medida en grados Celsius (T_C), y la misma pero en grados Fahrenheit (T_F), es la siguiente: $\frac{T_C}{100} = \frac{T_F - 32}{180}$.

a. Encuentra una ecuación que permita conocer la variación de una temperatura expresada en grados Fahrenheit, con respecto a la misma variación de temperatura pero expresada en grados Celsius.

b. ¿Para qué valor de T_F, la temperatura en grados Celsius corresponde a la temperatura de ebullición del agua $(100\ °C)$?

Determinando la ecuación de una recta

En esta sección aprenderás

Cómo se determina la ecuación de una recta dados dos puntos de ellas o dos condiciones de ella.

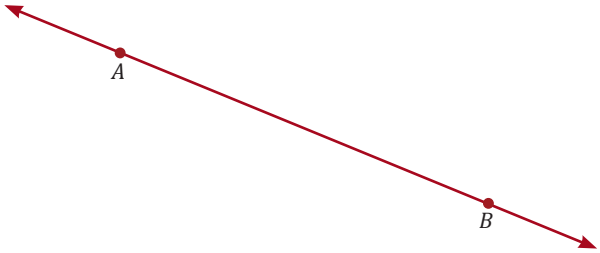
Desarrollarás las siguientes habilidades:

- Identificar, calcular, interpretar, resolver problemas, analizar, sintetizar, investigar y comunicar.

Habilidades por actividad:

- Identificar y calcular: 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 6 – 7b – 7c – 7d – 7e. 1 – 3 – 4a – 4c – 4d – 6 – 7.
- Interpretar y resolver problemas: 7a. 2 – 4b – 8 – 9 – 10a – 10b – 11 – 12 – 13 – 15 – 16.
- Analizar y sintetizar: 5 – 10c – 14.
- Investigar y comunicar: 10d.

Para introducir la ecuación que tiene asociada una recta en el plano, es necesario en primer lugar que comprendas la noción de línea recta. Una línea recta es una sucesión ordenada e infinita de puntos alineados en una misma dirección.



Como vemos, una recta tiene solo una dimensión correspondiente a su longitud y es necesario tener solo dos puntos para determinarla.

Podemos ver la figura que representa la recta, pero es a partir de la información que nos entrega esta línea (coordenadas de A y B en el plano cartesiano) que podemos encontrar una expresión algebraica asociada a dicha recta.

Así, podemos decir que cada recta tiene asociada una expresión algebraica o ecuación y que esta es una relación de igualdad entre las variables x e y. Así, la ecuación de esta recta será de la forma $y = ax + b$, con a y b dos números reales cualesquiera. Si nos dan esta ecuación, podemos encontrar gráficamente la recta asociada a ella. También es posible determinar infinitos puntos de esta, encontrando pares ordenados de números que satisfagan dicha ecuación, tal como lo hacías con las funciones lineales.

¿Será posible encontrar la ecuación de una recta si tenemos dos de los puntos por los que esta pasa?

Para ello, usaremos la recta de ecuación $y = 3x - 6$ y determinaremos si el punto $(2,0)$ es un punto de la recta. Debemos entonces reemplazar el valor de las coordenadas x e y del punto dado y ver si se cumple la igualdad. Es decir, hacer $x = 2$ e $y = 0$ y reemplazar en la ecuación dada $y = 3x - 6$, obteniendo:

$$0 = 3 \cdot 2 - 6$$
$$0 = 6 - 6$$
$$0 = 0$$

En este caso se cumple la igualdad, y decimos que el punto es parte de la recta, o lo que es lo mismo, que la recta pasa por ese punto.

Miremos la ecuación de una recta nuevamente, $y = ax + b$, ¿qué valores son necesarios determinar para escribir la ecuación de una recta en particular? Efectivamente, es necesario conocer las coordenadas de dos puntos por los que pasa nuestra recta para poder determinar su ecuación. Supongamos que tenemos dos puntos de esta recta $A = (3,4)$ y $B = (-1,2)$, entonces podemos reemplazar las coordenadas x e y, de ambos puntos en dicha ecuación, así tendremos que:

Para A: $4 = a \cdot 3 + b$
Para B: $2 = a \cdot -1 + b$

Ahora tenemos dos incógnitas, pero también dos ecuaciones, por lo que podemos hacer un sistema de ecuaciones lineales de la forma:

$$\begin{array}{r} 3a + b = 4 \\ \underline{-a + b = 2} \end{array} \quad \text{(restando ambas ecuaciones)}$$

$$4a = 2 \qquad /:4$$

$$a = \frac{1}{2}$$

Al remplazar el valor de la incógnita a encontrado en la segunda ecuación, se tiene:

$$-\frac{1}{2} + b = 2 \quad / + \frac{1}{2}$$

$$b = \frac{5}{2}$$

Con esto, podemos volver a remplazar estos valores en la ecuación $y = ax + b$ y así se puede escribir que la ecuación de la recta es $y = \frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

Una vez que obtenemos estos valores, debemos verificar que esta ecuación sea en realidad la que representa a la recta. Para esto, podemos usar la fórmula ya obtenida y encontrar dos puntos distintos a los anteriores que pertenezcan a ella. Con ellos podemos graficar la recta y verificar que la recta también pasa por los puntos dados originalmente.

Primero, encontremos dos puntos, escojamos $x = -3$ y $x = 5$, así, remplazando en la ecuación que obtuvimos podemos escribir que:

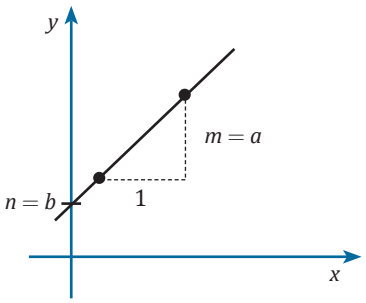
$y = \frac{1}{2} \cdot -3 + \frac{5}{2} = -\frac{3}{2} + \frac{5}{2} = \frac{2}{2} = 1 \Rightarrow (-3,1)$ *es un punto de la recta.*

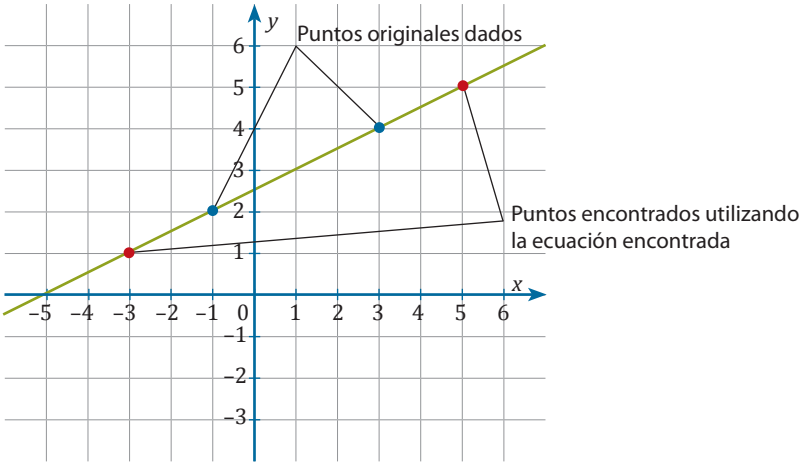
$y = \frac{1}{2} \cdot 5 + \frac{5}{2} = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} = \frac{10}{2} = 5 \Rightarrow (5,5)$ *es un punto de la recta.*

Si ahora ubicamos estos puntos en el gráfico original de la recta, tendremos que:

Toma nota

En algunos textos encontrarás la ecuación de la recta definida como $y = mx + n$, con m y n, números reales. Si te fijas las letras de estos parámetros asociados es solo un acuerdo y bien se podrían designar a través de otras letras. Por lo general, también se designan como a y b.





Como puedes darte cuenta, los dos puntos encontrados con la recta que determinamos, están también en la recta que pasa por los puntos dados inicialmente. Entonces la recta es la misma, por lo tanto, hemos encontrado un método para determinar la ecuación de la recta, si tenemos dos puntos por los que pasa.

Haremos otro ejemplo. Para este utilizaremos los puntos $A = (-7, -2)$ y $B = (9,5)$ y determinaremos la ecuación la ecuación de la recta que pasa por ellos. Sustituimos en $y = ax + b$ las coordenadas de los puntos:

$$\left.\begin{array}{l} -7a + b = -2 \\ 9a + b = 5 \end{array}\right| \quad \textit{(restar ambas ecuaciones)}$$

$$-16a = -7 \qquad /: -16$$

$$a = \frac{7}{16}$$

Al remplazar el valor de la incógnita a encontrado en la primera ecuación, se tiene que:

$$-7 \cdot \frac{7}{16} + b = -2$$

$$-\frac{49}{16} + b = -2 \qquad / + \frac{49}{16}$$

$$b = \frac{17}{16}$$

Por lo tanto, y remplazando estos valores ahora en la ecuación, tendremos que la ecuación de la recta buscada es $y = \frac{7}{16}x + \frac{17}{16}$.

Ahora supongamos que tenemos los puntos $(4, -1)$ y $(7, -1)$.

Remplazando en $y = ax + b$, tendremos que, para el primer punto se puede escribir $-1 = a \cdot 4 + b$ y para el segundo punto; $-1 = a \cdot 7 + b$. Si hacemos el sistema, tendremos que:

$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = -1 \\ 7a + b = -1 \end{array}\right| \quad \textit{(restando ambas ecuaciones)}$$

$$-3a = 0 \; /: -3$$

$$a = 0.$$

Remplazando este valor en la segunda ecuación, se tiene que:

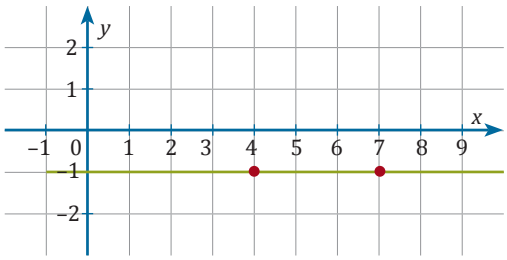
$7 \cdot 0 + b = -1$

$0 + b = -1$

$b = -1.$

Así, la ecuación de esta recta es $y = 0 \cdot x - 1$, es decir, $y = -1$

Como te puedes dar cuenta, esta ecuación no tiene x, graficándola, obtenemos:



Como verás es una recta paralela al eje x, que intersecta al eje y en -1. Si te acuerdas de las funciones, estas eran las llamadas funciones constantes y su forma era precisamente $y = c$, donde c era una constante (un número real cualquiera). Entonces, la ecuación que encontraste debería ser la ecuación de la recta que buscabas.

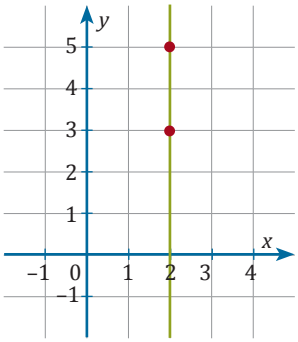
Veamos ahora que ocurre cuando la recta pasa por los puntos $(2,3)$ y $(2,5)$. Nuevamente reemplazamos estos valores $y = ax + b$, así para el primer punto escribimos $3 = a \cdot 2 + b$ y para el segundo punto $5 = a \cdot 2 + b$, lo que nos queda como el sistema de ecuaciones:

$$\begin{array}{l} 3 = a \cdot 2 + b \\ \underline{5 = a \cdot 2 + b} \end{array} \quad \textit{(restando ambas ecuaciones)}$$

$-2 = 0$

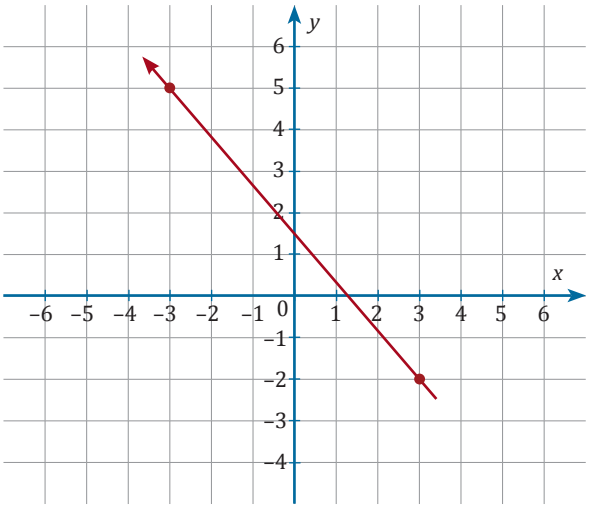
Pero la igualdad encontrada es falsa, por lo tanto el sistema no tiene solución, es decir, no podremos encontrar la ecuación de la recta mediante este método.

Si graficamos esta recta, tendremos algo que no es una función, pues hay más de una imagen para $x = 2$, observa:



De acuerdo a nuestra figura, cuando $x = 2$, se verifican distintos valores de y, es decir el valor de x es siempre el mismo, en este caso 2, independientemente de la ordenada y. Entonces la recta debe ser $x = 2$.

Finalmente, determinaremos la ecuación de la recta a partir de su representación gráfica.



Si te fijas, esta recta pasa por los puntos $(-3,5)$ y $(3, -2)$, y dado que ya sabemos cómo proceder cuando tenemos un par de puntos pertenecientes a una recta, debemos resolver un sistema de ecuaciones, determinando que $a = -\frac{7}{6}$ y $b = \frac{3}{2}$.

Obteniendo la ecuación $y = -\frac{7}{6}x + \frac{3}{2}$.

- Para determinar la ecuación de una recta, dados dos puntos por los que pasa, podemos utilizar un sistema de ecuaciones. Para ello se deben remplazar las coordenadas de ambos puntos en la ecuación de la forma $y = ax + b$, para formar el sistema. Luego, resolver el sistema para encontrar los parámetros. Por último, remplazamos los valores obtenidos.
- Una ecuación de la recta también se puede escribir como $y = mx + n$. Es decir, los parámetros a y b, también son llamados m y n, respectivamente.

Trabaja

Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno y luego revisa tus resultados en el solucionario.

1 Determina la ecuación de la recta que pasa por los puntos dados, formando un sistema de ecuaciones:

a. A: $(2,7)$ y B: $(-3,-18)$

b. C: $(1,2)$ y D: $(-2,20)$

c. E: $\left(3,\frac{9}{2}\right)$ y F: $\left(-2,-\frac{23}{6}\right)$

d. G: $(-3,-11)$ y H: $(4,3)$

e. I: $\left(\frac{1}{3},-\frac{7}{6}\right)$ y J: $\left(\frac{1}{2},-2\right)$

f. K: $\left(0,-\frac{2}{5}\right)$ y L: $\left(4,\frac{13}{5}\right)$

2 Dado los puntos A: $(-4,2)$; B: $(-6,-6)$ y C: $(6,-8)$ que corresponden a los vértices de un triángulo. Determina la ecuación de la recta que pasa por:

a. A y B

b. B y C

c. A y C

3 Dados los puntos A: $\left(\frac{1}{4},\frac{11}{8}\right)$; B: $(1,-1)$ y C: $\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{6}\right)$. Determina a qué recta pertenece cada uno.

a. $5x+7y+2=0$

b. $y=\frac{3}{2}x+1$

c. $-16x+6y+15=0$

4 Determinar el coeficiente de x en la ecuación de la recta $y=mx+n$, que:

a. Pasa por los puntos A: $(1,4)$ y B: $(5,40)$.

b. Tiene por ecuación: $y=0,\overline{3}\,x-3$.

c. Tiene por ecuación: $27x+63y+14=0$.

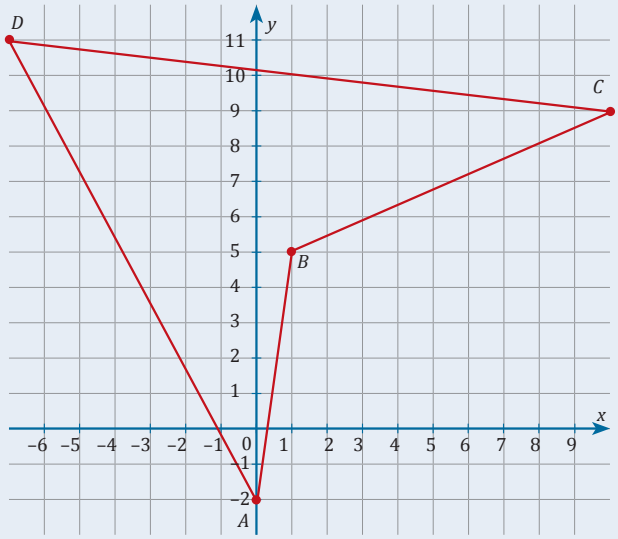
5 Conforme al siguiente gráfico, escribe la ecuación de la recta que:

a. Pase por C y A.

b. Atraviese a B y D.

c. Contenga el segmento de menor longitud.

d. Cruce los puntos de mayores ordenadas.



6 Encuentra la ecuación de la recta:

a. Donde $(-3,17)$ pertenezca a ella, al igual que $(20,13)$.

b. Que pase por dos puntos cuya abscisas sean 7 y -7, con ordenadas -7 y 7, respectivamente.

c. Que contenga a $(3,-8)$, y otro punto que diste diez unidades a la izquierda y veinte hacia arriba.

d. Que atraviese el origen y continúe en otro punto de la forma (a,a).

7 La abscisa del punto medio entre M y N es -4 y -14 es su ordenada. En cambio, la ordenada del punto medio entre N y P es -5, con 10 como abscisa.

a. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos medios?

Ahora bien, si M: $(6,-3)$ y P: $(-1,2)$, encuentra la ecuación de la recta que contenga a:

b. M y P

c. M y N

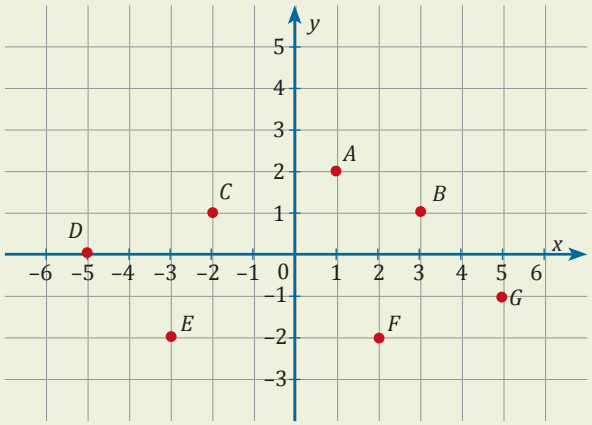
d. N y P

e. N y el punto medio entre M y P.

Trabaja

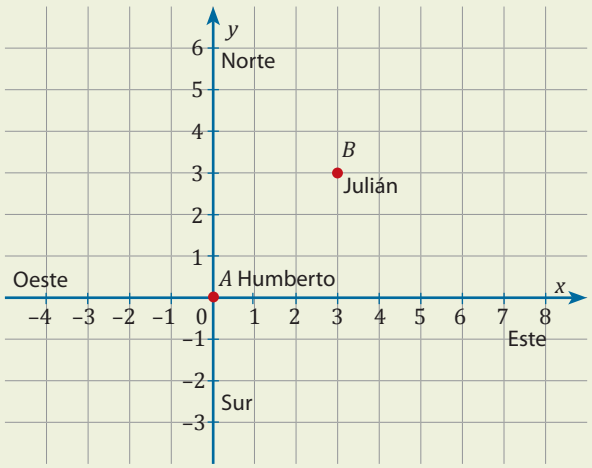
Resuelve, junto a tu grupo, los siguientes ejercicios. No olviden chequear sus respuestas en el solucionario.

1 Laura hizo el siguiente bosquejo de puntos para el trazado de su maqueta. Ella necesitaba determinar la ecuación de ciertas rectas. Ayúdenla y determinen la ecuación de la recta que pasa por:



a. C y B
b. G y F
c. D y A
d. C y F
e. E y B

2 –¡Julián, no estás ubicado donde te corresponde! –le gritó Humberto. Ellos habían ideado un sistema de coordenadas, medido en metros, como el que muestra la figura, para poder plantar los árboles en el huerto de Humberto.

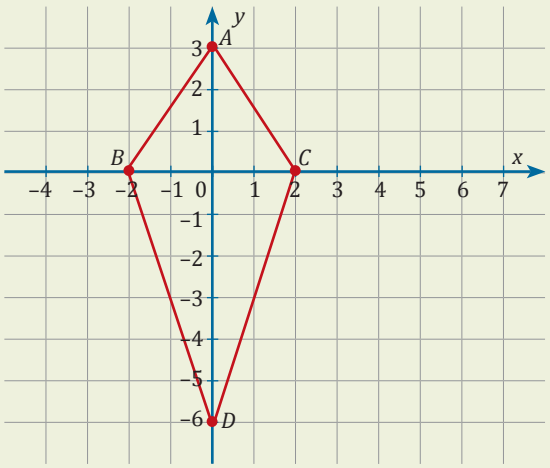


–Si te mueves un metro al norte y dos metros al oeste estarás perfecto y en línea recta conmigo, como habíamos acordado –dijo Humberto.

Con esta información respondan:

a. ¿Cuál es la ecuación de la recta de la que habla Humberto?
b. ¿Cuál es la ecuación de la recta que hubiera formado Humberto con Julián, si este hubiera mantenido su posición inicial?

3 A Nora le gustaba aplicar sus conocimientos matemáticos a todo lo que pudiera. Hoy, se encontraba en la casa de su abuelo, ayudándolo a confeccionar volantines. Su abuelo tenía el siguiente bosquejo de un lindo volantín:



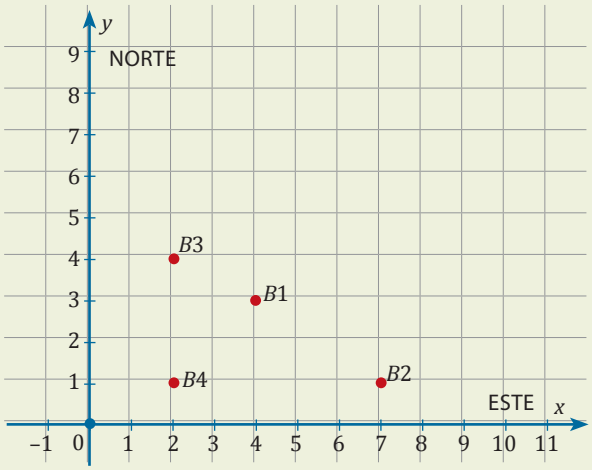
Nora pensó un momento y colocó el origen del sistema coordenado en el punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero. Luego de unos cálculos, encontró la ecuación de algunas rectas que componen el bosquejo dado.

Determinen ustedes también la ecuación de la recta de:

a. La diagonal más larga.
b. La diagonal más pequeña.
c. El lado AC.
d. El lado AB.
e. El lado BD.
f. El lado CD.



4 Marcos ha construido un tablero de combate naval donde ha colocado sus barcos, como muestra la figura:



Ahora ustedes, con los conocimientos adquiridos, respondan las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por $B3$ y $B1$?

b. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por $B1$ y $B2$? ¿Efectivamente, es la misma recta que la determinada en la parte **a.**?

c. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por $B3$ y $B4$?

d. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasa por $B2$ y $B4$?

5 Esto de cuadricular el cartón que tenemos ha sido muy bueno –decía Rodrigo–. Sin embargo, aún no logro alinear los puntos que debo trazar. Dos de ellos, A: $(3,6)$ y B: $(8,5)$, deben estar fijos y el resto deben ser parte de la recta que pasa por A y B...

Ayuden a Rodrigo a encontrar la coordenada que falta en cada punto, para que estos cumplan con lo requerido:

a. El punto C tienen ordenada 8, ¿cuál es su abscisa?

b. El punto D tiene abscisa $\sqrt{5}$, ¿cuál es su ordenada?

c. El punto E tiene ordenada igual al doble de su abscisa, ¿cuáles son sus coordenadas?

d. El punto F tiene abscisa igual a la tercera parte de su ordenada, ¿cuáles son sus coordenadas?

e. El punto G tiene abscisa -3, ¿cuál es su ordenada?

Definiendo la ecuación de la recta

Hemos estado estudiando estos conocimientos desde el punto de vista de la geometría analítica, es decir, aplicando el análisis matemático y el álgebra en un determinado sistema de coordenadas para estudiar la recta. Desde este punto de vista hemos encontrado, en la unidad anterior, una fórmula para determinar el punto medio de un trazo y la distancia entre dos puntos del plano. Si relacionas estos conocimientos deberíamos poder determinar, mediante una fórmula, la ecuación de la recta que pasa por dos puntos.

Supongamos que los puntos por los que pasa esta recta son A: (x_1,y_1) y B: (x_2,y_2), con $x_1 \neq x_2$, y ocupemos el método visto para encontrar una ecuación general. Si la recta tiene ecuación $y = ax + b$, entonces:

Para A: $y_1 = a \cdot x_1 + b$ y para B: $y_2 = a \cdot x_2 + b$, formando el sistema, podemos escribir que:

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = a \cdot x_1 + b \\ y_2 = a \cdot x_2 + b \end{array}\right| \text{ (restando)}$$

$$y_2 - y_1 = a \cdot x_2 - a \cdot x_1$$

$$y_2 - y_1 = a(x_2 - x_1)$$
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}.$$

Al remplazar la expresión encontrada para la incógnita a en la primera ecuación, se tendrá que:

$$y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 + b$$
$$y_1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x_1 = b$$
$$b = \frac{y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1}.$$

Entonces, remplazando los valores de a y b, nuevamente en la ecuación $y = ax + b$, se tiene que:

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \cdot x + \frac{y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)}{x_2 - x_1} \qquad / \cdot (x_2 - x_1)$$
$$y(x_2 - x_1) = x(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1) - x_1(y_2 - y_1)$$
$$y(x_2 - x_1) - y_1(x_2 - x_1) = x(y_2 - y_1) - x_1(y_2 - y_1)$$
$$(x_2 - x_1)(y - y_1) = (y_2 - y_1)(x - x_1)$$
$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

Esta es la fórmula que se conoce como ecuación de la recta que pasa por dos puntos. Observen cómo se usa. Por ejemplo:

1 Determinar la ecuación de la recta que pasa por los puntos A: $(2,1)$ y B: $(-1,-5)$. Designaremos por (x_1, y_1) a las coordenadas del punto A y por (x_2, y_2) a las coordenadas de B (recuerda que también puede ser al revés). Entonces, remplazando estos valores en la fórmula encontrada, se tiene que:

$$(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$
$$(y - 1) = \frac{-5 - 1}{-1 - 2}(x - 2)$$
$$y - 1 = \frac{-6}{-3}(x - 2)$$
$$y - 1 = 2(x - 2)$$
$$y - 1 = 2x - 4 \qquad / + 1$$
$$y = 2x - 3$$

Esta es la ecuación de la recta que buscábamos. A la ecuación escrita de esta forma, se le llama **ecuación principal**. Pero también podemos escribir esta ecuación de la forma $mx + ny + p = 0$, con m, n y p pertenecientes a los números reales, tales que m y n no son simultáneamente cero.

Para lograr esto en la ecuación obtenida, dejamos todos los términos a la izquierda e igualamos a cero:

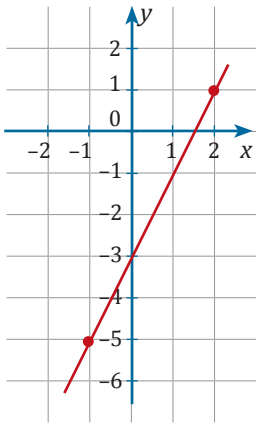
$y = 2x - 3 \qquad / - 2x$

$y - 2x = -3 \qquad / + 3$

$y - 2x + 3 = 0$

Reordenando y multiplicando por -1, obtenemos: $2x - y - 3 = 0$

Esta ecuación es equivalente a la anterior, pero al escribirla de esta forma estamos dando la **forma general** de la ecuación de la recta. Al graficar esta recta obtenemos:



2 Una recta pasa por los puntos $(3, -3)$ y $(-1,5)$ Determina su ecuación general.

Remplazando las coordenadas de los puntos en la fórmula $(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, tendremos que:

$(y - (-3)) = \frac{5 - (-3)}{-1 - 3}(x - 3)$

$y + 3 = \frac{8}{-4}(x - 3)$

$y + 3 = -2(x - 3)$

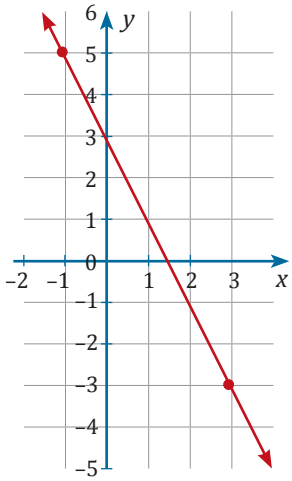
$y + 3 = -2x + 6 \qquad / - 6$

$y - 3 = -2x \qquad / + 2x$

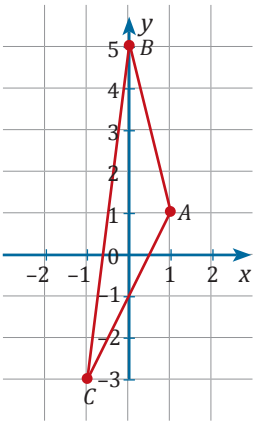
$y - 3 + 2x = 0$

$2x + y - 3 = 0$

Realizamos la gráfica de esta recta:



3 Dado el triángulo de vértices A: $(1,1)$, B: $(0,5)$ y C: $(-1,-3)$, determina la ecuación general de cada uno de sus lados.
Haremos un bosquejo del triángulo para que lo visualices mejor.



Debemos, entonces, determinar las ecuaciones generales de las rectas que pasan por los vértices (nota que si bien los lados son segmentos, estos están contenidos en las rectas que pasan por los vértices. Luego, se cumplirá que las ecuaciones encontradas son también ecuaciones de dichos segmentos):

a. A y B:

$$(y-y_1)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-1=\frac{5-1}{0-1}(x-1)$$

$$y-1=-4(x-1)$$

$$y-1=-4x+4$$

$$4x+y-5=0$$

b. B y C:

$$(y-y_1)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$

$$y-5=\frac{-3-5}{-1-0}(x-0)$$

$$y-5=8(x-0)$$

$$y-5=8x$$

$$8x-y+5=0$$

c. C y A:

$$(y-y_1)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}(x-x_1)$$
$$y-(-1)=\frac{1-(-1)}{1-(-3)}(x-(-3))$$
$$y+1=\frac{2}{4}(x+3)$$
$$y+1=\frac{1}{2}(x+3)$$
$$y+1=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} \qquad /\cdot 2$$
$$2y+2=x+3$$
$$x-2y+1=0$$

4 Transforma la ecuación de la recta $5x+2y-1=0$, a su forma principal.

Para ello, debemos despejar la variable y, de manera de dar la forma de $y=ax+b$:

$$5x+2y-1=0 \quad /-5x+1$$
$$2y=-5x+1 \quad /:2$$
$$y=-\frac{5}{2}x+\frac{1}{2}$$

5 Dada la siguiente recta, escribe su ecuación en forma principal y general:

a. $-3x+1=2y$

En forma general:

$$-3x+1=2y \quad /\cdot -1$$
$$3x-1=-2y \quad /+2y$$
$$3x+2y-1=0$$

En forma principal:

$$-3x+1=2y \quad /:2$$
$$-\frac{3}{2}x+\frac{1}{2}=y$$

- Toda recta tiene asociada una ecuación lineal e, inversamente, toda ecuación lineal puede ser representada por una recta.
- Las ecuaciones de las rectas paralelas al eje x son siempre de la forma $y = c$, donde c es un número real.
- Las ecuaciones de las rectas paralelas al eje y son siempre de la forma $x = c$, donde c es un número real.
- La ecuación de una recta que pasa por dos puntos (x_1, y_1) y (x_2, y_2), está dada por la fórmula $(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$.
- La ecuación de una recta se puede escribir de manera principal como $y = ax + b$, donde a y b son números reales.
- La ecuación de una recta se puede escribir de manera general como $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C son números reales además A y B no son simultáneamente cero.

Trabaja

Resuelve, junto a tu grupo, los siguientes ejercicios y compara tus resultados con otros grupos. No olviden chequear sus respuestas en el solucionario.

6 Determinen la ecuación general de la recta que pasa por los puntos, usando la fórmula de ecuación de la recta:

a. $M: \left(1, -\frac{7}{8}\right)$; $N: \left(8, \frac{7}{4}\right)$

b. $O: (-3{,}24)$; $P: \left(\frac{1}{5}, 8\right)$

c. $R: \left(3, \frac{9}{7}\right)$; $S: \left(-5, -\frac{31}{7}\right)$

7 Determinen la forma principal de cada una de las rectas que pasa por los puntos indicados, usando la fórmula de ecuación de la recta:

a. $A: (3{,}1)$ y $B: (-2{,}9)$

b. $C: (1, -4)$ y $D: (-2{,}17)$

c. $E: \left(3, \frac{3}{2}\right)$ y $F: \left(0, -\frac{1}{2}\right)$

8 Se comienza un gráfico, ubicando $(10{,}10)$ y luego $(-10, -20)$ para trazar la recta que los contiene. Considerando este último punto, se dibuja otra recta que pasa por él, y por $(-40{,}30)$. De igual manera, tomando en cuenta este último, se dibuja una nueva recta que contempla a $(0{,}50)$.

a. Escriban la ecuación general de la primera recta mencionada.

b. Anotando la forma de $y = ax + b$ con a y b reales, mencionen estos valores a partir de la ecuación de la segunda recta.

c. Usando la ecuación de la tercera recta, averiguen si $(-20{,}40)$ es un punto de ella. ¿Por qué?

d. Se desea conocer la ecuación de la recta que pase por el primer y el último punto mencionado. Encuéntrenla.

e. Obtengan la ecuación general de la diagonal menor del cuadrilátero formado por dichos puntos.

9 Determinen la ecuación principal de la recta que pasa por:

a. $A: (-0{,}7;\ 0{,}8)$ y $B: (0{,}2;\ -0{,}4)$



b. A': $(-7,8)$ y B': $(2,-4)$ Ahora bien,

c. Comparen las ecuaciones. ¿Qué tienen de común, y qué de distinto?

d. Busquen una relación numérica entre las coordenadas de A y A', por un lado, y las de B y B', por el otro. Junto a lo respondido en **c.**, hagan alguna conjetura en relación a lo común y a lo diferente que debieran presentar las respectivas ecuaciones.

10 Obtengan la ecuación principal de la recta correspondiente a cada tabla de valores. Si en alguna de ellas, las coordenadas de los puntos permiten escribir más de una recta, háganlo con todas las posibles que se pueden conseguir.

a.

x	y
-2	2
0	3
8	7

b.

y	3	1	-7
x	12	15	27

c.

x	y
-5	9
-1	17
-4	34

11 El profesor de José le explicó a su curso que si ellos dibujaban un triángulo y en él ubicaban el centro de gravedad, podrían equilibrar el triángulo en dicho punto. Como José quería hacer bien las cosas, cuadriculó el cartón donde dibujará su triángulo y respondió las preguntas hechas por su profesor:

a. Ubiquen los puntos A:$(1,3)$, B: $(-5,4)$ y C: $(-2,-3)$. Únanlos y formen el triángulo ABC.

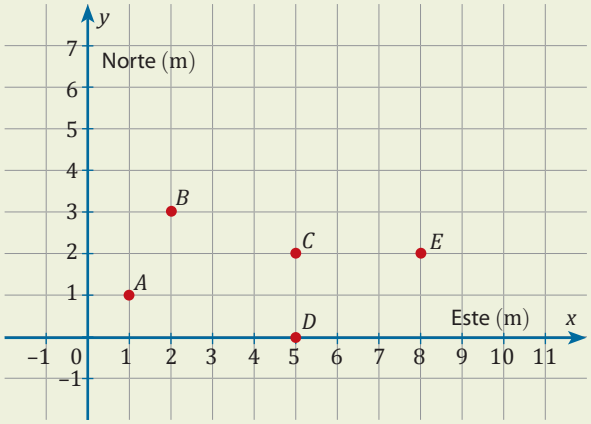
b. Encuentren los puntos medios de los lados del triángulo.

c. Determinen las ecuaciones de las transversales de gravedad del triángulo.

d. Determinen el punto de intersección de las transversales de gravedad (centro de gravedad).

e. Construyan las transversales, marquen el centro de gravedad. Corten el triángulo y prueben lo que el profesor de José dijo.

12 No me vengas a decir, Enrique, que terminaste tu trabajo solo porque alineaste los tambores A y E, cuando en verdad tendrías que haberlos alineados todos. Ahora, muéstrame la hoja del informe que debieras haber hecho… ¿Cómo?, ¿no la tienes?... ¿solo tienes este bosquejo?...



Ayuden a Enrique a resolver su problema respondiendo lo siguiente:

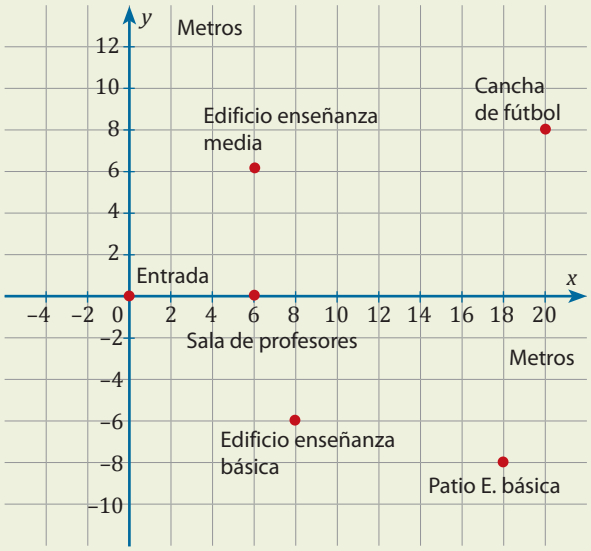
a. ¿Cuál es la ecuación de la recta que une los tambores A y E?

b. ¿Cuánto debe moverse cada tambor, en forma vertical, para que queden alineados con A y E? Aproxima tu respuesta a la décima.

c. Originalmente, ¿cuál era la ecuación de la recta que unía B con D?

d. Originalmente, ¿cuál era la ecuación de la recta que unía C con D?

13 El profesor de matemática de Paulette le había dado un trabajo en terreno. Ella y su grupo debían trazar un cuadriculado del mapa de su colegio y luego, usando la fórmula para la ecuación de la recta vista en clases, determinar algunas ecuaciones. Paulette hizo el siguiente mapa de su colegio:



Ayúdala ahora a determinar estas rectas para su trabajo:

a. Recta que une la entrada con el edificio de enseñanza media.

b. Recta que une el edificio de enseñanza básica con su patio.

c. Recta que une el edificio de enseñanza media con la cancha de fútbol.

d. Recta que une la sala de profesores con la cancha de fútbol.

e. Recta que une la sala de profesores con el patio de enseñanza básica.

14 A Joaquín le gustaba buscar ejercicios en distintas partes y hacerlos para entender mejor la materia y preparar sus pruebas. Esta vez, su profesor lo felicitó porque eran muy buenos ejercicios. Juntos los plantearon al curso para repasar la materia vista:

a. Dadas las siguientes parábolas, encuentra la ecuación de la recta que une sus vértices:

i. $y = x^2 + 3x + 5$ e $y = x^2 - 6x + 1$

ii. $y = 2x^2 - 6$ e $y = 3x^2 - 2x$

iii. $y = -6x^2 - 3x + 4$ e $y = 4x^2 - 5x + 9$

b. Encuentra la ecuación de la recta que une los puntos de intersección de las siguientes parábolas:

i. $y = 3x^2 - 6x + 1$ e $y = -x^2 + 6x - 1$

ii. $y = -x^2 + 1$ e $y = 2x^2 + 4$

iii. $y = 2x^2 + x + 9$ e $y = -3x^2 - x + 2$

15 "Al no leer comprensivamente las instrucciones de la prueba, Lilo, no consideraste que la nota $4{,}0$ corresponde al $60\ \%$ del puntaje total, que eran 49 puntos. Además, se hizo una corrección. Con esta corrección, tu nota sube dos décimas, ya que tienes 24 puntos... Ahora, me preguntas por qué tu compañero, que también en la recorrección subió dos puntos, aumentó en tres décimas, quedando con un $6{,}8$, como nota final. Es que hay dos escalas de notas. Una, que parte con un $1{,}0$, para los que no tuvieron ninguna pregunta buena en su prueba,...: Hasta $4{,}0$ inclusive. La otra escala se inicia con esta última nota, y alcanza hasta un $7{,}0$... hay una relación lineal entre la nota de la prueba (N) y los puntos logrados (p)".

Conforme a la situación anterior:

a. Escriban la relación mencionada que permite obtener directamente la nota, para aquellos alumnos que están en la situación de Lilo.

b. ¿Qué nota, con aproximación a la décima, obtuvo finalmente Lilo?

c. Al igual que en **a.**, encuentren la forma de obtener la nota, para aquellos alumnos que están en la situación de su compañero.

d. ¿Cuántos puntos había logrado su compañero, antes de subir a $6{,}8$?

e. Si un alumno obtiene 29 puntos, ¿a cuál de las formas obtenidas en **a.** o **c.**, se debiera recurrir para saber su nota? ¿Por qué?

16 Te invitamos a poner en práctica tus conocimientos, mediante un bachillerato matemático. Para ello, deben confeccionar un bachillerato del siguiente tipo:

Número	Par ordenado	Ecuación principal de la recta a la que satisface	Ecuación general de la recta a la que satisface	Puntaje

Un integrante del grupo debe comenzar a contar números de uno en uno, en voz baja y cuando otro de los integrantes previamente elegido diga stop, este debe parar y decir en voz alta el número. Luego el par ordenado constará de una abscisa igual a $\frac{3}{2}$ del número determinado y una ordenada igual a $\frac{3}{11}$ del número determinado. Una vez que comienzan a jugar el integrante que demore menos tiempo en llenar todos los casilleros debe decir stop. A cada casillero correctamente rellenado se le otorgará un puntaje de 10. Pueden jugar nuevamente asignándole otros valores a la abscisa y la ordenada.



Analizando un poco más las rectas

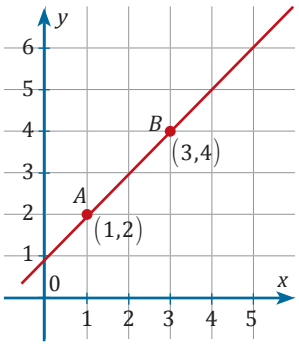
Como puedes ver hemos analizado algunos temas relacionados con las rectas, pero aún nos faltan otros conocimientos en los que también aplicaremos la geometría analítica para estudiarlos.

Volvamos a recordar un poco las funciones. Habíamos dicho, años atrás, que en una función del tipo $f(x) = ax + b$, del parámetro a depende de hacia donde se incline la recta que representa dicha función. Analicemos ahora este parámetro, según el valor encontrado anteriormente.

En el ámbito de la geometría analítica, al parámetro a se le llama pendiente de la recta y tiene también relación con el grado de inclinación de las rectas con respecto al eje x. Es decir, tiene relación con el ángulo que estas forman con el eje de las abscisas.

Sabemos que si una recta pasa por dos puntos $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$, entonces el valor de a será $a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - y_1}$. Observa los siguientes gráficos:

1° caso:



Calculemos el valor de a:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{4 - 2}{3 - 1}$$

$$a = 1$$

Si te fijas bien, a medida que los valores de las abscisas aumentan, los de las ordenadas también aumentan. Esto quiere decir que si tomamos el punto (x_2, y_2) como aquel que tiene la abscisa mayor, entonces su ordenada será también mayor que la del punto (x_1, y_1). Esto hace que ambas diferencias, $(y_2 - y_1)$ y $(x_2 - x_1)$, sean positivas, con lo que el valor de a (la pendiente) siempre será positivo.

Ahora bien, si pensamos en estas rectas y el ángulo que forman con el eje x, entonces, te darás cuenta que en este caso las rectas siempre forman un ángulo agudo. Por lo tanto, la pendiente de las rectas que forman un ángulo agudo con el eje de las abscisas siempre será positiva.

En esta sección aprenderás

Qué son la pendiente y el coeficiente de posición de una recta y como se relacionan ellos para determinar la posición de dos rectas en el plano

Desarrollarás las siguientes habilidades:

- Identificar, calcular, interpretar, resolver problemas, analizar, sintetizar, investigar y comunicar

Habilidades por actividad:

- Identificar y calcular: 1 – 2 – 11a – 11b – 11d. 1a – 1b
- Interpretar y resolver problemas: 3 – 4 – 5 – 6 – 9 – 10a – 10b – 10c – 11c – 11e – 11f – 11g. 1c – 2 – 3a – 3b – 3c – 3d – 3e – 4a – 4b – 5a – 5c – 5e – 5f – 5h – 5i
- Analizar y sintetizar: 7 – 8 – 10d – 12. 1d – 4c – 5b – 5d – 5g
- Investigar y comunicar: 1e – 3f

Links de interés

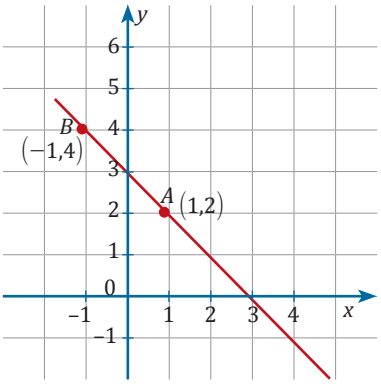
En el siguiente sitio podrás conocer la ecuación punto-pendiente y puedes practicar en la utilización de esta fórmula

http://www.ematematicas.net/ecrectaplano.php?a=&pot=7

Recordar y archivar

Una de las clasificaciones más comunes de los ángulos se realiza de acuerdo a su medida. Así, un ángulo agudo es un ángulo que mide menos de 90°, un ángulo obtuso mide más de 90° y menos que 180°, un ángulo recto mide 90°, un ángulo extendido mide 180° y ángulo completo es aquél que mide 360°.

2º caso:



Calculemos el valor de a:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

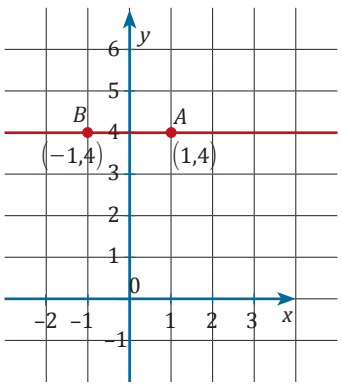
$$a = \frac{4 - 2}{-1 - 1}$$

$$a = -1$$

En este caso, a medida que los valores de las abscisas disminuyen, los de las ordenadas aumentan. Esto quiere decir que si tomamos el punto (x_2, y_2) como aquel que tiene la abscisa mayor, entonces su ordenada será menor que la del punto (x_1, y_1). Esto hace que una de las diferencias, $(y_2 - y_1)$ o $(x_2 - x_1)$ sea negativa, con lo que el valor de a (la pendiente) siempre será negativa.

Ahora bien, si pensamos en estas rectas y el ángulo que forman con el eje x, entonces te darás cuenta que, en este caso, las rectas siempre forman un ángulo obtuso. Por lo tanto, la pendiente de las rectas que forman un ángulo obtuso con el eje de las abscisas siempre será negativa.

3˚ caso



Calculemos el valor de a:

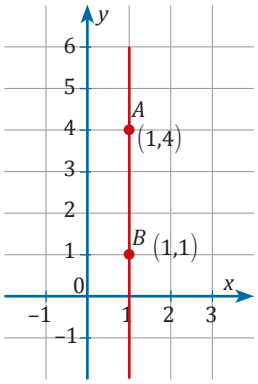
$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{4 - 4}{-1 - 1}$$

$$a = 0$$

En este caso, como la recta es paralela al eje x, los valores de las ordenadas de todos los puntos de ella, $(x_1 y_1)$ y $(x_2 y_2)$, son siempre el mismo. Por lo tanto, la diferencia $(y_2 - y_1)$ será siempre cero. Esto hace que el valor de a (la pendiente) sea siempre cero. Por lo tanto, no hay ángulo que se formen de esta intersección. En conclusión, la pendiente de las rectas paralelas o coincidentes con el eje x será siempre cero.

4º caso:



Calculemos el valor de a:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{4 - 1}{1 - 1}$$

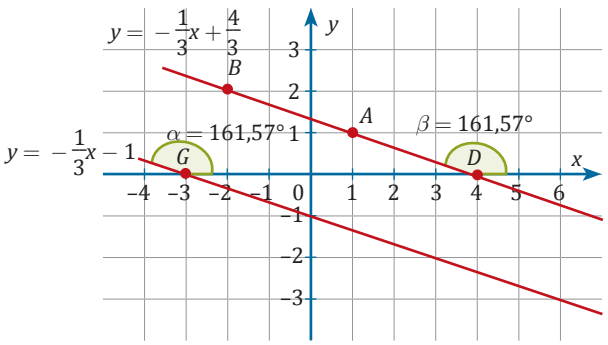
$$a = \frac{4}{0}$$

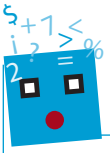
Pero una fracción no puede tener denominador 0, por lo tanto, en este caso el parámetro a se indefine.

En este caso, la recta es paralela al eje y, por lo que los valores de las abscisas de todos los puntos de ella, (x_1,y_1) y (x_2,y_2), son siempre el mismo. Por lo tanto, la diferencia $(x_2 - x_1)$ será siempre cero. Esto hace que el valor de a (la pendiente), definida como $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ se indefina (no existe). Ahora bien, si pensamos en estas rectas y el ángulo que forman con el eje x, te darás cuenta que en este caso las rectas forman un ángulo recto con el eje x. Esto hace necesario escribir la relación que existe entre los puntos de la recta, de un modo diferente, con lo que las rectas paralelas al eje y tendrán ecuación $x = x_1$. En conclusión, la pendiente de las rectas paralelas o coincidentes con el eje y, no está definida.

Entonces, si dos rectas se cortan, es porque tienen distinto grado de inclinación, o sea, distinta pendiente. Veremos a continuación que información nos aportan las pendientes de las rectas, en relación a la posición que ellas tienen en el plano.

Comencemos por aquellas rectas que tienen igual pendiente. Estas tendrán el mismo grado de inclinación. En términos más rigurosos, formarán el mismo ángulo con el eje x, por lo tanto serán paralelas. Ahora bien, si la pendiente es distinta, entonces las rectas necesariamente serán secantes (o rectas que se intersectan). Observa, usemos nuestro procesador GeoGebra.



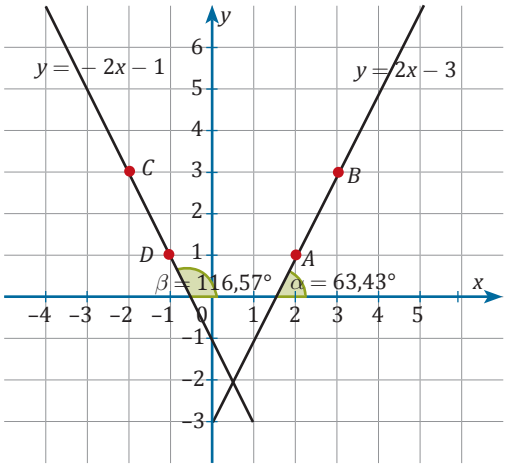


Para saber más

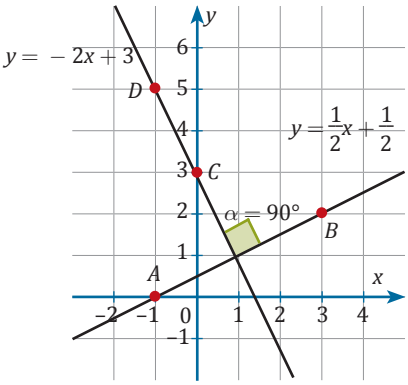
Existe una rama de la matemática, llamada trigonometría. Ella se encarga de estudiar las relaciones que existen entre ángulos y lados de los triángulos rectángulos, estableciendo algunas razones conocidas como seno, coseno, tangente. Estas razones trigonométricas están relacionadas con las pendientes de las rectas, pues se puede definir también la pendiente de una recta como la tangente del ángulo que esta forma con el eje x.

Si quieres averiguar más sobre esto, te sugerimos el siguiente link en Internet.
http://www.aritor.com/trigonometria/razones_trigonometricas.html



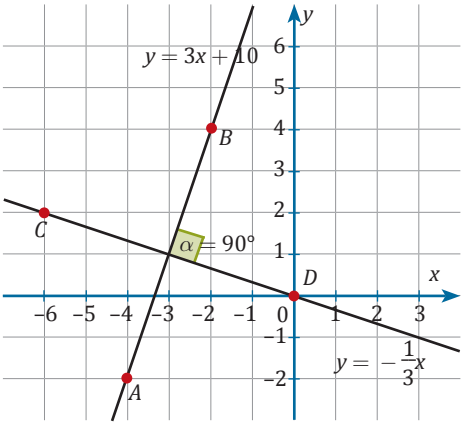


Ahora bien, existe un caso de intersección que es particularmente interesante de estudiar, sobre todo por las aplicaciones que podemos hacer gracias a él. ¿Qué pasa con las pendientes de las rectas que se cortan en forma perpendicular, es decir, formando un ángulo recto, en el plano? Observa los siguientes gráficos:



Pendiente de la recta que pasa por C y D: -2

Pendiente de la recta que pasa por A y B: $\frac{1}{2}$



Pendiente de la recta que pasa por C y D: $-\frac{1}{3}$

Pendiente de la recta que pasa por A y B: 3



Si te fijas bien, una de las pendientes es la recíproca de la otra, pero con signo contrario. También, en forma más rigurosa, podemos decir que el producto de ambas es -1. Esto se cumple para todo par de rectas que sean perpendiculares. Es decir, si L_1 es una recta de pendiente a_1, y L_2 es una recta de pendiente a_2 y se tiene que $L_1 \perp L_2$, entonces se cumplirá que $a_1 \cdot a_2 = -1$, o lo mismo que, $a_1 = -\frac{1}{a_2}$.

Ahora si te fijas en los gráficos que hemos analizado hasta ahora, cada recta corta al eje y en el número que indica el parámetro b.

El parámetro b se llama coeficiente de posición e indica el valor de la ordenada del punto donde la recta corta al eje y. Hagamos algunos ejercicios para que vean cómo se utilizan los conocimientos que recién aprendiste.

1 Determina el coeficiente de posición y la pendiente de la recta $3x - 5y + 7 = 0$

Para hacer esto, debemos escribir la ecuación de la recta en forma principal, $y = ax + b$. De esta manera, a será la pendiente y b, el coeficiente de posición.

$$3x - 5y + 7 = 0$$
$$-5y = -3x - 7 \quad /: -5$$
$$y = \frac{3}{5}x + \frac{7}{5}$$

Por lo tanto, la pendiente de la recta es $\frac{3}{5}$ y su coeficiente de posición es $\frac{7}{5}$.

2 Determina el punto de intersección con los ejes coordenados de la recta $x - 6y - 1 = 0$.

Para encontrar el punto de intersección con el eje y, debemos encontrar el coeficiente de posición, por lo tanto, debemos escribir la ecuación en forma particular:

$$x - 6y - 1 = 0$$
$$-6y = -x + 1$$
$$y = \frac{1}{6}x - \frac{1}{6}$$

Como el coeficiente de posición es $-\frac{1}{6}$ y los puntos pertenecientes al eje y son de la forma $(0,c)$, entonces, el punto de intersección de la recta con el eje y es $\left(0, -\frac{1}{6}\right)$.

Ahora, para encontrar el punto de intersección con el eje x, se debe remplazar $y = 0$ en la ecuación y así encontrar la abscisa que cumple con la igualdad, dado que todos los puntos que se encuentran sobre el eje x son de la forma $(x,0)$. Entonces:

$x - 6y - 1 = 0$

$x - 6 \cdot 0 - 1 = 0$

$x - 0 - 1 = 0$

$x - 1 = 0$

$x = 1$

Por lo tanto, el punto de intersección con el eje x es $(1,0)$

3 Decide si las siguientes rectas: $5x - 2y = 1$ y $3x + 15y - 2 = 0$, son paralelas, perpendiculares o solo secantes.

Para esto, determinemos las pendientes de ambas rectas:

$5x - 2y = 1$

$5x - 1 = 2y$

$\frac{5}{2}x - \frac{1}{2} = y$

$3x + 15y - 2 = 0$

$15y = -3x + 2$

$y = -\frac{3}{15}x + \frac{2}{15}$

$y = -\frac{1}{5}x + \frac{2}{15}$

Las pendientes en rojo no son iguales, por lo tanto, las rectas no son paralelas. Su producto, $-\frac{1}{2}$, es distinto a -1, por lo tanto, no son perpendiculares. Solo serán, entonces, secantes.

4 Determina la ecuación de la recta que tiene pendiente igual a 4 y pasa por el punto $(-5,3)$

Como ya sabemos, podemos utilizar la fórmula para una ecuación de la recta $(y - y_1) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$, cambiando el factor $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ por el valor de la pendiente:

$(y - y_1) = a(x - x_1)$

$(y - 3) = 4(x - (-5))$

$y - 3 = 4(x + 5)$

$y - 3 = 4x + 20$ *(Ordenando)*

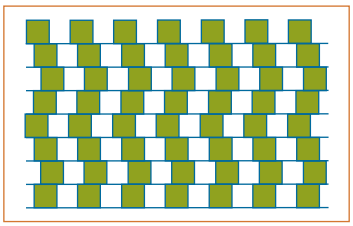
$4x - y + 23 = 0.$

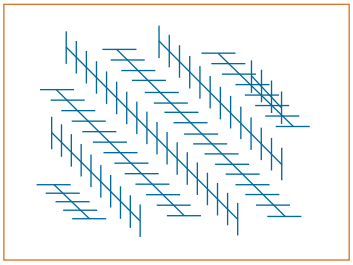
La fórmula $(y - y_1) = a(x - x_1)$ utilizada para determinar la ecuación de la recta, se conoce como ecuación punto-pendiente y nos permite obtener la ecuación de una recta conociendo sólo un punto de ella y el valor de su pendiente.

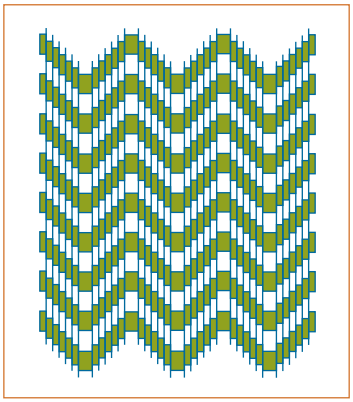
5 Determina la ecuación de la recta que pasa por el punto $\left(\frac{1}{5}, \frac{2}{3}\right)$ y tiene coeficiente de posición igual a -9

Para entretenerse

Te desafiamos a observar y determinar si en las siguientes figuras las líneas rectas son paralelas:









Lo que debemos hacer es determinar la pendiente de la recta. Para ello, reemplacemos los valores de las coordenadas del punto dado y el valor del coeficiente de posición en la ecuación $y = ax + b$:

$y = ax + b$

$\frac{2}{3} = a \cdot \frac{1}{5} - 9 \qquad / \cdot 15$

$10 = 3a - 135$

$145 = 3a \qquad /:3$

$a = \frac{145}{3}$

Por lo tanto, la ecuación de la recta pedida será: $y = \frac{145}{3}x - 9$.

6 Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $(4, -3)$ y es paralela a la recta de ecuación $4x - 5y + 1 = 0$.

Como la recta buscada es paralela a $4x - 5y + 1 = 0$, debe tener la misma pendiente. Calculemos esta:

$4x - 5y + 1 = 0$

$4x + 1 = 5y$

$\frac{4}{5}x + \frac{1}{5} = y$

–Por lo tanto, la pendiente de la recta que buscamos es $\frac{4}{5}$ y la recta pasa por $(4, -3)$. Reemplacemos estos datos en la ecuación punto-pendiente:

$(y - y_1) = a(x - x_1)$

$y - (-3) = \frac{4}{5}(x - 4) \qquad / \cdot 5$

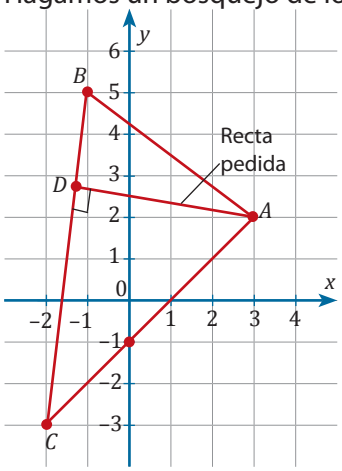
$5y + 15 = 4x - 16$

$4x - 5y - 31 = 0$

Por lo tanto, la ecuación de la recta pedida es $4x - 5y - 31 = 0$.

7 Si los puntos A: $(3,2)$, B: $(-1,5)$ y C: $(-2,-3)$ son los vértices de un triángulo, entonces determina la ecuación de la recta que contiene a la altura correspondiente al lado $\overline{BC}$.

Hagamos un bosquejo de lo que se pide:



La recta pedida será perpendicular al segmento $\overline{BC}$ y pasará por el punto A. Por lo tanto, calcularemos la pendiente de $\overline{BC}$ y luego la pendiente de $\overline{AD}$ y, por último, la ecuación de la recta pedida.

En el gráfico anterior, la pendiente de $\overline{BC}$ donde B: $(-1,5)$ y C es: $(-2,-3)$:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$a = \frac{-3-5}{-2-(-1)} = \frac{-8}{-1} = 8$$

Como la recta pedida es perpendicular a $\overline{BC}$, entonces la pendiente de $\overline{AD}$ será $-\frac{1}{8}$ y la recta que contiene a $\overline{AD}$ pasa por A: $(3,2)$. Por lo tanto, usando la ecuación punto-pendiente, se obtiene:

$$(y - y_1) = a(x - x_1)$$

$$y - 2 = -\frac{1}{8}(x - 3) \qquad / \cdot 8$$

$$8y - 16 = -x + 3$$

$$x + 8y - 19 = 0$$

Por lo tanto, la recta pedida tiene ecuación $x + 8y - 19 = 0$.

8 Determinar el área del triángulo del ejercicio anterior.

Para esto debemos calcular la medida de los trazos $\overline{AD}$ y $\overline{BC}$ (altura y base del triángulo). Para determinar la primera medida debemos encontrar las coordenadas del punto D, que es la intersección de las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$. Para ello, se debe resolver el sistema de ecuaciones formadas por estas rectas (los valores de x e y serán las coordenadas del punto que satisfaga ambas ecuaciones y, por lo tanto, pertenezca a ambas rectas). Procedamos paso a paso:

- Encontrar la ecuación de la recta que pasa por los puntos B: $(-1,5)$ y C: $(-2,-3)$

Ya teníamos su pendiente, $a = 8$, y elegiremos el punto B: $(-1,5)$ para remplazarlos en la ecuación punto-pendiente:

$$(y - y_1) = a(x - x_1)$$
$$y - 5 = 8(x + 1)$$
$$y - 5 = 8x + 8$$
$$8x - y + 13 = 0$$

- Plantear y resolver el sistema de ecuaciones para encontrar las coordenadas del punto D:

$$\left.\begin{array}{l} x + 8y - 19 = 0 \\ 8x - y + 13 = 0 \end{array}\right| \qquad / \cdot 8$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 8y - 19 = 0 \\ 64x - 8y + 104 = 0 \end{array}\right| \ \textit{(sumando)}$$

$$65x + 85 = 0$$

$$65x = -85$$

$$x = -\frac{17}{13}$$

Remplazando en la primera ecuación:

$$-\frac{17}{13}+8y-19=0 \qquad /\cdot 13$$
$$-17+104y-247=0$$
$$104y=264$$
$$y=\frac{33}{13}$$

Por lo tanto, el punto D tiene coordenadas D: $\left(-\frac{17}{13},\frac{33}{13}\right)$

• Encontrar la distancia de $\overline{AD}$, donde A: $(3,2)$ y D: $\left(-\frac{17}{13},\frac{33}{13}\right)$

$$d_{\overline{AD}}=\sqrt{\left(-\frac{17}{13}-3\right)^2+\left(\frac{33}{13}-2\right)^2}=\sqrt{\left(-\frac{56}{13}\right)^2+\left(\frac{7}{13}\right)^2}=$$
$$=\sqrt{\frac{3\,185}{13^2}}=\frac{7\sqrt{65}}{13}\text{ u}$$

• Encontrar la distancia de $\overline{BC}$, donde B: $(-1,5)$ y C: $(-2,-3)$

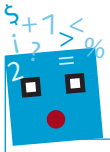
$$d_{\overline{BC}}=\sqrt{(-2+1)^2+(-3-5)^2}=\sqrt{1+64}=\sqrt{65}\text{ u}$$

• Encontrar el área del triángulo:

$$A=\frac{d_{\overline{AD}}\cdot d_{\overline{BC}}}{2}=\left(\frac{7\sqrt{65}}{13}\cdot\sqrt{65}\right):2=\left(\frac{7\cdot 65}{13}\right):2=35:2=17{,}5\text{ u}^2$$

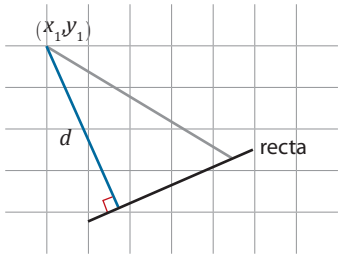
- En la ecuación de la recta $y=ax+b$, se tiene que: a se llama pendiente indica el grado de inclinación de la recta:
  - Si a es positiva, la recta forma un ángulo agudo con el eje x (es creciente).
  - Si a es negativa, la recta forma un ángulo obtuso con el eje x (es decreciente).
  - Si a es cero, la recta es paralela al eje x.
  - Si a está indefinida, la recta es paralela al eje y o perpendicular al eje x

  b se llama coeficiente de posición, indica el valor de la ordenada del punto de corte de la recta con el eje y. Este punto es siempre $(0,b)$.
- La ecuación de una recta, dada su pendiente a, y un punto de ella, (x_1,y_1), está dada por la fórmula $(y-y_1)=a(x-x_1)$.
- Las pendientes de dos rectas paralelas son siempre iguales.
- El producto de las pendientes de dos rectas que son perpendiculares es siempre igual a -1. Es decir, una de las pendientes es el recíproco de la otra, con signo contrario.
- Las pendientes de dos rectas secantes son distintas.



Para saber más

Existe una fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta. Recuerda que esta distancia es la medida del trazo perpendicular a la recta bajada desde el punto dado. Si el punto tiene coordenadas (x_1,y_1) y la ecuación de la recta es $Ax+By+C=0$, entonces, la distancia de dicho punto a la recta mencionada estará dada por la fórmula:



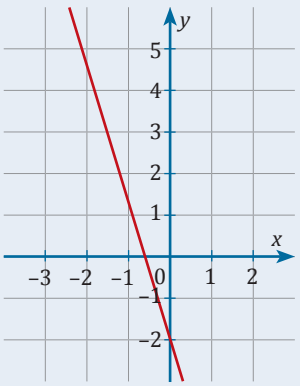
$$d=\frac{|x_1\cdot A+y_1\cdot B+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Trabaja

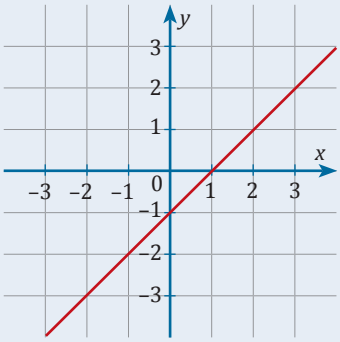
Resuelve los siguientes ejercicios en tu cuaderno. No olvides revisar tus resultados en el solucionario.

1 Señala, en cada caso, si la pendiente de la recta es positiva, negativa o cero.

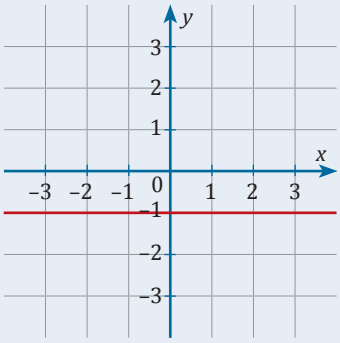
a.



b.



c.



2 Determina, para cada par de puntos , la pendiente de la recta que pasa por ellos:

a. $A: (3,-1)$ y $B: (-6,14)$

b. $C: (7,-2)$ y $D: (-4,-3)$

c. $E: (-1,-7)$ y $F: (-4,-3)$

3 Una recta pasa por los puntos $A: (3k,2k)$ y $B: (2,k-3)$. Determina el valor de k para que:

a. La recta tenga pendiente 5.

b. La recta sea paralela al eje x.

c. La recta sea paralela al eje y.

4 Se tienen dos rectas, una de ellas pasa por los puntos $A: (-1,-5)$ y $B: (2,4)$ y la otra por los puntos $C: (3,4)$ y $D: (0,5)$. Determina si las rectas son perpendiculares.

5 Determina cuáles de las siguientes parejas de rectas son perpendiculares:

a. $L_1: y = 5x - 2$; $L_2: y = -5x + 9$

b. $L_3: 5y - 3x - 10$; $L_4: 3y + 5x + 21$

c. $L_5: 4x + 10y + 15$; L_6: pasa por los puntos $A: (2,6)$ y $B: \left(\frac{1}{5},\frac{3}{2}\right)$

6 Para cada par de rectas, determina el valor que debe tomar k para que ellas sean perpendiculares:

a. $L_1: y = 3x + 2$; $L_2: y = \left(\frac{4-k}{k}\right)x - 5$

b. L_3: tiene pendiente $\frac{5}{k}$; L_4: tiene pendiente $\frac{k}{2k-1}$

c. $L_5: 2y - (3-k)x - 5 = 0$;
$L_6: (6-2k)y - kx + 12 + 4k = 0$

7 En un gráfico, se tiene la recta L que contiene a $F: (-3,-9)$ y $G: (-4,6)$

a. ¿Entre qué valores puede variar el ángulo que forma L con el eje coordenado horizontal?

b. ¿Por qué esta recta intersecta al eje y en un punto que está por debajo del eje x?

c. Suponiendo que la distancia entre ambos puntos permanece constante, F permanece fijo, y G puede girar en sentido horario ¿entre qué valores debe variar dicha ordenada, para que L, forme un ángulo agudo con el sentido positivo del eje x?

d. Para que L fuera perpendicular al eje x ¿en cuántas unidades debieran variar simultáneamente las abscisas de ambos puntos, la misma cantidad de unidades pero en sentido contrario?



8 Las ecuaciones de las rectas L y L' son $y = x$ y $4x - 7y - 12 = 0$, respectivamente. Haciendo un gráfico, responde:

a. ¿Por qué el ángulo que forma L con el eje coordenado horizontal mide $45°$?

b. Comparando los ángulos que forman cada una de las rectas con el eje x, ¿entre qué valores debe variar el ángulo correspondiente a L'?

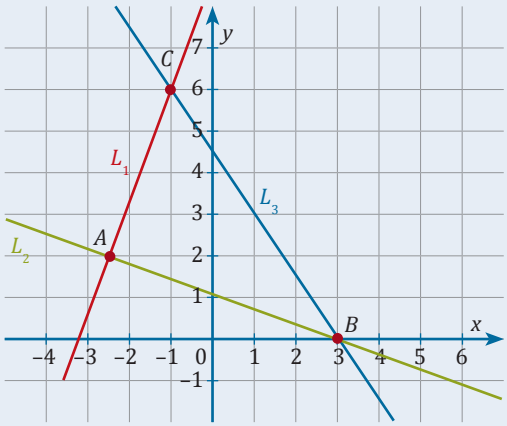
c. ¿Cuántas unidades distan entre sí, los puntos de intersección de ambas rectas con el eje y?

9 Escribe la ecuación principal de la recta, que sea perpendicular a:

a. $21x - 15y + 91 = 0$ e intersecte al eje y 12 unidades por debajo del eje x.

b. $y = 23 - 2{,}\overline{03}\ x$ y contenga a $\left(0, \frac{11}{7}\right)$

10 En la siguiente gráfica, la abscisa de A es $-2{,}5$, en cambio, la ordenada de C es $6{,}125$



Responde:

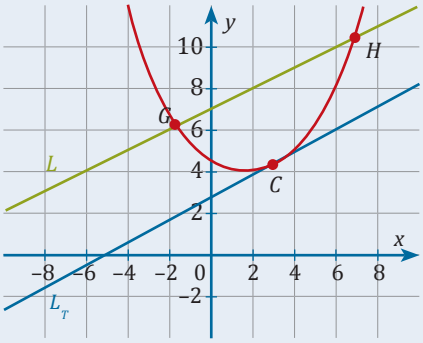
a. ¿Cuál es la ecuación general de L_1?

b. ¿Cuál es la ecuación principal de L_2?

c. ¿Por qué el ángulo entre las rectas L_2 y L_3 no es recto? Fundamenta tu respuesta.

d. Usando las ecuaciones de las rectas que incluyen cada lado del ΔABC, ¿podemos decidir si este triángulo es rectángulo? ¿Por qué?

11 En la siguiente gráfica, las abscisas de los puntos son números enteros y la ecuación de la parábola es $y = 0{,}25x^2 - x + 5$.



Responde cada pregunta conforme a la información dada:

a. Escribe la forma principal de la recta L.

b. Si $L_T // L$, escribe la ecuación general de L_T.

c. Entre que valores debiera encontrarse el ángulo que forma L con el eje horizontal. ¿Por qué?

d. Encuentra los puntos de intersección de L_T con los ejes coordenados.

e. Escribe la ecuación general de una recta que sea perpendicular a L_T, donde ésta sea tangente a la parábola.

f. Indica el punto de intersección de la recta anterior con la recta verde.

g. Usando lo obtenido en **f.**, ¿Cuál es distancia entre L y L_T? Aproxima tu respuesta a la centésima.

12 De acuerdo al gráfico anterior, contesta cada pregunta, basándote en las relaciones que se pueden hacer entre la parábola y las rectas.

a. Escribe la ecuación del eje de simetría de la parábola.

b. A pesar que F no es un punto de la parábola, ¿es posible haber obtenido la ecuación anterior usando toda la información dada?

c. Indica los puntos de intersección del eje de simetría con L y L_T.

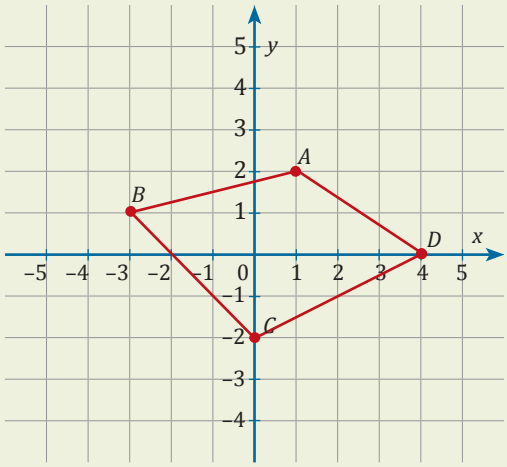
d. ¿Entre que valores debe variar el ángulo formado por la recta L y el eje de simetría, si dicho ángulo se mide en sentido anti horario a partir de la recta L?

e. ¿Por qué el eje de simetría y la recta L_T son concurrentes pero no perpendiculares?

Trabaja

Resuelve los siguientes problemas junto a tu grupo. No olvides verificar tus respuestas en el solucionario

1 María Paz había oído que si, en un cuadrilátero cualquiera, trazaba los puntos medios de los lados y luego los unía, siempre se obtenía un paralelogramo. Pensó que sería bueno verificar esto, hizo el siguiente dibujo y luego trazó un pequeño plan de trabajo que la ayudara a lograr su objetivo:



a. Encontrar los puntos medios de los lados.

b. Encontrar las ecuaciones de las rectas que unen los puntos medios sucesivos entre sí.

c. ¿Son paralelas algunas de las rectas determinadas anteriormente?

d. ¿Es cierto el enunciado del problema?

e. ¿Cómo se podrá demostrar esto?

2 Esperanza está parada en el origen de su trayecto, que ella llamó $(0,0)$, como en el origen del plano cartesiano que había estudiado. Caminaré 2 metros al este y 4 metros al norte – se dijo – y clavaré ahí la primera estaca. Luego, desde ese punto, caminaré 3 metros al sur y 12 al oeste y clavaré allí mi segunda estaca. Ahora estoy lista para responder estas preguntas para mi tarea:

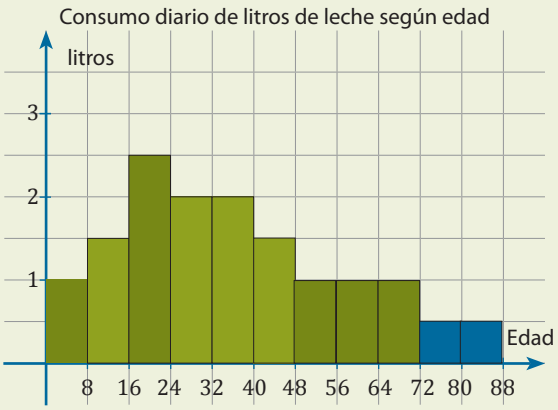
a. ¿Cuáles son los puntos del plano donde se fijaron las estacas?

b. ¿Cuál es la ecuación de la recta que pasará por los puntos donde están clavadas las estacas?

c. Si Esperanza necesita trazar una línea paralela a la recta a la que une las estacas, pero que pase por un árbol que se encuentra a 8 metros al este y 5 metros al norte del origen, ¿cuál será la ecuación de dicha línea recta?

d. Si Esperanza necesita trazar una línea recta que sea perpendicular a la línea de las estacas y que pase por la segunda estaca colocada, ¿cuál será su ecuación?

3 La empresa consultora "Imagen", realizó un estudio pedido por una importante fábrica de productos lácteos. El siguiente gráfico muestra el comportamiento de la población de cierta ciudad respecto al consumo de litros diarios de leche según su edad:



Con la información dada y tomando las marcas de clase de cada intervalo para formar puntos en el plano, determinen, justificando matemáticamente su respuesta:

a. La ecuación de la recta que une las marcas de clase de los dos primeros intervalos.

b. Si la recta que une las marcas de clase del $6°$ y $7°$ intervalo es perpendicular a la determinada en **a**.

c. El punto de intersección entre la recta que une las primeras dos marcas de clase y la recta que une las marcas de clase del $3°$ y $4°$ intervalo.

d. Si son paralelas las rectas que unen las marcas de clase del $3°$ y $4°$ intervalo y las del $5°$ y $6°$ intervalo.

e. La pendiente de la recta que une las marcas de clase del $4°$ y $11°$ intervalo.

f. Averigua, en Internet, cuál es el comportamiento en cuanto al consumo de leche en la población de tu ciudad.

4 Maritza trabaja en una empresa de ventas de artículos médicos. Para el informe anual que está elaborando tiene los siguientes datos referidos a los artículos del tipo A.

Año	Ventas
2001	134 000
2003	189 000
2005	215 000

Sin hacer el gráfico, Maritza quiere determinar algunos datos importantes... a partir de las siguientes preguntas, ayúdenla: (usen calculadora)

a. ¿Cuál es la ecuación de la recta que rige las ventas entre los años 2001 y 2003?

b. ¿Cuál es la ecuación de la recta que rige las ventas entre los años 2003 y 2005?

c. Analizando las rectas anteriores, ¿es lineal el crecimiento entre los años 2001 y 2005? Si no es así, ¿cuál debería haber sido el monto de ventas el 2005 para que el crecimiento hubiera sido lineal?

5 – La temperatura primaveral en esta ciudad es de $20\ °C$, que es la actual, y ahora vamos atravesando el antiguo puente de acero, de $1\,500\ m$ de longitud.

–Papá, ¿hace mucho calor en esta ciudad?

–Si, hijita. Más que en la nuestra. Aquí la temperatura puede llegar a los $35\ °C$. Pero en invierno, no es muy frío. Lo más bajo que recuerdo es $-5\ °C$.

–Papá, y ¿qué le ocurre al puente cuando hace mucho calor?

–Se dilata, es decir, se hace más largo y cuando hace mucho frío, el puente se contrae.

Conforme a la conversación anterior, tomando como temperatura inicial $20\ °C$ y ayudado por la siguiente fórmula, donde el coeficiente de variación lineal del acero, α, es $11 \cdot 10^{-6}\ °C^{-1}$:

Δl	=	l_i	•	α	•	Δt
la variación de la longitud es	=	a la longitud inicial	•	el coeficiente de variación lineal del acero	•	la variación de temperatura

Si l_f simboliza la longitud final, t_f y t_i, la temperatura final y la inicial respectivamente, respondan:

a. Despejando l_f, encuentren una relación para l_f y t_f

b. Según lo obtenido en **a.** ¿Por qué esta relación es lineal?

c. ¿Cuál es el valor de la pendiente?

d. Indiquen cuánto vale el coeficiente de posición e interprétenlo.

e. Si la temperatura se eleva hasta los $35\ °C$ ¿cuál es el largo final del puente?

Ahora bien, si la temperatura inicial es la más baja en el invierno,

f. Despejen l_f y exprésenlo al igual que en **a.**

g. Comparen l_f a los $0\ °C$, con el coeficiente de posición obtenido en **d.** ¿A qué se debe esta situación?

h. Si la temperatura aumenta a $10\ °C$, ¿cuál es el largo final del puente, según la ecuación de l_f?

i. ¿A qué temperatura, el largo final del puente es $1\,500{,}33\ m$?

Revisemos lo aprendido

Contesta las siguientes preguntas, ellas te ayudarán a evaluar tu aprendizaje en esta sección.

1 ¿Comprendí los conceptos de pendiente y coeficiente de posición de una recta?

2 ¿Puedo explicar cómo varía la posición de una recta en el plano dependiendo del valor de su pendiente?

3 ¿Puedo distinguir claramente rectas paralelas, perpendiculares o secantes, analizando sus pendientes?

Rectas y soluciones de sistemas de ecuaciones, ¿cómo se relacionan?

En esta sección aprenderás

Cómo se relacionan las rectas con los sistemas de ecuaciones

Desarrollarás las siguientes habilidades:

- Identificar, calcular, interpretar, resolver problemas, analizar y sintetizar.

Habilidades por actividad:

- Identificar y calcular: 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 8
- Interpretar y resolver problemas: 6 – 7 – 9
- Analizar y sintetizar: 10

Continuando con nuestros conocimientos sobre las rectas, es el turno de analizar la información que nos entrega la solución de un sistema de ecuaciones lineales y como esta influye sobre la posición relativa de estas rectas en el plano, para ello analizaremos los siguientes ejemplos:

1° caso:

$$\begin{array}{l} 2x+3y=6 \\ x-y=9 \end{array}$$ Resolvamos este sistema…

$$\begin{array}{l} 2x+3y=6 \\ -2x+2y=-18 \end{array}$$ *(multiplicando la segunda ecuación por -2 y luego sumando)*

$$5y=-12$$

$$y=-\frac{12}{5}$$

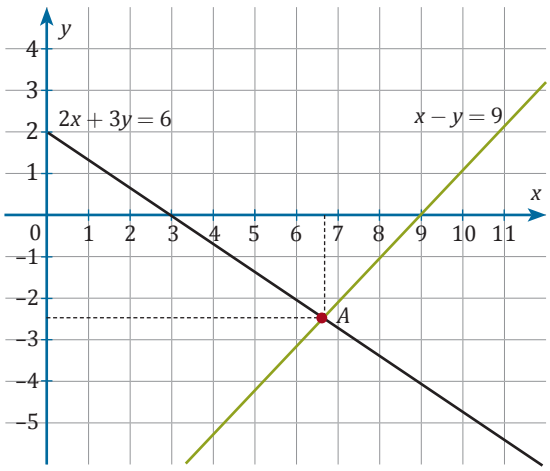
Al remplazar el valor de la incógnita y encontrado en la segunda ecuación se tiene,

$$x+\frac{12}{5}=9$$

$$x=\frac{33}{5}$$

Si miramos cada una de las ecuaciones del sistema como la ecuación de una recta, entonces, la solución de este sistema serán aquellos valores de x e y que satisfagan ambas ecuaciones y, por tanto, los valores de x e y que pertenezcan a ambas rectas, o sea, la única posibilidad es que sea el punto de intersección de ellas. Estos sistemas se llaman compatible determinado.

Ahora graficaremos lo obtenido, dando valores a las rectas antes mencionadas y considerando el punto de intersección de ambas rectas.



Por lo tanto, el punto de intersección existe y es $\left(\frac{33}{5}, -\frac{12}{5}\right)$

Analicemos su pendiente y coeficiente de posición:

$2x + 3y = 6$

$3y = -2x + 6$ $\qquad$ $x - y = 9$

$y = -\frac{2}{3}x + \frac{6}{3}$ $\qquad$ $-y = -x + 9$

$y = -\frac{2}{3}x + 2$ $\qquad$ $y = x - 9$

Estas rectas tienen distinta pendiente y distinto coeficiente de posición.

2º caso:

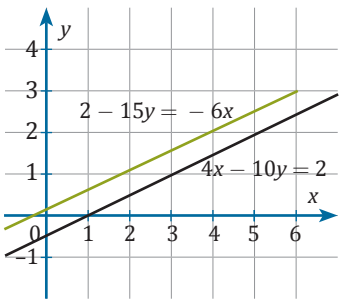
$\left.\begin{array}{l} 4x - 10y = 2 \\ 2 - 15y = -6x \end{array}\right|$ Resolvámoslo…

$\left.\begin{array}{l} 4x - 10y = 2 \\ 6x - 15y = -2 \end{array}\right|$ $/ \cdot 3$ $/ \cdot -2$

$\left.\begin{array}{r} 12x - 30y = 6 \\ -12x + 30y = 4 \end{array}\right|$ *(sumando)*

$0 = 10$

En este caso, vemos que el sistema no tiene solución, pues la igualdad obtenida no es cierta. Estos sistemas se llaman incompatibles. Observa la gráfica de este sistema:



De acuerdo a este dibujo, es posible observar que las rectas son paralelas, analicemos el valor de la pendiente de cada una de las rectas:

$4x - 10y = 2$ $\qquad$ $2 - 15y = -6x$

$4x - 2 = 10y$ $\qquad$ $6x + 2 = 15y$

$\frac{4}{10}x - \frac{1}{10} = y$ $\qquad$ $\frac{6}{15}x + \frac{2}{15} = y$

$\frac{2}{5}x - \frac{1}{10} = y$ $\qquad$ $\frac{2}{5}x + \frac{2}{15} = y$

Podemos ver que las pendientes son iguales, por lo tanto, efectivamente las rectas son paralelas (nota que tienen distinto coeficiente de posición), entonces, no hay punto de intersección. Por lo tanto es lógico que no pudiéramos determinar un valor de x e y al tratar de resolver el sistema.

3º caso:

$$\begin{array}{l} 8x + 20y = 4 \\ 5(x - y) - 4(2 - 5y) = -x - 5 \end{array}$$ Ordenemos y resolvamos

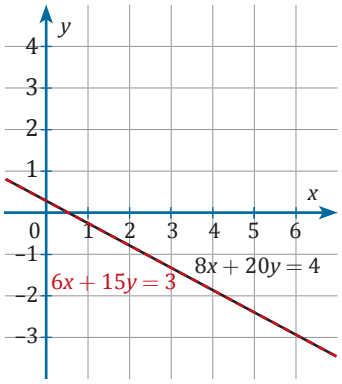
$$\begin{array}{l} 8x + 20y = 4 \\ 5x - 5y - 8 + 20y = -x - 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 8x + 20y = 4 & / \cdot -3 \\ 6x + 15y = 3 & / \cdot 4 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} -24x - 60y = -12 \\ 24x + 60y = 12 \end{array}$$ *(sumando)*

$$0 = 0$$

En este sistema se han eliminado las variables, dejando una igualdad que sí es cierta. Por lo tanto, cualquiera sea el valor de x e y que reemplacemos en las ecuaciones del sistema, estos satisfarán las ecuaciones y por lo tanto serán soluciones del sistema. Pero, ¿cuántos valores de x e y pueden tomarse?... pues infinitos, es decir, todos los números reales, de esta manera el sistema tendrá infinitas soluciones. A este tipo de sistemas se les llama compatibles indeterminados. Observa su gráfico:



Expresemos ambas rectas en su forma principal… observa…

$8x + 20y = 4$ $\qquad$ $6x + 15y = 3$

$20y = -8x + 4$ $\qquad$ $15y = -6x + 3$

$y = -\frac{8}{20}x + \frac{4}{20}$ $\qquad$ $y = -\frac{6}{15}x + \frac{3}{15}$

$y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$ $\qquad$ $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$



Observa, no solo tienen la misma pendiente, sino que también tienen el mismo coeficiente de posición. Por lo tanto, las rectas son coincidentes.

Lo que hemos analizado recién nos indica que si hay dos rectas en el plano, estas podrán ser paralelas, coincidentes o secantes.

Si te fijas, hemos establecido la relación entre la solución de un sistema de ecuaciones y la representación gráfica de las ecuaciones de este sistema. Hagamos algunos ejemplos:

a. Determinar gráficamente la solución del sistema

$$\left|\begin{array}{l} 3x-2y+13=0 \\ \dfrac{x+2y}{2}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{y}{5} \end{array}\right|$$

Ordenemos el sistema y luego grafiquemos ambas rectas:

$$\left|\begin{array}{l} 3x-2y+13=0 \\ \dfrac{x+2y}{2}-\dfrac{1}{10}=\dfrac{y}{5} \end{array}\right| \; / \cdot 10$$

$$\left|\begin{array}{l} 3x-2y+13=0 \\ 5x+10y-1=2y \end{array}\right|$$

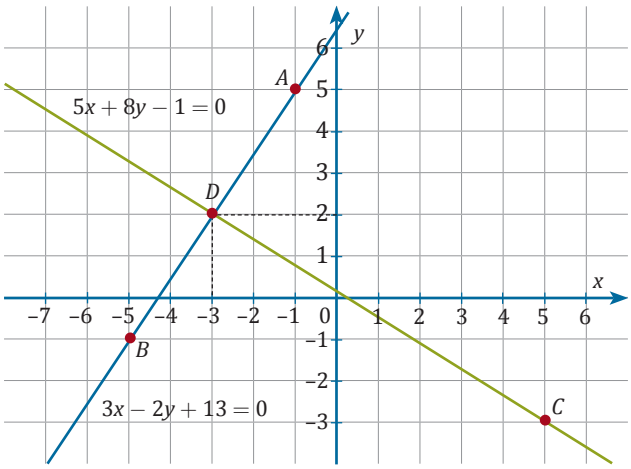
$$\left|\begin{array}{l} 3x-2y+13=0 \\ 5x+8y-1=0 \end{array}\right|$$

Encontramos dos puntos por los que pase cada recta…

$3x-2y+13=0$	
x	y
-1	5
-5	-1

$5x+8y-1=0$	
x	y
5	-3
-3	2

Graficamos ambas rectas…



Por lo tanto, el sistema tiene por solución el punto $(-3,2)$.

Nota que este es un buen método cuando las soluciones son números enteros, en general pequeños. El graficar no siempre es fácil y además si las soluciones son fracciones será más difícil determinar con exactitud las coordenadas del punto solución.

b. Determina la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

i. $5x - y = 2$ y $2y = 10x + 4$

Podemos resolver el sistema formado por ellas:

$$\left.\begin{array}{r} 5x - y = 2 \\ 2y = 10x + 4 \end{array}\right| \text{ (ordenando)}$$

$$\left.\begin{array}{r} 5x - y = 2 \\ -10x + 2y = 4 \end{array}\right| / \cdot 2$$

$$\left.\begin{array}{r} 10x - 2y = 4 \\ -10x + 2y = 4 \end{array}\right| \text{ (sumando)}$$

$$0 = 8$$

El sistema es incompatible, por lo tanto, las rectas son paralelas.

ii. $2x - 5y = 2$ y $x = -5y - 2$

Podemos calcular la pendiente y el coeficiente de posición de cada una:

$$2x - 5y = 2 \qquad x = -5y - 2$$

$$-5y = -2x + 2 \,/: -5 \qquad 5y = -x - 2$$

$$y = \frac{2}{5}x - \frac{2}{5} \qquad y = -\frac{1}{5}x - \frac{2}{5}$$

Las pendientes no son iguales, por lo tanto, las rectas son secantes. Nota, que en este caso, los coeficientes de posición son iguales en ambas rectas. Esto quiere decir que ambas rectas pasan por el punto $\left(0, -\frac{2}{5}\right)$. Entonces, dicho punto será la solución del sistema.

iii. $\left.\begin{array}{r} 8x - 15y = -19 \\ 6x - \frac{45}{4}y = -\frac{57}{4} \end{array}\right|$

$$\left.\begin{array}{r} 8x - 15y = -19 \\ 6x - \frac{45}{4}y = -\frac{57}{4} \end{array}\right| \quad \begin{array}{l} / \cdot -3 \\ / \cdot 4 \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} -24x + 45y = 57 \\ 24x - 45y = -57 \end{array}\right| \text{ (sumando)}$$

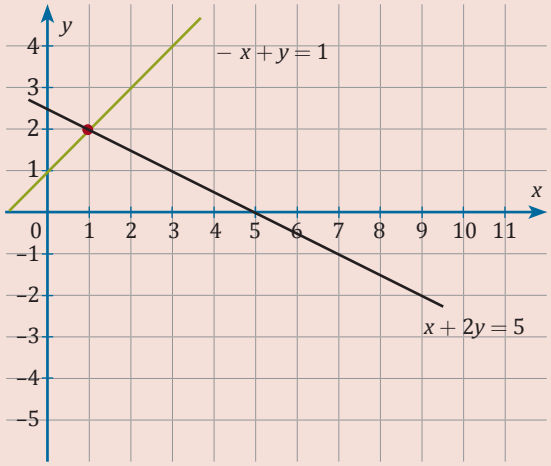
$$0 = 0$$

El sistema es compatible indeterminado, por lo tanto existirán infinitas soluciones que serán representadas por dos rectas coincidentes en el plano.

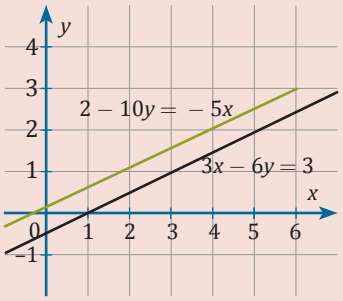


- Cada sistema de ecuaciones lineales de 2 x 2, representa dos rectas en el plano.
- El tipo de sistema determina la posición relativa de las rectas en el plano y viceversa. Así, podemos decir que:

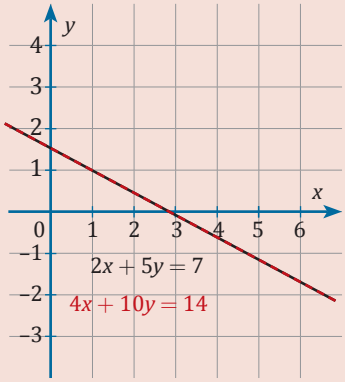
  - Un sistema compatible determinado (solución única), representará dos rectas secantes (distinta pendiente).



  - Un sistema incompatible (sin solución), representará dos rectas paralelas en el plano (igual pendiente, distinto coeficiente de posición).



  - Un sistema compatible indeterminado (con infinitas soluciones), representará dos rectas coincidentes en el plano (igual pendiente y coeficiente de posición).



Toma nota

En un sistema lineal de 2 x 2, $\begin{array}{l} ax+by=c \\ dx+ey=f \end{array}$ donde x e y son las incógnitas, se cumple que:

- Si $\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$, el sistema es compatible determinado, es decir, tiene solución única.
- Si $\frac{a}{d}=\frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$, el sistema es incompatible, es decir, no tiene solución.
- Si $\frac{a}{d}=\frac{b}{e}=\frac{c}{f}$, el sistema es indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones.

Trabaja

Resuelve con tu grupo los siguientes ejercicios. No olviden revisar sus respuestas en el solucionario.

1 Dado el sistema

$$\begin{aligned} 3x + y &= 2 \\ 9x + 3y &= -4 \end{aligned}$$

Determinen:

a. La pendiente de cada recta representada en él.

b. La solución del sistema.

c. ¿Qué tipo de sistema es? ¿Cómo son las rectas involucradas?

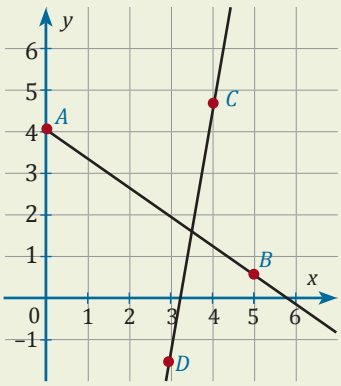
2 En el sistema

$$\begin{aligned} 3ax + y &= 5 \\ 5x + 2y &= 7 \end{aligned}$$

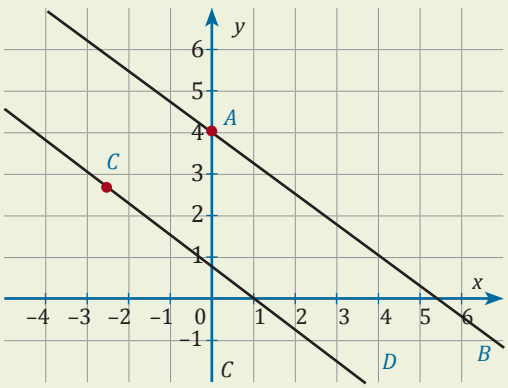
¿Qué valor debe tomar a para que las rectas representadas sean paralelas?

3 Determinen el tipo de sistema que representan las siguientes rectas:

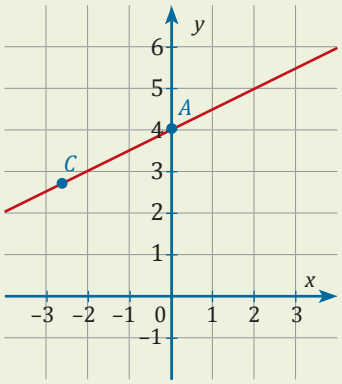
a.



b.



c.



4 Determinen los valores de a y b en el sistema:

$$\begin{aligned} ax + by &= 2 \\ 5x - 2y &= 8 \end{aligned}$$

Para que las rectas representadas sean coincidentes.

5 Determinen en cada caso, el tipo de solución de cada sistema de ecuaciones y el tipo de rectas que ellos representan:

a. $\begin{aligned} x - y &= 5 \\ x + y &= 15 \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} 3x + y &= 4 \\ -6x - 2y &= 1 \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} 21x - 35y &= 10 \\ 12x - 20y &= -15 \end{aligned}$

d. $\begin{aligned} 16x + 18y &= -27 \\ \frac{32}{27}x + \frac{4}{3}y &= -2 \end{aligned}$

e. $\begin{aligned} 3(5x + 3) - 2(5y + 6) &= 6(x - 1) \\ 2(5x - 4) - 3(3y + 1) &= 6(y - 1) \end{aligned}$

6 Si un sistema tiene la forma:

$$\begin{aligned} A_1x + B_1y &= C_1 \\ A_2x + B_2y &= C_2 \end{aligned}$$

Entonces se reconocen las soluciones del sistema mediante las siguientes relaciones:

$A_1 \cdot B_2 \neq A_2 \cdot B_1 \rightarrow$ el sistema tiene solución única.

$A_1 \cdot B_2 = A_2 \cdot B_1$; $B_1C_2 \neq B_2C_1 \rightarrow$ el sistema es incompatible.

$A_1 \cdot B_2 = A_2 \cdot B_1$; $B_1C_2 = B_2C_1 \rightarrow$ el sistema es indeterminado.



Según lo anterior determinen la naturaleza de cada sistema, ¿cómo son las rectas que ellos representan?

a. $\begin{array}{l} 5x - 2y = 7 \\ 10x - 4y = -3 \end{array}$

b. $\begin{array}{l} 18x - 3y = -11 \\ -5x + 13y = 20 \end{array}$

c. $\begin{array}{r} 18x - 48y = 72 \\ -5x + 8y = -12 \end{array}$

d. $\begin{array}{l} \frac{10}{3}x + 3y = 85 \\ 3x + \frac{8}{3}y = 76 \end{array}$

7 En un sistema de ecuaciones, una de las ecuaciones es $7x - 3y = 3$; si al reducir las variables se obtiene $0 = 9$ ¿Cuál es una posible segunda ecuación? ¿Cómo son ambas rectas?

8 Dado el sistema

$$\begin{array}{l} x + ay = 2 \\ x - 2y = b \end{array}$$

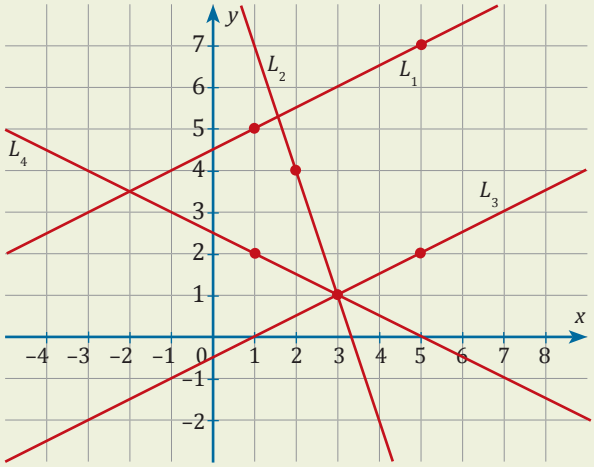
Determinen los valores de a y b para que:

a. Ambas rectas coincidan.

b. Las rectas sean paralelas.

9 José Miguel estudiaba con Carlos para su prueba de matemática. Carlos vio el sistema de ecuaciones $\begin{array}{r} 4x - 3y + 1 = 0 \\ 2x - 1{,}5y + 9 = 0 \end{array}$ y dijo que no tenía solución, sin necesidad de resolverlo. ¿Estaba Carlos en lo cierto? ¿Pueden decir cuál fue el razonamiento de Carlos para dar su respuesta?

10 El profesor de Jacinta les entregó el siguiente plano cartesiano con rectas dibujadas en él:



Luego, les pidió que escribieran los siguientes sistemas de ecuaciones. Ayuden a Jacinta a realizar lo pedido basándote en los datos dados en el gráfico:

a. Un sistema que represente dos rectas paralelas.

b. Un sistema que represente dos rectas secantes.

c. Un sistema que represente dos rectas coincidentes.

d. Un sistema que represente tres rectas que se intersecten en el mismo punto.

Revisemos lo aprendido

Te invitamos a evaluar a cada uno de los integrantes de tu grupo respecto de su desempeño en el trabajo grupal. Asígnales un puntaje de 0 (si no cumple nunca con el criterio mencionado), 1 (si lo cumple parcialmente) y 2 (si siempre lo cumple)

Indicador	Integrante N°1	Integrante N°2	Integrante N°3	Integrante N°4
Propone ideas para el desarrollo de los ejercicios.				
No impone sus ideas sobre los demás integrantes del grupo.				
Realiza su trabajo con un nivel óptimo de calidad.				
Total				

Trabaja más...

I. Ecuación de la recta

Trabaja en forma individual

1 Determina si los puntos indicados pertenecen a la recta L: $2x - 3y + 7 = 0$

a. A: $(1,2)$

b. B: $\left(\frac{3}{2}, \frac{10}{3}\right)$

c. C: $(4,5)$

2 En los siguientes sistemas a y b son los valores que permiten escribir la ecuación principal de la recta de la forma $y = ax + b$. Determina la ecuación de la recta en cada caso:

a. $\begin{array}{|r} -a + b = 11 \\ 2a + b = 2 \end{array}$

b. $\begin{array}{|r} 8a + 3b = 4 \\ 4a + b = 3 \end{array}$

c. $\begin{array}{|r} 3a - 5b = -4 \\ -2a - 3b = 7 \end{array}$

3 La recta L pasa por los puntos A: $(2,3)$ y B: $(-1, -12)$. Determina:

a. La ecuación principal de L.

b. La ecuación general de L.

4 Determina un punto que pertenezca a la recta que pasa por: A: $(2,2)$ y B: $(-3, -33)$

5 Determinar en cada caso los puntos donde la recta intersecta al eje x y al eje y.

a. $y = 5x - 3$.

b. $-8x + 7y + 2 = 0$.

c. Recta que pasa por A: $(-1,8)$ y B: $(3, -4)$.

6 Determina tres puntos A, B y C que pertenezcan a la recta $y = -3x - 7$, de manera que las abscisas de estos puntos correspondan a los tres primeros impares positivos respectivamente.

7 Se sabe que una recta pasa por los, puntos A: $(0,0)$, B: $(3,2)$ y C: $(5,k)$ ¿Cuál es el valor de k?

8 Se tienen los puntos K: $(-5,6)$; L: $(-2,4)$ y M: $(-4, -1)$ los cuales determinan el ΔKLM. Encuentra:

a. La ecuación principal de la recta que pasa por los puntos K y L.

b. La ecuación principal de la recta que pasa por los puntos K y M.

c. La ecuación principal de la recta que pasa por los puntos L y M.

9 En el triángulo formado por los puntos A: $(2,1)$, B: $(2,5)$ y C: $(6,1)$. Determina:

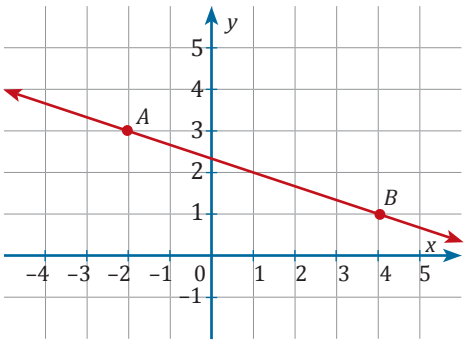
a. La ecuación principal de la transversal de gravedad que pasa por el vértice A.

b. La ecuación principal de la transversal de gravedad que pasa por el vértice B.

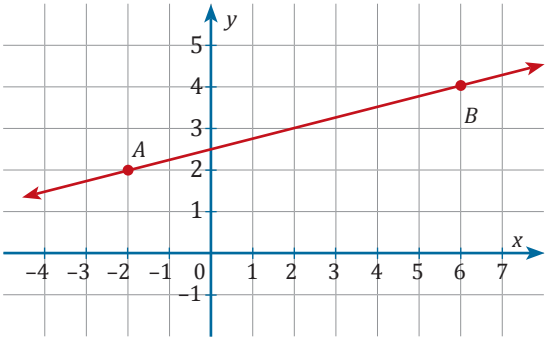
c. La ecuación principal de la transversal de gravedad que pasa por el vértice C.

10 Halla, para cada gráfico, la pendiente de la recta:

a.



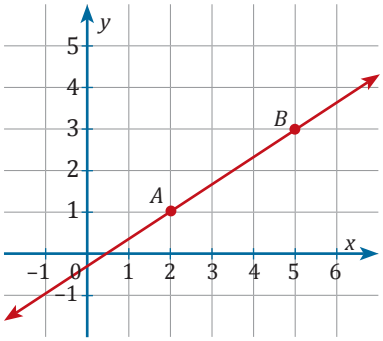
b.



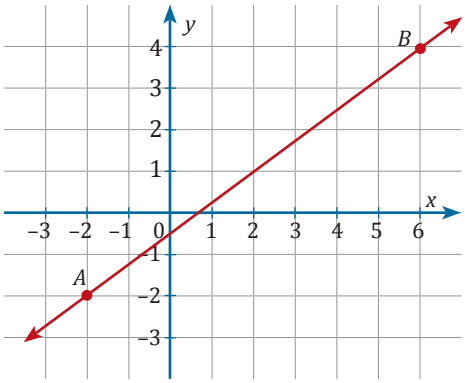


11 Para cada uno de los siguientes gráficos, determina la ecuación general de la recta:

a.



b.



12 ¿Cuál es la ecuación de la recta que tiene pendiente -3 y corta al eje y en el punto $(0,2)$?

13 Tres kilogramos de manzanas cuestan $\$\ 450$ y, por siete kilogramos habríamos pagado $\$\ 1\,050$. Determina:

a. La ecuación de la recta que nos da el precio (y) en función de los kilogramos (x) que compremos.

b. Representa lo anterior gráficamente.

c. A partir del gráfico, determina cuánto costarán 25 kg de manzanas.

14 Un taxista cobra $\$\ 250$ fijos, más $\$\ 300$ por cada 200 metros recorridos. Determina:

a. La ecuación de la recta que da el precio de la carrera (y) según los metros recorridos (x).

b. ¿Cuánto se paga por 50 kilómetros?

c. Lo que alcanza a recorrer aproximadamente un pasajero que dispone de $\$\ 25\,000$.

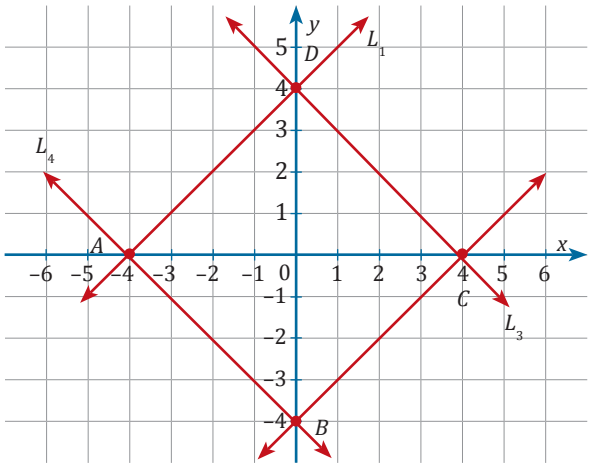
15 En Física se conocen varias escalas de temperaturas, dos de ellas son la escala Celsius $(°C)$ y la Fahrenheit $(°F)$ que se relacionan de manera lineal. Se sabe que la equivalencia entre las dos escalas es $0\ °C = 32\ °F$ y que $10\ °C = 50\ °F$. Determina:

a. La ecuación de la recta que trasforma los grados Celsius (x) a grados Fahrenheit (y).

b. ¿Cuántos grados Fahrenheit son $20\ °C$?

c. ¿Cuántos grados Celsius son $113\ °F$?

16 A partir de los datos de la figura, determina:



a. La ecuación principal de L_1.

b. La pendiente de L_3.

c. La ecuación general de L_4.

d. El área (A) del cuadrado.

e. El perímetro (P) del cuadrado.

f. El perímetro del ΔDOC.

17 Considera la ecuación $y = ax + b$, con a y b reales y cada uno de los siguientes pares de puntos:

a. A: $(-5,-2)$ y B: $(-2,-6)$

b. M: $\left(-\frac{2}{3}, \frac{3}{2}\right)$ y N: $(11,-31)$

c. P: $\left(0,-\frac{6}{7}\right)$ y Q: $(9,-3)$

d. C: $\left(\frac{11}{17}, 6\right)$ y D: $(5,6)$

e. S: $(1,\overline{3}\ ;-1)$ y T: $(1,0\overline{3}\ ;1)$

Para cada caso, establece un sistema de ecuaciones lineales que permita hallar los coeficientes a y b

18 Resuelve cada sistema anterior y escribe la ecuación principal de la recta que pasa por cada par de puntos.

19 Los siguientes sistemas se han formado remplazando las coordenadas de dos puntos que permiten encontrar a y b reales, para posteriormente escribir la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos y es de la forma $y = ax + b$.

i. $\begin{array}{l} \frac{2}{3}a = b - 2 \\ 4b = 2 + 5a \end{array}$ **ii.** $\begin{array}{l} b - 5 = a \\ \frac{4}{3}a + 1 = a - b - 2 \end{array}$

iii. $\begin{array}{l} 19a - 3b = 1 \\ -84a + 35b = -6 \end{array}$ **iv.** $\begin{array}{l} \frac{3}{2}b - a = -3 \\ 3b = -a - 6 \end{array}$

v. $\begin{array}{l} \frac{1}{2}a + 3b - 5 = 0 \\ \frac{a}{3} - \frac{7b}{79} + 1 = 0 \end{array}$ **vi.** $\begin{array}{l} 33b = -107 + 10a \\ 2b = \frac{5}{2}a + \frac{161}{22} \end{array}$

Para cada caso:

a. Indica las coordenadas de los puntos involucrados, reordenando previamente la ecuación de cada sistema, escribiéndola en su forma principal.

b. Resuelve cada sistema, y escribe la ecuación de la recta correspondiente, pero expresada de manera general.

20 Una recta que pasa por $(4, -5)$, está expresada de la forma $y = ax + b$ con a y b coeficientes reales. Si el coeficiente que multiplica a x, corresponde a un tercio del otro, encuentra la ecuación de la mencionada recta.

21 En $y = mx + n$, donde m y n son coeficientes reales, estos últimos cumplen las siguientes condiciones: el primero de ellos disminuido en dos veces el segundo resulta -6. Además, cuatro veces el primero, más el segundo, da 7. ¿Cuál es la ecuación de la recta que se obtiene al remplazar los valores de m y n en la ecuación original?

22 Se desea hallar la ecuación de una recta de la forma $y = ax + b$, con a y b coeficientes reales y que pasa por dos puntos. Al remplazar las coordenadas de éstos en la igualdad mencionada anteriormente, se obtiene $\frac{3}{2}b - a = -3$ y $3b = 2a - 5$

a. ¿Es posible hallar los valores de a y b que satisfagan las relaciones dadas? Justifica tu respuesta.

b. Auxiliándote de una representación gráfica, escribe la ecuación de la recta que pasa por aquellos puntos.

23 Otra manera de escribir la ecuación de una recta es la forma canónica: $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$
Donde p y q son números reales distintos de cero. Por ejemplo, para la ecuación: $y = -3x + 5$, primero se transforma a $3x + y = 5$, acto seguido, se divide por 5, para conseguir $\frac{3}{5}x + \frac{y}{5} = 1$, y se rescribe como $\frac{x}{\frac{5}{3}} + \frac{y}{5} = 1$. Nótese que en esta ocasión, $p = \frac{5}{3}$ y $q = 5$.
Contesta a las siguientes preguntas evitando hacer uso de números decimales en tus respuestas:

a. Escribe en la forma canónica las siguientes ecuaciones:

i. $12x + 18y = 36$ **ii.** $y = \frac{11}{2}x - 1$

iii. $3x + 15y = 21$ **iv.** $\frac{5}{3}x - \frac{7}{4}y = 14$

b. Indica la forma general las ecuaciones canónicas que a continuación te presentamos:

i. $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 1$ **ii.** $\frac{x}{1{,}3} + \frac{y}{7} = 1$

iii. $\frac{x}{6} + \frac{y}{-8} = 1$ **iv.** $\frac{x}{1{,}\overline{1}} + \frac{y}{1{,}0\overline{1}} = 1$

c. ¿Por qué las siguientes ecuaciones no pueden expresarse en la forma segmentaria?

i. $y = 6$ **ii.** $x = -23$ **iii.** $y = 65x$

d. Propón una estrategia para escribir una ecuación que está en la forma general, de manera segmentaria.

24 Piensa y responde:

a. Haz un gráfico de $\frac{x}{-3} + \frac{y}{5} = 1$ que incluya la intersección de la recta con los ejes coordenados.

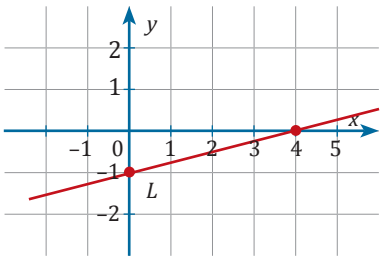


b. Escribe las coordenadas de los puntos de intersección insinuados en **a.**

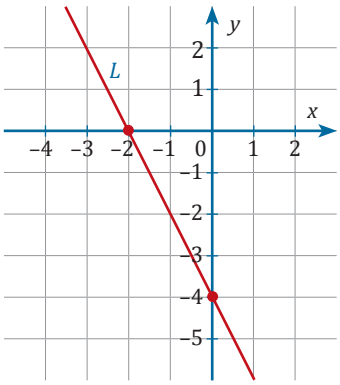
c. ¿Qué relación puedes establecer entre dichos puntos, y los valores de p y q de la ecuación canónica de la recta?

d. A partir de los siguientes gráficos, escribe la correspondiente ecuación segmentaria de la recta que representan.

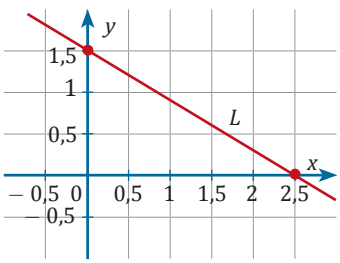
i.



ii.



iii.



e. Indica una manera directa de elaborar un gráfico de una recta, a partir de su ecuación segmentaria.

f. Menciona los pasos a seguir para encontrar la ecuación canónica de una recta a partir de su representación gráfica.

25 Dado P: $(4, -3)$ se suma tres unidades a la abscisa y cuatro a la ordenada, de tal manera que se obtiene la abscisa y la ordenada de un segundo punto llamado P'. Ahora bien, para conseguir P'', a la abscisa de P réstale tres unidades, y también quítale 4 unidades a la ordenada.

a. Escribe las coordenadas de P' y P''.

b. Muestra que estos tres puntos pertenecen a la misma recta.

c. Escribe la ecuación principal de la recta sugerida anteriormente, con la pendiente como número racional. ¿Qué encuentras de particular del numerador y denominador de esta fracción y las unidades de formación de P'?

d. ¿Es verdad que P es el punto medio de $\overline{P''P'}$? Justifica tu respuesta.

e. Repite las preguntas anteriores pero con las siguientes condiciones: a partir de P resta tres unidades a la abscisa y suma cuatro a la ordenada, para obtener P'. Para la abscisa de P''suma tres unidades a la abscisa de P, y resta cuatro a su ordenada, para conseguir la ordenada de P''.

Ahora bien, supongamos que P'' se haya formado con la mitad de las unidades mencionadas en el enunciado, manteniendo las mismas condiciones anteriores para obtener los otros puntos,

f. ¿Cuáles son las nuevas coordenadas de P''?

g. Encuentra las medidas $\overline{PP'}$, $\overline{P''P}$ y $\overline{P''P'}$?

h. Haciendo uso de lo obtenido en **e.**, muestra que estos tres puntos son colineales.

i. ¿Cuál es la razón entre $\overline{P''P}$ y $\overline{PP'}$?

j. Conforme a lo respondido en **g.** ¿por qué P no es el punto medio de $\overline{P''P'}$? Justifica tu respuesta.

26 Dada la recta $y = 3x - 4$, encuentra:

a. La ordenada del punto de abscisa -2, que pertenece a la recta.

b. La abscisa del punto de ordenada 8, que pertenece a la recta.

c. La abscisa del punto de ordenada a $\sqrt{2}$, que pertenece a la recta.

27 Determina en cada caso si el punto indicado pertenece o no pertenece a la recta.

a. L_1: $y = \frac{3}{4}x - 1$, punto A: $(-4, -4)$

b. L_2: $y = -\frac{2}{5}x + \frac{1}{3}$, punto B: $\left(\frac{3}{2}, \frac{14}{15}\right)$

28 Determina la recta que pasa por los puntos indicados.

a. A: $(-5,3)$ y B: $(-7,2)$

b. C: $\left(4, \frac{2}{3}\right)$ y D: $\left(\frac{1}{3}, -2\right)$

c. E: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right)$ y F: $\left(\frac{3}{4}, -\frac{5}{2}\right)$

II. Análisis de rectas

1 Determina si la recta L_1: $2y - 3x - 2 = 0$ es perpendicular a:

a. L_2: $y = \frac{2}{3}x - 2$

b. L_3: recta que pasa por los puntos A: $(6, -8)$ y B: $(-3, -2)$

2 Se sabe que la recta L_1: $y = -2x + 1$ es perpendicular con la recta L_2 que pasa por los puntos A: $(2,3)$ y B: $(3k, 2k - 1)$. Hallar el valor que debe tomar k.

3 ¿Pueden tres rectas ser simultáneamente perpendiculares entre sí?

4 Determinar la recta que es perpendicular a L_1: $y = -\frac{5}{3}x + 2$ y que pasa por el punto A: $(5,4)$

5 La recta L pasa por los puntos A: $(k,5)$ y B: $(3, 2k + 1)$ que valor debe tomar k para que la recta sea:

a. Paralela al eje y.

b. Paralela al eje x.

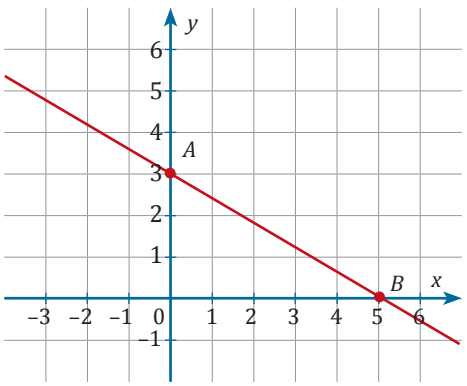
6 Si una recta tiene pendiente -3 y pasa por el punto A: $(-3,5)$, ¿cuál es su ecuación general?

7 Halla una recta paralela a $y = -3x + 2$ y que pasa por el punto A: $(-2,5)$.

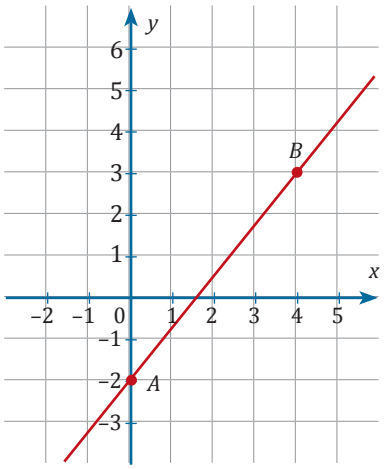
8 Determina una recta L_1 que pasa por $(3,5)$ y que sea $\perp$ a la recta de ecuación L_2: $y = -\frac{3}{4}x + 5$.

9 Para cada uno de los gráficos determina la ecuación de la recta.

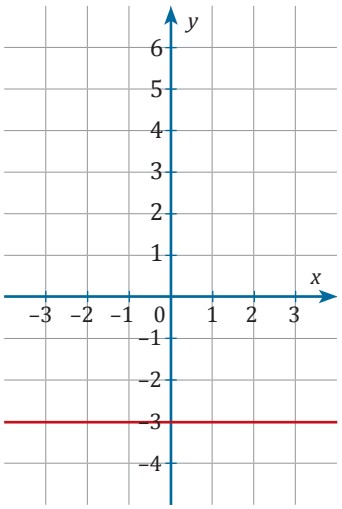
a.



b.



c.



10 Dadas las rectas L_1: $y = \frac{3}{2}x + 2$ y L_2: $-3x + 2y - 4 = 0$. Indica si son paralelas, perpendiculares o coincidentes.

11 Dadas las rectas $y = \left(\frac{2+k}{3}\right)x - 2$ e $y = \left(\frac{5-k}{2}\right)x + 8$, ¿qué valor debe tomar k para que las rectas sean paralelas?



12 Si las rectas L_1: $y = \frac{4}{5}x - 3$ y L_2: $(k-2)x - 3y + 15 = 0$ son perpendiculares. Determina el valor de k.

13 Determina, en cada caso, si la recta es paralela al eje x o al eje y o si pasa por el origen:

a. $3x - 2y = 0$

b. $5 - 7y = 0$

c. $2x - 6 = 0$

d. $x + 3y - 2x - y = 0$

14 Verifica si se cumplen o no las siguientes afirmaciones. Justifica matemáticamente tu respuesta:

a. Las rectas L_1: $y = -3x - 2$ y L_2: $y = -\frac{1}{3}x + 2$ son perpendiculares.

b. Las rectas L_3: $y - 2x = 5$ y L_6: $-3x + 4y + 18 = 0$ son paralelas.

c. Las rectas L_5: $x + y = 6$ y L_5: $x + y = 6$ cortan al eje x en el mismo punto.

15 Halla el valor de k en las ecuaciones de las rectas siguientes de forma que se verifique la condición indicada.

a. $y = \frac{k+2}{k-2}x + 0{,}5$ sea perpendicular a $y = \frac{14}{29}x - 63$

b. $-kx + (9+k)y - 1993 = 0$ y $4x - 5y - 1990 = 0$ sean perpendiculares.

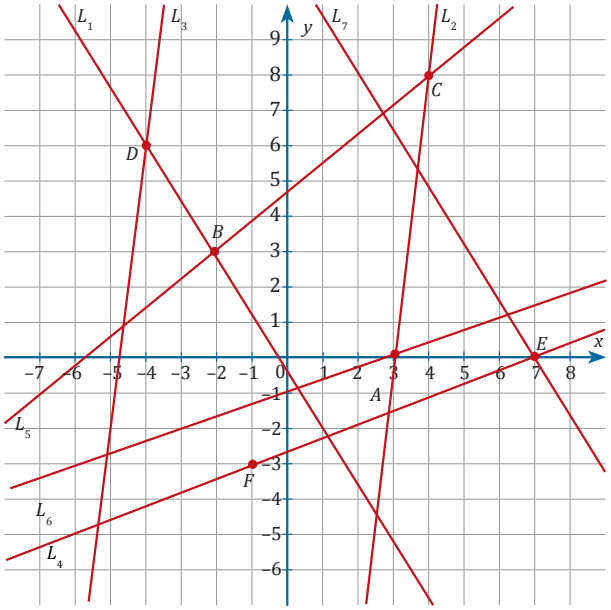
c. $(k^2 + 9)x - (k^2 - 32)y = 0$ se intercepte con $y = -\frac{4}{5}x + 11$ formando un ángulo recto.

16 Escribe la ecuación principal de la recta, que sea paralela a:

a. $9x - 20y - 26 = 0$ e intersecte al eje y, en 98 unidades por sobre el eje x.

b. $y = -12 + 6{,}\overline{3}x$ y contenga a $\left(0, -\frac{31}{3}\right)$

17 En el siguiente gráfico,



a. Indica aquellas que rectas son paralelas y escribe sus ecuaciones principales, destacando en rojo, u otro color, cada pendiente.

b. Determina la ecuación principal de una recta, que sea paralela a L_5, y que pase por D. Llámala L_8.

c. ¿Cuál es la ecuación general de una recta que atraviesa por C y que sea paralela a L_1? Denomínala L_9.

d. Justifica por qué L_8 y L_9, no son paralelas.

18 Halla el valor de k en las ecuaciones de las rectas siguientes de forma se verifique la condición indicada.

a. $y = -\frac{5}{k}x - 26$ sea paralela a $y = 24x - 13$

b. $kx + (5+k)y - 11 = 0$ y $2x - 3y - 5 = 0$ sean paralelas.

c. $2k^2x - (k-1)y - 5 = 0$ nunca se intercepte con $y = -x + \frac{3}{2}$

19 Las rectas $3x + 5y - 11 = 0$ y $y = -4x + 26$ cruzan por un cierto punto.

a. ¿Cuáles son las coordenadas de dicho punto?

b. ¿Podrán estas rectas ser perpendiculares? Justifica analíticamente tu respuesta.

20 $\left(-\frac{1}{2},\frac{3}{7}\right)$ son las coordenadas del punto medio entre A: (x_A,y_A) y B: (x_B,y_B). El valor de la pendiente de la recta que pasa por estos puntos es 24. Si $y_A - y_B = 8$, halla

a. $x_A - x_B$

b. Las coordenadas de A.

c. Las coordenadas de B.

d. La ecuación principal de la recta que pasa por A y B.

21 Los puntos M, N y P son colineales. La abscisa de P es -4 y su ordenada es -14. Sabiendo que $y_N - y_M = 285$ y $x_M - x_N = 19$

a. Escribe la ecuación general de la recta que pasa por dichos puntos.

b. ¿Por qué el valor de $\frac{y_P - y_M}{x_P - x_M}$ es -17?

c. ¿Cuál es la ecuación principal de una recta que es perpendicular a la anterior, y que pasa por $(-14,4)$?

d. Escribe la ecuación principal de cualquier recta no vertical, que sea concurrente con aquella que contiene los puntos colineales dados.

e. Conforme a lo respondido anteriormente, elabora una estrategia escribir este tipo de rectas concurrentes en las condiciones descritas en **d**.

22 Al unir sucesivamente los puntos A: $(-3,-1)$, B: $(2,3)$, C: $(0,6)$ y D: $(-5,2)$ se obtiene un cuadrilátero.

a. Obtén las ecuaciones de las rectas que contienen los dos lados más largos. Exprésalas en la forma principal.

b. ¿Qué relación existe entre las pendientes de las rectas anteriores?

c. ¿Cuáles son las ecuaciones generales de las rectas que contienen los otros lados?

d. ¿Es verdad que las rectas obtenidas en **c.** son paralelas? ¿Por qué?

e. ¿Es este cuadrilátero un romboide? Justifica tu respuesta.

f. Encuentra las medidas de las diagonales.

g. ¿Cuáles son las coordenadas del punto, donde se intersectan dichas diagonales?

III. Rectas y sistemas de ecuaciones

1 Dadas las siguientes parejas de rectas, ¿Cuáles se intersectan en el punto $(-3,2)$?

a. $\begin{cases} -x - y = 1 \\ 3x - 4y = -17 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x + 2y = 1 \\ -5x - y = 22 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ -x + y = 2 \end{cases}$

d. $\begin{cases} -4x - y = 10 \\ x - 7y = -17 \end{cases}$

2 Dados los siguientes sistemas, determina si las rectas que representan son paralelas, secantes o coincidentes:

a. $\begin{cases} 3x + 2y = 10 \\ -6x - 4y = 8 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - 3y = 5 \\ -4x + 12y = -20 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2x + 3y = -5 \\ -x + 2y = 7 \end{cases}$

3 Determina el valor de k en el siguiente sistema de ecuaciones para que las rectas representadas en él sean paralelas:

$$\begin{cases} x - (3k+1)y = 5 \\ 2x + 5y = 6 \end{cases}$$

4 Determina el valor de k en el siguiente sistema de ecuaciones para que las rectas que representa sean secantes:

$$\begin{cases} 2x + (2k+1)y = 5 \\ -3x + ky = 8 \end{cases}$$

5 En los pares de ecuaciones de rectas que vienen a continuación, indica los valores de k que no pueden considerarse, para que ellas sean secantes.

a. $y = \frac{2}{3}x + 8$ y $y = kx - 19$

b. $5x - 2y + 12 = 0$ y $y = (k-1)x + 11$

c. $3x - 4y - 25 = 0$ y $(3-k)x - 6y = -19$

d. $y = (k-4)x - 43$ y $y = (1-k)x + 11$



IV. Ejercicios misceláneos

1 Determina en cada caso el tipo de ángulo que forma la recta dada con el eje x.

a. $5x - 3y = 8$

b. Recta que pasa por los puntos A: $(-3,5)$ y B: $(4,2)$

c. $y = -3$

2 Determinar el coeficiente de posición de la recta que pasa por el punto $(5, -6)$ y es paralela a la recta $8x + 5y - 2 = 0$.

3 Una recta pasa por el punto $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{5}\right)$ y tiene un coeficiente de posición igual -2. Halla:

a. La pendiente.

b. La ecuación general.

c. Una recta paralela a la anterior y que pase por el punto $\left(\frac{1}{7}, \frac{7}{5}\right)$.

4 Determinar la ecuación de una recta que pasa por el punto $(-3,2)$ y sea perpendicular a la recta que pasa por los puntos A: $(10,1)$ y B: $(25, -2)$

5 Dados los puntos A: $(-2,3)$; B: $(4,1)$ y C: $(1, -3)$. Determina:

a. La ecuación de la recta que pasa por A y B (L_1).

b. La ecuación de la recta que pasa por A y C (L_2).

c. La ecuación de la recta que pasa por C y B (L_3).

d. La ecuación de la recta perpendicular a L_1 y que pasa por el punto C (L_4).

e. El punto de intersección P entre L_1 y L_4.

f. La distancia entre los puntos A y B.

g. La distancia entre los puntos C y P.

h. El área del triángulo A; B y C.

6 Para cada par de rectas determina si son paralelas, perpendiculares o secantes.

a. $3y - 2x - 7 = 0$ y $-4x + 6y - 10 = 0$

b. $2y - 3x - 4 = 0$ y $2x + 3y + 6 = 0$

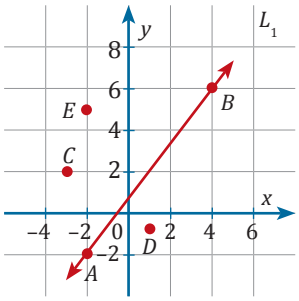
c. $\frac{5}{2}x + y - 2 = 0$ y $2x - 5y + 8 = 0$

d. $15x - 3y + 8 = 0$ y $5x + y = 9$

7 Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,2)$ y es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(-2,3)$ y $(3, -2)$.

8 Una recta cuya ecuación es $10x - 3y + 30 = 0$, limita un triángulo rectángulo con los ejes coordenadas. ¿Cuál es el área de dicho triángulo?

9 Dados los puntos A: $(-2, -2)$; B: $(4,6)$; C: $(-3,2)$; D: $(1, -1)$ y E: $(-2,5)$, como se muestra en la figura. Determina:



a. Si la recta que pasa por los puntos C y E es paralela a L_1.

b. Si la recta que pasa por C y D es perpendicular a L_1.

c. La ecuación de la recta perpendicular a L_1 y que pasa por E.

d. Calcular la distancia del punto E a la recta L_1.

e. La ecuación de la recta paralela a L_1 y que pasa por el punto D.

f. La distancia del punto E a la recta perpendicular a L_1 que pasa por el punto C.

10 La altura promedio (y), en centímetros, de un niño de x años de edad se puede estimar mediante la recta $y = \frac{13}{2}x + 50$. Determina:

a. ¿Cuál es la altura promedio de los niños a los 4,5 años?

b. ¿Cuál es la altura promedio de los niños a los 2 años?

c. ¿Cuál es la altura promedio de los recién nacidos?

11 Un gimnasio ofrece dos ofertas distintas. En la primera de ellas cobran $\$\ 24\ 000$ por la matrícula y $\$\ 32\ 000$ al mes. En la segunda, no se paga matrícula pero la cuota es de $\$\ 37\ 600$ al mes. Determina:

a. La ecuación de la recta que representa la relación meses (x) - costo (y) para cada oferta.

b. Cuál de las dos ofertas es más ventajosa según los meses que vayamos al gimnasio.

c. El costo para el octavo mes en ambas ofertas.

12 En un plano cartesiano se tienen tres rectas: $L_1: y = x + 2$; $L_2: y = -x + 8$ y $L_3: y = \frac{5}{3}x$. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica tu respuesta:

a. L_1 perpendicular a L_2.

b. L_3 paralela a L_1.

c. Las tres rectas se intersectan en un punto.

d. L_2 corta al eje y en el punto $(8,0)$.

e. El punto $(-5,13)$ pertenece a la recta L_2.

13 Al unir los puntos A: $(2,2)$; B: $(5,4)$ y C: $(2,4)$ se forma un triángulo rectángulo. Determina:

a. La ecuación de la recta que contiene a la hipotenusa.

b. La ecuación de la recta que contiene a la altura que baja del vértice C.

c. El valor de la altura del vértice C.

d. El perímetro (P) del triángulo ABC.

e. El área del triángulo.

14 Se tienen los puntos A: $(6,6)$; B: $(-2,2)$; C: $(0,-2)$ y D: $(8,2)$, usando el software Geogebra, determina:

a. Si forman un cuadrilátero.

b. Las ecuaciones que contienen a cada lado.

c. El punto P de la intersección entre las diagonales.

d. La distancia de P al vértice A

e. Gráfica la circunferencia circunscrita al paralelogramo.

15 Los vértices de un triángulo son A: $(-2,3)$; B: $(5,5)$ y C: $(4,-1)$. Determina, mediante el software Geogebra:

a. La ecuación general de la recta perpendicular al lado AC y que pasa por el punto medio de $\overline{AC}$.

b. La ecuación general de la recta perpendicular al lado AB y que pasa por el punto medio de $\overline{AB}$.

c. El punto de intersección (O: circuncentro) entre las rectas encontradas en los puntos **a.** y **b.**

d. El radio de la circunferencia circunscrita al triángulo ABC (Distancia entre un vértice y O).

e. Grafica la circunferencia.

16 Grafica los siguientes puntos: P: $(-4,-3)$, Q: $(0,-1)$, R: $(-2,3)$ y S: $(-6,1)$, y únelos de manera sucesiva, para formar un cuadrilátero.

a. Escribe las ecuaciones principales que contengan cada uno de los lados.

b. Indica aquellas que son perpendiculares, justificando tu respuesta.

c. Escribe las ecuaciones generales que incluyen las diagonales.

d. ¿Las diagonales son perpendiculares?, ¿Por qué?

e. Clasifica este cuadrilátero conforme a lo que has respondido anteriormente.

17 Ubica en un sistema coordenado cartesiano, los siguientes puntos: A: $(-2,2)$, B: $(1,5)$, C: $(-2,11)$ y D: $(-4,6)$, y únelos de manera sucesiva, para formar un cuadrilátero.

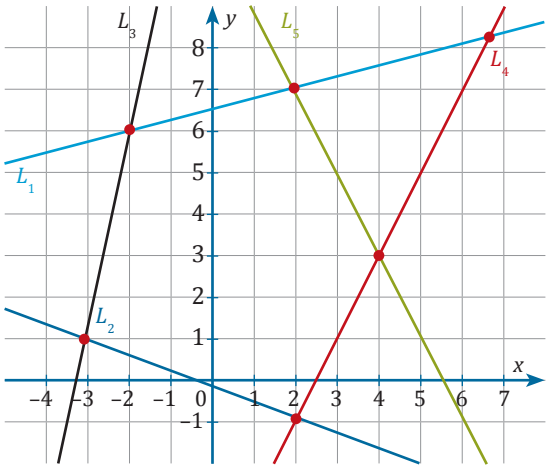
a. Escribe las ecuaciones generales de cada lado.

b. Anota los valores de cada pendiente.

c. ¿Podemos asegurar que este cuadrilátero es un trapecio? Fundamenta tu respuesta conforme a lo respondido en **a.** y **b.**



18 Basándote en la siguiente gráfica, responde



a. ¿Por qué L_1 y L_3 son secantes pero no perpendiculares?

b. Menciona los otros pares de rectas que se interceptan, señalando las coordenadas de los puntos de intersección.

c. Indica las coordenadas de los puntos de intersección que no aparecen destacados.

Ahora bien, considera además la recta perpendicular que pasa por el punto medio del trazo comprendido entre los puntos de intersección de L_1 con L_2, y L_2 con L_4. Llama a esta nueva recta L_6.

d. Indica las coordenadas de los puntos de intersección de L_6 con las otras rectas excepto L_4, pero que no alcanzarían a aparecer en este gráfico.

e. ¿En qué punto se interceptan L_6con L_5?

f. ¿En qué cuadrante se interceptan L_6 con L_4? ¿Por qué?

19 Muestra analíticamente que:

a. $7x - 5y + 85 = 0$ y $4x - y - 41 = 0$ son secantes.

b. $18x + 3y - 5 = 0$ e $y = \frac{1}{6}x + 5$ se interceptan pero no son perpendiculares.

c. $7x - 8y - 1 = 0$ e $y = \frac{1}{6}x + 5$ son secantes en $\left(\frac{123}{17}, \frac{211}{34}\right)$

d. $y = \frac{23}{11} - \frac{3}{4}x$ y $8x - 6y - 7 = 0$ se interceptan aproximadamente en $(1{,}563\,;\ 0{,}918)$ pero no son secantes.

20 Escribe la ecuación de la recta, $y = mx - \frac{m}{3}$, de manera que se intercepte con

a. $2x + 3y + 6 = 0$ en $\left(1, -\frac{8}{3}\right)$

b. $-7y + 1 = 0$ en la intersección de $x - 14y - 12 = 0$ y $x + 14y - 16 = 0$

c. Con cada una de las ecuaciones obtenidas en **a.** y **b.** verifica si los puntos de concurrencias son los indicados.

21 La recta L pasa por los puntos M: $(-4{,}0)$ y R: $(-1{,}6)$, en cambio, la recta L' es perpendicular a la anterior en R. Con estas dos rectas y el eje horizontal, se forma ΔMNR.

a. Escribe las ecuaciones de las rectas que contienen los lados de dicho triángulo.

b. Encuentra las medidas de los catetos y la hipotenusa.

c. Indica las coordenadas del punto que separa las proyecciones de los catetos sobre la hipotenusa.

d. Menciona las coordenadas de los puntos extremos de cada proyección.

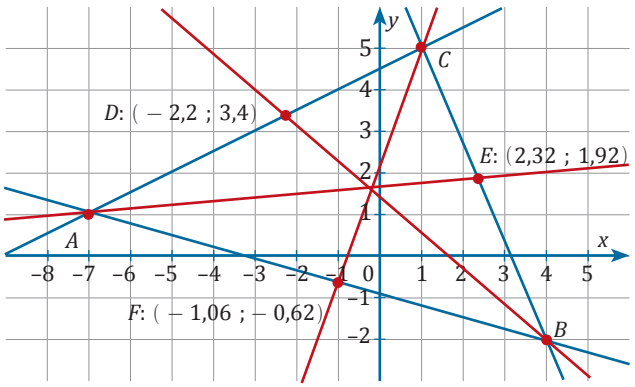
e. Muestra numéricamente la relación que existe entre la altura que está al interior del triángulo y las proyecciones mencionadas anteriormente.

f. ¿Cuáles son los valores de las tres alturas de este triángulo?

g. Comprueba que el cuadrado del cateto menor es igual al producto de la hipotenusa y la proyección de dicho cateto sobre ésta.

h. Al igual que en **g.** haz la verificación, pero usando el otro cateto.

22 El gráfico siguiente destaca en rojo, las rectas bisectrices del ΔABC.



Usando tu calculadora, y colocando dos decimales en tus respuestas de **a.** y **b**, y para **c.** y **d.** hazlo con aproximación a la milésima:

a. Escribe las ecuaciones generales de las bisectrices.

b. Determina el incentro.

c. Verifica que la razón entre $\overline{EB}$ y $\overline{BA}$, es igual a la razón entre $\overline{EC}$ y $\overline{CA}$.

d. Basándote en **c.** y las medidas de segmentos análogos, busca otras igualdades de razones o establece las proporciones respectivas.

23 La suma de las coordenadas de un punto P, es 40. Al aumentar cinco unidades una de ellas la otra disminuye en cinco unidades, resultando que una coordenada, equivale al triple de la otra. Esto determina un segundo punto llamado P'.

a. Escribe los cuatro sistemas de ecuaciones posibles que permitan encontrar P y P'.

b. ¿Cuáles son las duplas, P y P' posibles?

c. Encuentra las ecuaciones principales de las rectas según las duplas anteriores.

d. Anota por lo menos tres comentarios sobre los resultados que has obtenido con respecto a cada punto, su recta y la ecuación de esta.

24 Dado el triángulo de vértices A: $(2,5)$; B: $(-3,6)$ y C: $(-1,-2)$, determina, usando un programa graficador como por ejemplo geogebra:

a. La ecuación de las rectas a las que pertenecen sus lados.

b. La medida de la altura trazada desde el vértice B.

c. El área del triángulo.

d. El centro de gravedad del triángulo.

e. El radio de la circunferencia circunscrita.

25 Dado el cuadrilátero de vértices A: $(4,3)$; B: $(1,1)$; C: $(0,-1)$ y D: $(3,1)$, determina:

a. Las ecuaciones de las rectas que contienen a sus diagonales.

b. Las ecuaciones de las rectas que contienen a sus lados.

c. Qué tipo de cuadrilátero es.

d. Su área, aproximada a la centésima.

e. Su perímetro, aproximado a la centésima.

26 Las rectas $L1$: $x-3y+5=0$, $L2$: $x+y=-1$ y $L3$: $2x-3y=0$, forman un triángulo. Usando el programa geogebra u otro similar, determina:

a. Los vértices del triángulo.

b. El área del triángulo.

c. El perímetro del triángulo.

d. La ecuación de las rectas que contienen a sus medianas.

e. El área del triángulo formado por sus medianas.

27 Dada la recta de ecuación $3x-y+1=0$, determina la ecuación de otra recta que:

a. Sea paralela a la dada.

b. Sea perpendicular a la dada.

c. Corte a la dada formando un ángulo distinto al recto y que pase por el punto $(2,9)$.

d. Sea coincidente con la dada.

e. Sea paralela a la dada y que pase por el origen.

28 Encuentra la ecuación de dos rectas que se intersecten en los siguientes puntos:

a. $(2,3)$

b. $(5,1)$

c. $\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{5}\right)$

d. $(2,-\sqrt{5})$

e. $(a,2a)$

29 Dados los siguientes sistemas de ecuaciones, sin resolverlos, indica si las rectas involucradas son coincidentes, paralelas o secantes. Justifica tu respuesta matemáticamente:

a. $\begin{cases} 2x-y=1 \\ x+6y=9 \end{cases}$

b. $\begin{cases} 2x-3y+1=0 \\ -6x+9y=3 \end{cases}$

c. $\begin{cases} x-3y=9 \\ 2x-6=6 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 4(x+2)+3(y-6)=1 \\ \frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{9}=4 \end{cases}$

e. $\begin{cases} x+5=2y \\ 3(x+y)-1=x-y \end{cases}$

30 Determina, usando ecuación de la recta, si los siguientes puntos son colineales. En caso de serlo, escribe la ecuación correspondiente:

a. $(2,-3);(-1,3)$ y $(4,-7)$

b. $(3,1);(-2,0)$ y $(6,3)$

c. $\left(\frac{2}{5},-1\right);\left(3,\frac{1}{2}\right)$ y $\left(0,\frac{5}{7}\right)$

31 Determina la ecuación de la recta que cumple con las siguientes condiciones:

a. Pasa por el punto $(2,8)$ y por el punto de intersección de las rectas $L1: 2x+3y=8$ y $L2: x-y+1=0$.

b. Pasa por el punto $(2,3)$ y por el punto medio del trazo de extremos $(5,3)$ y $(-2,-2)$.

c. Es paralela a la recta de ecuación $4x-5y+1=0$ y pasa por el punto medio del trazo de extremos $(-1,-1)$ y $(8,5)$.

d. Es perpendicular a la recta de ecuación $2x-y+5=0$ y pasa por el punto de intersección de las rectas $L1: x+y=0$ y $L2: 5x-3y+15=0$.

V. Problemas misceláneos:

1 Malaquías hizo muchas divisiones y seleccionó estas:

$3:3=1$ $0/$	$4:3=1$ $1/$	$5:3=1$ $2/$
$3'6':3=12$ $0\ 6$ $0/$	$4'3':3=14$ $1\ 3$ $1/$	$4'7':3=15$ $1\ 7$ $2/$
$9'9':3=33$ $0\ 9$ $0/$	$11'2':3=37$ $2\ 2$ $1/$	$14'6':3=48$ $2\ 6$ $2/$

Recordando el algoritmo de la división, lo fue aplicando a cada uno de ellas:

$3=3\cdot 1+0$ $4=3\cdot 1+1$ $5=3\cdot 1+2$

$36=3\cdot 12+0$ $43=3\cdot 14+1$ $47=3\cdot 15+2$

$99=3\cdot 33+0$ $112=3\cdot 37+1$ $146=3\cdot 48+2$

Sólo varían los números de la izquierda de cada igualdad, y aquellos que multiplican al 3. Por lo tanto, tengo dos variables que toman valores naturales o cero, excepto este último número para x.

Reflexionando un poco más, encontró que dichas variables las podía relacionar, escribiendo tres ecuaciones:

$y=3x+0$

$y=3x+1$

$y=3x+2$....

Al graficarlas, sorprendido se encontró con puntos de tres rectas.

A medida que iba avanzando en sus hallazgos, fue haciéndose muchas preguntas, que tú también puedes responder:

a. ¿Qué posición tienen las rectas en el plano, que contienen los puntos aludidos?
En relación a las divisiones que efectuó Malaquías,

b. ¿Qué representan los coeficientes de posición, de cada recta?

c. Para cualquier par (x,y) permitido de cualquiera de las rectas, ¿qué significa cada coordenada?

d. ¿En cuál de las rectas deben ubicarse 25, 53, 56, 75 y 82 al dividirse por 3?

e. ¿Por qué las rectas $y=3x+4$ e $y=3x-1$ no pueden incluirse en el grupo de las tres mencionadas?

Siguiendo las ideas anteriores

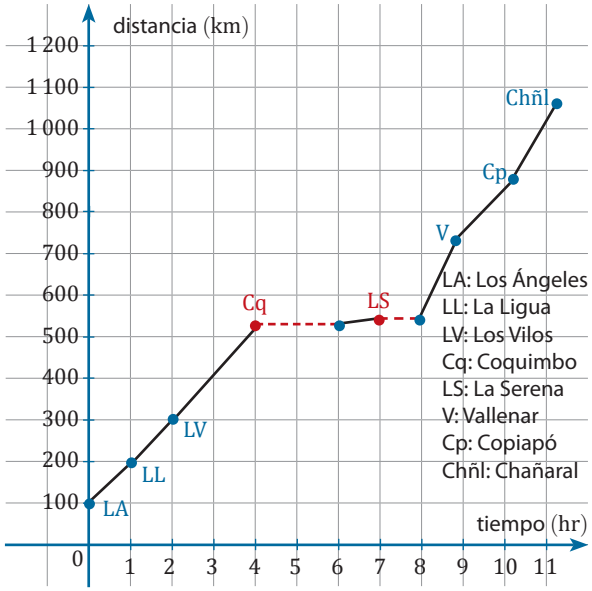
f. ¿Cuántas y cuáles son las ecuaciones que representan la división por 7?

g. Si cualquier natural o cero, se divide por n natural ¿Cuántas ecuaciones posibles podrían escribirse dependiendo del natural dividendo o cero? ¿Por qué?

2 En el problema que a continuación presentamos, debes participar activamente, respondiendo de manera correcta, las preguntas hechas. Usa d para la distancia, t para el tiempo, sin olvidar que v representa la rapidez, a la cual por ahora, llamaremos velocidad. Puedes usar tu calculadora.

Este es el gráfico que te ayudará durante el desarrollo:





Y acá una tabla de especificación:

Simbología de ciudad	Coordenadas asignadas
LA	$(0;\ 100{,}00)$
LL	$(1{,}11\ ;\ 210{,}80)$
LV	$(1{,}93\ ;\ 288{,}69)$
Cq	$(3{,}90\ ;\ 525{,}93)$
LS	$(7{,}01\ ;\ 537{,}60)$
V	$(8{,}90\ ;\ 732{,}52)$
Cp	$(10{,}42\ ;\ 881{,}13)$
Chñl	$(11{,}35\ ;\ 1\,054{,}74)$

Nota: Puedes trabajar los valores anteriores con aproximación a la décima o al entero, pero podrás obtener resultados que pueden diferir un poco con los del solucionario.

"–¿Qué hora es?... hace 15 min que acaba de pasar a 100 km de aquí, el auto blindado, que es objetivo de nuestra misión, inspector Arnaldo... voy a hacer un itinerario ubicando las 21 h como la hora 0, mientras ustedes siguen la ruta geográfica en aquel mapa... se ha dado la orden a la policía de carreteras, que no impida el tránsito libre de nuestro vehículo objetivo.

–Observo que van a una velocidad moderada... ah estarían llegando en un poco más de una hora a LL."

a. Escribe la ecuación principal de la recta que contiene al segmento aludido del gráfico.

b. Encuentra la velocidad a los 15 min. ¿Qué relación tiene este valor con alguno de los coeficientes de la recta anterior? Aproxima a la décima.

c. ¿Cómo se interpreta el otro coeficiente de la recta anterior?

d. ¿A qué distancia de Los Andes, se encuentra en ese momento? Expresa tu respuesta, con aproximación a la centésima.

"–Inspector Arnaldo, acabo de trazar mi tercera recta... ¿pasaron ya Los Vilos?... no olvide indicarme a donde van y que velocidad llevan, ahora que son las 11 h de la noche..."

e. ¿Cuál es la ecuación de esa tercera recta?

f. Responde a todo lo otro solicitado, con aproximación a la centésima.

"–¡Prefecta Raquel, mantenga a todas las patrullas en estado de alerta y de la orden de que nada interrumpa la misión. De acuerdo a mis cálculos, ahora que es las 00:37 h, debieran ir llegando a...

g. ¿A qué lugar debieran estar llegando a la hora mencionada? ¿Habrán variado la última velocidad? ¿Por qué?

–Se ha producido allí un fuerte sismo, y con réplicas continuas. El SHOA ha recomendado la evacuación de la zona... ¡Prefecta!... se está interrumpiendo la comunicación con nuestro auto.

–Me acaban de informar, que a las 02:00, iniciaron el viaje.... pero de la ciudad vecina, me avisan que está también, en estado de alerta de tsunami...

–Dígales que tienen exactamente una hora, para llegar a La Serena... ¿entendido?

h. ¿Cuáles son las rectas que incluyen los trazos segmentados?

i. ¿Cómo se interpretan físicamente los coeficientes de las rectas obtenidas en **h.**?

j. ¿Cuál es el valor de la pendiente que corresponde a la recta que incluye el trazo del trayecto que une Coquimbo con La Serena?

–Inspector, envíe un helicóptero a máxima velocidad, inmediatamente, a Copiapó... Debiera estar llegando allá alrededor de las...,

–Prefecta, informan que el auto está cruzando Vallenar, pero van disminuyendo la velocidad a la que iban...

–Inspector, no podemos fallar...

k. Imagínate que en ese helicóptero vas tú, a $300\,\frac{\text{mi}}{\text{h}}$. Por lo tanto, una vez que hayas llegado a Copiapó, deberás continuar, lo antes posible, la misión hasta Chañaral. Pero: ¿Qué es más probable: que tú tengas que esperar que el vehículo llegue o bien, lo contrario? Justifica tu respuesta, valiéndote de la información que puedes conseguir, a partir de las ecuaciones de las rectas necesarias. Ten en mente que $1\text{ milla} \approx 1{,}61\text{ km}$.

¡Sorpresa!... La escena final la debes escribir tú, generando las preguntas que desees, conforme al gráfico, y referidas a las materias que ya has estudiado. No olvides responderlas.

3 Martina está observando la siguiente sucesión de números $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7...$, y luego esta otra de números $-17, -13, -9, -5, -1, 3, 7, 11...$ Posteriormente empieza a crear pares ordenados tomando el primer número de la primera sucesión, con el primero de la segunda, para formar la abscisa, y la ordenada de su primer par.

a. Haz una gráfica que muestre dichos pares ¿Qué notas de especial?

b. Escribe la ecuación principal según lo que has observado.

c. En la segunda sucesión, ¿cuánto es la diferencia entre cualquier número dado (que no sea el primero) con su anterior? ¿Con qué coeficiente de la ecuación que has escrito en **b.**, puedes relacionar esta diferencia?

d. ¿Qué relación hay entre el coeficiente de posición de la recta y algún término de la segunda sucesión?

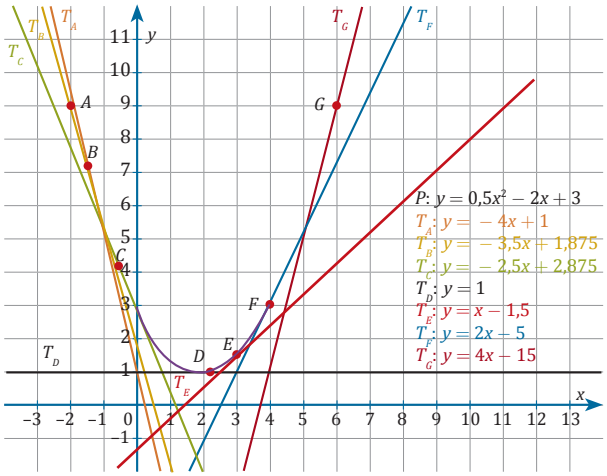
e. ¿Cuáles son las ordenadas de los siguientes pares: $(11,....)$,$(17,....)$, $(29,....)$?

f. ¿Cuáles son las abscisas de los siguientes pares: $(.....,39)$, $(....,17)$, $(....,117)$?

g. ¿Existe algún natural que permita que 276 esté presente en la otra sucesión? Justifica tu respuesta.

h. Propón una manera de crear sucesiones de números a partir de la sucesión de cardinales, tal como está en el enunciado y dada la ecuación principal de una recta. Da un ejemplo.

4 Haciendo uso de GeoGebra, Sebastián hizo el siguiente gráfico:



Observó que todas las rectas tenían distintas inclinaciones con respecto al eje x, según el punto de la parábola por donde cruzaban. Pero se sintió un poco limitado y se sintió incapaz de determinar su ecuación. Instantes después, pensó: "Como las coordenadas del punto de la parábola, depende esencialmente de x, y volviendo a mirar, notó que las inclinaciones, es decir, el valor de las pendientes de las rectas m, también varían con x", se le ocurre hacer nuevamente un gráfico, pero ahora de m versus x. Te pide que lo ayudes:

a. Haz el gráfico aludido en el párrafo anterior.

b. ¿Serán puntos colineales?

c. Halla la ecuación de la recta que los contiene.

d. ¿Será verdad que la pendiente en el punto de abscisa -10, vale -12? Justifica tu respuesta haciendo el desarrollo respectivo.

Sebastián, viendo que podía así encontrar valores de pendientes, decide escribir ecuaciones de rectas usando el método punto-pendiente. Por tanto, colabórale tú, hallando la ecuación principal de la recta tangente a la parábola en:

e. el punto de abscisa -10

f. los puntos cuya ordenada es 19

g. $(-6{,}33)$

Después de haber ensayado con muchas parábolas y ecuaciones de rectas tangentes, Sebastián hizo la siguiente tabla:

Ecuación de la parábola	Ecuación principal para obtener el valor de la pendiente de la recta tangente en un punto de la parábola
$y = 0{,}5x^2 - 2x + 3$	$m = 1x - 2$
$y = 7x^2 + 16x - 13$	$m = 14x + 16$
$y = -11x^2 + 6x - 21$	$m = -22x + 6$
$y = -23x^2 - 5x + 76$	$m = -46x - 5$
$y = \frac{17}{35}x^2 + \frac{61}{8}x + 47$	$m = \frac{34}{35}x + \frac{61}{8}$
$y = -1{,}57x^2 - 2{,}08x$	$m = -3{,}14x - 2{,}08$
$y = 26x^2 + 97$	$m = 52x$

Por sus observaciones exclamó:

h. "Hay una relación entre el coeficiente de x^2 en la parábola, con el coeficiente de x de la ecuación de m". ¿Cuál es?

i. "También el coeficiente de x en la parábola, es el mismo que el coeficiente libre que aparece en la ecuación de m". ¿Será cierto?"

j. Concluyendo: si $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, entonces la ecuación para obtener el valor de la pendiente de la recta tangente en un punto de la parábola es $y = 2ax + b$. ¿Será válida esta conjetura?

5 Mi mejor amiga y compañera, Coné, está exponiendo ante el curso un procedimiento que consiste en que: "Dado un punto cualquiera, puede escribir ecuaciones de rectas que pasan por ese punto, encontrar allí sus perpendiculares y expresarlas automáticamente en forma general.

Comienza considerando un punto cualquiera, por ejemplo, $(4, -1)$, luego, ella elije dos números enteros, no simultáneamente nulos y que denomina A y B. Después, multiplica A por la abscisa del punto, y continúa sumando el producto de B por la ordenada. Anota el resultado. Usando el opuesto aditivo de este resultado, consigue el número entero C. Posteriormente, se vale de la fórmula general, $Ax + By + C = 0$, donde únicamente remplaza los enteros mencionados anteriormente...

*Nos ha dejado la siguiente tabla:"**

A partir de su exposición, te invitamos a que respondas lo siguiente:

a. Completa la tabla.

b. ¿Cómo esta manera de construir ecuaciones de rectas concurrentes, garantizan que efectivamente pasan por $(4, -1)$?

c. ¿Qué particularidad gráfica tienen las dos primeras rectas que aparecen en la tabla?

d. ¿Estará siempre presente el tipo de rectas mencionadas en **c.**, cualquiera que sea el punto de concurrencia? ¿Por qué?

e. ¿Será verdad que las rectas obtenidas en las dos últimas filas son perpendiculares?

f. Con respecto a **e.**, ¿qué relación encuentras entre los coeficientes de las variables al comparar ambas ecuaciones generales?

g. Formula una regla que permita decidir cuando dos rectas son perpendiculares o no, tan solo viendo la relación entre los coeficientes de las variables.

Investiga y/o inventa alguna técnica que permita generar rectas paralelas pero que queden inmediatamente expresadas en forma general.

*

A	B	Relación numérica	C	Forma general de la recta obtenida
0	-3	$0 \cdot 4 + (-3)(-1) = 3$	-3	$0x + -3y - 3 = 0$
7	0	$7 \cdot 4 + 0 \cdot (-1) = 7$	-7	$7x + 0y - 7 = 0$
-5	8	$-5 \cdot 4 + 8 \cdot (-1) = -28$	28	$-5x + 8y + 28 = 0$
22	-37			
-3	13			
13	3			



6 "Ranquel está muy intrigado por las muestras de sulfato ferroso, medidas en gramos, que le ha enviado uno de sus trabajadores. Le había pedido que le mandara siete, nominadas con A, B... G, y detalladas en masa como: 1 g, 1,5 g, 1,8 g, 2g, 2,3 g, 2,7 g y 3 g. Sin embargo, las que recibió, al verificarlas en su balanza, eran de 1,10 g, 1,55 g, 1,82 g, 2,00 g, 2,27 g, 2,63 g y 2,90 g, respectivamente".

Después de tu lectura del párrafo anterior, imagínate las siguientes situaciones:

Al no poder comunicarse con su trabajador y pedir explicaciones por lo ocurrido:

a. Ranquel ha hecho un gráfico de las masas de las muestras recibidas, versus las masas de las muestras solicitadas. Allí, él ha anotado los puntos y ha encontrado por lo menos una regularidad en ellos. ¿Cuál puede ser? Ayúdate de una gráfica similar.

b. Decide buscar una ecuación sencilla que relacione las masas recibidas, M_r, con las solicitadas, M_s. ¿Cuál debiera ser la más adecuada, es decir aquella que tome en cuenta todos los puntos posibles representados en **a.**?

c. Se da cuenta de que a pesar de todo lo anterior hay una muestra que estuvo en lo correcto. ¿Cuál es ésta?

d. ¿Qué ocurre con los valores de las masas de las muestras recibidas, a medida que aumenta cada valor de la masa de las muestras solicitadas? Para un análisis comparativo, en el gráfico anterior puedes agregar los puntos que debieran haber sido, es decir aquellos en que coincidirían la masa recibida con la solicitada.

e. Supón que el error se debe a una balanza que ocupó el trabajador, en la cual empieza marcando dos décimas de gramos extra y solo determina el noventa por ciento de la masa real. ¿Tendrá alguna relación con los factores presentes en la relación mencionada en **b.**? ¿ A qué coeficientes correspondería? ¿Por qué?

7 "Hola amiga, hola amigo. Aquí les traigo algunas ecuaciones de rectas para que ustedes las escriban en forma general. En paréntesis, he escrito el nombre del o de la estudiante que me la ha enviado, y el lugar donde vive)".

a. $\frac{\sqrt[6]{64}}{13}x+\frac{\sqrt[4]{256}}{16}y=\frac{4\sqrt[6]{729}}{52}$ *(Mauricio,Huara)*

b. $\sqrt{27}x-\frac{\sqrt{108}}{15}y=\sqrt{147}$ *(Maite, Loncomilla)*

c. $\sqrt[5]{16}y-\frac{11\sqrt[5]{50\,000}}{-\sqrt[3]{49}\sqrt[3]{7}}=\sqrt[5]{-4^2}x$ *(Rigoberto, Collipulli)*

(Nota: recuerda que $\sqrt[5]{-a}=-\sqrt[5]{a}$)

d. $\frac{\sqrt[3]{-3}}{2}x+\sqrt[3]{24}y=\frac{4}{-\sqrt[3]{9}}$ *(Helga, Valdivia)*

e. $\frac{7}{\sqrt{7}}y+x\sqrt{7}=-\sqrt{175}$ *(Alicia ,Calama)*

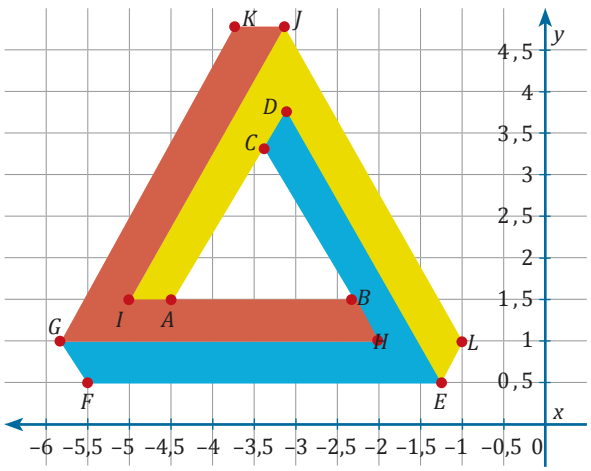
f. $\frac{\sqrt{300}}{\sqrt{25}}x=-\sqrt{3}-\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{324}}y$ *(Juan Pablo, Puerto Natales)*

g. $\frac{\sqrt[3]{-125}}{2}x+\frac{11\sqrt[3]{0{,}125}}{\sqrt{12{,}5}\sqrt{2}}=\sqrt[3]{0{,}000125}y$ *(Daniela, La Ligua)*

Además, entre estas ecuaciones vota, conforme a tu agrado, por una de ellas, como "La más popular del mes", en mi página web." ¿Será siempre posible escribir en forma general una recta que tenga coeficientes irracionales? Hasta la próxima. Su amiga. La abuela de Quillota".

Nota: Cuando proceda, amplifica cada ecuación por algún factor adecuado, como por ejemplo $\sqrt{3}$.

8 "A continuación te muestro una forma de un marco triangular imposible que he dibujado en un sistema de coordenadas, Así podrás repasar algunos temas de esta unidad". (Pablo A., Santiago).



El punto B pertenece a la recta $x = -2{,}3$, además C: $(-3{,}4\ ;\ 3{,}4)$ y D como J están en $x = -3{,}2$

Por otro lado, E tiene la misma ordenada de F, pero está a $4{,}3$ unidades a la derecha de este. Por el contrario, K está a media unidad a la izquierda de J. Finalmente, las coordenadas de los otros puntos se pueden conocer directamente de la gráfica.

Da las respuestas a lo pedido a continuación, sin aproximar tus respuestas.

a. Escribe las ecuaciones principales de las rectas que contienen $\overline{GK}$ e $\overline{IJ}$.

b. ¿Pertenece D a la recta que pasa por A y C? ¿Por qué?

c. En la gráfica hay segmentos paralelos al eje x, ¿cuáles son las ecuaciones de las rectas que los contienen?

d. Encuentra las ecuaciones generales de las rectas que contienen $\overline{JL}$ y $\overline{ED}$.

e. Halla la ecuación principal de la recta que atraviesa B y C. ¿Es H un punto de ella? Justifica tu respuesta.

9 Algunos de los siguientes ejercicios necesitan ciertos resultados del problema anterior, por tanto, verifícalos cuidadosamente.

a. Clasifica el triángulo que aparece en el gráfico e indica el valor del ángulo que forma:

i. $\overleftrightarrow{AC}$ con el eje x.

ii. $\overleftrightarrow{BC}$ con el eje horizontal.

b. ¿Será verdad que $\overline{JL}$ y $\overline{ED}$ son paralelas?

c. Determina el punto de concurrencia de $\overleftrightarrow{GK}$ e $\overleftrightarrow{IJ}$, si es que existe.

d. ¿Cuál es la posición relativa en el plano de $\overleftrightarrow{GF}$ y $\overleftrightarrow{BH}$. ¿Por qué?

e. ¿Por qué la distancia entre las intersecciones de las dos rectas anteriores con el eje y es $\frac{19}{3}$?

f. Elabora alguna pregunta que involucre la recta que pasa por I y por A, con aquella que contiene a $\overline{CD}$.

10 "Barcelona: quince grados, lluvia, Bruselas: siete grados, cielo nublado, Paris: ocho grados, viento y lluvia, Madrid: siete grados, cielo nublado..."

No entiendo, Inspector, qué tiene que ver ese informe meteorológico de esta grabación con algunos diálogos del Doctor y de la Doctora, mientras investigaban un gas enrarecido...

"...temperatura del gas ascendiendo a 35 ***Fahrenheit****... ¡Ah es decir a 270 grados* ***Kelvin!...*** *No, va más al alza: 292 grados* ***Kelvin****, de acuerdo, esto es 70,73 grados* ***Farenheit,*** *¡No!... más al alza, a 314* ***Kelvin,*** *pero se me pierde la medida en* ***Fahrenheit*** *¡cuidado Doctora!... Londres: cuatro grados, cielo nublado, Berlín: tres grados* ***Fahrenheit****, fuertes vientos y cielo nublado, Estocolmo: cero grado* ***Fahrenheit****, nieve, Zurich cero grados hielo y nieve, Copenhague: un grado* ***Fahrenheit****, lluvia y nieve..."*

¡Alto! ¡En esta grabación se está confundiendo la voz del Doctor, con el locutor del informe meteorológico que interfiere...!, lo único que requiero saber ahora, es la conversión de grados Fahrenheit a Celsius, y de Fahrenheit a Kelvin de manera directa...

a. Sabiendo que el punto de congelación del agua es a los $32\ ^\circ\text{F}$ y el de punto de ebullición a los $212\ ^\circ\text{F}$ en condiciones normales de presión, deduce la ecuación de una recta que permita transformar directamente de grados Fahrenheit a grado Celsius.

b. El punto de congelación del agua es a $273{,}15\ \text{K}$, y el de punto de ebullición a los $373{,}15\ \text{K}$ medidos en condiciones normales de presión. Encuentra la ecuación de una recta que permita transformar directamente de grados Fahrenheit a Celsius.

Ahora bien, en el diálogo entre los doctores, las temperaturas en grados Kelvin no están correctas, excepto la última.

c. ¿Cuáles debieran ser las temperaturas en esa escala de medición, conforme a los grados Fahrenheit mencionados?

d. ¿Cuál es la temperatura, en grados Fahrenheit, que corresponde a la última medición en grados Kelvin?

Por otro lado, en el informe meteorológico, las temperaturas deben estar expresada en grados Celsius, pero algunas, por los gritos del doctor, fueron alteradas agregando la palabra "Fahrenheit".



e. Indica la ciudad y la cantidad de grados Celsius de error, si se tomaran como correctas estas medidas.

Finalmente, de acuerdo a todo la anterior:

f. ¿Se podrán expresar las temperaturas en grados Kelvin, de la primera parte del informe meteorológico? Si tu respuesta es:

- afirmativa, hazlo, indicando la ecuación de conversión que has encontrado.
- negativa, da la justificación necesaria.

11 Rubén, agente de la PDI, tenía en el mural de su oficina, el mapa de su ciudad. Lo había cuadriculado de manera que cada cuadrícula estuviera separada cada 400 metros. En él había marcado algunos puntos que representaban los últimos lugares allanados, donde se habían encontrado las pistas del caso que él dirigía



De acuerdo a los datos dados, responde:

a. Rubén cree que la próxima pista se encontrará en algún punto del camino recto que une los puntos A y B, ¿cuál es la ecuación de dicha recta?

b. La policía ha averiguado que la casa donde puede esconderse el sospechoso, se encontraría en el camino recto que une los puntos C y E, ¿cuál es la ecuación de dicha recta?

c. Un informante de la PDI ha señalado que la mercadería con la que se hace el contrabando es fabricada en un laboratorio clandestino que se encuentra en la línea recta que une el punto D, con el punto medio del trazo $\overline{AB}$, ¿cuál es la ecuación de dicha recta?

d. Un informe de último minuto ha informado a Rubén que el sospechoso ha huido al punto de intersección de las rectas que unen los puntos D con E y B con C, ¿cuál es dicho punto en el mapa de Rubén?

e. Finalmente, el jefe de Rubén decide, por precaución, colocar patrullas en la línea recta que une los puntos medios de los trazos $\overline{CB}$ y $\overline{AD}$, ¿cuál es la ecuación de dicha recta?

12 Agustín ha determinado que su rendimiento deportivo se comporta según una línea recta. Él ha medido sus tiempos y los ha colocado en la siguiente tabla:

Tiempo (segundos)	8	10	12
Metros	150	187,5	225

Ayuda a Agustín a hacer algunos cálculos que necesita para preparar su siguiente prueba:

a. Determina la ecuación de la recta que representa gráficamente su rendimiento.

b. ¿Cuál es el rendimiento a los 20 segundos?

c. ¿Cuántos segundos demora en recorrer 1 300 metros?

d. ¿Crees que su rendimiento se mantendrá constante siempre?

13 ¿Rectas coincidentes, secantes o paralelas?, ¿esos eran los tres tipos? –decía Josefa, mientras estudiaba y trataba de memorizar las condiciones necesarias para cada caso.

–No trates de aprender esto de memoria, mejor entiéndelo, Josefa –se decía, mientras miraba los sistemas que tenía ante sus ojos.

–Tú puedes identificar a qué tipo de rectas corresponde cada uno de los siguientes sistemas. Justifica tu respuesta matemáticamente:

a. $\begin{cases} \frac{1}{5}x + \frac{1}{3}y = 9 \\ x - 135 = -5y \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - 2y = 6 \\ \frac{x-1}{2} + \frac{y-3}{3} = 1 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 3x - 1{,}5(-2x - y) = 0 \\ 12x = -3y \end{cases}$

d. $\begin{cases} x(2y+5) = 2xy + 5 + 4y \\ \frac{x-3}{4} + 1 = \frac{y-2}{5} \end{cases}$

e. $\begin{cases} 7x - 9(x+2y) = 5(x+3y) \\ 4(x-6y) = -2(2y-x) \end{cases}$

14 A Carolina le gustaba mucho la geometría analítica. Para estudiar, ella siempre inventaba preguntas de los contenidos y las respondía, a modo de cuestionario. Esta vez, Carolina anotó tres puntos en el plano: A: $(2,2)$, B: $(-5,3)$ y C: $(0,-8)$, y luego planteó las siguientes preguntas que te invitamos a responder ahora a ti:

a. ¿Cuáles son las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados del triángulo que tiene por vértices los puntos dados?

b. ¿Cuáles son las ecuaciones de las alturas del triángulo?

c. ¿Cuáles son las coordenadas del ortocentro del triángulo?

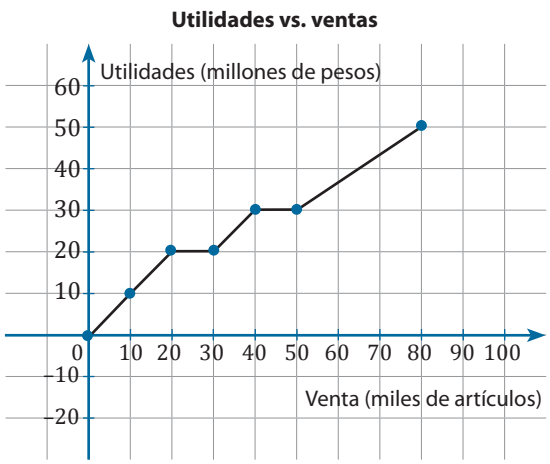
d. ¿Cuáles son las ecuaciones de las transversales de gravedad del triángulo?

e. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de gravedad del triángulo?

f. ¿Cuál es el perímetro del triángulo?

g. ¿Cuál es el área del triángulo?

15 Rodolfo se acordó de sus clases de matemática cuando miró el gráfico de su informe técnico



Ayuda a Rodolfo a determinar algunas ecuaciones y a preparar su informe, en base a las siguientes preguntas:

a. Determina la ecuación de la recta del tramo 0 a 10 mil artículos.

b. Determina la ecuación de la recta del tramo 30 a 40 mil artículos.

c. Determina la ecuación de la recta del tramo 50 a 80 mil artículos.

d. ¿Qué indica la pendiente de cada recta?

e. ¿Qué puedes decir del crecimiento de las utilidades de esta empresa, a partir de los datos obtenidos?

16 Antonia le había pedido ayuda a su tía para preparar su prueba de matemática. Su tía le recordó que para encontrar la ecuación de una recta podía hacerlo mediante la resolución de un sistema de ecuaciones lineales. Ayuda a Antonia a preparar su prueba, mediante los siguientes ejercicios:

a. Recta que pasa por $(2,-5)$ y $(-3,1)$.

b. Recta que pasa por el punto medio del segmento de extremos $(8,3)$ y $(-9,-11)$, y por el punto $(-2,-5)$.

c. Mediana $\overline{MN}$ del triángulo de vértices A: $(2,8)$; B: $(-3,5)$ y C: $(-4,-9)$, si M y N son los puntos medios de los lados $\overline{BC}$ y $\overline{AC}$, respectivamente.

d. Diagonal $\overline{AC}$ del cuadrilátero de vértices A: $(-5,6)$, B: $(-4,-2)$, C: $(8,-2)$ y D: $(9,10)$.

e. Recta que pasa por la intersección de las diagonales del cuadrilátero del ejercicio anterior y por el punto $(-4,2)$.

17 Marcelo le trataba de explicar a su hijo que lo que hace a la matemática tan útil y bella es que un problema se puede resolver de distintas maneras. Se puede demostrar que un triángulo es rectángulo, usando el teorema de Pitágoras. También, se puede hacer determinando las ecuaciones de las rectas que contienen a sus lados. Tú también puedes hacer esto para cada uno de los puntos dados, vértices de un triángulo, da tu respuesta justificando matemáticamente:

a. $(2,3)$; $(1,5)$ y $(-3,2)$

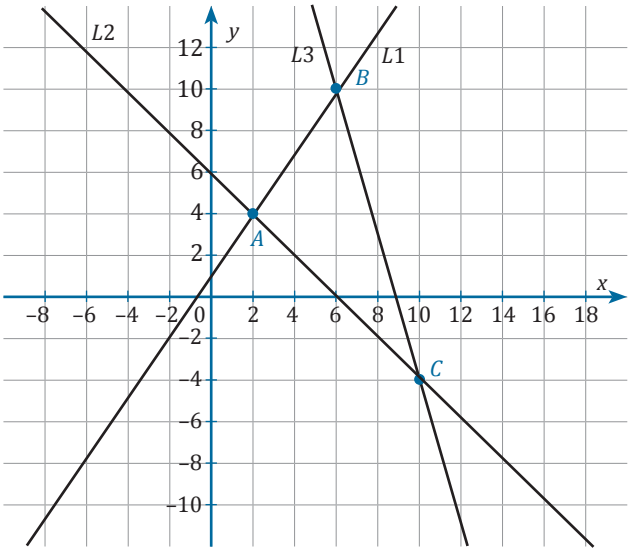
b. $(-3,-1)$; $(-1,3)$ y $(1,2)$

c. $(2,2)$; $(-1,3)$ y $\left(\frac{3}{2},\frac{9}{2}\right)$

d. $(2,3);(-2,-5)$ y $(8,-2)$

e. $(2,-2);(1,3)$ y $\left(\frac{7}{2},\frac{7}{2}\right)$

18 En el control de matemática de Eduardo aparecía el siguiente gráfico:



Eduardo debía contestar las siguientes preguntas. Como no había estudiado mucho, no supo hacerlo... sabemos que tú sí puedes hacerlo bien:

a. ¿Cuál es la ecuación de la recta $L1$?

b. ¿Cuál es la ecuación de la recta $L2$?

c. ¿Cuál es la ecuación de la recta $L3$?

d. Encuentra el punto medio de cada uno de los lados del triángulo.

e. Encuentra la ecuación de sus medianas.

f. Calcula el área del triángulo, aproximada a la centésima.

g. Calcula el perímetro del triángulo, aproximado a la centésima.

h. Clasifica el triángulo según sus lados y ángulos.

i. Encuentra las coordenadas del circuncentro.

19 Bettina está haciendo el informe del experimento que ha hecho en el laboratorio de física para su clase de física I de la universidad. Junto a su grupo están estudiando el movimiento rectilíneo, en el experimento han hecho avanzar un móvil dándole una velocidad inicial determinada. En el primer intento el móvil se desplazó desde el punto $(3,2)$ hasta el punto $(4,5)$ de la mesa cuadriculada que habían convertido en un plano cartesiano. En el segundo intento, lo hizo desde el punto $(4,5)$ al punto $(8,2)$ y, en el tercer intento, se desplazó desde este último punto hasta el punto $(16,7)$. Ayuda a Bettina a terminar su informe, determinando:

a. La ecuación de la recta que describe el primer intento.

b. La ecuación de la recta que recorre el móvil en el segundo intento.

c. La ecuación de la recta descrita por el móvil en el tercer intento.

d. ¿Qué se puede concluir a partir de estos datos, analizando las pendientes de las respectivas rectas?

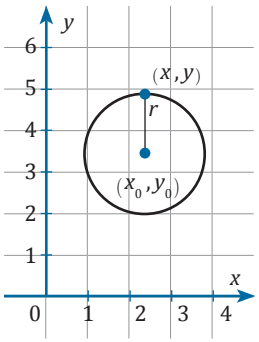
Mis apuntes

Taller de profundización

Mucho más que funciones

Ya te contamos que no solo las funciones pueden ser tratadas con álgebra, sino también otras curvas. En este taller estudiaremos la ecuación de la circunferencia.

Como ya sabes, una circunferencia está formada por aquellos puntos del plano, (x, y), que están a una misma distancia, r, de un punto fijo en el plano, (x_0, y_0) llamado centro.



Si escribimos la distancia entre el centro y el punto en la circunferencia, obtendremos que:

$r = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$

$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$ *(Elevando al cuadrado)*

Esta es la ecuación de cualquier circunferencia que tiene centro en el punto (x_0, y_0) y radio r.

Hagamos algunos ejemplos…

1 Encuentra la ecuación de la circunferencia que tiene radio 3 y pasa por el punto $(1,5)$. Reemplazando en la ecuación, obtendremos que:

$r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$

$3^2 = (x - 1)^2 + (y - 5)^2$

$9 = x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25$ *(ordenando)*

$x^2 + y^2 - 2x - 10y + 17 = 0$

Esta es la ecuación de dicha circunferencia. Nota que, en general, es de la forma $x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$, con C, D y E números reales.

2 Encuentra el centro y radio de la circunferencia de la ecuación $x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$

Para resolver este ejercicio, debemos darle la forma de la ecuación general $r^2 = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$. Es decir, se debe completar los cuadrados de binomio…

$x^2 + y^2 - 4x + 6y - 12 = 0$
$\underbrace{x^2 - 4x} \quad + \quad \underbrace{y^2 + 6y} = 12$

$(x-2)^2 - 4 + (y+3)^2 - 9 = 12$
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 25$
$(x-2)^2 + (y+3)^2 = 5^2$

Comparando esta con la ecuación general se tiene que, el radio de la circunferencia es 5 y el centro es el punto $(2, -3)$

3 Una circunferencia necesita tres puntos para quedar definida (al igual que una recta necesita solo dos). Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $(2,5)$,$(-1,-2)$ y $(4,-3)$.

Tomemos la ecuación general de una circunferencia, $x^2 + y^2 + Cx + Dy + E = 0$. Si los puntos dados pertenecen a esta, entonces satisfacen su ecuación. Por lo tanto, basta con reemplazar las coordenadas de cada punto en la ecuación. Tendremos así, un sistema de ecuaciones lineales de 3×3…

$$\left.\begin{array}{l} 2^2 + 5^2 + C \cdot 2 + D \cdot 5 + E = 0 \\ (-1)^2 + (-2)^2 + C \cdot -1 + D \cdot -2 + E = 0 \\ 4^2 + (-3)^2 + C \cdot 4 + D \cdot -3 + E = 0 \end{array}\right| \text{ (ordenando)}$$

$$\left.\begin{array}{r} 2C + 5D + E = -29 \\ -C - 2D + E = -5 \\ 4C - 3D + E = -25 \end{array}\right|$$

Restando la 1ª y la 2ª ecuación, y luego la 2ª y la 3ª, podemos formar un sistema de 2×2...

$$\left.\begin{array}{r} 3C + 7D = -24 \\ -5C + D = 20 \end{array}\right| / \cdot -7$$

$$\left.\begin{array}{r} 3C + 7D = -24 \\ 35C - 7D = -140 \end{array}\right| \text{ (sumando)}$$
$$38C = -164$$
$$C = -\frac{82}{19}$$

Remplazando en la 1ª ecuación, se tiene que:

$$3 \cdot -\frac{82}{19} + 7D = -24$$
$$-\frac{246}{19} + 7D = -24$$
$$7D = -\frac{210}{19}$$
$$D = -\frac{30}{19}$$

Remplazando en la 1ª ecuación del sistema original, se tiene que:

$$2 \cdot -\frac{82}{19} + 5 \cdot -\frac{30}{19} + E = -29$$
$$-\frac{314}{19} + E = -29$$
$$E = -\frac{237}{19}$$

Por lo tanto, se puede reescribir la ecuación de la circunferencia. Esta será:

$$x^2 + y^2 - \frac{82}{19}x - \frac{30}{19}y - \frac{237}{19} = 0$$

Al unir rectas y circunferencias, se pueden encontrar puntos de intersección, tangentes, secantes, etc. Así como también se pueden probar muchos de los teoremas de circunferencias, tangentes y cuerdas que ya has estudiado.

Trabaja

1 Encuentra las ecuaciones de las circunferencias, dados su centro y radio:

a. Centro $(-1,2)$ y radio 3.

b. Centro $(7,5)$ y radio $\sqrt{7}$.

c. Centro $(-2,-3)$ y radio $\frac{4}{5}$.

d. Centro $\left(\frac{1}{5},\frac{2}{3}\right)$ y radio 2.

2 Determina el centro y radio de las siguientes circunferencias:

a. $x^2 + y^2 - 10x + 12y = 0$

b. $x^2 + y^2 + 9x - 2y = 0$

c. $x^2 + y^2 - 2x - 6y - 31 = 0$

d. $x^2 + y^2 + \frac{3}{2}x + \frac{2}{5}y - 1 = 0$

3 Encuentra la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos:

a. $(0,0), (2,3)$ y $(-1,5)$

b. $(-2,-3), (2,1)$ y $(-1,4)$

c. $(3,3), (0,3)$ y $(-5,0)$

d. $(1,1), (-4,3)$ y $(-1,-2)$

Mis apuntes

Evaluación Unidad 4



Síntesis conceptual

Para cada uno de los siguientes tópicos determina las condiciones necesarias para:

1 Determinar la ecuación de una recta.

2 Paralelismo de dos rectas.

3 Perpendicularidad de dos rectas.

4 Coincidencia de dos rectas.

Ejercicios de resumen de la unidad

I. Completa las siguientes oraciones, según corresponda:

1 La pendiente de una recta representa _____

2 El coeficiente de posición de una recta representa _____

3 Las pendientes de dos rectas que son paralelas son _____

4 Las pendientes de dos rectas que son perpendiculares, cumplen que _____

5 Si un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas tiene solución única, las rectas representadas serán _____

6 Si un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es indeterminado, las rectas representadas serán _____

7 Si un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas es incompatible, las rectas representadas serán _____

8 Si una recta es paralela al eje x, entonces el valor de su pendiente será _____

9 Si una recta es paralela al eje y, entonces su ecuación es de la forma _____

10 La recta que bisecta al I y III cuadrante tiene ecuación _____

II. Resuelve los siguientes ejercicios. No olvides verificar tus respuestas en el solucionario.

1 Dados los siguientes pares de puntos, determina la ecuación de la recta que pasa por ellos:

a. $(2,3)$ y $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}\right)$

b. $\left(8, -\frac{1}{2}\right)$ y $(0,2)$

c. $(\sqrt{3},\sqrt{5})$ y $(2\sqrt{3}, -5\sqrt{5})$

2 Encuentra la ecuación de la recta que cumple las siguientes condiciones:

a. Recta paralela a $5x - 3y = 1$, y que pasa por el punto $(2, -1)$.

b. Recta perpendicular a $\frac{1}{2}x - 3y + 2 = 0$, y que pasa por el origen.

c. Recta paralela al eje x y que pasa por la intersección de las rectas $3x + y - 10 = 0$, y $8x - \frac{1}{2}y = 0$.

d. Recta perpendicular al eje y, y que pasa por el punto medio del segmento de extremos $(9, -3)$ y $(-12, -10)$.

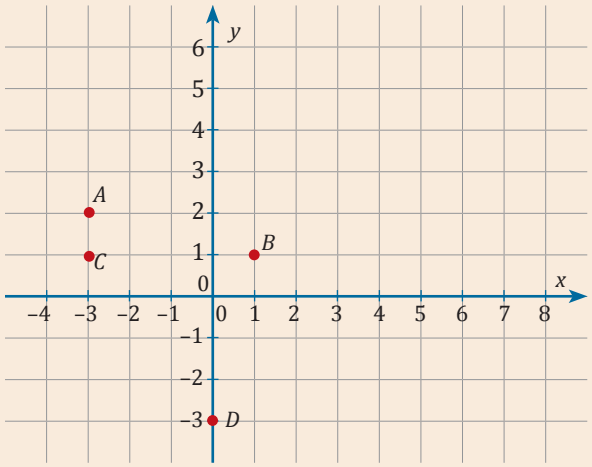
3 Determina si los siguientes pares de rectas son paralelos, perpendiculares o se cortan formando un ángulo distinto a uno recto:

a. $\frac{1}{3}x+\frac{1}{2}y=0$ y $3x-2y=1$

b. $4x-6y=8$ y $-3x+4=2y$

c. $4x+5y-1=0$ y $\frac{x}{5}+\frac{y}{4}-3=0$

4 Dado el siguiente plano cartesiano y los puntos en él, responde las siguientes preguntas:



a. ¿Cuál es la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{AB}$?

b. ¿Cuál es la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{BC}$?

c. ¿Cuál es la ecuación de la recta $\overleftrightarrow{AD}$?

d. ¿Cuál es el punto de intersección de las rectas $\overleftrightarrow{BD}$ y $\overleftrightarrow{AC}$?

e. ¿Son perpendiculares las rectas $\overleftrightarrow{AD}$ y $\overleftrightarrow{BC}$?

f. ¿Cuál es el área del cuadrilátero $ABCD$?

g. ¿Cuál es el área del triángulo ACD?

h. ¿Cuál es la ecuación de la recta perpendicular a $\overleftrightarrow{BC}$ que pasa por A?

5 Dados los siguientes sistemas de ecuaciones, determina si las rectas representadas por cada uno de ellos son paralelas, secantes o coincidentes:

a.
$$\begin{aligned}10x-20y&=30\\3x-9&=6y\end{aligned}$$

b.
$$\begin{aligned}4(x-y)-9(x-3y)&=12\\-6(x-1)+4(y+3)&=0\end{aligned}$$

c.
$$\begin{aligned}\frac{5x+3}{2}-\frac{8y+9}{5}&=\frac{1}{3}\\\frac{4x-1}{4}+\frac{y-5}{2}&=\frac{1}{7}\end{aligned}$$

6 Una circunferencia tiene centro en el punto $(3,1)$ y pasa por el punto $(1,3)$. Determina:

a. La ecuación de la recta que contiene a su radio.

b. La ecuación de la recta tangente a la circunferencia por el punto $(1,3)$.

c. La longitud de la circunferencia.

d. El área de la circunferencia.

7 Una recta pasa por los puntos $(-3,-5)$ y $(-9,-10)$. Determina:

a. Otra recta paralela a la dada, que corta al eje de las abscisas en -9.

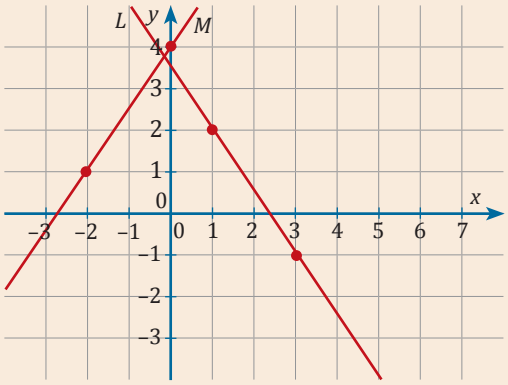
b. Otra recta perpendicular a la dada, que corte al eje de las ordenadas en 11.

c. Una recta coincidente con la dada.

d. Una recta que corte a la dada en un punto cualquiera de ella.

e. El punto de intersección de la recta dada con otra de ecuación $3x-5y+1=0$.

8 Dado el siguiente gráfico, determina:



a. La ecuación de L.

b. La ecuación de M.

c. El punto de intersección de L y M.

d. El punto de intersección de L con el eje x.

e. El punto de intersección de M con el eje y.

f. El área del triángulo formado por las rectas y el eje x.

g. El área del triángulo formado por las rectas y el eje y.



9 Dados los puntos A: $(3,9)$; B: $(6,7)$ y C: $(1,-2)$, determine un punto D, de modo que las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{DC}$ sean:

a. Perpendiculares.

b. Paralelas.

c. Secantes formando un ángulo distinto a uno recto.

III. Resuelve los siguientes problemas:

1 Lorenzo estaba haciendo su tarea de matemática. El había seguido los pasos del enunciado del problema que decía: "Toma el punto $(4,5)$ y refléjalo con respecto al origen. Luego, con la medida del trazo que une ambos puntos, construye un cuadrado".

En base a esto:

a. Encuentra las ecuaciones de las rectas que contienen a los lados del cuadrado.

b. Muestra, usando las pendientes de las rectas, que hay dos pares paralelas y dos perpendiculares.

c. Calcula el área del cuadrado.

d. Calcula el perímetro del cuadrado, aproximado a la centésima.

2 Martina ha hecho un trabajo de investigación sobre el número de artículos médicos que una empresa produce, en relación al costo de estos. Ella ha conseguido los siguientes datos:

Nº de artículos	Costo
100	3 030
200	4 040

Ella debe determinar los siguientes datos:

a. Dado que el número de artículos y el costo tiene una relación lineal, encuentra la ecuación de la recta que representa gráficamente la situación planteada.

b. El costo de 20 500 artículos.

c. El número de artículos producidos cuando los costos ascienden a $ 168 350.

3 Oriana tenía prueba de matemática y se acordó que el hijo de su vecina estudiaba ingeniería, así que le pidió ayuda. Juntos lograron resolver las siguientes preguntas:

a. Si A: $(2,3)$, B: $(-3,5)$ y C: $(8,-2)$ son vértices de un triángulo, ¿cuáles son las coordenadas de su ortocentro?

b. ¿Cuáles son las coordenadas del circuncentro del triángulo anterior?

c. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de gravedad del triángulo anterior?

d. ¿Cuál es el área del triángulo anterior?

e. ¿Cuál es el perímetro del triángulo anterior? Aproxima su valor a la centésima.

f. Determina las ecuaciones de las rectas que contienen a las medianas del triángulo anterior.

4 El siguiente es el desarrollo que Genaro entregó en su prueba. Su profesora marcó en él, un error en cada ejercicio, ¿puedes decir cuál fue este error, arreglarlo y dar la respuesta correcta?

a. Encontrar la ecuación de la recta que pasa por $(2,-3)$ y que es paralela a la recta de la ecuación $2x-5y+10=0$

1º: $2x-5y+10=0 \quad / +5y$

$2x+10=5y \quad /:5$

$\frac{2}{5}x+2=y$

2º: $y-3=\frac{2}{5}(x-2) \quad \cdot 5$

$5y-15=2x-4 \quad / -5y+15$

$0=2x-5y+11$

b. Encontrar el punto de intersección de las rectas $-2x+y=9$ y $6x+3y=10$

$$\begin{array}{r|l} -2x+y=9 & / \cdot 3 \\ \hline 6x+3y=10 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 6x+3y=9 & \\ \hline 6x+3y=10 & \end{array} \quad \textit{(sumando)}$$

$12x=19$

$x=\frac{19}{12}$

Remplazando en la 1ª ecuación:

$-\frac{19}{6}+y=9$

$y=\frac{73}{6}$

Por lo tanto, el punto de intersección es: $\left(\frac{19}{12},\frac{73}{6}\right)$

5 En el edificio donde vivía Marcela, habían ideado un método para nombrar los estacionamientos. Cada uno de ellos se nombraba por dos números, el primero indicaba las filas y el segundo las columnas que estaban trazadas en el suelo desde la entrada. Así, la posición que ocupaba el lugar 21 se encontraba exactamente en la 2ª fila y en la 1° columna. Ella movió su auto desde la posición 33 a la 52 y luego a la 26. Con estos datos, determina:

a. La ecuación de la recta que une la primera posición con la segunda.

b. La ecuación de la recta que une la segunda posición con la tercera.

c. La ecuación de la recta que une la primera posición con la tercera.

d. Si cada una de las unidades de separación entre filas y columnas es de 2 metros, ¿cuál es la longitud cubierta por Marcela en su auto, al hacer estos movimientos?

e. ¿Cuál es el área del triángulo interior a la trayectoria descrita por Marcela en su auto?

IV. Marca la alternativa correcta:

1 La ecuación de la recta que pasa por los puntos $(-5,-2)$ y $(2,0)$ es:

a. $2x-7y-4=0$
b. $7x-2y-4=0$
c. $2x-7y-14=0$
d. $7x+2y-14=0$
e. $2x+7y-4=0$

2 ¿Cuál (es) de los siguientes pares de rectas es (son) paralelas?

I. $x+y=2$ y $3x-y=0$
II. $3x-y=-2$ y $x+3y=3$
III. $5x+2y=9$ y $2x+5y=9$

a. Solo I.
b. Solo II.
c. Solo I y III.
d. Solo II y III.
e. I, II y III.

3 El siguiente sistema de ecuaciones lineales representa un par de rectas:

$$\begin{array}{|l} x+3y=20 \\ 5x-y=4 \end{array}$$

a. Paralelas.
b. Perpendiculares.
c. Coincidentes.
d. Que se cortan en un ángulo que no es recto.
e. No se puede determinar.

4 La pendiente de la recta $3x-5y+1=0$ es:

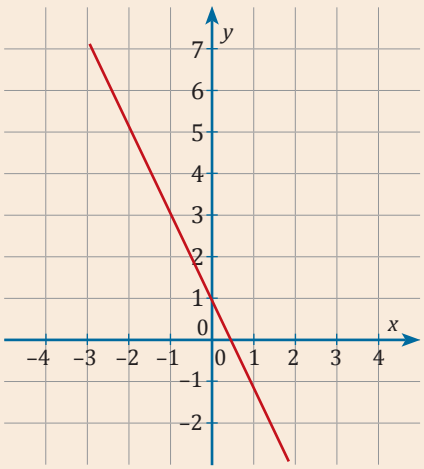
a. 3
b. $\frac{3}{5}$
c. $\frac{1}{5}$
d. $-\frac{3}{5}$
e. -3

5 La recta $2x+7y-1=0$, corta al eje de las ordenadas en el punto:

a. $\left(0,-\frac{2}{7}\right)$
b. $(0,-1)$
c. $(0,1)$
d. $\left(0,\frac{1}{7}\right)$
e. $(0,7)$

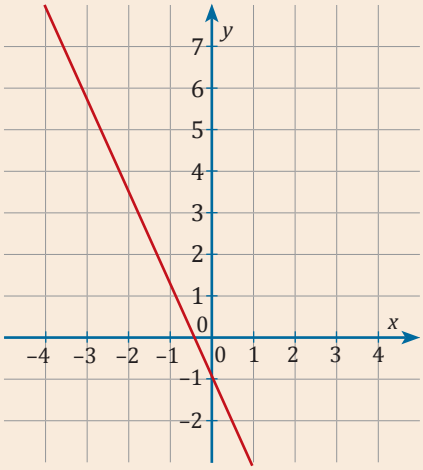
6 ¿Cuál de los siguientes gráficos representa la recta de ecuación $2x-y-1=0$?

a.

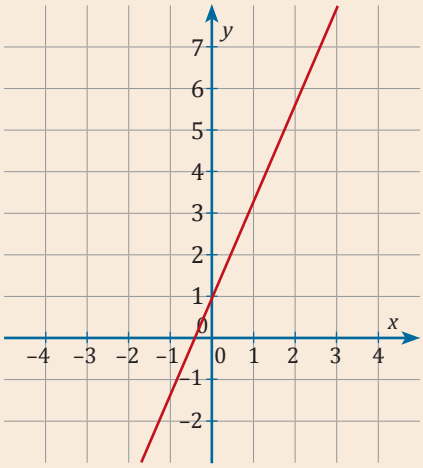




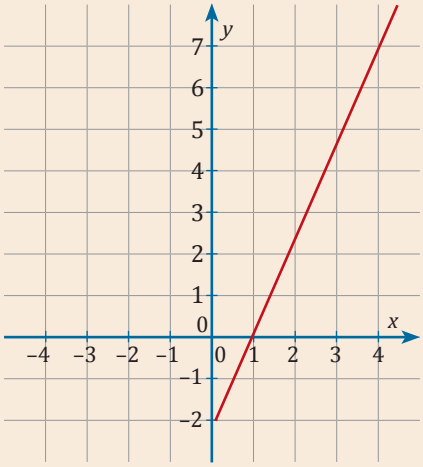
b.



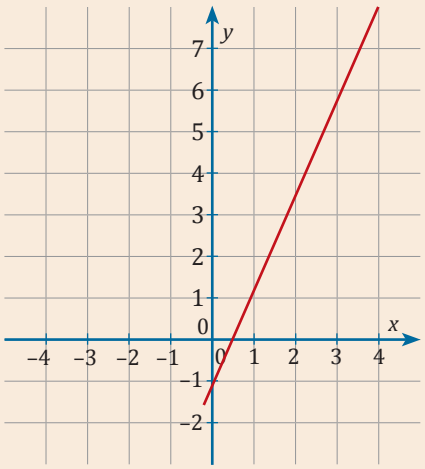
c.



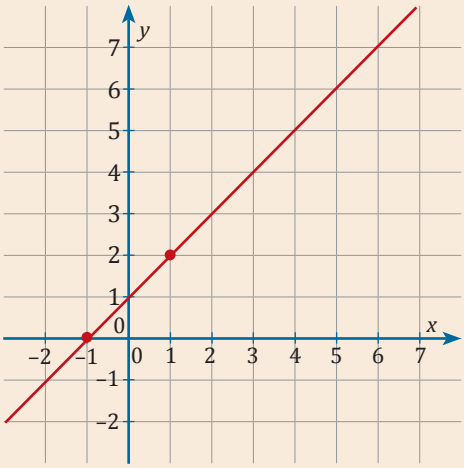
d.



e.



7 ¿Cuál es la ecuación de la recta representada en el siguiente gráfico?



a. $y = -x + 1$
b. $y = -x - 1$
c. $y = x + 1$
d. $y = -2x + 1$
e. $y = 2x + 1$

8 ¿Cuál de las siguientes rectas es perpendicular a la recta que pasa por $(-3,5)$ y $(-1,2)$?

a. $2x - 3y + 7 = 0$
b. $3x - 2y - 6 = 0$
c. $x + y = 9$
d. $-2x - 3y = 1$
e. $2x + 3y = 0$

9 Para que dos rectas sean coincidentes en el plano cartesiano, el sistema de ecuaciones lineales asociado a ellas debe:

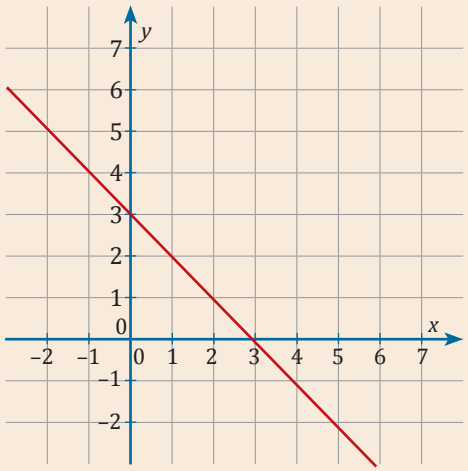
a. Tener solución única.
b. No tener solución.
c. Ser indeterminado.
d. Ser incompatible.
e. Tener solución única igual a $x = 0$ e $y = 0$

10 ¿Cuál (es) de los siguientes puntos pertenecen a la recta de ecuación $13x - 5y + 1 = 0$?

I. $\left(0,\frac{1}{5}\right)$ **II.** $(-2,-5)$ **III.** $\left(\frac{19}{13},4\right)$

a. Solo I.
b. Solo II.
c. Solo I y II.
d. Solo II y III.
e. I, II y III.

11 De la siguiente recta se puede afirmar que:



a. Su pendiente es positiva.
b. Su coeficiente de posición es negativo.
c. Su ecuación es de la forma $y = c$, con $c \in \mathbb{R}$.
d. Su pendiente es negativa.
e. No tiene coeficiente de posición.

12 Los precios de las casas de un condominio se comportan, gráficamente, según una recta. Así, si la casa tiene $1\,000\ m^2$ de terreno, costará $\$\ 32\,000\,000$ y si tiene $1\,350\ m^2$, costará $\$\ 35\,000\,000$. ¿Cuál es la ecuación de la recta que representa esta situación, si el precio es p y m los metros cuadrados de terreno?

a. $60\,000\ p - 7\ m + 164\,000\,000 = 0$
b. $60\,000\ m - 7\ p + 164\,000\,000 = 0$
c. $-60\,000\ p + 7\ m + 164\,000\,000 = 0$
d. $6\ m - 70\,000\ p + 164\,000\,000 = 0$
e. $6\,000\ m - 7\,000\ p + 164\,000\,000 = 0$

13 Una recta paralela al segmento de extremos $(3,5)$ y $(-1,-1)$ y que pasa por el punto $(2,2)$ es:

a. $3x - 2y - 10 = 0$
b. $2x - 3y - 2 = 0$
c. $3x - 2y - 2 = 0$
d. $2x + 3y + 2 = 0$
e. $3x + 2y - 2 = 0$

14 El valor que debe tener a, para que el punto $\left(a,\frac{a}{3}\right)$ pertenezca a la recta de ecuación $5x - 13y - 2 = 0$ es:

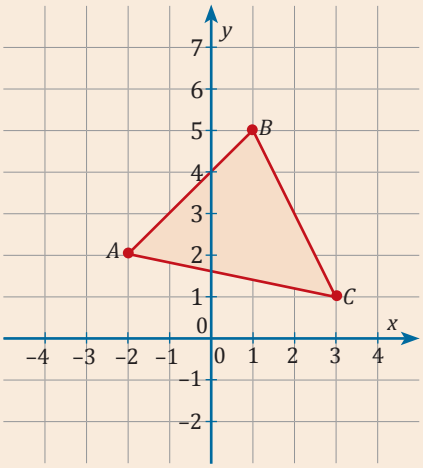
a. $\frac{7}{3}$
b. $\frac{3}{7}$
c. 3
d. $-\frac{3}{7}$
e. -3

15 El punto de intersección de las rectas $3x + 2y - 4 = 0$ y $5x - 3y - 13 = 0$ es:

a. $(1,2)$
b. $(2,-1)$
c. $(-1,-2)$
d. $(2,3)$
e. $(-2,-3)$



16 La ecuación del lado $\overline{AB}$ del triángulo es:



a. $x - y + 4 = 0$
b. $x + y + 4 = 0$
c. $-x - y + 4 = 0$
d. $2x - y + 4 = 0$
e. $-2x - y + 4 = 0$

17 La ecuación del lado $\overline{BC}$ del triángulo anterior es:

a. $2x + y + 7 = 0$
b. $2x - 3y - 7 = 0$
c. $x + 2y - 6 = 0$
d. $2x + y - 7 = 0$
e. $2x + 2y - 6 = 0$

18 La ecuación del lado $\overline{AC}$ del triángulo del ejercicio 16 es:

a. $x - y - 8 = 0$
b. $5x + y - 8 = 0$
c. $x - 5y + 5 = 0$
d. $5x - 5y - 1 = 0$
e. $x + 5y - 8 = 0$

19 El ortocentro de este triángulo es:

a. $(2,3)$
b. $\left(\frac{2}{3}, \frac{10}{3}\right)$
c. $\left(\frac{10}{3}, \frac{2}{3}\right)$
d. $\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{10}\right)$
e. $\left(\frac{3}{10}, \frac{3}{2}\right)$

20 El centro de gravedad del mismo triángulo es:

a. $\left(\frac{2}{3}, \frac{8}{3}\right)$
b. $(2,8)$
c. $\left(\frac{8}{3}, \frac{2}{3}\right)$
d. $(-8, -3)$
e. $\left(-\frac{8}{3}, -\frac{2}{3}\right)$

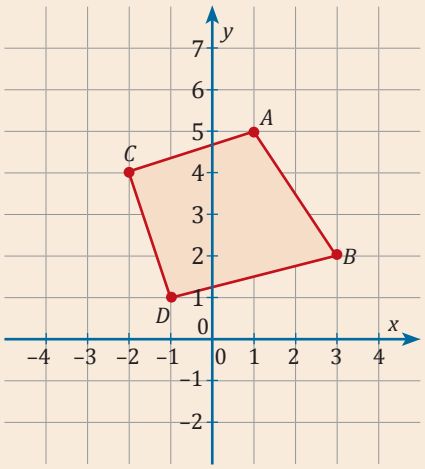
21 Nuevamente, con respecto a este triángulo, la ecuación de la mediana paralela al lado $\overline{AC}$, es:

a. $x - 5y - 7 = 0$
b. $x + 5y - 17 = 0$
c. $5x + y + 17 = 0$
d. $5x - y + 5 = 0$
e. $x + 5y + 12 = 0$

22 Finalmente, el área del triángulo es:

a. $5\ \text{u}^2$
b. $7\ \text{u}^2$
c. $9\ \text{u}^2$
d. $11\ \text{u}^2$
e. $14\ \text{u}^2$

23 La ecuación de la diagonal $\overline{AD}$ es:



a. $x - 2y + 3 = 0$
b. $2x - 2y + 6 = 0$
c. $x - 3y + 9 = 0$
d. $2x - y + 3 = 0$
e. $x - y - 3 = 0$

24 La ecuación de la diagonal $\overline{BC}$ del cuadrilátero anterior es:

a. $2x + 5y - 16 = 0$
b. $2x - 5y - 6 = 0$
c. $2x + 5y - 4 = 0$
d. $x - 5y - 9 = 0$
e. $2x - y - 1 = 0$

25 El punto de intersección de las diagonales del cuadrilátero del ejercicio 23 es:

a. $\left(\frac{1}{12}, \frac{19}{6}\right)$
b. $\left(-\frac{1}{6}, \frac{19}{3}\right)$
c. $\left(\frac{19}{6}, \frac{1}{12}\right)$
d. $\left(\frac{1}{6}, \frac{19}{12}\right)$
e. $\left(\frac{1}{2}, \frac{15}{6}\right)$

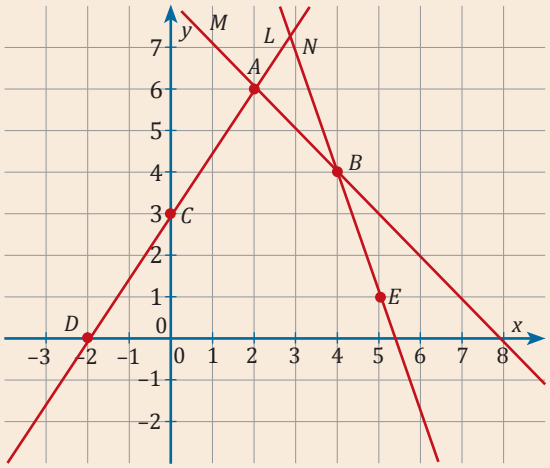
26 Por último, el perímetro, aproximado a la centésima, del cuadrilátero anterior es:

a. 10,45 u
b. 12,00 u
c. 12,05 u
d. 14,00 u
e. 14,05 u

27 Para que la recta de ecuación $2px - 3y + 12 = 0$, sea coincidente con la recta de ecuación $3x - 5qy + 12 = 0$, se debe cumplir la relación:

a. $p = 3q$
b. $q = \frac{1}{2}p$
c. $pq = 1$
d. $pq = \frac{9}{10}$
e. Para ningún valor de p y q, las rectas serán coincidentes.

28 La ecuación de la recta L es:



a. $x + y - 8 = 0$
b. $3x - 2y + 6 = 0$
c. $3x + y - 16 = 0$
d. $2x - 3y - 6 = 0$
e. $x - y + 16 = 0$

29 La recta paralela a N del esquema anterior y que pasa por el origen, tiene ecuación:

a. $3x - y = 0$
b. $x - 3y = 0$
c. $3x + y = 0$
d. $x + y = 0$
e. $3x + 3y = 3$

30 Asimismo, la ecuación de la recta perpendicular a M y que pasa por el punto E, es:

a. $x - y - 4 = 0$
b. $x + y - 4 = 0$
c. $x - 2y + 4 = 0$
d. $2x - y + 3 = 0$
e. $3x + 2y + 6 = 0$

31 El área, aproximada a la centésima, del cuadrilátero formado por las rectas L, N, M del ejercicio 28 y el eje x, es:

a. 20,35 u^2
b. 22,67 u^2
c. 23,35 u^2
d. 24,28 u^2
e. 24,67 u^2

32 Finalmente, la altura trazada desde el vértice B en el triángulo ABE tiene ecuación:

a. $5x - 3y + 8 = 0$
b. $3x - 5y - 8 = 0$
c. $x - 5y + 2 = 0$
d. $3x - 5y + 8 = 0$
e. $6x - y - 16 = 0$

33 Pablo ha marcado tres puntos en su plano cartesiano: $(5,7)$, $(-3,1)$ y $(5,-2)$. El circuncentro del triángulo es:

a. $(2,5)$
b. $\left(\frac{17}{8}, \frac{5}{2}\right)$
c. $\left(\frac{5}{8}, \frac{17}{2}\right)$
d. $\left(\frac{5}{4}, -\frac{1}{16}\right)$
e. $\left(\frac{7}{8}, \frac{3}{2}\right)$

34 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es verdadera con respecto al triángulo de Pablo, en el ejercicio anterior?

a. El triángulo es rectángulo.
b. El triángulo tiene un lado paralelo al eje x.
c. El triángulo es isósceles.
d. El triángulo tiene un lado paralelo al eje y.
e. El triángulo es obtusángulo.

35 Los puntos $(-3,1)$, $(-1,3)$, $(2,3)$ y $(4,1)$ son los vértices de un trapecio. El punto de intersección de las proyecciones de los lados no paralelos es:

a. $(1,4)$
b. $(1,5)$
c. $\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}\right)$
d. $\left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right)$
e. $\left(\frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$

36 ¿Cuál de los siguientes sistemas representa un par de rectas paralelas?

a. $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ x - y = 5 \end{cases}$
b. $\begin{cases} x + y = 2 \\ 2x + 2x = 6 \end{cases}$
c. $\begin{cases} 5x - 10y = 5 \\ 3x - y = 8 \end{cases}$
d. $\begin{cases} 12x - 6y = 18 \\ 20x = 10y + 30 \end{cases}$
e. $\begin{cases} \frac{1}{2}x + 0{,}25y = 2 \\ x - \frac{1}{3}y + 1 = 0 \end{cases}$

37 Para qué conjunto de valores de a, los puntos $(3,4)$, $(5,6)$ y $\left(a, \frac{1}{a}\right)$ son colineales:

a. $\{1,5\}$
b. $\{-1,1\}$
c. $\left\{\frac{1}{5}, 5\right\}$
d. $\left\{\frac{1-\sqrt{5}}{2}, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\right\}$
e. No existen valores reales que cumplan con la condición pedida.

38 Sobre una recta de ecuación $x = a$, con $a \in \mathbb{R}$, se puede afirmar que:

a. Es paralela al eje x.
b. Tiene pendiente igual a 1.
c. Tiene pendiente igual a su coeficiente de posición.
d. Es paralela al eje y.
e. Nada se puede afirmar sin saber el valor de a.

39 Se puede determinar la ecuación de una recta si:

(1) La recta es paralela al eje x.
(2) Pasa por el punto $(3,5)$.

a. (1) por sí sola.
b. (2) por sí sola.
c. (1) y (2), ambas juntas.
d. (1) o (2), cada una por sí solas.
e. Se requiere información adicional.

40 Se puede determinar la pendiente de la recta L si:

(1) la ecuación de L es $4x - 5y + 3 = 0$
(2) L es perpendicular a otra recta que pasa por los puntos $(4,-4)$ y $(0,1)$.

a. (1) por sí sola.
b. (2) por sí sola.
c. (1) y (2), ambas juntas.
d. (1) o (2), cada una por sí solas.
e. Se requiere información adicional.



Criterios para autoevaluar tu aprendizaje

Marca con una ✘, según la evaluación de tu trabajo en esta unidad. Recuerda que hacer esta evaluación responsablemente te entregará información sobre tu proceso de aprendizaje.

Indicadores	+++	++−	+−−
Pude completar el crucigrama de la síntesis conceptual, sin necesidad de mirar mi libro o cuaderno.			
Respondí correctamente el ítem de la síntesis conceptual.			
Resolví correctamente los ejercicios propuestos.			
Colaboré con mis compañeros en el trabajo grupal, si lo hubo.			
Soy capaz de explicar los contenidos y procedimientos para la resolución de ejercicios de esta unidad.			
Entiendo el tipo de problemas que se pueden resolver con los contenidos de esta unidad.			
Me siento seguro de lo aprendido y creo que podría resolver otros ejercicios que me plantearan.			

Calcula el porcentaje de logro que obtuviste en la sección de alternativas.

Porcentaje de logro

$$PL = \frac{\text{Nº de respuestas correctas}}{40} \cdot 100$$

Porcentaje de logro	Nota obtenida	Nivel de mi aprendizaje	Cómo mejorar
29 % a 0 %	1,0 a 2,5	Alerta	Los contenidos no han sido comprendidos. Debes repasarlos nuevamente y rehacer los ejercicios. Fíjate muy bien en los ejercicios resueltos. Debes pedir ayuda. ¡Ánimo, con trabajo y estudio se puede!
49 % a 30 %	2,6 a 3,5	Muy bajo	La mayoría de los contenidos no han sido comprendidos. Debes volver a repasarlos y rehacer los ejercicios incorrectos. Pídeles ayuda a tus compañeros o compañeras. ¡Vuelve a estudiar; seguro que lo lograrás!
59 % a 50 %	3,6 a 3,9	Bajo	Una gran parte de los contenidos no han sido comprendidos en su totalidad. Rehaz aquellos ejercicios incorrectos, pero antes vuelve a estudiar los contenidos. ¡Trata nuevamente!
69 % a 60 %	4,0 a 4,7	Medio bajo	Adquiriste una parte de los contenidos, pero aún faltan. Debes corregir aquellos ejercicios incorrectos y revisar los contenidos de los temas en que fallaste. ¡Bien, has avanzado, aunque aún queda camino por andar!
79 % a 70 %	4,8 a 5,4	Medio	Has logrado entender una buena parte de los contenidos; sin embargo, aún faltan otros y afianzar los primeros. Corrige las respuestas erróneas; puedes pedir ayuda si lo deseas. Revisa los contenidos. ¡Puedes hacerlo mucho mejor!
89 % a 80 %	5,5 a 6,2	Medio alto	Has logrado adquirir gran parte de los contenidos. Revisa los ejercicios en los que fallaste y repasa aquellos contenidos. ¡Lo has hecho bien!
100 % a 90 %	6,3 a 7,0	Alto	Has logrado aprender todos o casi todos los contenidos tratados. ¡Muy bien has logrado los objetivos propuestos! Sigue así.

Evaluación de síntesis 3 (unidades 1 a 4)

I. Coloca verdadero (V) o falso (F), según corresponda en cada una de las siguientes afirmaciones:

1 ____ La suma de dos complejos conjugados es otro complejo de la forma $a + bi$

2 ____ El vector opuesto de un complejo esta girado en $180°$, respecto al original.

3 ____ El número $(1 + x\ i)^2$ es imaginario puro, si $x = 1$.

4 ____ La ecuación $2x^2 - 3x + 5 = 0$ no tiene solución real.

5 ____ La concavidad de la parábola $f(x) = (x - 1)(2 - x)$ es positiva.

6 ____ El vértice de la parábola $f(x) = x^2 - 2x + 4$ es V: $(1,3)$.

7 ____ El punto medio entre los puntos A: $(-5,3)$ y B: $(-7,-1)$ es M: $(-12,2)$

8 ____ Una razón de homotecia que sea igual a $-\frac{2}{3}$ significa que la figura se invierte respecto a la original y que su tamaño es $\frac{2}{3}$.

9 ____ Una ecuación perpendicular a $y = -\frac{3}{2}x + 2$ puede ser $3y - 2x + 2 = 0$.

10 ____ Para que dos rectas se corten en un punto sus pendientes no deben ser iguales.

II. Resuelve los siguientes ejercicios:

1 Dado los complejos $z_1 = -5 + 2\ i$ y $z_2 = -3 - 7\ i$. Determina:

a. $\overline{z_1}$

b. $\overline{z_1 - z_2}$

c. $\frac{\overline{z_1 \cdot z_2}}{z_1 + z_2}$

2 Calcula el valor de $\frac{i^{26} - i}{i - 1}$

3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $\frac{x+2}{7} = \frac{3}{x-2}$

b. $x - 2 + \frac{14}{x+7} = 0$

4 ¿Para qué valor (es) de p el punto $(-1,5)$ pertenece a la parábola $y = x^2 - px + 3$?

5 Dada la parábola $f(x) = x^2 - 6x + 4$. Determina:

a. Su concavidad.

b. Su vértice.

c. Su eje de simetría.

6 Dado el triángulo formado por los vértices A: $(-2,3)$; B: $(-1,-2)$ y C: $(3,2)$. Determina:

a. Las coordenadas del triángulo homotético de razón $-0,5$ y centro origen.

b. La distancia entre A y su punto homotético.

c. El perímetro del triángulo ABC.

7 Determina:

a. La ecuación general de la recta que pasa por los puntos A: $(-3,2)$ y B: $(-1,-3)$.

b. La recta paralela a $3x + 7y = -1$ y que pasa por el punto C: $(2,-3)$.

c. La ecuación de la recta que pasa por el punto $(3,6)$ y es perpendicular a la recta que pasa los puntos A: $(3,-2)$ y B: $(-1,4)$.

III. Resuelve los siguientes problemas:

1 Resuelve:

a. $(\overline{4 - 5\ i}) + \frac{8 - 3\ i}{2\ i^{345}}$

b. $(i - 2)^2 - \frac{|3 - 4\ i|}{(1 - i)^8}$

2 En una empresa donde trabajaba Masiel se ha realizado una auditoría. En ella se ha establecido que las causas del problema financiero que presenta, se debe al error en el modelamiento del funcionamiento de la empresa en relación a los costos y utilidades, teniendo en cuenta que sus costos han crecido por sobre los $\$\,200\,000$, debido a la demanda de sus productos. Según lo entregado a la empresa auditora, las utilidades se comportarían en función de los costos, según la función, $U(c) = -\frac{9}{25}c^2 + 36c$, donde U son las utilidades en millones de pesos y c, los costos en miles de pesos. A partir de esta información, responde:

a. ¿Cuál es la utilidad máxima y a qué costo se obtiene?

b. Si la empresa está teniendo costos por sobre los $\$\,100\,000$, ¿qué sucede con las utilidades?

c. ¿Cuál crees que fue el error aludido?

3 A partir de un objeto conocido y de forma simétrica (un libro, tu estuche, etc.) realiza una homotecia en tres dimensiones de razón $\frac{1}{3}$, cuidando de mantener las longitudes en todas sus direcciones.

4 Marcial trabaja en una editorial. Hoy está abocado a diseñar una página para el nuevo libro de cuentos infantiles que lanzarán a final de año. Con su programa graficador, Marcial ha realizado varias homotecias, como las que se muestran en las figuras. ¿Puedes tú determinar el centro y razón de homotecia de cada una de ellas?

a.





b.



5 Para que Rita pueda ir a la fiesta a la que fue invitada debía terminar sus tareas... ¡Justo al profesor se le ocurre hoy dar una tarea larguísima! –refunfuñaba, mientras trataba de terminarla. Ayúdala tú a terminarlos...

a. Dado el triángulo de vértices $(8{,}2)$, $(2, -5)$ y $(-1{,}3)$, determina las ecuaciones de sus transversales de gravedad.

b. Determina el centro de gravedad del triangulo anterior.

c. Determina el área y el perímetro del triángulo anterior, aproximados a la centésima.

IV. Marca la alternativa correcta:

1 El complejo que es resultado de $(\overline{4-5i}) - (2-i)(5-6i)$ es:

a. $12i$
b. $22i$
c. $-12-17i$
d. $-12+12i$
e. $4-17i$

2 El valor de a y b para que el producto de los complejos $(a+5i)$ y $(2-bi)$ resulte el número imaginario $12i$, deben ser, respectivamente:

a. $\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$ y $\pm\sqrt{5}$

b. $\pm\frac{5\sqrt{3}}{3}$ y $\pm\sqrt{3}$

c. $\pm\sqrt{5}$ y $\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

d. 3 y 4

e. No se pueden determinar los valores de a y b.

3 La ecuación $\frac{x-2}{x}-\frac{3x-1}{2}=\frac{1}{3}$ tiene por resultado al conjunto:

a. $\{7,3\}$

b. $\{7\}$

c. $\{-7,3\}$

d. $\left\{\frac{7+\sqrt{383}\,i}{18},\frac{7-\sqrt{383}\,i}{18}\right\}$

e. $\left\{3-\sqrt{27}\,i,3+\sqrt{27}\,i\right\}$

4 El valor de p en la ecuación $(8p-1)x^2+5px-10=0$ tenga una única solución, el valor de p debe ser:

a. -2

b. 5

c. $\frac{1}{3}$

d. $\frac{12}{23}$

e. $\frac{13}{64}$

5 El vértice de la parábola de ecuación $y=2x^2-5x+7$ es:

a. $(5,-2)$

b. $(7,2)$

c. $\left(\frac{1}{4},\frac{30}{7}\right)$

d. $\left(\frac{5}{4},\frac{31}{8}\right)$

e. $\left(-\frac{5}{4},-\frac{31}{8}\right)$

6 Si un triángulo tiene área $33\ \text{cm}^2$ y se lo somete a una homotecia de razón 3, entonces, el área del triángulo homotético será:

a. $297\ \text{cm}^2$

b. $99\ \text{cm}^2$

c. $66\ \text{cm}^2$

d. $11\ \text{cm}^2$

e. No se puede determinar.

7 Si a una figura se le aplica una homotecia de razón negativa y distinta de -1, entonces, su figura homotética:

a. Será del mismo tamaño y estará en el mismo sentido que la original.

b. Será de distinto tamaño y estará en el mismo sentido que la original.

c. Será más grande o más pequeña que la original y estará en el mismo sentido que la original.

d. Será más grande o más pequeña que la original y estará invertida con respecto a la original.

e. Será del mismo tamaño y estará invertida con respecto a la original.

8 La ecuación de la recta que pasa por el punto $(5,-1)$ y por el punto medio del trazo de extremos $(6,3)$ y $(-2,2)$ es:

a. $5x-9y-3=0$

b. $9x-5y-3=0$

c. $x-9y+6=0$

d. $3x-y+11=0$

e. $x-y+9=0$

9 Las rectas que forman el sistema de ecuaciones $\left.\begin{array}{l}9y-15x=1\\-10x+7=-6y\end{array}\right|$ son:

a. Secantes.

b. Paralelas.

c. Coincidentes.

d. Perpendiculares.

e. No es posible determinarlo.

10 El ortocentro del triángulo de vértices $(-2,2)$, $(0,6)$ y $(2,0)$ es:

a. $(0,2)$

b. $(0,4)$

c. $(-2,2)$

d. $\left(\frac{1}{2},2\right)$

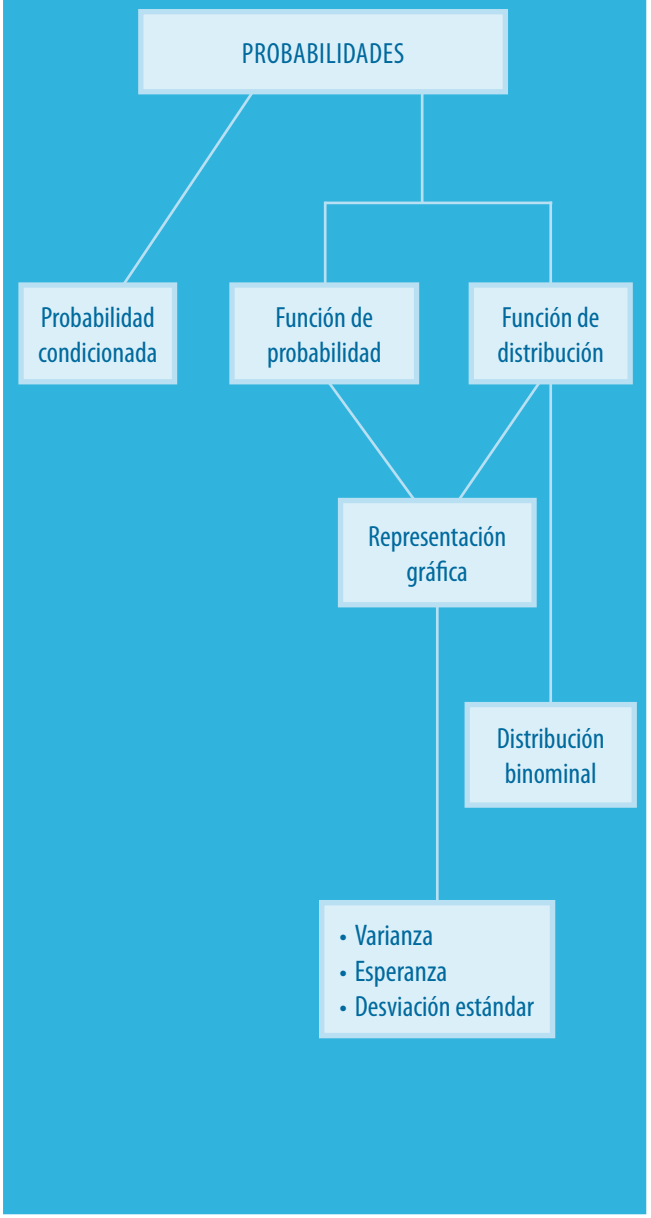
e. $\left(\frac{1}{2},4\right)$

UNIDAD 5

Probabilidad y estadística... una mirada con mayor profundidad




12 29 25 10 27
1 13 36 24 3 15


PROBABILIDADES
Probabilidad condicionada
Función de probabilidad
Función de distribución
Representación gráfica
Distribución binominal
• Varianza
• Esperanza
• Desviación estándar











EN ESTA UNIDAD APRENDERÁS A:

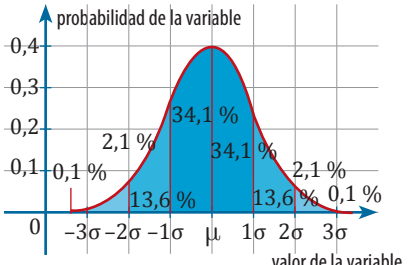
1. Utilizar la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta y establecer la relación existente con la función de distribución acumulada.
2. Explorar la relación entre la distribución teórica de una variable aleatoria y la correspondiente gráfica de frecuencias, en experimentos aleatorios discretos, haciendo uso de simulaciones digitales.
3. Aplicar e interpretar los conceptos de valor esperado, varianza y desviación típica o estándar de una variable aleatoria discreta.
4. Determinar la distribución de una variable aleatoria discreta en contextos diversos y de la media, varianza y desviación típica a partir de esas distribuciones.
5. Usar el modelo binomial para analizar situaciones o experimentos, cuyos resultados son dicotómicos: cara o sello, éxito o fracaso o bien cero o uno.
6. Resolver problemas, en diversos contextos, que implican el cálculo de probabilidades condicionales y sus propiedades.



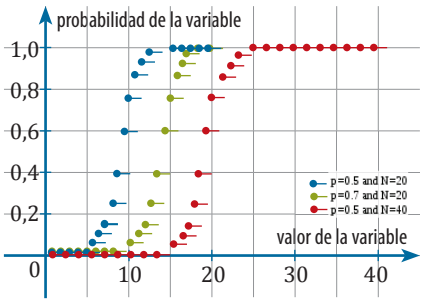




El estudio de la estadística y de las probabilidades es lo que trataremos en esta unidad. Si pensamos en cómo se ha ido construyendo este cuerpo de conocimientos deberíamos remontarnos a Egipto. Los faraones lograron recopilar información valiosa acerca de sus riquezas y población. Sin embargo, fueron los romanos quienes, cada cinco años, realizaban un censo de la población junto a las riquezas obtenidas y las tierras conquistadas. Durante la edad media esta práctica quedó casi en el olvido hasta que en el siglo XIV comenzaron a registrarse los fallecimientos de la población en Francia a raíz de las pestes que aquejaban a su población. En el siglo XV, el capitán John Graunt, basado en los datos existentes hizo una proyección de la población para los años venideros. Esta fue la primera aproximación al análisis estadístico que conocemos hoy en día. Durante los siglos XVII y XVIII, matemáticos como Bernoulli, Francis Maseres, Lagrange y Laplace desarrollaron la teoría de probabilidades que, aunque por algún tiempo solo estuvo restringida a los juegos de azar, hoy en día es de gran utilidad en variados campos como las ciencias sociales, la física, la biología, la economía, entre otros.



Distribución normal



Función de distribución en una distribución binomial

En nuestros días hay muchos matemáticos que se dedican al trabajo estadístico en las diversas áreas de la vida de un país, su trabajo ya no consiste solo en recolectar y tabular datos, sino más bien en la interpretación e inferencia de estos, de manera de obtener información valiosa del posible comportamiento de la población en relación a temas de importancia. Junto a cada estudio de inferencia, es necesario entonces, decir cuál es la probabilidad de error en las afirmaciones que se hacen. Esto ha llevado a desarrollar, junto a la estadística y probabilidades una teoría de error, que sustente las inferencias realizadas. A través de los años de tu enseñanza escolar has ido estudiando distintos elementos de estadística y probabilidades, en este capítulo abordaremos dos temas de gran importancia debido a la aplicación que ellos tienen: probabilidad condicionada y distribuciones de probabilidad. El primero es fundamental debido a que los sucesos que se presentan en la vida real están relacionados entre sí, necesariamente, entonces, ya no es suficiente solo saber determinar la probabilidad de sucesos independientes, sino que deberíamos preguntarnos que sucederá con la probabilidad de sucesos que dependen entre sí. El segundo, está relacionado con el comportamiento de los resultados de ciertos datos y probabilidades, hay grupos de datos que se comportan de una manera similar y por lo tanto se distribuyen de forma especial. Dentro de estas distribuciones se encuentran la binomial, que estudiaremos en este capítulo, la normal, que estudiarás el próximo año, y que tiene relevancia pues es el modelo con el que, por ejemplo, se distribuyen los puntajes PSU, y otras como la distribución Poisson, exponencial, etc.


Daniel Bernoulli (1700 – 1782)

Conocimientos previos

En años anteriores has estudiado y calculado algunos estadígrafos que describen una muestra. En esta sección recordaremos algunos de ellos que utilizaremos en el estudio de la segunda parte de nuestro capítulo.

1 **Variable aleatoria:** Es toda magnitud cuyos valores se obtienen de mediciones en algún tipo de experimento aleatorio. Formalmente, una variable aleatoria es una función, que asocia un número real a cada elemento del espacio muestral (por ejemplo los posibles resultados de obtener cara al lanzar una moneda: $s \to 0$, $c \to 1$).

2 **Promedio ponderado:** es un promedio donde a cada valor se le asigna un peso o importancia determinada.

Por ejemplo, si decimos que un estudiante que está postulando a la universidad ha obtenido 670 puntos en la PSU de lenguaje, 698 puntos en la PSU de matemática, 687 puntos en la PSU de historia y sus notas equivalen a 700 puntos (NEM). Además, él sabe que en la universidad a la que desea postular le piden un $35\ \%$ del puntaje de postulación por la prueba de lenguaje, un $30\ \%$ por la de matemática, un $25\ \%$ de la de historia y un $10\ \%$ de NEM. ¿Cuál será su puntaje ponderado?

En este caso, cada prueba tiene un peso distinto, pues los porcentajes pedidos no son iguales para cada una. Calculamos entonces el puntaje ponderado de la siguiente manera:

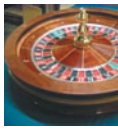
$$\begin{aligned} &35\ \%\text{ de }670\ +\ 30\ \%\text{ de }698\ +\ 25\ \%\text{ de }687\ +\ 10\ \%\text{ de }700 \\ &= 0{,}35 \cdot 670 + 0{,}30 \cdot 698 + 0{,}25 \cdot 687 + 0{,}10 \cdot 700 \\ &= 234{,}5 + 209{,}4 + 171{,}75 + 70 \\ &= 685{,}65 \end{aligned}$$

3 **Varianza, desviación estándar y coeficiente de variación:** estos estadígrafos nos indican el grado de variabilidad de los datos en una muestra. Determinan el grado de dispersión de la muestra con respecto al promedio o media de esta.

a. **Varianza**: Corresponde al promedio de los cuadrados de las diferencias entre la media aritmética y cada uno de los valores observados (en datos no agrupados) o de cada marca de clase (en datos agrupados).

b. **Desviación Estándar:** Es la raíz cuadrada de la varianza, con esto se obtiene un estadígrafo de dispersión expresado en la misma unidad de medida de la variable.

c. **Coeficiente de variación:** Este estadígrafo indica la variabilidad de la muestra, expresada en porcentaje. Compara la desviación estándar con respecto al promedio de la muestra.



Datos	Varianza	Desviación Estándar	Coeficiente de variación
No agrupados	$Var = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n}$ Donde, σ^2 es la varianza x_i: valor de la variable $\bar{x}$: promedio o media de la muestra n: total de datos	$S = \sigma = \sqrt{Var}$	$C.V. = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100$
Agrupados	$Var = \sigma^2 = \frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i - \bar{x})^2 \cdot f_i}{n}$ Donde, σ^2 es la varianza m: es el número de intervalos x_i: marca de clase de cada uno de los intervalos $\bar{x}$: promedio o media de la muestra n: total de datos f_i: es el valor de la frecuencia del intervalo.	$S = \sigma = \sqrt{Var}$	$C.V. = \frac{S}{\bar{x}} \cdot 100$

Los datos de una muestra se pueden ordenar en una tabla de frecuencias. Recuerda que frecuencia es la cantidad de veces que se repite un dato.

Por ejemplo para los datos sobre la estatura de un grupo de amigos tendremos:

Estatura (cm)	Frecuencia (f_i)
162	1
163	3
164	2
165	1
166	1
167	2

En algunas oportunidades es conveniente que en la tabla aparezcan también otros datos como por ejemplo, las frecuencias acumuladas (f_{ac}), y las frecuencias relativas (f_r).

Supongamos que las edades de 20 de los integrantes de una selección de fútbol son las siguientes:

Edad de algunos seleccionados de fútbol			
Edad	f_i	f_{ac}	f_r
17	3	3	$\frac{3}{20}$
18	4	7	$\frac{4}{20}$
19	5	12	$\frac{5}{20}$
20	6	18	$\frac{6}{20}$
21	2	20	$\frac{2}{20}$
	20		

Podemos calcular también algunas probabilidades de los datos de las tablas antes presentadas, por ejemplo, deseamos conocer la probabilidad de que al elegir un niño o niña del grupo de amigos presentado en la primera tabla, este mida $163\ \text{cm}$. Para realizar este cálculo, en primer lugar nombramos al suceso pedido con la letra A, luego, calculamos la probabilidad como los casos favorables (aquellos que cumplen la condición pedida) divididos por los casos totales (total de personas):

$$P(A) = \frac{3}{10} = 0{,}3$$

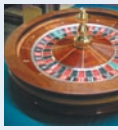
Si te das cuenta, el valor del cálculo anterior corresponde a frecuencia relativa de los datos de la cantidad de personas cuya estatura corresponde a $163\ \text{cm}$

Para una mejor comprensión del resultado, transformaremos este número a porcentaje, multiplicando el resultado por 100, es decir:

$$P(A) = 0{,}3 \Rightarrow 30\ \%$$

De manera más general, si realizamos un experimento aleatorio en el que hay n sucesos elementales, todos igualmente probables, o **equiprobables**, entonces si A es un suceso, la **probabilidad** de que ocurra el suceso A, $P(A)$, es:

$$P(A) = \frac{\text{número de casos favorables de } A}{\text{número de casos posibles}}$$



Trabaja

Refuerza tus conocimientos previos, para afrontar esta nueva unidad.

1 En los siguientes experimentos, determina cuáles de son predeterminados y cuáles son aleatorios:

a. Apostar en una carrera de caballos.
b. Comprar un número de rifa.
c. Calentar agua a 100 °C.
d. Jugar un loto.
e. Lanzar una piedra y medir su alcance.
f. Preguntarle a un desconocido si fuma.

2 Señala el espacio muestral de los siguientes experimentos:

a. Lanzar una moneda.
b. Lanzar un dado.
c. Lanzar dos monedas.

3 En la universidad, Benjamín está cursando el ramo de Biología Celular. Al comienzo del semestre, el profesor les dio la ponderación de cada una de las evaluaciones. Benjamín ha hecho una tabla con sus notas:

	Prueba 1	Prueba 2	Prueba 3	Promedio de controles	Promedio de laboratorio
Ponderación	25 %	20 %	15 %	10 %	30 %
Nota	3,8	4,1	4,8	5,0	4,9

¿Cuál es la nota final de Benjamín en este ramo?

4 En una cierta ciudad se ha encuestado a parte de la población para conocer el pensamiento sobre la familia y la importancia que las personas le atribuyen a los hijos en estas. Una de las preguntas hechas fue: ¿cuántos hijos desearía tener usted si formara una familia? Las respuestas están dadas en la siguiente tabla:

Nº de hijos	Nº de personas
0	12
1	87
2	95
3	46
4	21
5	4

A partir de los datos determina:

a. La media de la muestra.
b. La varianza de la muestra.
c. La desviación estándar de la muestra.
d. El coeficiente de variación de la muestra.
e. Agrega en la tabla, una columna que corresponda a la frecuencia relativa de los datos.

5 Maura quiere calcular el puntaje que necesitaría obtener en la PSU de ciencias, si mantiene los resultados en Lenguaje y en Matemática como hasta ahora. Su NEM le dará 710 puntos. En los ensayos de Matemática y Lenguaje ha obtenido como promedio 680 y 690 puntos, respectivamente. Los porcentajes de ponderación para la carrera a la que quiere postular son: 10 % de NEM, 30 % de Matemática, 25 % de Lenguaje y 35 % de ciencias. Si la Universidad a la que quiere ingresar hizo su puntaje de corte en 704 puntos, ¿cuál debería ser el puntaje que debe obtener en ciencias?

6 Se ha realizado una encuesta sobre la cantidad de cigarros fumados por una persona mayor de 20 años diariamente en dos ciudades distintas del país. Los resultados se presentan en las siguientes tablas:

Ciudad A

Nº de cigarros	Nº de personas
[0 – 5[	32
[5 – 10[	36
[10 – 15[	28
[15 – 20[	12
[20 – 25[	2

Ciudad B

Nº de cigarros	Nº de personas
[0 – 5[	37
[5 – 10[	41
[10 – 15[	23
[15 – 20[	8
[20 – 25[	1

Determina:

a. La media aritmética de cada una de las muestras.

b. La varianza de la muestra de la ciudad A.

c. La varianza de la muestra de la ciudad B.

d. La desviación estándar de la muestra de la ciudad A.

e. La desviación estándar de la muestra de la ciudad B.

f. El coeficiente de variación de cada una de las muestras.

g. ¿Qué puedes concluir si comparas ambas muestras y sus estadígrafos?

7 Tobías juega fútbol en uno de los equipos de su comuna. Los puntos obtenidos por los equipos en el campeonato de apertura de la comuna han sido los siguientes:

12, 10, 22, 18, 7, 14, 15, 17, 18, 20, 21, 20, 10, 10, 11, 15

Determina:

a. El promedio de los puntos.

b. La varianza de estos datos.

c. La desviación estándar de los datos.

d. El coeficiente de variación de la muestra.

e. Si a los tres primeros lugares se les da $\$\ 30\,000$, $\$\ 15\,000$ y $\$\ 7\,500$ por puntos obtenidos, ¿cuánto recibe cada uno de los tres primeros equipos de la tabla de posiciones?

8 Los factores de ponderación por los cuales se deben multiplicar cinco múltiplos sucesivos de 3 son: 0,24 para el menor, 0,22 para el siguiente, 0,21 para el subsiguiente, 0,18 para el penúltimo y 0,15 para el último. Si el cuarto múltiplo es 33, responde, aproximando tu respuesta a la centésima:

a. ¿Cuál es el promedio ponderado de estos múltiplos?

b. ¿Cuánto vale su varianza?

c. ¿Será verdad que si cada múltiplo aumenta en una unidad, también su promedio ponderado aumenta en dicha unidad? Justifica tu respuesta haciendo los cálculos respectivos.

d. Supongamos que a cada uno de estos múltiplos se le amplifica por -2, ¿es cierto que el nuevo promedio ponderado también resulta ser el producto de este mismo factor por el promedio ponderado obtenido en **a.**? ¿Por qué?

9 Joaquín ha obtenido un 5,6 como nota final en Química, conforme al siguiente desglose:

	Factor de Ponderación	Nota	Nota parcial ponderada
Prueba 1	0,25	5,3	1,325
Prueba 2	0,30	6,5	1,950
Controles	0,25	5,5	1,375
Informes de Laboratorio	0,15	5,1	0,765
Tareas	0,05	6,7	0,335

Sin embargo, esta nota final no corresponde. Responde a cada una de las preguntas siguientes y anota tus respuestas con aproximación a la décima.

a. ¿Cuál es la verdadera nota que obtuvo?

b. La nota final errónea se debe a que en el cuadro, para la Prueba 2 aparecía otra nota. ¿Cuál era?

c. ¿Fue uniforme su rendimiento en esta asignatura? ¿Por qué? Haz tus cálculos con la nota promedio no aproximada y expresa tu respuesta porcentualmente con dos decimales.

10 En un grupo de PYMES, se sabe que el 25 % de ellas tiene 12 operarios, y que tres de cada diez de estas empresas tiene 10. El resto tiene 20 operarios.

a. ¿Cuál es el factor de ponderación de la mayoría de estas empresas?

b. ¿Cuál es el promedio de operarios que conforma este grupo de PYMES?

c. Respecto del número promedio de operarios, ¿tiende este grupo a ser homogéneo? ¿Por qué?
Cuando proceda, escribe tus respuestas con aproximación a la centésima.

11 Cuatro hermanos deciden aportar con dinero al tratamiento médico de su madre. Sus respectivos sueldos son $ 400 000, $ 405 000, $ 10 000 y $ 420 000. Si los porcentajes en que participan, mencionado para el mismo orden de los sueldos, son: 20, 25, 27 y 28, responde:

a. ¿Alcanzan a reunir más de $ 410 000?. Haciendo los cálculos necesarios, justifica tu respuesta

b. Si algunos de los porcentajes se modifican, quedando en: 20, 25, 25 y 30, ¿Cuánto logran reunir?
Conforme a lo respondido en **a.** y **b.**

c. Encuentra cada desviación estándar.

d. Haciendo una comparación porcentual, ¿cuál de los dos casos presenta menor variabilidad?, ¿por qué?

12 Se han elegido tres empresas al azar (A, B y C) con el fin de estudiar un reajuste de sueldos para agosto del 2016. Los resultados se expresan a continuación.

	Intervalo de sueldos	Sueldo promedio ($)	Nº de empleados
A	[$ 365 000, $ 395 000[	$ 380 000	200
B	[$ 395 000, $ 425 000[	$ 410 000	150
C	[$ 425 000, $ 455 000]	$ 440 000	250

Considerando solo las dos primeras empresas en conjunto, encuentra:

a. El sueldo promedio mensual, indicando previamente los respectivos factores de peso.

b. La desviación estándar.

Ahora bien, si a las dos empresas anteriores se agrega la tercera.

c. ¿Cuáles son los nuevos factores de peso pero expresados porcentualmente y con dos decimales?

d. Usando los factores mencionados en **b.**, ¿en cuántos pesos más ha quedado el sueldo promedio para las tres empresas en conjunto, con respecto al valor hallado en **a.** ¿por qué?

e. Al incorporar la empresa C a las dos primeras, ¿aumenta la homogeneidad de los sueldos? Justifica tu respuesta valiéndote de los coeficientes de variación respectivos.

13 Catalina rindió la PSU obteniendo 680 lenguaje, 730 matemáticas, 640 ciencias y 640 historia, el NEM de Catalina es 688, si la carrera que desea seguir pide 10 % del NEM, 20 % lenguaje, 30 % ciencias y 40 % de matemáticas. ¿Con qué puntaje postula Catalina?

14 Diego le comentó a Susana que en su universidad las notas iban de 0 a 100 y se tomaban tres pruebas parciales y un examen que equivalía a tres notas parciales. Si las notas que obtuvo en las parciales de matemáticas fueron 70, 80, 90 y en el examen 82. ¿Con qué nota aprobó matemáticas?

15 La señora Montserrat compró dos kg de galletas a $ 1 300 cada una y después tres kg de otro tipo de galletas a $ 600 cada una. ¿Cuánto promedian los precios de los kg de galletas que compró?

16 Dada la siguiente serie de datos 6, 3, 7, 12, 15, 8, 16, 5. Determina:

a. La varianza.

b. La desviación estándar.

c. El coeficiente de variación.

17 Las alturas de los jugadores de un equipo de baloncesto viene dado por la tabla:

Altura (cm)	Marca de clase	f_i
[170,175[	172,5	1
[175 – 180[	177,5	3
[180 – 185[	182,5	4
[185 – 190[	187,5	8
[190 – 195[	192,5	5
[195 – 200[	197,5	2

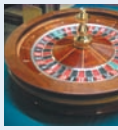
Determina:

a. La media de las alturas.

b. La varianza.

c. La desviación estándar.

d. El coeficiente de variación.



18 Se ha hecho un sondeo de los precios de una canasta familiar tipo para distintas comunas del país. Los resultados fueron los siguientes:

N° de comunas	Precio de la canasta
12	$ 150 200
6	$ 123 850
10	$ 113 900
8	$ 100 450

Determina:

a. La varianza.

b. El coeficiente de variación. Concluye al respecto.

19 En el colegio de Antonia la premiación anual será la segunda semana de Diciembre, los profesores junto a la UTP del colegio, deben escoger al alumno de excelencia académica, los postulantes son, Marco, Antonia y María José cuyas notas se muestran en la siguiente tabla:

Antonia	5,8	6,5	6,7	6,5	6,4	6,3	6,2	6,8	6,1
Marco	6,4	6,3	6,0	6,6	6,7	6,8	6,4	6,1	6,3
Maria José	6,1	5,9	6,5	6,7	6,6	6,3	6,5	6,7	6,2

Determina:

a. El promedio de cada alumno.

b. La desviación estándar para las notas de cada alumno.

c. El coeficiente de variación (CV) de las notas para cada alumno.

d. En tu opinión, ¿quién tiene mejor rendimiento?

20 El dueño de la carnicería-abarrote "Buen vecino", quiere mejorar la venta de carne, dado que últimamente se ha quedado con mucha carne, por lo tanto desea saber cuánta carne vende realmente a la semana, confecciona para tal fin la siguiente tabla que muestra los kg de carne por persona vendidos la ultima semana:

Kg de carne por persona	Cantidad de personas
1	18
2	43
3	21
4	8

¿Cuál es el promedio de carne que vende "Buen vecino" a la semana por persona?

21 Se aplica un test de aptitudes básicas a una muestra de estudiantes de 6° básico de tres comunas de la región metropolitana los promedios para cada una están tabulados de la siguiente manera:

comuna	promedio	N° de alumnos encuestados
Santiago	70,6	387
Puente Alto	50,2	340
La Pintana	40,2	243

¿Cuál es el promedio general de las tres comunas?

22 En un baúl hay 10 revistas infantiles, 8 de moda y 6 revistas científicas. Si la abuela de la familia saca una revista al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no sea infantil?

23 La siguiente tabla muestra la distribución de la población mundial por continente.

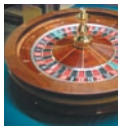
Continente	Población (N° de habitantes)
América	723 942 000
Europa	498 837 100
Asia	3 112 695 000
África	642 111 000
Oceanía	26 481 000

Determina:

a. La probabilidad de que al escoger una persona del mundo, esta sea de Asia.

b. Estima qué es más probable al escoger a una persona al azar: que sea americana o que sea africana. Estima cuánto más probable es un evento que el otro.

Probabilidad condicionada



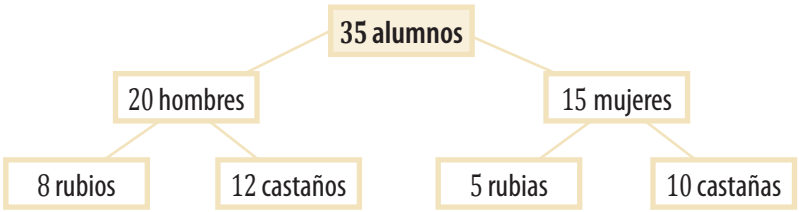
Hemos llegado al último tema de este año en el que has conocido los números complejos, las ecuaciones cuadráticas y la figura que las representa (la parábola), la homotecia y las aplicaciones de las rectas en el plano, para finalizar, volveremos a mirar la probabilidad de algunos eventos. Para ello, comenzaremos con la probabilidad de sucesos dependientes.

Dos sucesos son dependientes cuando la ocurrencia de uno influye en la ocurrencia del otro. En este sentido, el primer suceso entrega información adicional que influye en el segundo. Estudiaremos como calcular la probabilidad de que un suceso ocurra dado que sabemos que el otro sucede.

Miremos el siguiente ejemplo:

1 En un curso hay 35 alumnos y alumnas, de los que 20 son hombres, 5 mujeres y 8 hombres tienen pelo rubio y el resto tiene el pelo castaño. Se elige uno al azar y es hombre. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga el pelo rubio?

Si hacemos un diagrama, tendremos que:



Según nuestro diagrama, el número de personas que tienen el pelo rubio y son hombres es 8, y como debemos restringir nuestro espacio muestral solo a los hombres, entonces tenemos que la probabilidad pedida será:

$$P(\text{rubio si es hombre}) = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0{,}4 = 40\ \%$$

Lo anterior se puede entender también como:

$$P(\text{rubio si es hombre}) = \frac{\frac{8}{35}}{\frac{20}{35}} = \frac{P(\text{ser rubio y hombre})}{P(\text{hombre})}$$

Ahora bien, esto: $P(\text{rubio si es hombre}) = \dfrac{P(\text{ser rubio y hombre})}{P(\text{hombre})}$, es exactamente lo que la teoría de las probabilidades (rama de la matemática que estudia todo lo relacionado con probabilidades) nos dice.

En esta sección aprenderás

Qué es una probabilidad condicionada y como se calcula

Desarrollarás las siguientes habilidades:

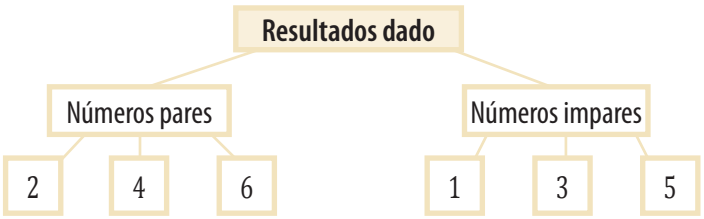
- Identificar, calcular, interpretar, resolver problemas, analizar y sintetizar.

Habilidades por actividad:

- Identificar y calcular: 1 – 2 – 6 – 7 – 8 .
- Interpretar y resolver problemas: 4 – 5 – 9 – 10. 1 – 2 – 3 – 4 – 5.
- Analizar y sintetizar: 3.

2 Se lanza un dado y se sabe que la probabilidad de que salga un 3 es $\frac{1}{6}$. Si ahora se incorpora nueva información, como por ejemplo, que alguien nos ha dicho que el resultado es número impar, entonces la probabilidad de que el resultado sea 3 ya no es $\frac{1}{6}$.

Hagamos un esquema de la situación:



Como vemos, ahora nuestro espacio muestral se restringe a solo 3 posibilidades dado que el resultado lo debemos obtener entre los números impares 1, 3 y 5, es decir nuestro espacio muestral es ahora 3 y queremos determinar la probabilidad de obtener el número 3, es decir:

$$P(\text{número 3 entre números impares en un dado}) = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

Pero lo que necesitamos es calcular la probabilidad de obtener el número 3 de entre seis posibilidades, pero sabiendo que el resultado es impar. Lo anterior lo calculamos determinando el cociente entre la probabilidad de obtener el número 3 en un dado y la probabilidad de obtener un número impar en un dado, es decir:

$$P(\text{número 3 entre números impares en un dado}) =$$

$$= \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{P(\text{número 3 entre resultados posibles en un dado})}{P(\text{números impares en un dado})}$$

$$P(\text{número 3 entre números impares en un dado}) = \frac{1}{\cancel{6}} \cdot \frac{\cancel{6}}{3} = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

Podemos anotar, en general, que:

Si se tienen dos sucesos, A y B, donde $P(B) \neq 0$, entonces la probabilidad condicional de que A suceda dado que B ha ocurrido, se puede calcular por la siguiente fórmula:

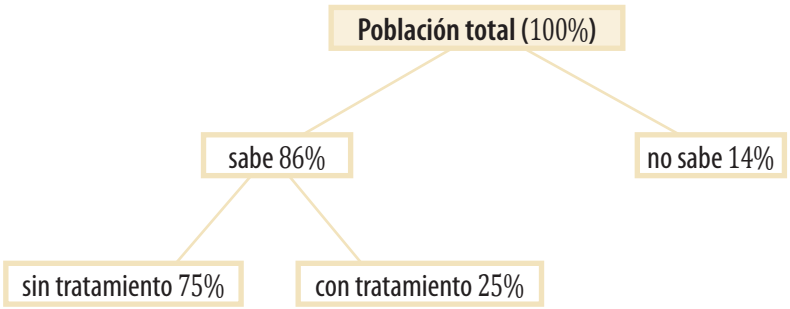
$$P(A/B) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)}$$

Hagamos otros ejemplos.

3 Un informe médico sobre la diabetes indica que del total de una población dada, el 14 % señala que no conoce su situación respecto al padecimiento de esta enfermedad. Del resto, solo el 25 % dice estar en tratamiento riguroso de su enfermedad. Isaías, estudiante de Medicina, que está estudiando este tema y debe hacer un trabajo de investigación en su ciudad, toma esta

información de referencia para calcular la probabilidad de que al escoger una persona al azar, esta no esté en tratamiento dado que conoce de su enfermedad.

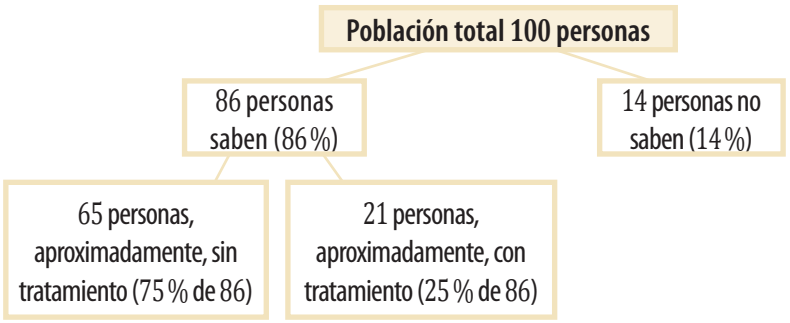
Haciendo un esquema de los datos obtenidos tenemos:



Debes considerar que tenemos porcentajes de porcentajes; por lo tanto, debemos tener mucho cuidado al hacer los cálculos, ya que, por ejemplo, las personas sin tratamiento son el $75\ \%$ del $86\ \%$.

Entonces, podemos tomar un universo de 100 personas para simplificar la situación (recuerda que como los porcentajes son razones, será lo mismo si tomamos un universo mayor).

Entonces, rescribamos el esquema:



$$P(\text{sin trat./sabe}) = \frac{P(\text{sin tratamiento y sabe})}{P(\text{sabe})}$$

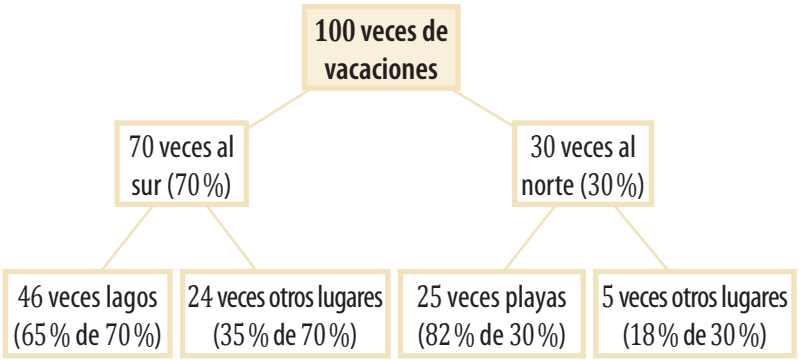
$$= \frac{\frac{65}{100}}{\frac{86}{100}} = \frac{65}{\cancel{100}} \cdot \frac{\cancel{100}}{86} = \frac{65}{86} \approx 0{,}76 = 76\ \%$$

4 Nancy está planeando sus vacaciones. Se ha puesto a pensar en los lugares a los que viajó anteriormente y ha hecho el siguiente esquema:



Si el comportamiento de Nancy se vuelve a repetir, según sus estadísticas, ¿cuál es la probabilidad de que vaya a un lugar que no sea playa, dado que ya ha decidido ir al norte?

Reescribiendo el diagrama, con un universo de 100 veces, tenemos que:



$$\mathrm{P}(\text{no playa/norte}) = \frac{\mathrm{P}(\text{no playa y norte})}{\mathrm{P}(\text{norte})}$$

$$= \frac{\frac{5}{100}}{\frac{30}{100}} = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \approx 0{,}17 = 17\ \%$$

Trabaja

Resuelve con tu grupo los siguientes ejercicios en tu cuaderno. No olvides revisar tus respuestas en el solucionario.

1 Si A y B son sucesos tal que

$P(A) = \frac{2}{3}$; $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

¿Cuánto es $P(B/A)$?

2 Sean A y B dos sucesos aleatorios con

$P(A) = 0{,}5$; $P(B) = \frac{1}{3}$ y $P(A \cap B) = 0{,}25$

Determina:

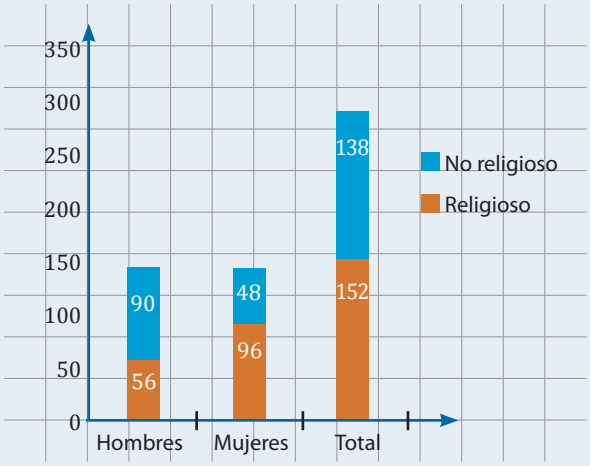
a. $P(A/B)$ **b.** $P(B/A)$

3 Sean A y B dos sucesos. Si $P(A/B) = P(B/A)$, ¿qué se puede asegurar de los valores de las probabilidades de A y B?

4 Los resultados en una encuesta de mi curso, en relación con la utilización de los fondos de nuestra tesorería, arrojaron que de los 40 alumnos, hay 26 que prefieren ir a paseo y el resto quiere un regalo. De los que quieren ir a paseo, 12 prefieren ir la piscina y el resto a otro lugar. Si se escogiera, al azar, una persona dentro del curso, ¿cuál sería la probabilidad de que no quisiera ir a la piscina si desea ir a paseo?

5 Estrella ha estado jugando a lanzar dos dados simultáneamente. Si ha sacado un 10 como suma de las caras, ¿cuál es la probabilidad de que una de ellas sea 4?

6 Los resultados de una encuesta sobre la actitud religiosa son:



a. Si se elige una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea religiosa sabiendo que es hombre?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que no siendo religiosa sea mujer?

7 De una urna que contiene 9 bolas rojas y 5 negras, se extraen sucesivamente 2 bolas. Calcular la probabilidad de que la segunda sea roja sabiendo que la primera fue negra.

8 Consideremos el experimento de sacar dos reyes de una baraja española en forma sucesiva. Sabiendo que ya apareció uno en la primera extracción, cuál es la probabilidad de sacar un rey en la segunda extracción, si:

a. no se devuelve la primera carta.

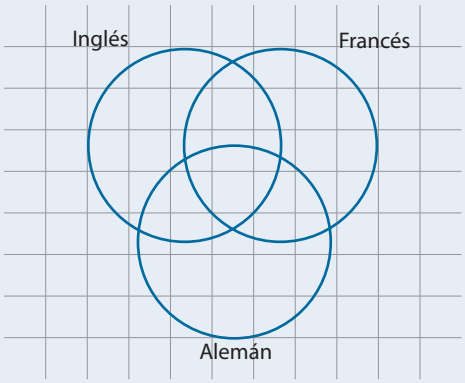
b. se extrae con devolución.

(Nota: La baraja española consta de 40 cartas distribuidas en cuatro pintas: Oro, Copa, Basto y Espada. Cada pinta está formada por: As, 2, 3, 4, 5, 6 y 7; Sota, Caballo y Rey).

9 Un vendedor sabe que cada vez que visita a un cliente, tiene 20 % de probabilidad de hacer dos ventas, 50 % de hacer una y un 30 % de no hacer ninguna. ¿Cuál es la probabilidad de que al visitar a un segundo cliente, le haga dos ventas, sabiendo que ya hizo una venta al anterior?

10 En una asamblea internacional, los asistentes se distribuyen de la siguiente manera:
4 hablan inglés, francés y alemán; 12 hablan solo inglés y francés; 9 hablan solo francés y alemán; 9 hablan solo inglés y alemán; 12 hablan solo francés; 10 hablan solo inglés; 6 hablan solo alemán.
Si una persona cualquiera hace una intervención, ¿cuál es la probabilidad de que hable francés, dado que su primer idioma es el inglés?

Completa antes el diagrama adjunto con los datos del problema:



Mis apuntes

Trabaja

Resuelve con tu grupo los siguientes problemas. Chequea tus respuestas en el solucionario.

1 Don Tulio miró preocupado la pizarra con los resultados de la votación. Se ponía en peligro la construcción de la sede vecinal para los ancianos y otra vez el problema por conseguir auspicio. La consulta era: ¿pedimos auspicio a particulares?

Resultados de la votación					
Respuesta a la consulta	Número de años de participación en la junta de vecinos				Total
	Menos de 1	1 - 3	4 - 10	Más de 10	
Sí	27	54	136	28	245
No	15	18	33	3	69
No sé	3	2	1	0	6
Total	45	74	120	31	320

Cuál es la probabilidad de elegir, al azar, un miembro de la junta de vecinos sabiendo que:

a. participa hace menos de 1 año o bien que de uno a tres años, vote por auspicio particular.

b. lleve entre 4 y 10 años en la junta de vecinos si se sabe que votó "No".

c. vote no sé, si se sabe que lleva más de 10 años de permanencia en la junta de vecinos.

2 –Dicen que casi la mitad de ese pueblo es rubio.

–Sí, un 45 %.

–Sí, pero no son todos por allá de ojos verdes, son pocos.

–Poquitos son rubios de ojos verdes, solo un 12 %.

–Willy, el amigo de mi padre, es nacido allá. ¿Cómo lo reconoceremos?

–Dijo que viene de terno azul; nada más sabemos.

–¿Qué tan probable es que Willy, suponiendo que es rubio, sea de ojos verdes?

Esperamos que ustedes logren calcular la probabilidad mencionada en la conversación.

3 El informe final que le entregaron a don Agustín acerca de su negocio era muy escueto: hay un 40 % de probabilidades de que un auto con problemas eléctricos acuda al turno 1; y otros datos, más incomprensibles para él, están registrados en la siguiente tabla:

Atención de turno	Números promedio de autos con desperfectos		
	Mecánicos	Eléctricos	Otros
Nº1	6	2	3
Nº2	5	3	2

Nunca encontró o no entendió que en el turno 1 la probabilidad de que acuda un auto con problemas eléctricos es $\frac{2}{11}$. Pero un segundo equipo le aclaró sus dudas y su negocio es, actualmente, próspero. Los invitamos a que verifiquen este valor y propongan más informaciones de la tabla, usando probabilidad condicionada; por ejemplo: ¿cuál es la probabilidad de que un auto ingrese al taller 2, dado que el desperfecto es eléctrico? (Den al menos 4 ejemplos).

4 –"¡Bien! Me gané la beca para ir a estudiar inglés. Adivinen dónde... a Estados Unidos", les comunica feliz, Américo.

A la llegada al Instituto, uno de los monitores del hall les muestra: "En nuestro instituto, el 90 % de las personas aprenden el idioma inglés, en el nivel fundamental, a la perfección. De estos, el 35 % provienen de Latinoamérica. Ahora bien, los que no estudian en ese nivel, participan en Mastery. El 45 % de estos proviene también de Latinoamérica. Les damos la bienvenida a nuestro año académico 2012".

Macarena se aproxima a Américo y le sonríe. Él querría que ella también fuera de Latinoamérica, pues está en su grupo de inglés. Suspira. ¿Qué tan probable puede ser esto? Hagan ustedes los cálculos para despejar esta posible incógnita probabilística.

5 –"No creas tan rápidamente lo que te dicen, Fernanda. Ordenemos los hechos: eran varias postulantes al cargo de secretaria presidencial. Respondiste el test de ingreso a la empresa y te fue bien, ¿verdad? Después, pasaste la entrevista y esperaste el resultado para ver si te podían o no contratar. No te fue bien, ¿no es cierto?"

Pero seamos honestas: la persona que les llamó al concurso les dijo a todas las postulantes que siete de cada doce de ellas aprobaban el test de ingreso, y que dos de diez lograban, además de esto, pasar la entrevista. Ahora bien, Fernanda, supongamos que el haber pasado la entrevista dependiera de tu rendimiento en el test, como lo estás pensando; entonces ¿qué tan probable es que habiendo logrado aprobar el test hayas pasado la entrevista? Expresen su respuesta porcentualmente, aproximando al entero.

Revisemos lo aprendido

A continuación valorarás el desempeño grupal de tus compañeros, anota el nombre de cada uno en tu cuaderno y evalúalos (Si/No) tomando en cuenta los siguientes aspectos:

1. Estuvo al pendiente del proceso de la tarea, comunicándose oportunamente y participando activamente sugiriendo ideas y compartiendo conocimientos y opiniones.
2. Demostró responsabilidad en el desempeño del grupo, orientando oportunamente, y preocupándose por el enriquecimiento y mejora de la tarea.
3. Se comunicaba en forma clara, concisa y cordial con el grupo, aceptando las diferencias de opinión y estableciendo sus propios puntos de vista.
4. Estimuló la reflexión acerca del proceso del grupo haciendo un análisis de su desempeño con el propósito de mejorarlo.

Mis apuntes

Tabulando las probabilidades

En esta sección aprenderás

Qué es una función de probabilidad y una función de distribución. Aprenderás a graficar funciones de distribución, a calcular la esperanza y la varianza de una función de distribución.

Desarrollarás las siguientes habilidades:

- Identificar, calcular, interpretar, resolver problemas, analizar, sintetizar, investigar y comunicar.

Habilidades por actividad:

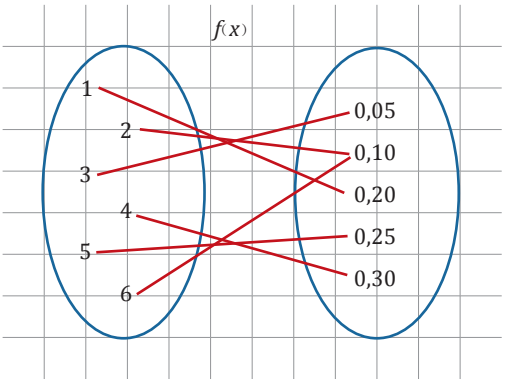
- Identificar y calcular: 1 – 2 – 3 – 4 – 6 – 7a – 7b – 7c – 7d – 7e – 8 – 9.
- Interpretar y resolver problemas: 5a – 5b – 10. 1 – 2a – 2b – 2c – 3 – 4a – 4b – 4c – 4d – 4e – 4f – 5a – 5c – 5d.
- Analizar y sintetizar: 5c – 7f. 4g – 5b – 5e.
- Investigar y comunicar: 2d.

Continuando con nuestro aprendizaje, vamos a determinar la estrecha relación que existe entre las probabilidades y las funciones.

Para ello, vamos a suponer que tenemos un dado cargado cuyas probabilidades son las siguientes:

Número del dado	Probabilidad
1	0,20
2	0,10
3	0,05
4	0,30
5	0,25
6	0,10

Podríamos definir una función que relacione la variable aleatoria "número de la cara mostrada por este dado al lanzarlo" con su probabilidad. Esta sería una función pues todos los números del dado tienen una y solo una probabilidad asignada. Podríamos representarla de la siguiente manera:



A esta función se le llama ***Función de probabilidades***.

Formalmente se define una función de probabilidades como aquella función que asocia a cada elemento del espacio muestral (x) de una variable aleatoria (X) la probabilidad que éste tenga.

Entonces, $f(x)$ será una función de probabilidad de tal manera que $f(x):\mathbb{R} \rightarrow [0,1]$, tal que $f(x) = P(x)$, donde $P(x)$ es la probabilidad del elemento x del espacio muestral.

Por lo tanto, $f(x) = \begin{cases} P(X=x) & \text{si } x \in \text{ espacio muestral} \\ 0 & \text{si } x \notin \text{ espacio muestral} \end{cases}$

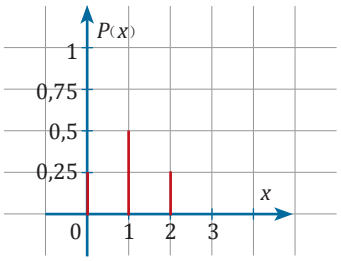
Hagamos algunos ejemplos sobre como establecer funciones de probabilidades:

1 Si se define la variable aleatoria "el número de hijos hombres que una pareja puede tener si tienen dos hijos", ¿cuál sería la función de probabilidad?

El espacio muestral correspondiente a esta situación es: $EM = \{HH, HM, MH, MM\}$, donde H corresponde a un niño y M corresponde a una niña.

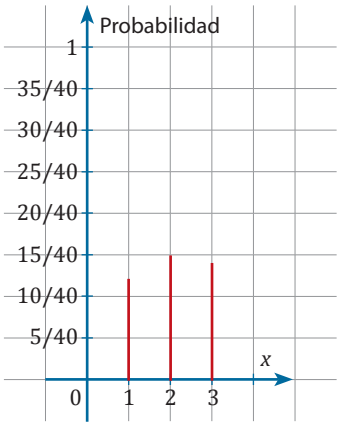
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4} & \text{con 0 o 2 hijos hombres} \\ \frac{1}{2} & \text{con 1 hijo hombre} \\ 0 & \text{para cualquier otro valor} \end{cases}$$

Además podemos graficarla también de la siguiente manera:



2 Si se tiene una urna con 12 bolitas rojas, 15 verdes y 13 azules y se define el suceso "sacar una bolita de la urna y ver su color". Determine la variable aleatoria asociada al problema y su función de probabilidad.

La variable aleatoria sería: el color de la bolita extraída. Como esta variable es cualitativa y el dominio de una función de probabilidad deben ser los números reales, entonces, le asignaremos un número a los posibles elementos del espacio muestral. Asignemos 1 al color rojo, 2 al verde y 3 al azul. Entonces, su función de probabilidad es la siguiente:



Ahora bien, si volvemos al ejemplo del dado cargado, podríamos mirar la tabla dada como una tabla de frecuencias y calcular la probabilidad "acumulada", veamos como interpretar esto:

Toma nota

Observa que:

- La suma de las probabilidades asignadas en una función de probabilidad debe ser igual a 1.
- El recorrido de la función es el intervalo $[0,1]$ porque la probabilidad de un suceso varía entre 0 y 1, ambos incluidos.

Para entretenerse

Te desafiamos a que resuelvas estos entretenidos problemas utilizando las probabilidades.

http://platea.pntic.mec.es/jescuder/probabil.htm



Las bolitas son un objeto típico utilizado en experimentos para determinar probabilidades

Número del dado (x)	Probabilidad $P(X)$	Probabilidad acumulada $P(X \leq x)$
1	0,20	0,20
2	0,10	0,30
3	0,05	0,35
4	0,30	0,65
5	0,25	0,90
6	0,10	1,00

Por ejemplo, si queremos calcular la probabilidad de que al lanzar el dado, el número obtenido sea menor o igual a 3, entonces, ésta corresponderá 0,35 (3° fila de la probabilidad acumulada) y se anotará $P(x \leq 3)$.

Observa que, al calcular $P(x \leq 3)$, se puede deducir la probabilidad que x sea mayor que 3, es decir, $P(x > 3)$, ya que ésta es el complemento de la anterior, o sea $1 - 0{,}35$, que es 0,65.

De esta manera podremos definir una nueva función llamada Función de distribución que relaciona cada elemento del espacio muestral con la probabilidad acumulada hasta el valor dado.

Es decir, se define una **Función de Distribución Acumulada** como $F(x)$: $R \rightarrow [0,1]$, de tal manera que $F(x) = P(X \leq x)$
En nuestro ejemplo, $F(3) = P(X \leq 3) = 0{,}35$
Hagamos otro ejemplo:

1 Si lanzamos dos dados y sumamos los puntos obtenidos en sus caras, determina:

a. la **función de distribución acumulada** correspondiente

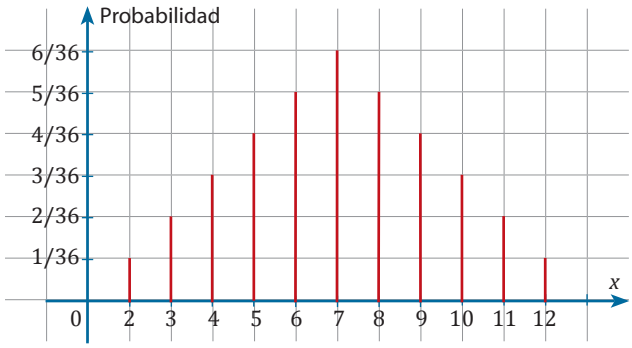
Suma de las caras	Probabilidad	Probabilidad acumulada
2	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$
3	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$
4	$\frac{3}{36}$	$\frac{6}{36}$
5	$\frac{4}{36}$	$\frac{10}{36}$
6	$\frac{5}{36}$	$\frac{15}{36}$
7	$\frac{6}{36}$	$\frac{21}{36}$
8	$\frac{5}{36}$	$\frac{26}{36}$

Toma nota

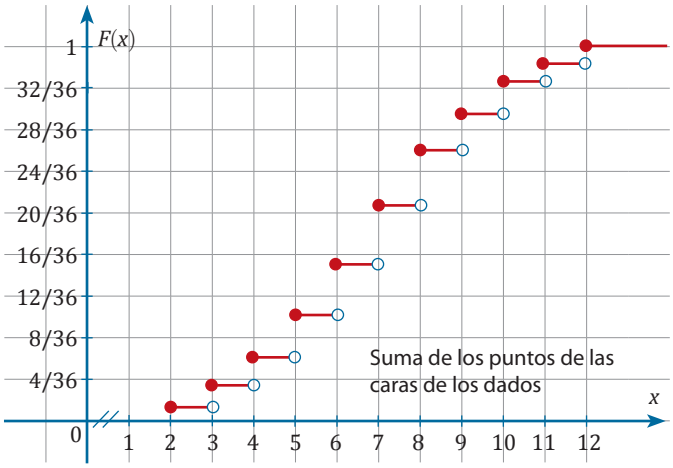
Nota que los valores de los elementos que no están en el espacio muestral y que, por lo tanto tienen probabilidad igual a cero, no se consideran en la tabla por efectos prácticos, ya que sería imposible considerarlos todos.

9	$\frac{4}{36}$	$\frac{30}{36}$
10	$\frac{3}{36}$	$\frac{33}{36}$
11	$\frac{2}{36}$	$\frac{35}{36}$
12	$\frac{1}{36}$	$\frac{36}{36}$

b. El gráfico de la función probabilidad



c. El gráfico de la función de distribución acumulada



d. La probabilidad de obtener una suma menor o igual que 5

$$F(5) = P(x \leq 5) = \frac{10}{36} = \frac{5}{18}$$

e. La probabilidad de obtener una suma mayor a 10

$$P(x > 10) = 1 - P(x \leq 10) = 1 - F(10) = 1 - \frac{33}{36} = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

Toma nota

Observa que, la función de probabilidades está definida desde los números reales, al intervalo comprendido entre 0 y 1 inclusive, por lo tanto si tomamos todos los valores entre 0 y 1 por ejemplo, debieran estar representados en el gráfico con la probabilidad que le corresponde, pero no existen elementos del espacio muestral con estos valores (suceso imposible), entonces su probabilidad es 0, con lo que, en el gráfico no se distinguen del eje horizontal. De aquí que el gráfico de la función de probabilidades aparezca como un conjunto de líneas que destaca los valores de aquellos elementos del espacio muestral que tienen probabilidad distinta de 0.

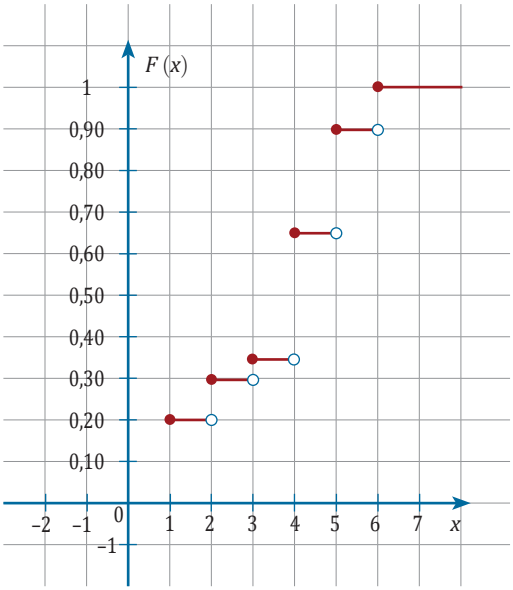
Toma nota

Observa que, al igual que para la función de probabilidad, la función de distribución acumulada está definida desde el conjunto de los números reales. Es decir, se deben considerar las probabilidades de todos los números reales comprendidos entre 2 y 3, por ejemplo. Como en este ejemplo, la probabilidad de estos valores es 0, entonces su probabilidad acumulada se mantendrá en el mismo valor que $F(2)$ en todo el intervalo. De manera análoga se repite esto en todos los intervalos restantes, esto hace que el gráfico de la función distribución tenga forma escalonada.

Para ilustrar de mejor forma la función de probabilidad la graficaremos también para nuestro ejemplo del dado cargado en el que teníamos los siguientes datos:

Número del dado (x)	Probabilidad $P(X)$	Probabilidad acumulada $P(X \leq x)$
1	0,20	0,20
2	0,10	0,30
3	0,05	0,35
4	0,30	0,65
5	0,25	0,90
6	0,10	1,00

Si graficamos estos datos en un gráfico de Función de distribución obtenemos:



- Una función de probabilidad se define como $f(x):\mathbb{R} \rightarrow [0,1]$, tal que:

$$f(x) = \begin{cases} P(X=x) & \text{si } x \in \text{espacio muestral} \\ 0 & \text{si } x \notin \text{espacio muestral} \end{cases}$$

- Una función de distribución acumulada se define como $F(x):\mathbb{R} \rightarrow [0,1]$, de tal manera que:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

(Probabilidad acumulada hasta el valor x)

- La probabilidad de que x sea mayor que un cierto valor, se puede calcular como $P(X > x) = 1 - P(X \leq x) = 1 - F(x)$.



Volvamos al ejemplo anterior del dado cargado. Aunque en este caso sería fácil esperar que saliera el número que tiene mayor probabilidad, no es tan simple, porque se debe considerar todos los números y las probabilidades que aporta cada uno de ellos. Es decir, debemos considerar el peso que aporta cada dato, lo que podemos asociar con un promedio ponderado.

Matemáticamente le llamaremos a este "valor esperado" **Esperanza matemática** y se calcula como la suma de los productos del valor de la variable por su correspondiente probabilidad. Esto es,

$$E(X) = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + ... + x_n \cdot P(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$$

Esto es análogo al promedio ponderado donde el factor de ponderación (o peso) corresponde a la probabilidad de cada elemento del espacio muestral.

Lo que nos dará una imagen rápida y clara del valor esperado, dependiendo de la distribución de probabilidad dada.

¿Cuál será el valor de la esperanza en el ejemplo del dado cargado y cómo se interpreta este valor?

$$\begin{aligned} E(X) &= 1 \cdot 0{,}20 + 2 \cdot 0{,}10 + 3 \cdot 0{,}05 + 4 \cdot 0{,}30 + 5 \cdot 0{,}25 + 6 \cdot 0{,}10 \\ &= 0{,}20 + 0{,}20 + 0{,}15 + 1{,}20 + 1{,}25 + 0{,}60 \\ &= 3{,}60 \end{aligned}$$

Por lo tanto, la esperanza matemática es $3{,}60$, lo que significa que el valor esperado al lanzar una gran cantidad de veces el dado (n veces) es entre el 3 y el 4, pero tendiente levemente al 4.

Este valor es muy utilizado en los juegos de azar o en las apuestas y los nombres esperanza matemática y valor esperado justamente tienen su origen en estos, ya que se refieren a la ganancia promedio esperada por un jugador al hacer un gran número de apuestas.

Si la esperanza matemática es cero $E(x) = 0$, se dice que el juego es equitativo.

Por ejemplo, una persona compra un número de rifa en la que puede ganar un premio de $\$100\,000$ o un segundo premio de $\$50\,000$ con probabilidades de $0{,}001$ y $0{,}002$ respectivamente. ¿Cuál es el precio justo a pagar por la rifa?

Para determinar este valor calculamos la esperanza matemática de este juego:

$$E(x) = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2)$$

$$E(x) = 100\,000 \cdot 0{,}001 + 50\,000 \cdot 0{,}002$$

$$E(x) = 200$$

Dado que el valor esperado de este juego es 200, es decir, se espera obtener $200 de premio, el precio justo a pagar por esta rifa es justamente ese valor, ya que no deberíamos pagar un precio mayor al valor que se espera ganar.

Veamos otros ejemplos:

1 Consideremos el lanzamiento de tres monedas y el suceso "el número de caras obtenidas". En este caso, ¿cuál es la esperanza matemática?

En este caso, el dominio de la función probabilidad es 0, 1, 2 y 3 , dependiendo del número de caras obtenidas. Definamos su función de probabilidad:

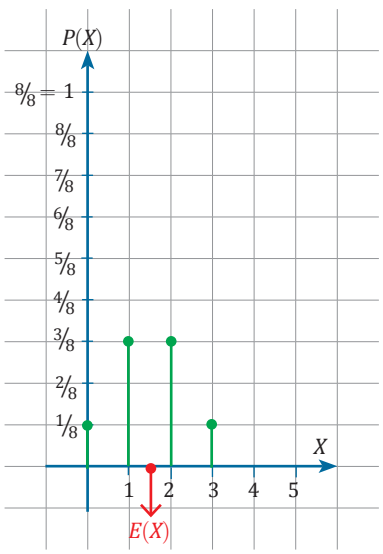
Numero de caras	Probabilidad
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

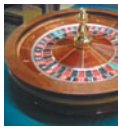
Ahora bien, calculemos la Esperanza:

$$E(X) = 0 \cdot \frac{1}{8} + 1 \cdot \frac{3}{8} + 2 \cdot \frac{3}{8} + 3 \cdot \frac{1}{8} = 0 + \frac{3}{8} + \frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{12}{8} = 1{,}5$$

Es decir, se debiera esperar que, en un gran número de lanzamientos, el resultado promedio estará entre una o dos caras.

Gráficamente podemos ubicar la esperanza de la siguiente manera...





2 En una compañía que confecciona discos duros para computadores se producen algunos artículos defectuosos por series de producción. Se ha estimado que el $8\ \%$ de los discos duros producidos en una serie son defectuosos. Si la empresa pierde $\$\ 12\,000$ por cada artículo defectuoso y gana $\$\ 35\,000$ por cada artículo en buen estado, ¿cuál será la ganancia esperada por la compañía a largo plazo?

Como el fabricante debe considerar pérdidas y ganancias, podemos establecer lo siguiente:

Ingreso ($)	Probabilidad
$-\ 12\,000$	0,08
$35\,000$	0,92

Por lo tanto, la esperanza matemática del ingreso recibido será:

$$E(X) = -\ 12\,000 \cdot 0{,}08 + 35\,000 \cdot 0{,}92 = 31\,240$$

Lo que significa que la compañía recibirá a largo plazo, $\$\ 31\,240$ por artículo producido.

Nota que, al igual que la media aritmética de una muestra de datos, este valor es solo referencial y, por si solo, no es muy preciso. Dos muestras pueden tener la misma esperanza y sin embargo, los valores de variable aleatoria estar en una de ellas muy cercanos a la esperanza y en la otra muy polarizados. Debido a esto, al igual que para conjuntos de datos existen otras medidas que indican dispersión de la muestra. En nuestro caso…

La Varianza

En forma análoga a la varianza para un conjunto de datos, podemos definir la varianza de una variable aleatoria como el promedio ponderado de los cuadrados de la diferencia entre los valores de los elementos del espacio muestral y la esperanza matemática de la variable. Es decir, $V(X) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - E(X)\right)^2 \cdot P_{(x_i)}$. Este valor da una estimación de la homogeneidad de los valores de la variable aleatoria, en relación a cuán distantes están ellos de la esperanza matemática.

También podemos calcular la desviación estándar de una variable aleatoria de la misma manera que para un conjunto de datos, es decir, calculando la raíz cuadrada de la varianza, obteniendo así un estadígrafo de dispersión expresado en la misma unidad de medida de la variable.

Veamos algunos ejemplos:

Para saber más

Ada Augusta Byron, condesa de Lovelace, realizó, al lado del matemático Babbage, un trabajo pionero que desembocó en las actuales computadoras. Esta pareja también compartió la idea de que podían inventar un sistema infalible para predecir quién ganaría en las carreras de caballos basándose en las probabilidades. Entre la pasión por la ciencia, que les llevaría a la creación del cerebro mecánico, y la más mundana actividad de la apuestas, nuestros famosos personajes frecuentaron tanto los espacios científicos como los propios del hipódromo.



1 En el caso anterior del dado cargado, teníamos que:

Número del dado	Probabilidad
1	0,20
2	0,10
3	0,05
4	0,30
5	0,25
6	0,10

Y su esperanza era: $E(X) = 3{,}60$

Calculemos entonces, la varianza de la variable:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot P(x_i)$$

$$V(X) = (1 - 3{,}6)^2 \cdot 0{,}2 + (2 - 3{,}6)^2 \cdot 0{,}1 + (3 - 3{,}6)^2 \cdot 0{,}05 +$$

$$+ (4 - 3{,}6)^2 \cdot 0{,}3 + (5 - 3{,}6)^2 \cdot 0{,}25 + (6 - 3{,}6)^2 \cdot 0{,}1$$

$$V(X) = 1{,}352 + 0{,}256 + 0{,}018 + 0{,}048 + 0{,}49 + 0{,}576$$

$$V(X) = 2{,}74$$

Nota que este resultado nos muestra un valor en unidades cuadradas de probabilidad , por lo tanto, si extraemos la raíz cuadrada de la varianza, llamada desviación estándar, se tendrá que: $\sqrt{V(X)} = \sqrt{2{,}74} \approx 1{,}66$. Esto nos dará un valor estimado de dispersión de las probabilidades con respecto a la esperanza. Si restamos y sumamos este valor a la esperanza, tendremos que los valores son 1,94 y 5,26, respectivamente. Es decir, en una gran cantidad de lanzamientos, se debiera esperar que los números entre 2 y 5 tuvieran mayor probabilidad de salir. Por lo tanto, las probabilidades de los elementos del espacio muestral están dispersas.

2 Consideremos ahora el ejemplo del lanzamiento de las tres monedas para determinar el número de caras que se obtienen. Para esta situación se tenía que:

Numero de caras	Probabilidad
0	$\frac{1}{8}$
1	$\frac{3}{8}$
2	$\frac{3}{8}$
3	$\frac{1}{8}$

Y su esperanza era: $E(X) = 1{,}5$

Calculemos pues, su varianza:

$$V(X) = (0 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{1}{8} + (1 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{3}{8} + (2 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{3}{8} +$$

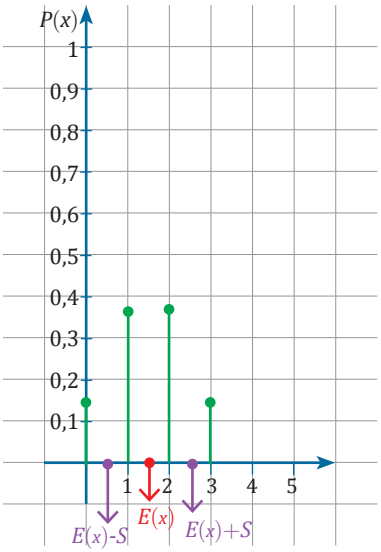
$$+ (3 - 1{,}5)^2 \cdot \frac{1}{8}$$

$V(X) = 0{,}28125 + 0{,}09375 + 0{,}09375 + 0{,}28125$

$V(X) = 0{,}75$

Miremos ahora la desviación estándar, esto es:
$\sqrt{V(x)} = \sqrt{0{,}75} \approx 0{,}87$. Ahora bien, si restamos y sumamos este valor a la esperanza, obtendremos los valores, 0,63 y 2,37. Podremos decir entonces que, en una gran cantidad de lanzamientos la mayor probabilidad es que el número de caras esté entre 1 y 2.

Podemos graficar el intervalo en el que se esperan que se muevan los datos, usando la desviación estándar de la siguiente manera:



3 Una compañía de telefonía celular ha hecho un estudio de dos de sus proveedores y ha estimado los siguientes datos para los celulares del tipo A que vende a sus clientes:

Proveedor	Probabilidad de celulares defectuosos	Probabilidad de celulares en buen estado	Pérdida, en pesos, por celular defectuoso	Ganancia, en pesos, por celular en buen estado
1	0,07	0,93	5 000	18 000
2	0,12	0,88	4 000	26 000

Comparemos las utilidades, utilizando la varianza, de ambas compañías:

Para el Proveedor 1, se tiene que:

$E_1(X) = -5\,000 \cdot 0{,}07 + 18\,000 \cdot 0{,}93 = 16\,390$

$V_1(X) = (-5\,000 - 16\,390)^2 \cdot 0{,}07 + (18\,000 - 16\,390)^2 \cdot 0{,}93$

$V_1(X) = 32\,027\,247 + 2\,410\,653$

$V_1(X) = 34\,437\,900$

Y por lo tanto, desviación estándar será:

$\sqrt{V_1(X)} = \sqrt{34\,437\,900} \approx 5\,868{,}38 \approx 5\,868$

Entonces, si restamos y sumamos este valor a la esperanza, obtendremos los valores, 10 522 y 22 258. Con esto, el proveedor debiera esperar que, a largo plazo, su ganancia fluctuara entre los $ 10 522 y los $ 22 258 por celular vendido de esta compañía.

Para el Proveedor 2, se tiene que:

$E_2(X) = -4\,000 \cdot 0{,}12 + 26\,000 \cdot 0{,}88 = 22\,400$

$V_2(X) = (-4\,000 - 22\,400)^2 \cdot 0{,}12 + (26\,000 - 22\,400)^2 \cdot 0{,}88$

$V_2(X) = 83\,635\,200 + 11\,404\,800$

$V_2(X) = 95\,040\,000$

Y por lo tanto, la desviación estándar será:

$\sqrt{V_2(X)} = \sqrt{895\,040\,000} \approx 9\,748{,}85 \approx 9\,749$

Entonces, si restamos y sumamos este valor a la esperanza, obtendremos los valores, 12 651 y 32 149. Con esto, el proveedor debiera esperar que, a largo plazo, su ganancia fluctuara entre los $ 12 651 y los $ 32 149 por celular vendido de esta compañía.

Por lo tanto, aún cuando la compañía 2 produce mayor cantidad de celulares defectuosos, conviene más.

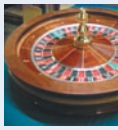
- La esperanza o valor esperado de una variable aleatoria es un promedio ponderado donde el "peso" de cada valor de la variable está dado por su probabilidad. Se calcula con la fórmula:

$$E(X) = x_1 \cdot P(x_1) + x_2 \cdot P(x_2) + \ldots + x_n \cdot P(x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot P(x_i)$$

- La varianza de una variable aleatoria es el promedio ponderado de los cuadrados de la diferencia entre los valores de los elementos del espacio muestral y la esperanza matemática de la variable. Se calcula con la fórmula:

$$V(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - E(X))^2 \cdot P(x_i).$$

- La desviación estándar es la raíz cuadrada de la varianza de la variable. Ella nos da una referencia del rango en el que fluctuarán la mayoría de los valores de la variable, si restamos y sumamos ésta a la esperanza, como se ilustra en la página anterior.



Trabaja

Resuelve los siguientes ejercicios. No olvides revisar tus respuestas en el solucionario.

1 En cada una de las siguientes situaciones define la función de probabilidades asociada a ellas:

a. En una caja hay 16 bolitas marcadas con el número 1; 25, con el número 2 y 37, con el número 3. Se define la variable aleatoria como el número obtenido al extraer una bolita.

b. En un curso se deben elegir tres representantes para ir a la ceremonia de inauguración de la nueva biblioteca municipal. Como todos los alumnos quieren ir se han puesto en una bolsa 3 palitos cortos y el resto, para completar los 45 alumnos del curso, han sido palos largos. La variable aleatoria es extraer un palito corto.

2 Se define la siguiente función de probabilidad para un dado cargado de ocho caras. Construye una tabla que muestre la función de distribución acumulada asociada a ella:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & \text{si } x = 1, x = 3 \\ \frac{4}{21} & \text{si } x = 2, x = 4, x = 6 \\ \frac{1}{105} & \text{si } x = 5, x = 7, x = 8 \end{cases}$$

3 Se lanza una moneda no cargada dos veces al aire y se anotan sus resultados. ¿Cuál es la función de distribución de la variable aleatoria "número de sellos"?

4 En el experimento "sacar una carta de una baraja de naipe inglés donde se han extraído los monos", se define la variable aleatoria "N° de carta". Según esto, responde:

a. ¿Cuál es la función de probabilidad?

b. Grafica la función de distribución

c. ¿Cuál es la probabilidad $P(X \leq 5)$?

d. ¿Cuál es la probabilidad $P(X > 8)$?

e. ¿Cuál es la probabilidad que se extraiga un número de carta entre 3 y 6, ambos valores incluidos?

5 En un concurso de televisión se han colocado en una caja 2 llaves que abren la puerta 1, 3 llaves que abren la puerta 2 y 12 llaves que no abren ninguna de las dos puertas, detrás de las cuales hay un premio. Se define la variable aleatoria "número de puerta a abrir" como, 1 si la llave extraída abre la puerta 1, 2 si la llave extraída abre la puerta 2 y 0 si la llave extraída no abre ninguna de las dos puertas.

a. Completa la siguiente tabla de manera que ella represente la función de probabilidad y de distribución.

N° de puerta a abrir	Probabilidad	Probabilidad acumulada
0		
1		
2		

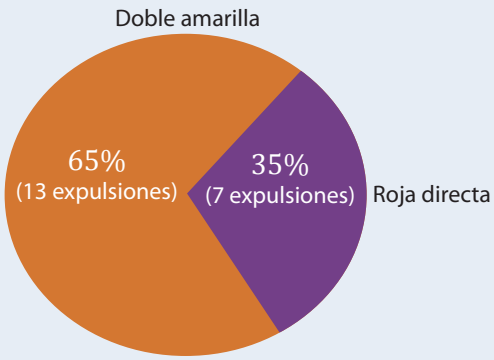
b. ¿Cuál es la esperanza?

c. ¿Qué puedes concluir?

6 Se ha hecho un recuento de las tarjetas amarillas que le han mostrado a un futbolista en el la última temporada. Con estos datos se ha confeccionado la siguiente tabla:

Nº tarjetas amarillas	Probabilidad
0	$\frac{1}{30}$
1	$\frac{1}{5}$
2	m
3	$\frac{8}{30}$
4	$\frac{2}{7}$

Promedio de expulsiones con doble amarilla y roja directa.



Responde:

a. ¿Cuál debe ser el valor de m?

b. ¿Cuál es el valor esperado para el número de tarjetas amarillas que obtendrá de seguir en las mismas condiciones para las próximas temporadas?

7 Se lanzan dos dados de cuatro caras y se anota la suma de los puntos de las caras obtenidos. Determina:

a. La función de probabilidad de la variable "suma de los puntos de las caras".

b. La función de distribución.

c. La esperanza.

d. La varianza.

e. La desviación estándar.

f. ¿Qué puedes concluir?

8 Los valores de una variable aleatoria X son $2, 4, 6, 7, 8, 9$ y 11 y los numeradores de las fracciones que representa sus respectivas probabilidades son: $3, 5, 1, 5, 3, 1$ y 2

a. Escribe la función de probabilidad para esta variable aleatoria.

b. ¿Cuál es el valor máximo de esta función?

c. Haz una gráfica de dicha función.

d. Escribe la función de distribución de probabilidad para dicha variable.

e. Haz la gráfica correspondiente.

f. Indica el valor de $p(x < 3)$.

9 Un dado cargado tiene una particular fórmula para obtener la probabilidad de su pinta. En efecto, la probabilidad de que en un lanzamiento aparezca un número determinado es directamente proporcional a dicho número.

a. Establece la función de probabilidad f para esta situación.

b. ¿Cuál es el valor mínimo de esta función?

c. Escribe F, es decir, la función de distribución de probabilidad.

d. Grafica la función de probabilidad.

e. Haz la gráfica de F.

f. Indica el valor de $F(4)$.

10 Una variable aleatoria X tiene la siguiente función de probabilidad.

X	Probabilidad $P(X)$
1	0,5
2	a
3	0,2

Si $E(X) = 1{,}7$ calcular el valor de "a"

Trabaja

Resuelve con tu grupo los siguientes problemas. Verifica que tus respuestas estén correctas en el solucionario:

1 Nicanor está pensando en colocar una mini empresa de manufactura de cartones. El ha averiguado con empresas similares el funcionamiento y rendimiento de las máquinas que debe adquirir. Una de ellas produce 3 artículos defectuosos por cada $1\,000$. Nicanor ha estimado que por cada caja en buen estado ganará $\$\ 40$ y por cada caja defectuosa que produzca perderá $\$\ 17$.

¿Pueden ayudar a Nicanor a calcular algunos datos de interés? Para ello, respondan las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la función de probabilidad que se puede establecer para la ganancia que la empresa obtiene por estas cajas?

b. ¿Cuál es la ganancia que Nicanor debe esperar a largo plazo si las condiciones se mantienen?

2 La mamá de Estela le regaló 20 fichas de color rosado, 35 de color verde y 15 de color azul. Cuando Estela las vio no le parecieron muy entretenidas, entonces, su mamá le propuso el siguiente juego. Sacarás una ficha, veremos el color y devolveremos la ficha a la bolsa en la que están. Por cada ficha rosada que saques yo te daré $\$\ 10$, por cada ficha azul que saques, me darás $\$\ 8$ pesos y si sacas una verde no te daré nada, pero tú tampoco me darás algo a mí. Estela no sabía muy bien que esperar del juego, pero su hermano que estaba escuchando hizo

algunos cálculos y le dio un consejo. Efectúen ahora los cálculos que hizo el hermano de Estela:

a. Definan la función de probabilidad.

b. Representen gráficamente la función de probabilidad.

c. ¿Debiera esperar ganancia o pérdida? Justifiquen matemáticamente su respuesta.

d. ¿Qué consejo creen ustedes que le dio su hermano?

3 Maritza ha estado jugando con su pololo al ludo. Ellos han notado que el dado debe estar cargado y para comprobar esto han lanzado muchísimas veces el dado y anotado sus resultados. Con esto han determinado que las probabilidades experimentales de cada uno de los números del dado son:

Número de la cara del dado	Probabilidad
1	0,02
2	0,15
3	0,33
4	0,18
5	0,19
6	0,13

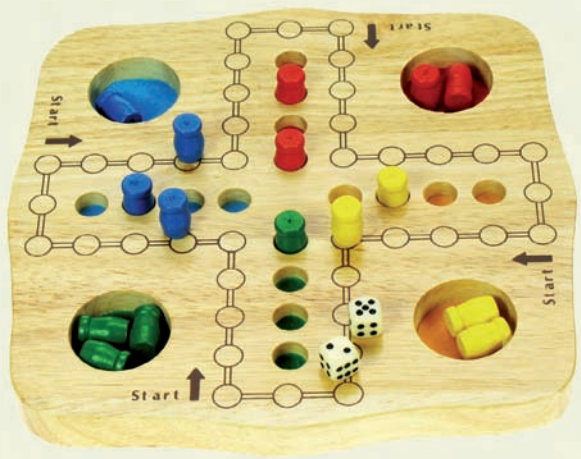
A partir de esta información ellos decidieron hacer un análisis un poco más profundo de su muestra. Háganlo ustedes también, respondiendo:

a. Grafiquen la función de probabilidad obtenida experimentalmente.

b. Escriban la función de distribución.

c. Grafiquen la función de distribución.

d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número menor que 4?



e. ¿Cuál es la probabilidad de obtener un número mayor que 4?

f. Encuentren el valor esperado de la muestra. ¿Cuál es su significado?

g. Encuentren el valor de la varianza de la muestra.

h. Encuentren la desviación estándar de la muestra.

4 Tonka ha buscado en Internet un ejemplo de función de probabilidad y ha copiado la siguiente tabla, olvidando el último dato de la columna de probabilidades:

Número de caras en el lanzamiento de 4 monedas cargadas	Probabilidad
0	0,43
1	0,05
2	0,12
3	0,21
4	m

Al principio pensó que debía desechar el ejercicio, pero después de un rato de pensar, se dio cuenta que lo podía calcular. Así ya podría contestar las preguntas que salían en el enunciado de su problema. Sabemos que ustedes también pueden hacerlo pues ya aprendieron estos contenidos. ¡Anímense!...

a. ¿Cuál es el valor de m?

b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos dos caras?

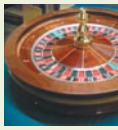
c. ¿Cómo se puede visualizar como varían las probabilidades del número de caras? (Haz el gráfico)

d. ¿Cuántas caras se debieran esperar de lanzar las monedas un gran número de veces?

e. ¿Cuál es el valor de la varianza?

f. ¿Cuál es el valor de la desviación estándar?

g. ¿Qué se puede concluir al considerar el valor de la desviación estándar?



5 Pedro, excéntrico personaje, tiene en la cómoda de su pieza su pecera de infancia, ya sin pez, con algunos papeles doblados y marcados con los números del 1 al 6. Cada número corresponde a uno de los tipos de sombreros que hay en su closet. El número 1 corresponde al sombrero de copa; el 2, al jockey; el 3, al de pita; el 4, al de ala ancha; el 5, al de vaquero y el 6, al gorro de lana. En su pecera hay 7 papeles con el número 1, 2 con el número 2; 5 con el número 3; 6 con el 4; 4 con el 5 y 8 con el 6. Cada mañana se levanta, escoge un papel al azar, mira el número obtenido, vuelve a depositar el papel en la pecera, mezcla los papeles para dejarlos listos para el día siguiente. Luego se viste, se coloca el sombrero elegido y se va a su trabajo… En base a estos datos, determinen:

a. La función de probabilidad asociada al número de sombrero.

b. La función de distribución. ¿Cómo se interpreta ésta?

c. La esperanza.

d. La varianza.

e. La distribución estándar, ¿cómo se interpreta ésta?

Sintetizando

- Existen distintos tipos de variables aleatorias, y entre ellas la variable aleatoria discreta. Una variable aleatoria es discreta si toma un número finito o infinito numerable (que se pueden enumerar) de valores.

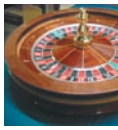
- Si dos sucesos A y B son dependientes y $P(B) \neq 0$, entonces la probabilidad de que el suceso A ocurra dado que ha ocurrido el suceso B se calcula como:

$$P(A/B) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(B)}.$$

- La función que relaciona la variable aleatoria medida en un experimento, con su probabilidad, se define como función de probabilidad: $f(x):\mathbb{R} \to [0,1]$ tal que:

$$f(x) = \begin{cases} P(x) & \text{si } x \in \text{ espacio muestral} \\ 0 & \text{si } x \notin \text{ espacio muestral} \end{cases}$$

- La función que relaciona cada elemento del espacio muestral con la probabilidad acumulada hasta el valor dado se conoce como función de distribución acumulada: $F(x):\mathbb{R} \to [0,1]$ de tal manera que
$F(x) = P(X \leq x)$.



Distribuciones de probabilidad... Distribución Binomial

Continuando con las probabilidades, dentro de esta rama como vimos anteriormente, se utilizan las distribuciones de probabilidad para modelar una porción de la realidad que en este caso corresponde a nuestro objeto de estudio. Estas no son otra cosa que una función que asigna a cada posible resultado de un experimento aleatorio, la probabilidad de que ocurra dicho acontecimiento o dicho en términos más simples, le asigna un valor no negativo.

Veremos ahora como los éxitos y los fracasos pueden ser modelados matemáticamente.

Supongamos que se está jugando con una moneda cargada, donde la probabilidad de que salga cara es $\frac{1}{3}$ y que salga sello es $1-\frac{1}{3}$, es decir $\frac{2}{3}$.

Supongamos además que se gana la partida del juego si sale exactamente una cara. Analicemos las probabilidades en distinto número de lanzamientos. El éxito, entonces, será el evento "salir una cara":

Para 1 lanzamiento, la probabilidad de éxito es: $\frac{1}{3}$

Para 2 lanzamientos, la probabilidad de éxito está dada por el hecho que "salga cara en el primero y no en el segundo o que no salga en el primero y salga en el segundo". Esto es:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$$

Para 3 lanzamientos, se tendrá éxito si se producen las combinaciones siguientes: css o scs o ssc, lo que es:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=3\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

Para 4 lanzamientos el éxito será en las situaciones: csss o scss o sscs o sssc, es decir,

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=4\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Si generalizamos para n lanzamientos se tendrá que el éxito estará dado por:

$$n\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

Supongamos que se cambian las reglas del juego y ahora se gana con exactamente dos caras, analicemos las probabilidades nuevamente.

Para 2 lanzamientos, la probabilidad de éxito será: cc, es decir,

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$$

En esta sección aprenderás

Qué es una distribución binomial, como se trabaja con ella y en que situaciones se aplica.

Desarrollarás las siguientes habilidades:

- Identificar, calcular, interpretar, resolver problemas, analizar y sintetizar. Investigar y comunicar.

Habilidades por actividad:

- Identificar y calcular: 1 – 2 – 3 – 4 – 5 – 7a – 7b – 7d – 7e – 8 – 9 – 10
- Interpretar y resolver problemas: 1a – 1b – 1c – 2 – 3 – 4 – 5
- Analizar y sintetizar: 7c – 1d – 1e
- Investigar y comunicar: 2d

Toma nota

Para simplificar tus cálculos y aprovechar de mejor manera el tiempo en la sala de clases, es apropiado que este contenido lo trabajes mediante el uso de calculadora.

Para 3 lanzamientos, el éxito se tendrá cuando se obtenga: ccs o csc o scc, es decir,

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}$$

Para 4 lanzamientos, el éxito será si se obtiene: ccss o cscs o scsc o cssc o sccs o sscc, es decir:

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}$$
$$+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}=6\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2$$

Para 5 lanzamientos, el éxito será al obtener: ccsss o cscss o csscs o csssc o sccss o scscs o scssc o ssscc o sscsc o sscsc, es decir

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+$$
$$+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}+$$
$$+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=10\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Si realizas el proceso para 6 lanzamientos obtendrás, $15\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4$ y para 7 lanzamientos obtendrás: $21\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5$. Si quieres puedes comprobarlo.

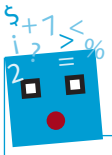
Si generalizamos para n lanzamientos, tendremos que la probabilidad de éxito estará dada por un término formado por el producto de una constante y dos potencias, donde las potencias serán la probabilidad de éxito elevado al número de veces de cara que se quiere obtener y la probabilidad de fracaso elevado a la diferencia entre los lanzamientos y el número de caras deseadas para obtener el éxito. Ahora analicemos la constante que acompaña a los términos, éstos son: 3, 6, 10, 15, 21,… (para 3, 4, 5, 6 y 7 lanzamientos respectivamente). Si te fijas, para obtener el 2° término a partir del 1° se ha sumado 3 al 1°; para obtener el 3° término a partir del 2° se ha sumado 4; para obtener el 4° término a partir del 3° se ha sumado 5 y así sucesivamente. Esta sucesión es conocida en una rama de la matemática llamada combinatoria, ella ayuda a contar de cuántas maneras pueden combinarse muchos elementos.

Para obtener estos números, se definen dos conceptos importantes:

a. Factorial de un número n, $(n!)$: es la multiplicación de los números naturales desde 1 a n. Por ejemplo, $3! = 1\cdot 2\cdot 3$; $5! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5$. Estos factoriales se ocupan en permutaciones u ordenamientos.

b. Combinaciones de k elementos de un total de n: se usan para determinar el número de grupos de k elementos que pueden formarse con n elementos. Se anota $\binom{n}{k}$ y se calcula como $\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$

Esta última definición responde a nuestro problema de armar todos los grupos que se pueden si tenemos que colocar en ellos, por ejemplo, 2 caras y 1 sello (3 lanzamientos) o 2 caras y 2 sellos



Para saber más

Normalmente usamos la palabra "combinación" descuidadamente, sin pensar en si el **orden** de las cosas es importante. En otras palabras:

"Mi ensalada de frutas es una combinación de naranjas, manzanas y peras" no importa en qué orden pusimos las frutas, podría ser "peras, naranjas y manzanas", es la misma ensalada.



"La combinación de la cerradura es 142": ahora **sí** importa el orden. "214" no funcionaría, Tiene que ser exactamente **1-4-2.**

Así que en matemáticas usamos un lenguaje más preciso:

Si el orden **no** importa, es una **combinación.**

Si el orden **sí** importa es una **permutación.**

(4 lanzamientos) o 2 caras y 3 sellos (5 lanzamientos), etc. Verifiquemos que los coeficientes anotados se pueden obtener con la fórmula dada:

Número de lanzamientos (n)	Número de caras deseadas (k)	$\binom{n}{k}$ (Se lee n sobre k)
3	2	$\binom{3}{2}=\frac{3!}{2!\cdot(3-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3}{1\cdot2\cdot1}=\frac{6}{2}=3$
4	2	$\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!\cdot(4-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4}{1\cdot2\cdot1\cdot2}=\frac{24}{4}=6$
5	2	$\binom{5}{2}=\frac{5!}{2!\cdot(5-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}{1\cdot2\cdot1\cdot2\cdot3}=\frac{120}{12}=10$
6	2	$\binom{6}{2}=\frac{6!}{2!\cdot(6-2)!}=\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6}{1\cdot2\cdot1\cdot3\cdot4}=\frac{720}{48}=15$

Por lo tanto, si generalizamos en este caso, se tendrá que la probabilidad de obtener exactamente 2 caras en n lanzamientos está dada por la fórmula: $\binom{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$

Ahora bien, si pensamos que tenemos n lanzamientos con una probabilidad p de obtener cara y una probabilidad $1-p$ de obtener sello, entonces podremos generalizar que la probabilidad de obtener exactamente k caras (desde 0 caras en adelante) en los n lanzamientos será: $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$, $k=0,1,2,3$.

Así, si pensamos que la variable aleatoria definida podría ser "el número exacto de caras obtenidas en n lanzamientos", nos podemos dar cuenta que acabamos de definir la función de probabilidad para esta variable.

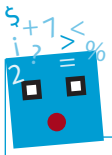
Calculemos ahora la probabilidad de éxito si en 5 lanzamientos se puede obtener una o dos caras, con las probabilidades del ejemplo anterior.

Según la fórmula que acabamos de deducir, tendremos que, la probabilidad deseada se puede calcular como:

$$P(1\text{ cara})\text{ o }P(2\text{ caras})=P(1\text{ cara})+P(2\text{ caras})=\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4+\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

$$=5\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{16}{81}+10\cdot\frac{1}{9}\cdot\frac{8}{27}=\frac{80}{243}+\frac{80}{243}=\frac{160}{243}\approx0{,}658=65{,}8\ \%$$

Como te puedes dar cuenta la fórmula obtenida se parece a una función de distribución acumulada, pero para que lo fuera realmente deberíamos partir del hecho de poder sacar 0 caras. Así, $F(0)$ significa obtener exactamente 0 caras, es decir, ninguna. $F(1)$, obtener exactamente 0 caras o 1 cara; $F(2)$, obtener exactamente 0 o 1 o 2 caras. Escribamos esto para nuestro problema:



Para saber más

Se define $0!=1$

Cada vez que se escribe una sumatoria, $\sum_{i=0}^{8}2i$ por ejemplo, los índices de ella indican los valores que toma la variable i. Así, para $i=0$ (índice inferior), se obtendrá el primer término de la suma; para $i=1$, el segundo; para $i=2$, el tercero y así sucesivamente, hasta llegar a $i=8$ (índice superior). Por lo tanto se puede escribir que:

$$\sum_{i=0}^{8}2i=2\cdot0+2\cdot1+2\cdot2+2\cdot3+2\cdot4+2\cdot5+2\cdot6+2\cdot7+2\cdot8.$$

Nota que, como la sumatoria parte de $i=0$, entonces ésta tiene, en este caso 9 términos.

Toma nota

En las calculadoras científicas existe una función que calcula este tipo de números, $\binom{n}{k}$. Esta es *nCr*. Para calcular $\binom{7}{2}$, debes digitar 7, luego la tecla *nCr* y por último 2. En seguida apretar la tecla del signo =.



$$F(0)=\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5$$

$$F(1)=\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5+\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4$$

$$F(2)=\binom{5}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^5+\binom{5}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^4+\binom{5}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3$$

Por lo tanto, si generalizamos para n lanzamientos y k el número de caras, entonces tendremos que:

$$F(k)=P(X<k)=\binom{n}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n+\binom{n}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}+\binom{n}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}+\ldots+\binom{n}{k}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^k\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k}$$

Lo que es igual a escribir que: $F(k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{i}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^i\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-i}$

Que es la función de distribución en este caso.

Ahora, si quisiéramos calcular $F(5)$, estaríamos buscando la probabilidad de obtener 0 o 1 o 2 o 3 o 4 o 5 caras. Y de ser así, en cualquier caso ganaríamos y la probabilidad sería 1.

Entonces si anotamos esto como sumatoria y generalizamos para n obtenemos:

$$F(5)=\sum_{i=0}^{5}\binom{5}{i}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^i\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{5-i}=1,\ \text{con}\ i=0,1,2,3,4,5$$

$$F(n)=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^i\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{n-i}=1,\ \text{con}\ i=0,1,2,3,\ldots,n$$

Escribiremos la función de distribución $F(2)$ y $F(3)$ para 2 y 3 lanzamientos respectivamente.

Para 2:

$$\begin{aligned}F(2)=\sum_{i=0}^{2}\binom{2}{i}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^i\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2-i}&=\binom{2}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2-0}+\binom{2}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2-1}\\&\quad+\binom{2}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2-2}\\&=1\cdot1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}+1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot1\\&=\left(\frac{2}{3}\right)^2+2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\end{aligned}$$

Para 3:

$$\begin{aligned}F(3)=\sum_{i=0}^{3}\binom{3}{i}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^i\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3-i}&=\binom{3}{0}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^0\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3-0}+\binom{3}{1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3-1}\\&\quad+\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3-2}\\&\quad+\binom{3}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3-3}\\&=1\cdot1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^3+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\\&\quad+3\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^1+1\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3\cdot1\\&=\left(\frac{2}{3}\right)^3+3\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{3}+3\cdot\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3\end{aligned}$$

Si te fijas, la función de distribución $F(2)$ se parece al desarrollo de un cuadrado de binomio. Y la función de distribución $F(3)$ es similar al desarrollo de un binomio al cubo.

Utilizando esto podemos escribir:

$F(2)=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^2$ y $F(3)=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^3$

Esto lo podemos generalizar para 4, 5, 6 y para números mayores de la forma:

$F(4)=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^4$; $F(5)=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^5$; ...; $F(n)=\left(\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\right)^n$

Es por esta razón que la distribución que acabamos de definir se llama Distribución binomial, pues está modelada por la potencia de un binomio, donde su exponente es un número natural.

A continuación resumiremos las condiciones que debe cumplir una variable aleatoria en un experimento dado para que tenga una distribución binomial.

- El experimento para el cual se define la variable aleatoria se puede repetir varias veces sin que el resultado de uno influya en el resultado de los otros (experimentos independientes).
- La variable aleatoria debe tener un espacio muestral que solo permita dos elementos. Al buscado se le llama éxito (de probabilidad p) y al contrario fracaso (de probabilidad $1-p$), o acierto y desacierto.
- La probabilidad de cada uno de los eventos debe ser la misma para todas las repeticiones del experimento.
- Se calcula la probabilidad de obtener k éxitos en n experimentos según la fórmula: $P(X=k)=\binom{n}{k}\cdot p^k\cdot(1-p)^{n-k}$.
- Se calcula la probabilidad de obtener de 0 a k éxitos (con $k \leq n$), en n experimentos según la fórmula:
  $F(k)=P(X<k)=\sum_{i=0}^{k}\binom{n}{k}\cdot p^i\cdot(1-p)^{n-i}$.
- Esta distribución está caracterizada por la potencia de un binomio, por lo tanto, podemos escribir que $F(n)=(p+(1-p))^n$. (Nota que esta suma es siempre igual a 1, por lo que se verifica que $F(n)$ es igual al 1).
- Se dice que una variable aleatoria con estas condiciones es una variable aleatoria que distribuye binomialmente con parámetros (n,p), lo anterior se denota como $X\sim B(n,p)$.

Revisemos el siguiente ejemplo:

Uno de los ítems de una prueba sorpresa consta de 12 preguntas de verdadero o falso. Suponiendo que los estudiantes no saben contestar a ninguna de ellas y, contestan al azar, hallar la probabilidad de obtener seis aciertos.

Esta es una distribución binomial pues los estudiantes solo pueden acertar o fallar la pregunta.

Definimos los parámetros de la distribución binomial,

$n = 12$ *(número de preguntas de la prueba)*

$p = 0{,}5$ *(probabilidad de acertar la pregunta)*

$1 - p = 1 - 0{,}5 = 0{,}5$

$k = 6$

Aplicamos la fórmula $P(\mathrm{k}) = \binom{n}{k} \cdot \ p^k \cdot (1-p)^{n-k}$,

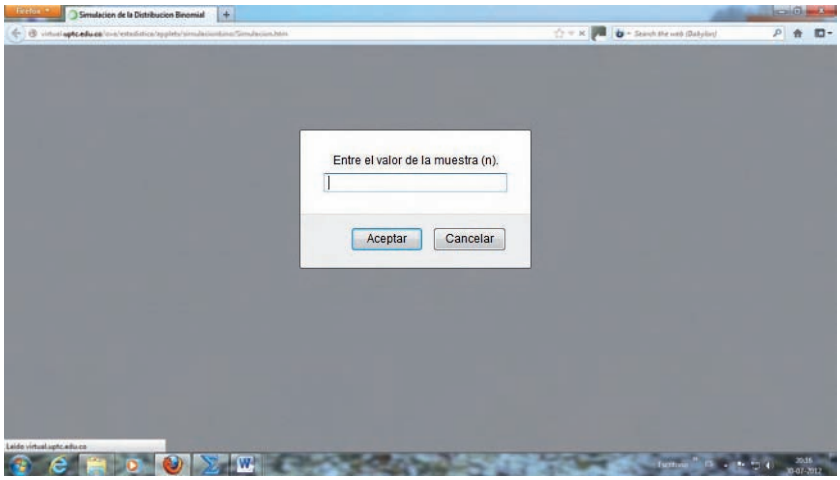
$$P(6) = \binom{12}{6} \cdot p^6 \cdot (1-p)^{12-6} = 924 \cdot 0{,}5^6 \cdot 0{,}5^6 \approx 0{,}226 = 22{,}6\%$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener seis aciertos en esta prueba, es 22,6% aproximadamente.

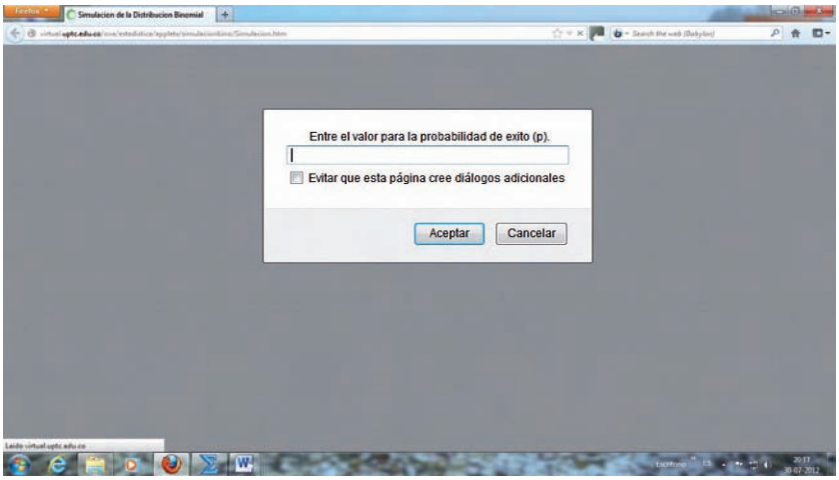
Esto resulta un poco engorroso de realizar manualmente, es por eso que existen simuladores digitales que ayudan con los cálculos. Una de las páginas de Internet donde pueden encontrar este tipo de simuladores es: http://virtual.uptc.edu.co/ova/estadistica/applets/simulacionbino/Simulacion.htm

En ella hay que ingresar los datos que se van pidiendo en el siguiente orden: n, p y k. Usémoslo en nuestro ejemplo de las monedas cargadas, eligiendo 10 lanzamientos, donde se quiere la probabilidad de obtener exactamente 3 caras y cuya probabilidad de éxito es $p = \frac{1}{3}$.

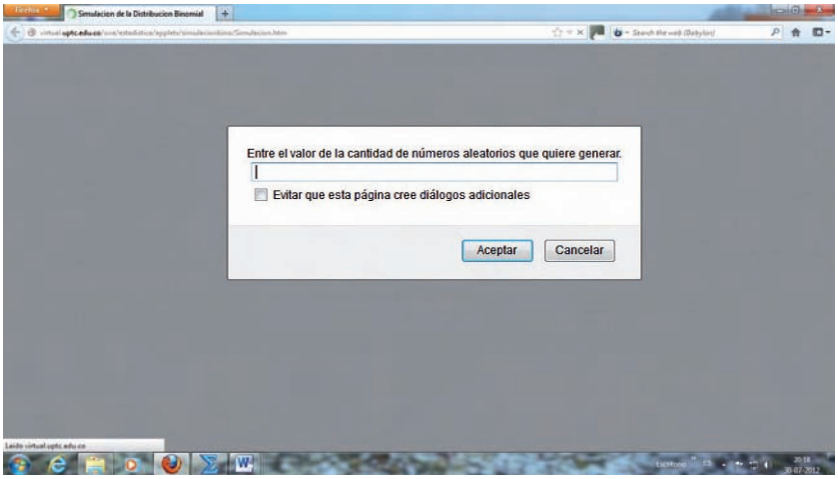
Al cargar la página aparecerá:



Agregamos el valor de n, que es 10 y colocamos aceptar, se mostrará:



Agregamos la probabilidad de éxito y colocamos aceptar, se desplegará la siguiente pantalla:



Agregamos el valor de k, en este caso 3 y se obtendrá la distribución deseada:

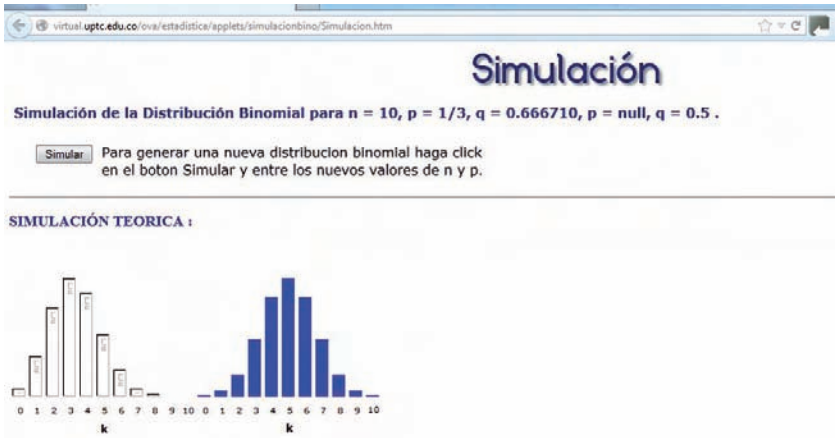


TABLA DE PROBABILIDAD

k	Probabilidad Exacta	Probabilidad acumulada
0	0.01735020263197279	0.01735020263197279
1	0.08674667582607262	0.10409687845804541
2	0.19517026209555866	0.29926714055360404
3	0.2602140054271402	0.5594811459807443
4	0.2276758709551999	0.7871570169359442
5	0.13659869263848798	0.9237557095744322
6	0.05691327626888989	0.9806689858433221
7	0.016260123070672147	0.9969291089139942
8	0.003048620644718792	0.999977729558713
9	0.0003387186912564l404	1.0003164482499693
10	0.00001693508780830282	1.0
0	0.0009765625	0.0009765625
1	0.009765625	0.0107421875
2	0.0439453125	0.0546875
3	0.1171875	0.171875
4	0.205078125	0.376953125
5	0.24609375	0.623046875
6	0.205078125	0.828125
7	0.1171875	0.9453125
8	0.0439453125	0.9892578125
9	0.009765625	0.9990234375
10	0.0009765625	1.0

Nota que en la tabla están calculadas las probabilidades de que hayan exactamente 0, 1, 2 etc. caras y además la probabilidad acumulada (función de distribución).

Nota además que aparecen otras probabilidades (del 0 al 10) que el programa calcula para probabilidades de éxito y fracaso de igual valor, para que se puedan comparar ambas.

Si te fijas, también el programa presenta un gráfico de la distribución (no coloreado). Los gráficos de las distribuciones binomiales son característicos, es decir, siempre de la misma forma. Las probabilidades van creciendo paulatinamente hasta que alcanzan un valor máximo (no necesariamente en el medio de la distribución) y luego disminuyen de la misma manera.

Hagamos ahora otros ejemplos.

1 Pedro está jugando con su hermano. Han determinado que cada uno lanzará un dado no cargado 7 veces y ganará la partida quien obtenga un número mayor que 2 en 3 de los 7 lanzamientos. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

Definamos los parámetros,

$n = 7$ *(número de repeticiones del experimento)*

$p = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ *(probabilidad de obtener un número mayor que 2, probabilidad de éxito)*

$1 - p = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$

$k = 3$ *(se quiere que el éxito suceda en 3 de los 7 lanzamientos)*

Por lo tanto, aplicando la fórmula, $P(k) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$, se tiene que:

$$P(3) = \binom{7}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{7-3} = 35 \cdot \frac{8}{27} \cdot \frac{1}{81} = \frac{280}{2187} \approx 0{,}128 = 12{,}8\ \%$$

Por lo tanto, la probabilidad de obtener un número mayor que 2 en 3 de los 7 lanzamientos, y con eso ganar, es 12,8 % aproximadamente.

2 Se tiene una urna con bolitas de dos colores: 25 rojas y 45 verdes. Se extrae una bolita, se mira su color y se devuelve a la urna. Si repite esta acción 12 veces, ¿cuál es la probabilidad que aparezca una bolita verde a lo más 5 veces?

Anotemos nuestros datos:

$n = 12$ *(veces que se repite el experimento)*

$k = 5$ *(se quiere que el éxito suceda a lo más 5 veces)*

$p = \frac{45}{70} = \frac{9}{14}$ *(probabilidad de obtener una bolita verde)*

$1 - p = 1 - \frac{9}{14} = \frac{5}{14}$

Como se desea obtener a lo más 5 veces una bolita verde, entonces las posibilidades de esto son: obtener 0 o 1 o 2 o 3 o 4 o 5 bolitas verdes. Por lo tanto debemos calcular $F(5)$. La fórmula es:

$F(k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{k} \cdot (p)^i \cdot (1-p)^{n-i}$, con lo que podemos anotar que:

$$F(5) = \sum_{i=0}^{5} \binom{12}{i} \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^i \cdot \left(\frac{5}{14}\right)^{12-i}$$

$$= \binom{12}{0} \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{14}\right)^{12-0} + \binom{12}{1} \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^1 \cdot \left(\frac{5}{14}\right)^{12-1}$$

$$+ \binom{12}{2} \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{14}\right)^{12-2} + + \binom{12}{3} \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{14}\right)^{12-3} +$$

$$\binom{12}{4} \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{14}\right)^{12-4} + \binom{12}{5} \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{14}\right)^{12-5}$$

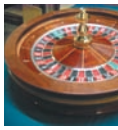
$$= \left(\frac{5}{14}\right)^{12} + 12 \cdot \frac{9}{14} \cdot \left(\frac{5}{14}\right)^{11} + 66 \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^2 \cdot \left(\frac{5}{14}\right)^{10}$$

$$+ 220 \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{14}\right)^9 + + 495 \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{14}\right)^8$$

$$+ 792 \cdot \left(\frac{9}{14}\right)^5 \cdot \left(\frac{5}{14}\right)^7$$

$$\approx 0{,}09334$$

$$= 9{,}33\%$$



3 Una empresa fabrica colchones. La probabilidad de extraer un colchón defectuoso de una muestra es del $5\ \%$. Si se eligen al azar 20 muestras distintas, ¿cuál es la probabilidad que aparezcan 3 o más colchones en buen estado?

Datos del problema:

$n = 20$ *(número de elecciones de un colchón al azar)*

$p = 5\ \% = 0{,}05$ *(probabilidad de un colchón defectuoso)*

Nota que, para calcular lo pedido debiéramos calcular la probabilidad de que 3 o 4 o 5 o … o 20 estuvieran en buen estado. Para esto, es más sencillo calcular la probabilidad de que a lo más existan 2 defectuosos.

Entonces, $k = 2$. Hagamos el cálculo correspondiente:

$$F(2) = \sum_{i=0}^{2} \binom{20}{i} \cdot 0{,}05^i \cdot 0{,}95^{20-i}$$

$$F(2) = \binom{20}{0} \cdot 0{,}05^0 \cdot 0{,}95^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}05^1 \cdot 0{,}95^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{18}$$

$$= 0{,}95^{20} + 20 \cdot 0{,}05 \cdot 0{,}95^{19} + 190 \cdot 0{,}05^2 \cdot 0{,}95^{18}$$

$$\approx 0{,}9245$$

$$= 92{,}45\%$$



4 Manuel le ha puesto un peso a la moneda que su papá le ha regalado para que ésta quede cargada y poder jugar con él después. Su papá, al que le gusta mucho la matemática, ha tomado la moneda y jugado un rato con ella, calculando que la probabilidad de obtener cara es de $\frac{1}{5}$. Manuel le propone jugar, se tira la moneda 10 veces – le dijo – y gana aquel que consigue a lo más 8 caras. El papá de Manuel lo miró detenidamente y sin demorarse mucho, calculó cuál era la probabilidad que tenía de ganar, ¿puedes hacerlo tú?

Datos: $n = 10$, $P(\text{cara}) = \frac{1}{5}$, $P(\text{sello}) = \frac{4}{5}$.

Como el cálculo de $F(8)$ es largo y complicado, entonces, utilicemos la probabilidad del complemento, es decir, haremos $1 - [P(9) + P(10)]$

Entonces, se tiene que:

$$1 - \left[\binom{10}{9} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^9 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^1 + \binom{10}{10} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{10} \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^0\right]$$

$$1 - \left[10 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^9 \cdot \frac{4}{5} + 1 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{10} \cdot 1\right]$$

$$1 - 9{,}22 \cdot 10^{-7}$$

$$0{,}999999078$$

$$99{,}9\%$$

5 Mauricio trabaja en una compañía de seguros. Él, cada día tiene que lograr vender 7 o más seguros. La probabilidad de que lo haga es de un $45\ \%$. Si las ventas de cada día son independientes de las ventas de los días anteriores, ayúdale a determinar a Mauricio:

a. ¿Cuál es la probabilidad que exactamente 15 días de un total de 20 días del mes de mayo logre su meta?

El total de los experimentos es $n = 20$, números de éxitos buscados es $k = 15$ y la probabilidad de éxito es $p = 0{,}45$, entonces, la probabilidad pedida es:

$$P(15) = \binom{20}{15} \cdot 0{,}45^{15} \cdot 0{,}55^{5} \approx 0{,}005 \approx 0{,}5\,\%$$

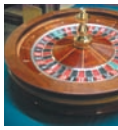
b. ¿Cuál es la probabilidad de que como máximo en tres días no logre la meta?

En este caso, la probabilidad de éxito cambia, pues lo que se quiere es que no logre la meta en ningún día o en un día o en dos días o en tres días. Por lo tanto, nuestros parámetros serán: $n = 20$, $k = 0{,}1{,}2{,}3$ y $p = 0{,}55$. Entonces la probabilidad buscada será:

$$\begin{aligned} P(k \leq 3) &= \sum_{k=0}^{3} \binom{20}{k} \cdot 0{,}55^{k} \cdot 0{,}45^{20-k} \\ &= \binom{20}{0} \cdot 0{,}55^{0} \cdot 0{,}45^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0{,}55^{1} \cdot 0{,}45^{19} + \binom{20}{2} \cdot 0{,}55^{2} \cdot 0{,}45^{18} \\ &\approx 1{,}16 \cdot 10^{-7} + 2{,}83 \cdot 10^{-6} + 3{,}29 \cdot 10^{-5} \\ &\approx 3{,}5846 \cdot 10^{-5} \approx 0{,}0035846\,\% \end{aligned}$$

Como puedes ver, podemos aplicar este conocimiento en problemas reales, como siempre la matemática está presente en nuestro ámbito cercano.

Hemos llegado al final de nuestro aprendizaje matemático por este año y esperamos que hayas aprendido los conocimientos que acá te hemos presentado, pues cómo pudiste darte cuenta, cada uno de ellos se aplica ya sea en nuestra vida diaria o, en distintas áreas del conocimiento, por lo que es necesario que los comprendas a cabalidad de modo que puedas desenvolverte de manera fácil en tu día a día.



Trabaja

Resuelve en tu cuaderno los siguientes ejercicios. Usa calculadora para realizar los cálculos. Revisa tus respuestas en el solucionario:

1 La probabilidad de éxito de un evento A es es $\frac{7}{13}$, para un experimento dado. Determina:

- **a.** La probabilidad que en 20 repeticiones del experimento, en exactamente 4 oportunidades el evento A tenga éxito.
- **b.** La probabilidad de que, en 30 repeticiones, el suceso A fracase en a lo más 4 oportunidades.
- **c.** La probabilidad que el evento A fracase en exactamente 3 veces de un total de 40 repeticiones.

2 En un juego de azar se tira un dado no cargado. Se perderá si se obtiene exactamente tres veces un número impar o múltiplo de 3 y en otro caso se ganará. Determina:

- **a.** El número obtenido en el dado es una variable que distribuye binomialmente, ¿cuál es la razón?
- **b.** Escribe la distribución correspondiente en este caso para la variable que permite obtener un número ganador en n tiradas del dado.
- **c.** ¿Cuál es la probabilidad de ganar en 20 lanzamientos?
- **d.** ¿Cuál es la probabilidad de perder si se consideran 45 lanzamientos?
- **e.** ¿Cuál es la probabilidad de ganar si se consideran 100 lanzamientos? ¿Qué sucede al compararla con el resultado obtenido en **d.**?

3 Se sabe que en el control de calidad de una empresa que fabrica lápices, existen 20 lápices con fallas, de cada $1\,000$ que se revisan. Si se repite la acción de extraer al azar un lápiz para verificar su calidad, determine:

- **a.** La probabilidad que en 400 extracciones hallan exactamente 3 lápices con fallas.
- **b.** La probabilidad que en 500 extracciones el número de lápices con fallas sean como máximo 5.
- **c.** La probabilidad que en 600 extracciones el número de lápices sin fallas sea exactamente 588.
- **d.** La probabilidad que en 100 extracciones el número de lápices sin fallas sea como mínimo 97.

4 Una productora musical ha estimado que la probabilidad que las personas compren una entrada para el recital del artista que están promocionando es $\frac{5}{7}$. Un grupo de 50 personas ha sido encuestado sobre la compra de estas entradas, determina:

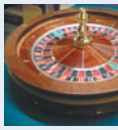
- **a.** La probabilidad que exactamente 6 personas hayan comprado las entradas.
- **b.** La probabilidad que a lo más 3 no hayan comprado entradas.
- **c.** La probabilidad que exactamente 10 no hayan comprado la entrada.
- **d.** Ayudado de un programa de simulación digital, como el que te mostramos anteriormente, grafica la distribución para la situación planteada en **a.**

5 Un estudio médico ha concluido que la probabilidad que una persona evidencie un rasgo genético de un cierto tipo es $0{,}53$. En base a esto, si se toma una muestra de 100 pacientes, determina:

- **a.** La probabilidad de que exactamente 60 de ellos presenten ese rasgo genético.
- **b.** La probabilidad de que a lo más 4 pacientes lo evidencien.
- **c.** La probabilidad de que 50 pacientes no lo presenten.

6 La probabilidad que Facundo dé en el "blanco" con un dardo, es $0{,}20$. Encuentra la probabilidad de que si se lanzan cinco dardos iguales obtenga: (Expresa tu respuesta de manera porcentual)

- **a.** Ningún "blanco".
- **b.** Exactamente un "blanco".
- **c.** Al menos dos "blancos".
- **d.** Entre dos y cuatro.



7 En un experimento se realizan siete pruebas independientes entre sí y con la misma probabilidad de éxito que es $35\ \%$. Responde:

a. ¿La probabilidad de que no se manifieste el éxito durante las siete pruebas es mayor a $11{,}50\ \%$? ¿Por qué?

b. ¿Con qué probabilidad puede fracasar cinco veces?

c. ¿Por qué la probabilidad de fracasar cinco veces seguidas es igual a lo respondido en **b.**?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que haya éxito hasta cinco veces?

e. Encuentra la probabilidad de que haya éxito exactamente cinco veces o exactamente dos.

8 Un examen de 10 preguntas a las que hay que contestar SI o NO. Suponiendo que a las personas que se le aplica no saben contestar a ninguna de las preguntas y, en consecuencia, contestan al azar. Determina:

a. La probabilidad de obtener cinco aciertos.

b. La probabilidad de obtener algún acierto.

c. La probabilidad de obtener al menos cinco aciertos.

9 En una población en la que hay un $40\ \%$ de hombres y un $60\ \%$ de mujeres seleccionamos 4 individuos, determina:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que haya 2 hombres y 2 mujeres?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que haya más mujeres que hombres?

10 La probabilidad que un alumno de segundo año de universidad repita un ramo es de $0{,}3$. Si elegimos 20 alumnos al azar del curso, ¿cuál es la probabilidad de que haya exactamente 4 alumnos que reprueben el ramo?

Trabaja

Resuelve los siguientes problemas con tu grupo. Recuerda que puedes usar calculadora o algún programa computacional que te ayude a realizar los cálculos de manera más sencilla. No olviden chequear sus respuestas en el solucionario:

1 Margarita discutía con su hermana y le decía que ella sacaba ventaja porque sabía más matemática, la que usaba para ganarle siempre... Muy enojada le mostró el papel que había arrugado y botado al basurero… este decía: "probabilidad de ganar $\frac{3}{5}$ _ al obtener la carta 8 del naipe de frutas... hay que obtener exactamente 5 cartas de un total de 20 extracciones reponiéndolas..." Aunque los cálculos no fueron entendidos por Margarita, les pedimos que ustedes los hagan, estos pedían lo siguiente:

a. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 5 de las cartas mencionadas en el total de 20 extracciones?

b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos 2 de las cartas mencionadas en las 20 extracciones?

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener exactamente 1 de las cartas mencionadas en las 20 extracciones?

d. Es mayor la probabilidad si se aumentan las extracciones a 30 y se disminuye el número de cartas deseadas a 2 o si se disminuyen las extracciones a 10, pero se aumenta el número de cartas a 7.

e. ¿Tenía razón Margarita para estar enojada?

2 Miro el mar y sin querer, escucho la charla de mis abuelos en la terraza:

- Se ha comentado que en el último tiempo han nacido más niñas que niños en Chile.
- *Así lo escuché en la radio, Amanda. Dicen que por cada dos niñas que nacen, aparece un varón.*
- Me llaman y mi abuela me pregunta: "Cuándo seas grande y te cases, ¿Cuántos hijos te gustarías tener? *Tres les contesté por inercia... y a lo más tendría dos niñas*. Me alejo pensando: *y si no tuviera ninguna niña, ¿qué tan probable sería, si esta situación de nacimientos se mantiene*?

Suponiendo que toda la información fuera real:

a. Escriban la función de probabilidad para la variable aleatoria X que representa el número de niñas que nacen de un total de tres hijos.

b. Para la misma variable aleatoria, escriban la función de distribución.

c. Respondan la pregunta mencionada al final del último párrafo al pensar que no tendría ninguna niña.

Ahora bien, ¿Cuál es la probabilidad de:

d. a lo más tener dos niñas?

e. a lo más menos tener un niño?

3 ...Dos oficinistas cuchichean mientras simulan trabajar...

- *Oye ¿quién es el guapetón que viene entrando?...*
- Se llama Vladimir, y lo llamaron para resolver la extraña desaparición de cinco jóvenes
- *¡Ah!. Son los cinco casos independientes...¡y viene acompañado!*
- Se llama Valeska, y es la otra experta.... Juntos resuelve con un éxito de un $80\ \%$ cada caso que les presentan... Les llaman el "Dúo VV"...
- *Me daré por satisfecha, si resuelven por lo menos el $80\ \%$ de los casos... Soy poco exigente ¿no?, pero ¿qué tan probable será esto?*

Los invitamos a trabajar respondiendo:

Si la variable aleatoria X es "el número de casos resueltos por el Dúo VV en la extraña desaparición":

a. Escriban la función que represente la expresión "me pongo en todas las situaciones posibles de su éxito"

b. Escriban la función con la que se puede calcular la probabilidad de la frase *"resuelven por lo menos el $80\ \%$ de los casos".*

c. ¿Cuál es la probabilidad de que resuelvan de dos a cuatro casos?

d. ¿Qué representa $p(1 < x \leq 3)$? ¿Cuál es su valor?

e. ¿En cuál de los valores de la función de probabilidad se representaría "la insatisfacción más profunda de una de las personas que cuchichea? ¿Cuál es esta probabilidad?

f. Indiquen los valores de $p\,(x < 0\,)$ y $p\,(5 \leq x\,)$.

4 – Mamá, veo que te está yendo muy bien con la venta de jugos y bebidas este verano...

- Si, hija, para ser primeriza en esto, creo que está muy bien... por cada tres jugos envasados que vendo, se venden 8 bebidas cada hora... me sorprende esto...
- ¡Qué bien!... yo te puedo ayudar a estimar la probabilidad de algunas ventas…

Ustedes también pueden hacer lo mismo… Respondan estas preguntas:

a. ¿Cuál es la probabilidad que en 30 ventas, se vendan exactamente 15 bebidas?

b. ¿Cuál es la probabilidad que en 20 ventas, por lo menos se vendan 5 jugos?

c. ¿Cuál es la probabilidad que se vendan por lo menos 5 jugos y no más de 8, en 15 ventas?

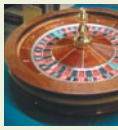
5 Esteban está muy preocupado por su rendimiento en el equipo de básquetbol de su colegio. Su entrenador le ha dicho que, en los tiros libres ha observado que en promedio, acierta solo 4 de 10. Esteban ha decidido entrenar mucho más. Como su profesor de matemática le ha hablado tanto de las probabilidades, ha ido donde él y le ha preguntado lo siguiente:



a. ¿Cuál es la probabilidad de que, al practicar la primera vez, lanzando 50 tiros acierte exactamente a 40 de ellos?

b. Si con algunas de estas prácticas mejora sus tiros a razón de 5 aciertos de 10, ¿Cuál es la probabilidad, ahora de que nuevamente en 50 tiros acierte 40 de ellos?

c. Si con estas prácticas mejora 6 de 10 tiros acertados, ¿cuál es la probabilidad, ahora, de acertar 40 de los 50 que realiza?



Revisemos lo aprendido

Te invitamos a evaluar el desempeño grupal de tus compañeros. Marca con una cruz el casillero correspondiente según la evaluación que hagas de su trabajo y realízalo para cada integrante del grupo.

☺ Logrado ☺ Medianamente logrado ☹ No logrado

Indicadores	☺	☺	☹
Propone ideas para el desarrollo de los ejercicios.			
No impone sus ideas sobre los demás integrantes del grupo.			
Realiza su trabajo con un nivel óptimo de calidad.			
Trabajé con mi grupo, aportando cuando fue necesario.			

Si has contestado 2 o más cruces en las columnas de la derecha, debes repasar lo visto y volver a hacer los ejercicios que fueron más difíciles de hacer.

Mis apuntes

Trabaja más...

Trabaja en forma individual

I. Probabilidad condicionada

1 Si A y B son sucesos donde $P(A/B) < 30\ \%$ y $P(B) = 17\ \%$, ¿cuál es el intervalo de variación de $P(A \cap B)$, si se sabe que por lo menos supera el $2\ \%$? Expresa tu respuesta usando porcentajes.

2 Sean C y D sucesos tales que $P(C \cap D) = 0{,}13$ $P(D/C) = 0{,}78$ y $P(D) + P(C) = \frac{11}{30}$. Encuentra:

a. $P(C)$

b. $P(C/D)$

3 Si T y Q son sucesos de un mismo experimento, y $P(T/Q) = \frac{3}{p-1}$; $P(Q) = 1 - \frac{1}{p}$; $P(T \cap Q) = 1 - \frac{5}{p}$, donde p es un natural, halla el valor de:

a. p

b. $P(T/Q)$

c. $P(\text{no } T \cup \text{no } Q)$

d. $P(\text{no } Q)$

4 Sean M, N, R sucesos aleatorios, tales que: $P(M/N) = 0{,}375$; $P(N) = 0{,}4$; $P(R) = 0{,}35$; $P(M \cap N) = P(N \cap R)$. Encuentra el valor de $P(N/R)$.

5 Si A y B son sucesos donde $P(A) = 44\ \%$, $P(B) = 40\ \%$ y $P(A \cap B) = 25\ \%$, ¿será verdad que: "como $P(A) > P(B)$, luego $P(A/B) > P(B/A)$"? Justifica tu respuesta haciendo todos los cálculos respectivos.

6 Considera los naturales comprendidos entre el 6 al 75, ambos inclusive. Se elige uno de ellos al azar y es múltiplo de 3. Haciendo uso de las fórmulas de probabilidad condicionada, ¿cuál es la probabilidad de que:

a. sea divisible por 5?

b. no sea divisible por 7?

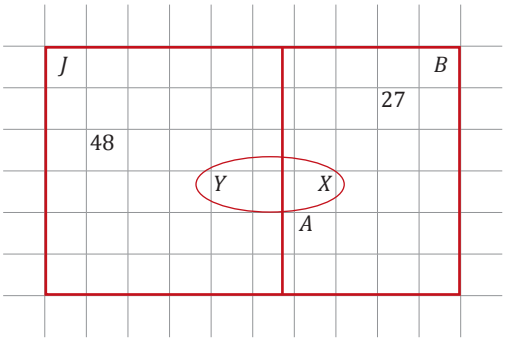
7 En una encuesta a 100 personas acerca de lo que prefieren beber para acompañar su almuerzo diario, el resultado se presenta en el siguiente diagrama. Donde J representa el número de personas que prefieren jugos naturales; B, las personas que prefieren bebidas gaseosas; A, las personas que prefieren el sabor amargo; X e Y el número de personas entrevistadas que prefieren jugos o bebidas con sabor amargo respectivamente. Sabiendo que $p(J) = 0{,}55$, calcula:

a. $p(A/J)$

b. $p(A/B)$

c. $p(\text{no } A/J)$

d. $p(\text{no } A/B)$



8 A Marta le han pedido que dibuje un paralelogramo cualquiera. Para esto, ella ha lanzado un dado rojo cuyo número resultante le dará el largo de la base, y otro azul, cuyo número que aparece le permitirá saber la altura respectiva. Todas estas medidas en cm ¿Cuál es la probabilidad de que la figura que dibuje:

a. tenga la base mayor que la altura, si esta mide más de 2 cm?

b. presente el área de $9\ \text{cm}^2$, a lo menos, sabiendo que la base y la altura miden igual?

c. tenga perímetro, a lo máximo de 16 cm, dado que la base sea menor que la altura?

d. posea la base mayor a 3 cm, sabiendo que el área supera o es igual a $20\ \text{cm}^2$?

e. tenga como altura 5 cm, sabiendo que su perímetro es mayor a 12 cm y menor a 20 cm?

9 La señora Sara concurrió a su médico tratante con los resultados de la biopsia que este le solicitara. Conforme a estos, le indicó que había un $75\ \%$ de probabilidades de que tuviera un tumor. "Ahora bien, si usted tuviera un tumor, la probabilidad de que sea cancerígeno se redujo a un $15\ \%$. Esto se debe a que usted detectó a tiempo esta anomalía y vino a verme –le dijo el médico–. En conclusión, la probabilidad de que usted tenga un tumor y sea cancerígeno es...". De acuerdo a lo anterior, ¿cuál es la probabilidad de que la señora Sara tenga un tumor y sea cancerígeno?

10 "Aló, ¿señora Albertina? Habla Rubén. Estoy viviendo cerca de la estación de metro Pedro de Valdivia. De lunes a viernes, antes de ir al trabajo, desayuno en una cafetería que queda en uno de los pasillos de esa estación. Fíjese que por $\$\ 1\,900$ puedo elegir entre una taza de café, té o leche; un sándwich triangular de palta/queso o jamón/queso. ¡Y no solo eso!, sino que además un pastelillo de manjar, manzana o chocolate. Escriba, por favor, el número del local, para que le cuente a Mónica y a Pedro". Conforme a lo leído anteriormente, encuentra la probabilidad de que Rubén:

a. habiendo elegido un pastelillo de manjar, haya optado por un sándwich de palta/queso.

b. haya escogido un sándwich con queso, sabiendo que decidió beber leche.

c. haya elegido tomar café, sabiendo que entre los sándwiches optó por jamón/ queso, y entre los pastelillos, por chocolate.

d. habiendo optado por té o leche, haya decidido por un sándwich de palta/queso y un pastelillo de manzana.

11 Benito es el nuevo gerente del restaurante Don Evaristo. Aquí solo se da servicio mediante reservas. Benito se ha informado de que el $20\ \%$ de las personas que reservan una mesa no asistirán. Ahora bien, el $40\ \%$ de los asistentes prefieren hacer reservas antes de arriesgarse a no tener mesas. ¿Cuál es la probabilidad porcentual de que una persona haga la reserva y asista?

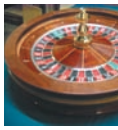
12 –Como te iba diciendo, Pamela, estaba en mi casa escuchando por la radio Cosmos 77, el ranking de los 25 temas musicales mejores del mes y participando en el premio sorpresa. El DJ consideró finalmente las 10 primeras canciones que obtuvieron las preferencias máximas en votación directa. Mi canción favorita estaba en el quinto lugar; por lo tanto, quedé para optar al premio. Entonces fue cuando el DJ dice textualmente: "El premio sorpresa va a quedar en cualquiera de las siguientes regiones, con igual opción de ganar: la Octava, la Decimoquinta y la Undécima Región". Me latió el corazón muy rápido porque estaba la nuestra. En ese momento, mi pololo, que estaba conmigo escuchando, me dijo una de esas cosas que no le entiendo para nada: "Mariana, el programa está arreglado. La probabilidad de que una persona sea escogida como ganadora es de un $35\ \%$ si dicha persona es de la Octava Región, y aumenta a $45\ \%$ si es de la Decimoquinta. Entonces, no te ilusiones mucho en ganar". Cinco minutos más tarde me llamaron de la radio anunciándome que era la ganadora. Basándote en lo leído en el enunciado de este problema, contesta: ¿cuál es la probabilidad de que Mariana sea la ganadora y:

a. sea de la Octava Región?

b. viva en la Decimoquinta Región?

c. tenga domicilio en la Undécima Región?

13 "Silvita, hazme caso. Yo, como procuradora, que estoy trabajando en este medio judicial, te propongo que acudas a don Fermín por si acaso, le cuentes tu caso; y vas a tener mucha oportunidad de ganar el juicio. Sé que es un poco difícil llegar a él, ya que es un abogado muy competente y solicitado. A este respecto, hay un $15\ \%$ de que tome tu caso y gane. Ahora bien, una vez que ha tomado tu caso, la probabilidad de que gane es de un $90\ \%$. Te veo muy pensativa, Silvita, seguramente te estarás preguntando qué tan probable es que tome tu caso". Tomando en referencia la información presente en el párrafo anterior, ¿qué tan probable es que tome el caso de Silvita?



14 Gustavo es un muy buen mecánico automotor. Constantemente se está perfeccionando para optimizar su atención al cliente. Como una forma de acentuar la prevención de accidentes, decidió mirar en internet encontrando la siguiente información:

Accidentes en el tránsito, según causa que lo origina, 2009

CAUSA	ACCIDENTES						
	Tipo de Accidente						
	TOTAL	Atropello/1	Caída/1	Colisión/2	Choque/3	Volcadura/1	Otros
TOTALES	56330	8174	1602	29042	13783	3112	617
FALLAS MECÁNICAS	829	21	16	188	338	245	21
Frenos	394	16	8	138	174	55	3
Dirección	97	1	0	11	49	34	2
Eléctrico	9	1	0	4	3	1	0
Suspensión	7	0	0	0	2	5	0
Neumáticos	282	2	5	22	99	139	15
Motor	18	0	1	5	5	6	1
Carrocería	22	1	2	8	6	5	0

Se hizo muchas preguntas con respecto a los vehículos. Te invitamos a que tú las respondas. ¿Cuál es la probabilidad de que:

a. sabiendo que se produjo un atropello, haya sido por una falla en neumáticos?

b. se hayan producido una falla en el motor y un choque?

c. ocurra una colisión, habiéndose producido un desperfecto eléctrico?

d. haya acontecido una volcadura, resultado de una falla de suspensión o de carrocería?

e. haya pasado otro tipo de accidente, sabiendo que no hubo fallas ni en los frenos ni en la dirección ni en los neumáticos?

15 En una Industria de LCD, las máquinas robotizadas A, B y C manufacturan, respectivamente, el $25\ \%$, el $36\ \%$ y el $39\ \%$ del total. Sin embargo, en la producción de cada máquina, el $2\ \%$, $3\ \%$ y $5\ \%$ son LCD defectuosos, dados en el mismo orden en que se mencionan las máquinas.

Sabiendo que d simboliza un LCD defectuoso y $\overline{d}$, lo contrario, se realiza un control de calidad, tomando al azar un LCD de la producción total.

a. Encuentra $p(\overline{d}/C \cup B)$.

b. ¿Será verdad que $p(\overline{d}/A \cup B) > p(\overline{d}/C)$?. Justifica tu respuesta.

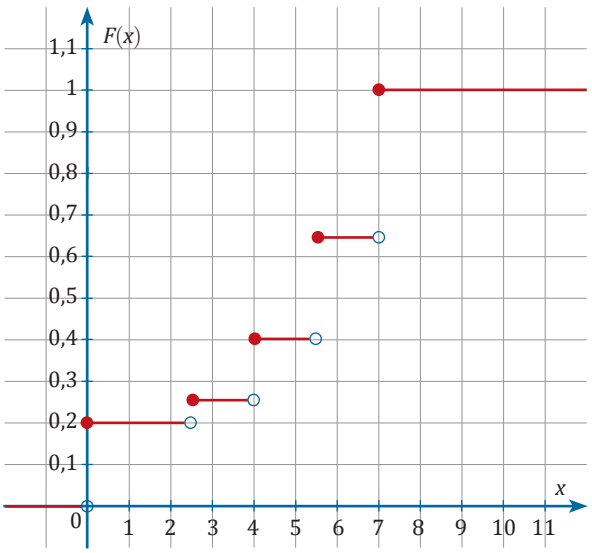
c. Efectúa $p(d/C)p(C)$. Porcentualmente, ¿qué significa el valor que has obtenido?

d. ¿Al calcular $p(d/A)p(A) + p(d/B)p(B) + p(d/C)p(C)$, coincide con $p(d)$? Fundamenta tu respuesta.

e. Supongamos que por cada LCD defectuoso esta industria pierde 80 dólares, sin embargo, gana 427 dólares por la venta de un LCD no defectuoso. Si se venden grandes cantidades de LCD, sobre un millón de unidades, ¿cuánto debiera recibir por la venta de cada uno de ellos? Aproxima tu respuesta a dos decimales.

II. Función de probabilidad y función de distribución acumulada

1 Observa el siguiente gráfico de distribución de probabilidad para una cierta variable aleatoria



a. Escribe la función de distribución de probabilidad F para esta variable aleatoria.

b. ¿Qué representa $F(5{,}5) - F(4)$?

c. Escribe la función de probabilidad f respectiva.

d. ¿Para qué valor de la variable f alcanza su valor máximo?, ¿Cuánto es éste?

e. Haz una gráfica de dicha función.

f. Elabora una pregunta que puedas responder con la información que has logrado en este problema.

2 Supón que lanzamos dos monedas al aire y, sea X la variable aleatoria que identifica el número de caras obtenidas en el lanzamiento. Halla la función de probabilidad.

3 Se lanza un par de dados y se define la variable aleatoria X, como el menor de los dos números que aparezcan. Halla la función de probabilidad X.

4 En la casa del Sr. Cornejo ingresan semanalmente una gran cantidad de llamadas telefónicas, generalmente ofreciendo algún producto, el Sr. Cornejo bueno para las estadísticas, elaboró una tabla, donde define X como la variable que representa las llamadas semanales de firmas comerciales y $f(x)$ su probabilidad asociada:

X	0	1	2	3	4	5	6
$f(x)$	0,02	0,3	a	0,2	0,03	0,04	0,01

¿Cuál debe ser el valor de a para que la tabla represente una función de probabilidad?

5 Sea X una variable aleatoria que representa el número de personas por hora que visita un departamento piloto de un edificio y $P(X)$ su probabilidad.

X	**Probabilidad** $P(X)$
0	0,03
1	0,13
2	0,15
3	0,08
4	0,20
5	0,28
6	0,10
7	0,03

Determina:

a. El valor esperado de clientes por hora.

b. La varianza.

6 Dada la siguiente tabla de distribución de probabilidades:

X	**Probabilidad** $P(X)$	**Probabilidad acumulada**
0	0,15	0,15
1	0,18	0,33
2	0,2	0,53
3	0,12	0,65
4	0,15	0,80
5	0,20	1

Determina:

a. $P(x \leq 2)$

b. $P(x \leq 4)$

c. $P(x > 3)$

7 Dada la siguiente tabla:

X	**Probabilidad** $P(X)$	**Probabilidad acumulada**
0	0,08	0,08
1	0,21	0,29
2	a	b
3	0,35	0,80
4	0,06	c
5	0,14	1

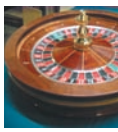
Determina los valores de a, b y c.

8 Un jugador lanza un dado no cargado. Si sale número par, gana tantos cientos de pesos como marca el dado, pero si sale número impar, pierde tantos cientos de pesos como marca el dado. ¿Cuánto espera ganar el jugador?

9 Dada la siguiente tabla:

X	**Probabilidad** $P(X)$
0	0,2
1	a
2	b
3	0,3

Determina los valores de a y b, sabiendo que la esperanza de X es 1,8.



10 Dada la siguiente función de distribución. Determina la esperanza de la siguiente distribución:

Valor (X)	Probabilidad $P(X)$
2	0,2
4	0,55
6	0,85
8	1

11 Sea X una variable aleatoria que representa el número de clientes que llega a una tienda en un periodo de una hora. Dada la siguiente tabla:

X	Probabilidad $P(X)$
0	0,05
1	0,10
2	0,10
3	0,10
4	0,20
5	0,25
6	0,15
7	0,05

Determina:

a. La varianza.

b. La desviación estándar.

12 En una tienda comercial, los televisores Full HD, se están agotando rápidamente. Esto preocupa al gerente, quien pide un informe sobre la demanda diaria al departamento de ventas. La respuesta que le han enviado refleja la demanda diaria (X) y la probabilidad en que se estima esta demanda $(P(X))$, según lo que se muestra en la siguiente tabla:

X	Probabilidad $P(X)$
0	0,05
1	0,15
2	0,25
3	0,12
4	0,20
5	0,05
6	0,12
7	0,06

Calcula:

a. La varianza.

b. La desviación estándar.

13 Una variable aleatoria X toma los valores: 14, 8, -19, -9 y $0{,}7$. Las probabilidades que se requieren para obtener $E(X)$ entre ellos son $0{,}24$; $0{,}15$; $0{,}13$; $0{,}25$ y $0{,}23$, respectivamente:

a. ¿Cuál es el signo de la esperanza matemática? ¿Por qué?

b. ¿Cuánto vale $V(X)$? Expresa tu respuesta con cuatro decimales.

c. ¿Hay algún número de los mencionados al comienzo del enunciado, que esté entre $E(X) - \sqrt{V(X)}$ y $E(X) + \sqrt{V(X)}$, ambos valores inclusive? ¿Por qué?

d. Ahora bien, a cada valor de la variable aleatoria X suma una cierta cantidad de tal modo que el menor de ellos valga 0. Haciendo los desarrollos necesarios muestra que la esperanza matemática ha aumentado en esta misma cantidad.

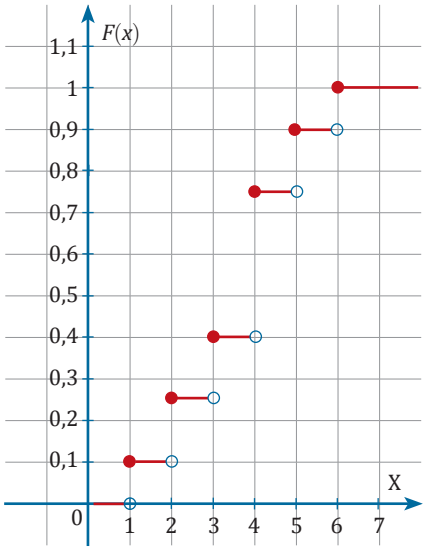
e. Conforme a lo respondido en **d.**, encuentra la varianza. Compara este valor con el obtenido en **b.** ¿Qué puedes decir al respecto?

14 Una caja contiene cinco fichas rojas y seis azules. Un jugador debe realizar dos extracciones sucesivas con reposición. Gana $\$\ 500$ si aparece una roja y luego una azul en cada extracción, y pierde $\$\ 200$ en cualquiera de los otros casos.

a. Determina la esperanza matemática del juego e indica si éste, a la larga, le es favorable o no.

b. Supongamos que deseamos que lo que has respondido en **a.** se revierta, ¿cuál (es) debiera (n) ser el (los) valor (es) por el (los) cuál (es) debe remplazarse $\$\ 200$ en el enunciado?

15 La siguiente gráfica corresponde a la función de distribución de probabilidad de una variable aleatoria X:



Encuentra:

a. $E(X)$

b. $V(X)$

c. La desviación estándar.

d. Asignando como $100\ \%$ el valor de $E(X)$ ¿en qué porcentaje se encontraría desviado el valor 4 de $E(X)$?

III. Distribución binomial

1 En una distribución binomial de parámetros $n = 8$ y $p = 0{,}4$. Calcula:

a. $P(4)$

b. $F(x < 3)$

c. $F(x \neq 0)$

d. $F(x \geq 7)$

e. $F(x \leq 8)$

2 La probabilidad de que un paciente se recupere de una delicada operación de corazón es de $0{,}9$. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente cinco de los siguientes siete se recuperen?

3 Un laboratorio descubre que en una población hay un $8\ \%$ de probabilidad de padecer una cierta enfermedad. Si se seleccionan 12 miembros de esta población aleatoreamente:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que no mas de dos padezcan esta enfermedad?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que no haya ningún miembro en la muestra seleccionada que padezca la enfermedad?

4 La probabilidad de meterle un penal a Claudio Bravo (arquero de la selección) es del $70\ \%$. Si en un entrenamiento, un jugador lanza 12 penales. Determina la probabilidad de:

a. Acertar 4 penales.

b. Que Bravo los ataje todos.

c. Acertar alguno.

d. Acertar entre 3 y 6.

5 Una prueba de conocimiento consta de 15 preguntas de verdadero o falso. Suponiendo que las personas que se le aplica responden al azar, determina:

a. La probabilidad de obtener cinco aciertos.

b. La probabilidad de obtener algún acierto.

6 Se sabe que el $35\ \%$ de las personas que asisten al teatro municipal, poseen abono de temporada. Si se toma una muestra al azar de 8 personas, ¿cuál es la probabilidad de encontrar:

a. exactamente 2, que lo posean?

b. a lo más 3, que lo posean?

c. al menos 5, posean?

d. no más de 5 pero no menos de 2, que posean abono de temporada?

7 Sea X una variable aleatoria, tal que $X \sim B(5; 0{,}55)$ y corresponde al número de logros en cinco ensayos independientes entre sí:

a. Verifica que $P(3) = 0{,}33690938$.

b. ¿Será verdad que $P(x \leq 4) = 0{,}94967156$? Justifica tu respuesta.

c. Para obtener la esperanza matemática completa la siguiente tabla.

Número de logros en cinco ensayos k	Probabilidad $P(k)$	$P(k) \cdot k$
0	0,01845281	
1	0,11276719	
2	0,27565313	
3		1,01072813
4	0,20588906	
5		
Total	1	

¿Es $E(X) = 2{,}75$?

d. Encuentra una relación numérica entre los parámetros 5 y 0,55, con el valor de $E(X)$.

e. Conforme a lo respondido en **d.**; propón una manera de obtener la esperanza matemática en una distribución binomial. Verifica con tu profesor y/o bibliografía.

8 Según la información de la página meteorológica que hemos consultado, la probabilidad de que llueva cualquier día de esta semana es 0,43. De mantenerse las condiciones meteorológicas estables, determina:

a. La probabilidad que llueva exactamente 2 días de la semana.

b. La probabilidad que al menos lluevan 4 de los 7 días de la semana.

c. La probabilidad que llueva 6 de los 7 días de la semana.

d. Grafica la distribución binomial, para exactamente 3 días de lluvia en una semana. Puedes ayudarte de algún programa computacional.

9 Una máquina impresora falla en 40 de 200 impresiones. Si una persona necesita imprimir 500 páginas, determina:

a. La probabilidad de que solo 1 hoja esté mal impresa.

b. La probabilidad de que como máximo hayan 3 impresiones defectuosas.

c. La probabilidad de que todas las páginas impresas estén en buen estado.

d. La probabilidad de que exactamente un centésimo de las páginas estén en mal estado.

10 Macarena tiene que dar una prueba ante una comisión de profesores en la universidad. Al llegar hoy, se ha dado cuenta que solo ha estudiado 8 de los 11 temas de la lista que su profesor le ha dado. Ella debe sortear 4 temas para contestar una lista de preguntas preparadas de antemano por los profesores. Su pololo le ha dicho que él puede calcular cuan probable es que le vaya bien, dependiendo de los temas que sortee. El hizo algunos cálculos y luego le dio algunos porcentajes. Tu también puedes dar los resultados a Macarena, respondiendo las siguientes preguntas: (escribe tu respuesta en porcentajes, aproximados al entero)

a. ¿Cuál es la probabilidad de que al sortear los 4 temas los haya estudiado?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 de los 4 temas sorteados los haya estudiado?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos 2 de los temas los haya estudiado?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que solo uno de los 4 temas lo haya estudiado?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que al sortear los 4 temas, ninguno de ellos lo haya estudiado?

11 Pilar trabaja como anfitriona en un restaurante en el cual se debe hacer reservas para la cena. Ella ha hecho una estadística del comportamiento de los clientes y ha establecido que el 5 % de las personas que reservan finalmente no acuden al restaurante. Ahora Pilar desea poder determinar algunos datos importantes. Ayúdala, respondiendo las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que de las 15 personas que llamaron hoy exactamente 3 no acudan realmente?

b. ¿Cuál es la probabilidad que de las 45 personas que reservan en una semana promedio, al menos 40 de ellas si asistan?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que, como máximo, 8 personas de 60 que reservan no asistan, pese a haber reservado?

d. ¿Cuál es la probabilidad que si para el día sábado de la semana en curso han reservado 12 personas, todas ellas asistan efectivamente?

12 Raúl tiene un gusto muy curioso… él colecciona calcetines negros y blancos. En el cajón de sus calcetines tiene 52 pares negros y 38 pares blancos. Cada mañana el los mira y trata de adivinar la probabilidad de sacar calcetines de su cajón al azar… Tú puedes responderle a Raúl las preguntas que él se hizo:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar 8 calcetines, exactamente 2 sean blancos?

b. ¿Cuál es la probabilidad que, al sacar 6 calcetines, al menos dos de ellos sean negros?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar 10 pares, ninguno de ellos sea blanco?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar 30 de ellos, como máximo hayan 3 negros?

e. ¿Cuál es la probabilidad de que, al sacar 12 de ellos, exactamente la mitad sea blanco?

IV. Ejercicios Misceláneos

1 Sean M y N dos sucesos aleatorios con $P(M) = 2P(N)$ y $P(M \cap N) = \frac{2}{3}P(N)$. Determina:

a. $P(M/N)$ **b.** $P(N/M)$

2 En una de las salas del aeropuerto, para ingresar al país, se encuentran 130 extranjeros provenientes de América y del resto del mundo. La razón entre el número de personas de ambos grupos es $2{:}3$. Además, el registro final indica que entraron 24 mujeres americanas y 44 del resto del mundo. Calcula las probabilidades que se piden a continuación, expresando tus respuestas porcentualmente, aproximando a la centésima:

a. $P\,(\text{hombre, si proviene de América})$

b. $P\,(\text{provenga de América, si es hombre})$

Ahora bien, haz las comparaciones que, a continuación presentamos. ¿cuál es mayor? Justifica tu respuesta:

c. $P\,(\text{mujer, si no proviene de América})$ y $P(\text{no sea mujer, si proviene del resto del mundo})$

d. $P\,(\text{mujer, si no proviene del resto del mundo})$ y $P\,(\text{no sea mujer, si proviene de América})$

3 Valeria tiene una caja con nueve fichas, cuatro de ellas rojas (r) y el resto, azules (a). Selecciona una de ellas al azar y sin mirarla la guarda en otra caja auxiliar. Nuevamente, retira otra ficha de la caja y resulta ser roja.

a. ¿Cuál es la probabilidad de la primera ficha haya sido también roja?

b. ¿Cuál es el valor de $P(a/r)$?

Posteriormente devuelve todas las fichas extraídas a la caja original. Acto seguido, quita dos sucesivamente, y sin mirarlas, las coloca en la caja auxiliar. Luego, saca nuevamente una ficha que resulta ser roja. Entonces se pregunta: "¿Cuál es la probabilidad de que las fichas que retiré antes hayan aparecido en el siguiente orden:

c. primeramente azul y después roja?"

d. ambas azules?"

Finalmente una de sus conclusiones le indica que cada pregunta anterior constituye un problema de probabilidad condicionada.

e. ¿Será verdad?; ¿Por qué? Justifica tu respuesta.

4 Sean A y B dos sucesos aleatorios con $p(A) = 4/5, p(B) = 4/7, p(A \cap B) = 3/8$. Determina:

a. $p(A/B)$

b. $p(B/A)$

5 Se lanzan dos dados, si el producto de ellos ha sido menor que 25 ¿cuál es la probabilidad de que alguno de los dados sea el factor tres?

6 En un colegio hay 90 alumnos de pre-básica de los cuáles 50 son niñas y 40 son niños, si hay 15 niñas y 24 niños que toman yogurt (ver tabla).

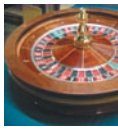
	niñas	niños
Toma yogurt	15	24
No toma yogurt	35	16

Determina:

a. Si se saca un alumno al azar, hallar la probabilidad de que sea niña.

b. Si se saca un alumno al azar, hallar la probabilidad de que sea niña y tome yogurt.

c. Si se saca del total de niñas a una de ellas, determinar la probabilidad de que tome yogurt.



7 En el almacén "Don pipo" llega temprano el pan, siempre en dos canastos A y B. El canasto A trae 5 kg de hallullas y 12 kg de marraquetas, el canasto B trae 6 kg de hallullas y 9 kg de marraquetas. La señora Sofía va temprano a comprar el pan y siempre trae 1 kg. Determina:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el kg de pan sean hallullas, si provienen del canasto A?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el kg de pan comprado por la señora Sofía sean marraquetas?

8 En la liga de fútbol chilena se constató, al final de temporada, que el 25 % de los jugadores que marcaron goles lo hizo de cabeza, que el 60 % lo hizo con el pie y un 16 % los convirtió tanto con el pie como con la cabeza, si se escoge un jugador al azar, determina:

a. La probabilidad de que halla marcado de cabeza si también marcó con los pies.

b. La probabilidad de que halla marcado con el pie, si también marcó con la cabeza.

9 Consideremos una urna que contiene 4 bolillas rojas y 5 blancas. De las 4 bolillas rojas, 2 son lisas y 2 rayadas y de las 5 bolillas blancas, 4 son lisas y una sola es rayada. Supongamos que se extrae una bolilla y, sin que la hayamos mirado, alguien nos dice que la bolilla es roja, ¿cuál es la probabilidad de que la bolilla sea rayada?

10 En una empresa hay 75 empleados, de los cuales, 40 son encargados de sección, y 35 son administrativos. Algunos de ellos utilizan ordenador para sus tareas y otros no. La siguiente tabla muestra el resumen de la información:

	Sin ordenador	Con ordenador	Total
Encargado	8	32	40
Administrativos	20	15	35
Total	28	47	75

Según lo anterior, determina:

a. La probabilidad de que al elegir una persona de la empresa sea un encargado, **sabiendo** que no tiene ordenador.

b. Cual es la probabilidad de que sea alguien que tenga ordenador **si se sabe** que la persona elegida es un administrativo.

11 Según las estadísticas, la probabilidad de que un auto que llega a cierta gasolinera cargue gasolina es de 0,79, mientras que la probabilidad de que ponga aceite al motor es de 0,11 y la probabilidad de que ponga gasolina y aceite al motor es de 0,06. Sí un auto carga gasolina, determina:

a. ¿cuál es la probabilidad de que ponga aceite?

b. ¿cuál es la probabilidad de que ponga gasolina sí un auto pone aceite al motor?

12 La siguiente tabla muestra información referente a la producción de rodamientos para camión de carga pesada. Se inspeccionan 200 rodamientos del tipo A y B, 300 del tipo C y 400 del tipo D, los resultados obtenidos en la inspección son:

Tipo rodamientos

Tipo de defecto	A	B	C	D	Total
I	8	23	40	15	132
II	28	12	14	5	59
Sin defecto	118	165	246	380	909
Total	200	200	300	400	1 100

a. Si se selecciona un rodamiento al azar y resulta que es un rodamiento del tipo B, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga defectos?

b. Si el rodamiento seleccionado es del tipo C, ¿cuál es la probabilidad de que tenga defectos del tipo II?

c. Si el rodamiento seleccionado tiene defectos del tipo I, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tipo A?

13 El departamento de salud de una determinada ciudad encarga un estudio que muestre la relación que hay entre la hipertensión y el fumar. Se ha elegido una muestra representativa y los resultados de una encuesta afín, se resumen en la siguiente tabla, que debes completar previamente:

	¿Fuma?			Subtotal
	SI		NO	
	Moderado	Excesivo		
Hipertensos	63	97		200
Sin problemas de presión	31	11	80	
Hipotensos	28		46	95
SUBTOTAL				

Si al elegir un individuo al azar ¿Cuál es la probabilidad de que

a. Ni fume, ni presente problemas de hipertensión?

b. Sabiendo que fuma excesivamente, tenga problemas de hipertensión?

c. Dado que no tenga dificultades de presión, fume moderadamente,

Ahora bien,

d. ¿Será verdad que, podemos azarosamente elegir más fácilmente: un encuestado fumador moderado, sabiendo que es hipotenso; frente a un hipertenso, si ya se sabe que no fuma? Justifica tu respuesta.

Por otro lado, si asignamos por los valores 0: "No fumar" ; 1: "fumar moderadamente", y 2: "fumar excesivamente", responde:

e. Si consideramos solamente los hipertensos, y pensando que estos índices se mantengan a largo plazo, ¿tenderá esta sub población a dejar de fumar? Fundamenta tu respuesta.

f. En las mismas condiciones en el tiempo, y pensando que la tabla reflejará una realidad similar, ¿el grupo de los hipotensos mantendrá su tendencia a fumar moderadamente? ¿Por qué?

g. Pensando en el futuro, ¿la población dejará de fumar? Haz los cálculos necesarios para responder, tomando en cuenta la prevalencia de los datos de la tabla.

14 Determina, para la variable definida en la siguiente tabla:

X	Probabilidad $P(X)$
0	0,1
1	0,25
2	0,05
3	0,3
4	0,3

a. La función de distribución.

b. Esperanza matemática.

c. Varianza.

d. Desviación estándar.

15 Lanzadas cuatro monedas, consideremos la variable aleatoria: el número de caras obtenidas. Calcula, de la variable aleatoria así definida:

a. La función de probabilidad.

b. La función de distribución.

c. Esperanza matemática.

d. Varianza.

e. Desviación estándar.

16 Se extraen simultáneamente tres bolas de una urna, que contiene 8 bolas rojas y 5 verdes, si la variable aleatoria es el número de bolas rojas extraídas. Determina:

a. La función de probabilidad.

b. La función de distribución.

c. La esperanza matemática.

d. La varianza.

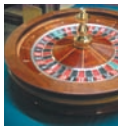
e. Desviación típica o estándar.

17 Un alumno ha estudiado 14 temas de los 30 que entran en el examen. Se eligen 2 temas al azar. El alumno puede haber estudiado los dos, uno o ninguno. Determina:

a. La función de probabilidad.

b. La función de distribución.

c. La esperanza matemática.



18 La función de distribución de la variable aleatoria X está dada por:

$$F(X) = \begin{cases} 0 & x < 10 \\ 0{,}2 & 10 \leq x < 20 \\ 0{,}2 + a & 20 \leq x < 30 \\ 0{,}2 + a + b & 30 \leq x < 40 \\ 0{,}2 + a + b + c & 40 \leq x < 50 \\ 0{,}2 + a + b + c + 0{,}1 & 50 \leq x \end{cases}$$

a. ¿Cuánto vale $a + b + c$?

b. Encuentra $F(40)$.

c. Si f representa la función de probabilidad de X, halla $f(50)$.

d. Si $a{:}b{:}c = 1{:}2{:}4$, indica todos los valores de f que hay que completar.

e. Haz una gráfica de la función de probabilidad.

f. ¿Cuál es el valor de la esperanza matemática de X?

19 En un determinado juego de ruleta, la esperanza matemática es $0{,}05$. Más específicamente, la probabilidad que se gane tres puntos es $19\,\%$, de lograr dos puntos es igual a la probabilidad de que se pierda un punto, la probabilidad de perder tres puntos es $n\,\%$, y ni perder ni ganar puntos es $10\,\%$. Aparte de lo anterior, no hay otros puntajes fuera de los mencionados. Si X es el número de puntos que se logra en un juego:

a. Escribe la función de probabilidad de f

b. Calcula $f(-3) + f(0) + f(3)$. Indica además el suceso complementario y su probabilidad.

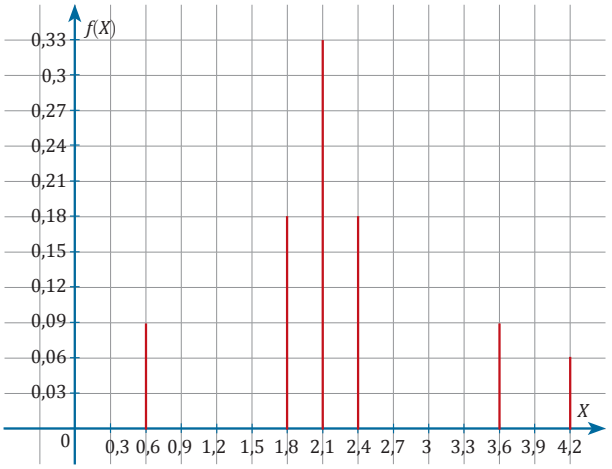
c. Haz la gráfica de f

d. Escribe la función de distribución respectiva.

e. Grafica lo que has escrito en **c.**

f. Verifica si $p(x \leq 0)$ es 0

20 La siguiente gráfica de la función de probabilidad de la variable aleatoria X, presenta una simetría con respecto a un determinado valor de dicha variable:



Conforme a lo anterior, responde:

a. ¿Cuál es el valor la esperanza matemática de esta distribución?

b. ¿Qué notas de especial en el valor que has obtenido anteriormente?

c. Encuentra la varianza respectiva.

21 Ahora bien, respecto al mismo gráfico, supongamos que se cambien los valores de las probabilidades tal que $p(0) = 0{,}04 = p(4{,}2)$; $p(0{,}6) = 0{,}11 = p(3{,}6)$; $p(1{,}8) = 0{,}24 = p(2{,}4)$ y $p(2{,}1) = 0{,}22$.

a. Halla la esperanza matemática de acuerdo a estos últimos valores.

b. ¿Ha cambiado la varianza? Justifica tu respuesta.

c. Otorga otras probabilidades a los valores que toma la variable, siguiendo tal simetría.

d. ¿Qué ocurre con el valor de la esperanza?

e. Conjetura una regla para calcular la esperanza matemática, en casos similares que presentan este tipo de simetría en la gráfica de la función de probabilidad de una variable aleatoria. Ten en cuenta que el número de valores que toma la variable es 7, es decir, impar.

22 En la casa de Javiera hay cuatro televisores para que nadie pelee, si X es una variable aleatoria que representa los televisores prendidos en un día cualquiera y $f(x)$ la probabilidad de que el televisor esté prendido. Determinar según la tabla la probabilidad (a) que 3 televisores estén prendidos.

X	1	2	3	4
$f(x)$	0,45	0,4	a	0,05

23 Realizado el experimento aleatorio de lanzar dos dados de ocho caras al aire y definiendo la variable aleatoria "la suma de los números obtenidos en sus caras", determina:

a. La esperanza matemática.

b. La varianza.

c. La desviación estándar.

24 Se tiene una distribución binomial con parámetros $n = 12$ y $p = 0{,}35$. Determina:

a. $P(2)$ **b.** $P(5)$ **c.** $P(X \leq 2)$

25 En el colegio de Diego se dieron a conocer los resultados generales del primer semestre, el 18 % de los alumnos reprobó lenguaje, el 12 % reprobó inglés y el 8 % reprobó lenguaje e inglés. Si se selecciona un alumno al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que halla reprobado lenguaje, si reprobó inglés?

b. Si reprobó Lenguaje, ¿cuál es la probabilidad de que halla reprobado inglés?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que halla reprobado lenguaje o inglés?

26 La probabilidad de que cierto producto se rompa cuando es transportado es del 2 %. Si se transportan 20 de éstos, calcula la probabilidad de que:

a. Se rompan 2.

b. No se rompa ninguno.

27 Bryan, y su hermano menor Nick, participan en un equipo de Fútbol de la serie 1B. Ambos son porteros: titular y suplente respectivamente. El primero de ellos, es capaz de atajar nueve de diez penales que se pudieran producir, en cambio el otro, sólo siete de esta misma cantidad. Por lo general, Nick, juega sólo 15 de los 90 minutos en que dura cada partido. Supongamos que durante un partido, se produzca un penal ¿cuál es la probabilidad porcentual de que:

a. esté jugando el portero titular y ataje la pelota?

b. no se ataje, sabiendo que Bryan está jugando?

c. esté el arquero suplente y que el equipo contrario logre meter un gol?

d. juegue Bryan y ataje, o bien, esté al arco Nick y también haga lo mismo?

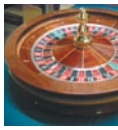
e. se ataje, evitando así un gol?, ¿por qué?

f. sabiendo que el penal es atajado, sea Bryan que lo haga?

28 "La familia Sánchez, se entera de una grata noticia acerca de sus vecinos, que apareció en el noticiero. Deciden de inmediato visitarlos

- ¡qué sorpresa!... ¿y a qué se debe esta visita?
- *Venimos a felicitarlos, porque nos enteramos, participaron en el programa que reunió a 380 adultos para regularizar sus estudios y así obtener la licencia media.*
- Así es, señor Sánchez. Fui uno de los 180 hombres que acudimos a este programa que el gobierno impulsó, en conjunto con las municipalidades y la buena iniciativa de algunos privados. Mi esposa estuvo entre las 200 mujeres seleccionadas para asistir.
- *vecina, el noticiero decía que entre ustedes, las mujeres, alrededor de 95 % tenían octavo básico, y algo así como 65 % hasta segundo medio rendido....*
- Así es, y al resto le faltaba sólo el cuarto... ¡Uf!, pero los hombres comenzaron peor que nosotras: sólo quince le faltaban este mismo curso, 50 tenían hasta segundo medio rendido, y el resto con octavo básico aprobado.
- *entonces, vecinos, ¡levantemos nuestras copas de champaña y brindemos por ustedes!...*

Tiempo después, un instituto superior de capacitación, de manera azarosa, fue eligiendo paulatinamente diez personas de este programa, para becarlos y así estudiar una carrera. Completa previamente la tabla antes de responder



	8°	2 M	3M	
Mujeres	95	65	40	200
Hombres	115	50	15	180
	210	115	55	380

¿Qué tan probable es que, la primera persona seleccionada haya sido:

a. una mujer y que comenzó con octavo básico?

b. un hombre, sabiendo que tenía tercero medio rendido?

c. una persona con sólo segundo medio rendido?

Ahora bien, expresando tus respuestas, con dos decimales y de manera porcentual, ¿cuál es la probabilidad de que, la segunda persona llamada sea:

d. una mujer que comenzó con octavo básico, sabiendo que anteriormente fue elegida una persona con solo octavo básico?

e. un hombre y que haya tenido tercero medio rendido, dado que también un hombre fue seleccionado anteriormente?

Finalmente, después de haber sido elegido personas, por igual número, encuentra la probabilidad de que:

f. la novena persona llamada sea una mujer, sabiendo que le faltaba la enseñanza media completa?

g. la décima persona sea un hombre que le falte cuarto medio, sabiendo que novena persona elegida fue una mujer?

29 Hola amigos, aquí estoy nuevamente para plantearles un sencillo desafío: una variable aleatoria X toma los siguientes valores: $n-2$,$n-1$,n, $n+1$ y $n+2$. La probabilidad de uno de estos números corresponde a un treceavo del valor del dicho número.

a. Indica los valores que toma la variable aleatoria X.

b. Escribe la función de probabilidad.

c. Gráfica de la función anterior.

d. ¿Cuál es el valor de la esperanza matemática?

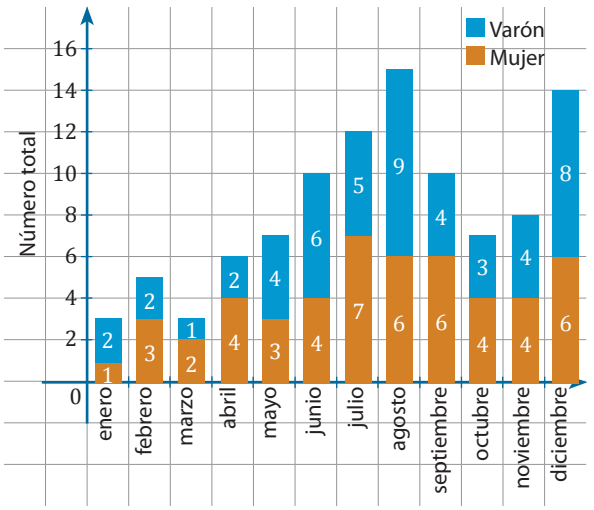
e. Anota la función de distribución.

f. Haz la gráfica de la función de distribución.

Si no lo pueden resolver, acudan a mi sitio web. Su amiga de siempre, la abuela de Quillota.

30 Belén trabaja desde hace tiempo en la Caja de Compensación Los Líquenes. Como iniciativa de servicio al cliente, para aquellos mayores de 60 años, la empresa le asigna un número de beneficiarios para que, en nombre de ella, los salude de manera especial, en el día de su cumpleaños. Una vez que ha cumplido con un saludo, debe dejar un informe en la red de la empresa para ser supervisado. Para Belén, la situación ha sido similar durante varios años, y estadísticamente se puede apreciar en el siguiente gráfico que muy poco ha variado.

Número de cumpleaños de afiliados por mes



Si X es la variable aleatoria que asigna el número 1 a un informe cualquiera del mes de enero, 2 para los informes de febrero, y así sucesivamente, y p el valor de la probabilidad de uno de estos números, responde:

a. ¿Cuál es la probabilidad porcentual de que un informe del año anterior y elegido al azar por la supervisora para chequearlo, sea de Septiembre?

b. ¿Será verdad que el valor de $p(X=2)$ también corresponde a la probabilidad de elegir uno de los beneficiarios atendidos por Belén, y cuyo cumpleaños sea en febrero? ¿Por qué?

c. Escribe f, la función de probabilidad conforme los datos del gráfico.

d. Anota $F(X)$, la función de distribución de probabilidad.

e. Grafica la función definida en **d**.

f. Da dos posibles interpretaciones al valor que se obtiene, desarrollando $1 - p(10 \leq X)$.

g. Ahora bien, ¿cuál es la probabilidad porcentual de que al elegir azarosamente una persona que haya nacido en agosto, resulte ser mujer?

h. Elabora alguna pregunta y da su respuesta, usando toda la información anterior.

31 Entré a varias páginas de Internet para ver cómo ganar. Todas decían algo así como: "Para este juego los números son $1, 2, 3, 4, ..., 25$". ...y solo se eligen 14 de ellos... seguí y encontré tantas sugerencias que llegué a marearme y no entendí nada... Por eso voy a jugar un cartón con los sietes primeros y los siete últimos... así dejaré encerrados a los otros que no elegí. Ja ja. ...total todos tienen la misma posibilidad de salir ¿no?... Con tal elección, voy a esperar el resultado... ¡nunca imaginé que ni la esperanza matemática de los números de mi cartón me daba esperanza...!

a. ¿Cuál es el valor de esta "desesperanzada" esperanza matemática? ¿Y que significa?

b. Halla la correspondiente varianza.

c. Menciona todos los números que estén entre una unidad estándar más arriba, y otra más abajo y que el jugador haya descartado.

d. Tomando como referencia la esperanza matemática, ¿qué porcentaje representa una unidad de desviación estándar?

e. ¿Qué te sugiere el valor obtenido anteriormente con respecto a la dispersión de los números elegidos por el jugador?

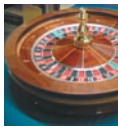
f. Confecciona tu propio cartón de juego con la varianza que sea lo más pequeña que puedas, y vuelve a contestar.

32 *Leyla es contadora auditora y tiene una oficina donde trabaja su secretaria Aurora. Una mañana...*

- Puede que esté pecando de indiscreción, Aurora, pero estas dos empresas competidoras que tengo que atender, siempre han estado trabajando a pérdida.
- *Tiene toda la razón. Yo no entiendo mucho del tema, pero no me cabe pensar que Fideos Alcahuetes, tenga una pérdida de $\$\,65$ por paquete en que no aparezca claramente ni la fecha de elaboración, ni la de vencimiento , sabiendo que el costo es de $\$\,195$ por uno que no presente estos problemas...*
- Y la otra no lo hace nada de mal. Fíjate que en *Fideos Celestinos* aún llevan en el tiempo un goteo de $\$\,60$ perdidos exactamente por la misma mala rotulación, costándole la producción de cada paquete bien rotulado, $\$\,198$.
- *¿Sabe? ¡me cabe varias preguntas señorita Leyla!... en una gran venta de cajas de paquetes ¿qué utilidad tienen por paquete....*
- el ocho por ciento de la producción de la primera, y el nueve por ciento de *Fideos Celestinos* aparece mal rotulados?... ¡Ah! Y déjame contarte más Aurora. En los supermercados, el precio de venta de un paquete de Fideos Alcahuetes es de $\$\,540$, con una utilidad de $\$\,230$ por paquete, y los similares, pero en la marca Fideos Celestinos, a $\$\,560$, y con una utilidad de $\$\,245$...
- *Con todo lo que me está contando, entonces, ¿cuál de las dos marcas va más a pérdida?...*
- ¡No sé cómo se han mantenido en pie hasta ahora y no han quebrado!
- *¿qué debieran hacer?*
- Reducir por lo menos a la cuarta parte el porcentaje de los paquetes que vienen mal rotulados.
- *¿y en cuánto dinero mejorarían la ganancia por cada paquete en grandes ventas?*
- Buena pregunta. Si bien es cierto, se puede mantener el dinero que pierden por cada mala rotulación, otra medida es aumentar el precio en que le venden a los supermercados, y dejar que estos determinen el precio final para el consumidor
- *señorita Leyla ¿y qué tal el sabor de los fideos de cada una de estas marcas?*
- Prefiero no opinar...

Responde conforme al enunciado:

a. Escribe la primera pregunta que aparece en el relato y respóndela.



b. ¿Fideos Celestinos va más a pérdida que su empresa competidora? Justifica tu respuesta.

c. ¿En cuántos pesos asciende la utilidad de cada una, si se toma la primera medida sugerida?

d. ¿Quién ha quedado ahora en ventaja midiendo solo utilidades netas? ¿Por qué?

e. Supongamos que además ambas empresas suben un $35\,\%$ de sus precios de ventas, manteniendo el mismo costo de producción por paquete. ¿Alcanzarán a los $\$\,220$ como utilidad a la larga?

f. La empresa anteriormente quedó en desventaja decide igualar a su competidora, ¿en qué porcentaje debiera haber aumentado el precio de venta de su producto, para lograr este objetivo?

g. Da una respuesta a alguna pregunta que tú hagas acerca de este tema y que involucre los contenidos de este capítulo.

33 Reiteradas veces les dijimos a todos nuestros compañeros de curso que no se alejaran del grupo, ni menos participaran en juegos de apuestas ilegales, porque iban a perder. Lulo y Lilo, no nos hicieron caso en nada. Según ellos lo único que tenían que hacer era seleccionar de una caja que contenía siete fichas negras y seis blancas. Lilo continuó diciendo: *el juego consistía en realizar rápidamente dos extracciones sucesivas con reposición*. Y Lulo agregó: *"se perdían* $\$\,550$ *si aparecían dos fichas negras en ambas extracciones, y se ganaba* $\$\,200$ *en cualquiera de los otros casos"*... Jugaron hasta cansarse... ¡perdieron todo su dinero...!

a. Usando la esperanza matemática del juego, justifica si este juego les favorecía a la larga, o no.

b. Lulo después se dio cuenta que perdían mucho dinero, a pesar que esto ocurría solo cuando aparecía ambas fichas negras, se preguntó: ¿cuánto menos debía descontar el juego cada vez que este hecho ocurriera y no hubieran perdido nada?

34 En una oficina de cobranzas de un Call Center, se escucha siguiente diálogo:

- Kenita, cada vez que estás haciendo tu trabajo como operadora telefónica, estallas en ira, cuando tienes que llamar a un teléfono residencial que esté ocupado e insistir.
- *Mire, de las 10 llamadas que tengo que hacer cada media hora y averiguar si la atención que hizo la empresa a sus clientes, los satisface o no, tres llamadas me toca esperar hasta que el teléfono al que llamo, se desocupe. Y esto me pasa reiteradas veces.*
- Pero eso no te autoriza a que interrumpas el trabajo de tus compañeras. Hasta ellas comentan:

  "Ojalá que Kena, no estalle más allá de tres veces..." y otra le agrega o por lo menos que haga una llamada o dos llamadas de manera tranquila, en esta media hora.
- *Si bien es verdad lo que a usted le han informado, pero no es menos cierto, que en estas dos últimas horas, creo que he estallado dos o cuatro veces.*
- Kenita, pero ¿qué tan probable es que la primera de tus compañeras que te mencioné, tenga razón?... o bien ¿la segunda de ellas?
- *Mire jefa, con el respeto que se merece, ¿y no será que yo también tenga razón? ¿Qué tan posible que sea esto?...*

Conforme el relato, responde de manera porcentual:

a. ¿Qué tan probable es que tengan la razón la primera de las compañeras?

b. ¿Será verdad que lo que dice la segunda compañera no supere el $20\,\%$?

c. ¿Cuál es la probabilidad a lo aludido en el último párrafo del diálogo?

d. Suponiendo que Kenita logre no mostrar sus impulsos ¿qué tanto será posible esto?

e. Si k representa el número de llamadas que estalla en diez que debe hacer Kenita cada media hora, ¿que representaría $\binom{10}{0}$?

35 *Papá y yo estamos viendo el programa de televisión "Intolerantes" conducido por Sabrina y la polémica desatada entre las dos invitadas Angie y Pietra después de haber visto una nota periodística introductoria, está que arde:*

- después de haber visto la nota introductoria que ustedes han presentado, lo único que es indiscutible es que no hay una fuerte fiscalización respecto de las medidas de seguridad que hay en los edificios de esta ciudad... todo esto ha sido por una negligencia...
- *nuestra comisión investigadora, ha dicho que de los 25 edificios que hemos visitado para ver cómo están cumpliendo estas normas, sólo en cuatro de ellos, no están tomadas las medidas de seguridad en un 100 %. Además que hay vacíos legales...*
- Todo eso es completamente falso, porque nosotros en un estudio de 30 edificios, en que yo misma he estado presente, nueve de ellos están completamente inseguros. Por tanto, no vengas a decir que hay vacíos legales, simplemente ustedes no saben fiscalizar bien... *(En este momento, la conductora del programa interrumpe el diálogo...)*
- *Sabrina, está bien que tú conduzcas este programa, pero no me hagas callar ahora, porque creo que tengo derecho a defenderme, ya que me acaban de descalificar públicamente... gracias, prosigo respondiendo a la otra invitada," te lo aseguro que de los mismos 30 edificios que ustedes fiscalizaron, a lo más tres de ellos, podrían presentar anomalías en las medidas de seguridad. Los otros seis que tú puedes aludir, simplemente las normas legales vigentes no se les pueden aplicar ya que son insuficientes en su contenido...*

  (¡vamos a un corte comercial y luego regresamos...!)

Teniendo en cuenta que en la nota del comienzo del programa: la probabilidad de que un edificio no cumpla con las medidas de seguridad es de un 15 %, Papá y yo nos quedamos haciendo algunas preguntas, a las cuales tú puedes ayudarnos a responder conforme a lo que han escuchado:

a. ¿Cual es la probabilidad mencionada por Pietra en la primera de sus intervenciones?

b. ¿A qué porcentaje de probabilidad corresponde lo dicho por Angie?

c. Imaginemos que Pietra esté lo cierto, entonces, porcentualmente ¿En cuánto porcentaje Angie se equivocó?

d. ¿Qué tan posible es que de 12 edificios fiscalizados, a lo menos no hayan más allá de tres, que no tomen las medidas de seguridad necesarias?

e. ¿A qué se estaría refiriendo, si la nota introductoria aludiera a un hecho cuya probabilidad se obtiene, efectuando

$$\binom{11}{2}(0{,}15)^2(0{,}85)^9+\binom{11}{5}(0{,}15)^5(0{,}85)^6+\binom{11}{11}(0{,}15)^0(0{,}85)^{11}?$$

36 "Prefecto, en la morgue, yace el cuerpo de sexo masculino y que ha recibido los nueve impactos de bala que llevaron a la muerte a este joven de 23 años... Sí, los francotiradores a los que usted alude y que tienen que ver con este caso son, por sus alias, "El Exterminador Brutal" y "El Vengador Implacable"... no estoy de acuerdo con la médico forense, que según ella, siete de los impactos los hizo" El Exterminador Brutal". Para mí solamente fueron seis... entiendo señor prefecto, que como jefe directo mío, le crea más a la médica forense... estamos todos de acuerdo que solamente participaron estos dos sujetos, y que "El Vengador Implacable" tiene sólo un desempeño de un 40 % si lo comparamos con el otro, pero creo entender que en última instancia, el asesino que alude la médica forense es más probable que haya hecho solamente a lo más entre cinco y seis tiros"

Conforme lo que has leído, y suponiendo que usaron el mismo tipo de arma, ¿cuál es la probabilidad de que:

a. tenga la razón la médico forense?

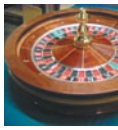
b. esté en lo cierto la otra persona?

c. tanto la médico forense, como la otra persona estén completamente erradas con respecto al número de tiros efectuados por "El Exterminador Brutal"?

d. "El Vengador implacable" haya hecho siete de los impactos?

e. "El Exterminador Brutal" no haya hecho ningún disparo?

f. a lo más el francotirador de menor rendimiento haya hecho dos disparos?



37 *...En la sala de Espera de un hospital, aparece por una de las puertas el jefe de turno.*

- ¿Quiénes son los familiares que acompañan a la Sra. Margot?
- *Nosotros* le respondimos de inmediato. *¿Cómo se encuentra nuestra mamá?*
- Logramos estabilizarla, pero vamos a tener que hacer una serie de siete de micro intervenciones quirúrgicas seguidas de unos tratamientos intensivos de cuidados, después de cada una de ellas.
- *¿Pero cree usted doctor, que a sus 95 años de edad, logre soportar tal tratamiento?*
- Como médico tratante, hay un $35\,\%$ de éxito en cada una de estas micro intervenciones, que son independientes entre sí. Si bien es cierto que la Sra. Margot tenga esa edad, trataremos de hacerle la menor cantidad de micro intervenciones posibles. No conformaremos que por lo menos se recupere en un $25\,\%$

En verdad, este tipo de situaciones son difíciles, por ahora responde, expresando tus respuestas de forma porcentual, ¿cuál es la probabilidad de que con:

a. exactamente dos intervenciones se logre el $25\,\%$ de recuperación?

b. sólo tres intervenciones la Sra. Margot se recupere?

c. únicamente intervención se consiga el objetivo esperado?

d. menos de tres, no sea suficiente? ¿Por qué?

Ahora bien,

e. Con más de cinco intervenciones, ¿qué tan probable es que no tenga ninguna recuperación?

38 Aliro quiere jugar a su juego de azar favorito. El sabe que la probabilidad de ganar es p, con $0 \leq p \leq 1$ percibiendo por esto, $\$\,1\,000$. Pero también puede perder y, en ese caso, el monto perdido sería de $\$\,350$. Si X representa la utilidad neta que percibe por juego:

a. Encuentra una ecuación que permita encontrar la esperanza matemática.

b. ¿Por qué la ecuación obtenida en **a.** es lineal?

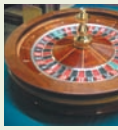
c. ¿Tiene algún sentido la pendiente respectiva?

d. Haz la gráfica que permita obtener la esperanza matemática en función de la probabilidad de ganar.

e. Ahora bien, ¿Estima el valor mínimo de p tal que permita ganar a largo plazo, sobre los $\$\,350$ en una gran cantidad de juegos?

Mis apuntes

Taller



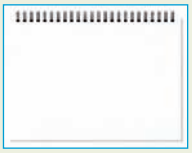
"Probabilópolis"

Objetivo: Construir un tablero de juego donde se apliquen los contenidos estudiados en la unidad. Jugar con sus compañeros para reforzar y aplicar los contenidos vistos en la unidad.

Materiales:

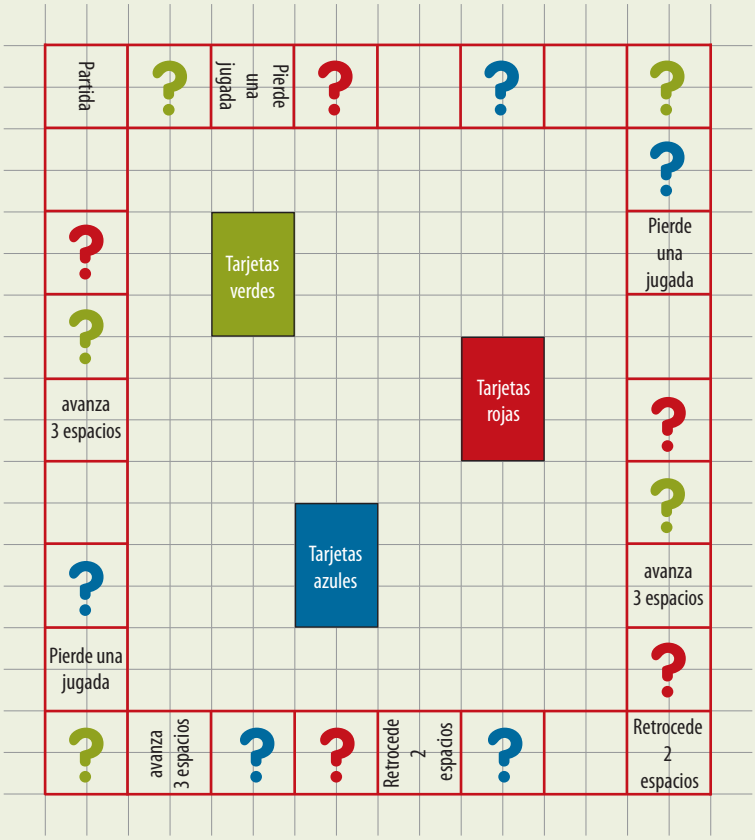
- 4 hojas de block.
- 1 trozo de cartón forrado de $50 \cdot 50$ cm.
- Plumones o lápices scriptos.
- Tijeras.
- Una ficha de cualquier color para cada alumno.
- Un dado por grupo.






Instrucciones:

- Los alumnos y/o alumnas del curso forman grupos de 4 o 5 personas.
- Con las hojas de block, confeccionan 30 fichas de $10 \cdot 5$ cm.
- Crean, en cada grupo, 10 ejercicios de probabilidad condicionada, 10 de función de probabilidades (incluyendo función de distribución, esperanza, varianza y desviación estándar) y 10 de distribución binomial. Cada grupo debe responder los ejercicios y anotar las respuestas y el ejercicio en cada una de las fichas, previa revisión de la profesora o profesor.
- En el reverso de cada ficha se marcará un signo de pregunta rojo para los ejercicios de probabilidad condicionada, uno de color azul para los de función de probabilidad y uno de color verde para los de probabilidad condicionada.
- Construir el tablero donde se jugará según el siguiente modelo. Pueden hacer las variaciones que estimen convenientes como curso:



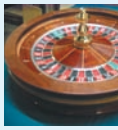
- Intercambiar juegos entre grupos y comenzar a jugar.

Reglas del juego:

- Cada alumno colocará su ficha en el casillero de partida.
- Cada grupo sorteará el turno de cada uno de los jugadores de su equipo (puede ser lanzando el dado o de otra manera).
- Cada jugador lanzará el dado y avanzará los espacios que indique el número de la cara del dado, yendo siempre en un mismo sentido.
- Si el jugador cae en uno de los casilleros marcados con el signo de pregunta, sacará una de las tarjetas correspondientes a ese signo (respetando el color), pasará la tarjeta, sin mirar la pregunta, a uno de los integrantes del grupo, quien le hará la pregunta. Si la responde bien, se quedará con la tarjeta y podrá volver a lanzar el dado. En caso contrario, devolverá la tarjeta al montón correspondiente al centro del tablero, colocándola al último y cederá su turno al compañero que viene.
- Ganará, en un grupo, aquel que responda la mayor cantidad de respuestas correctas.

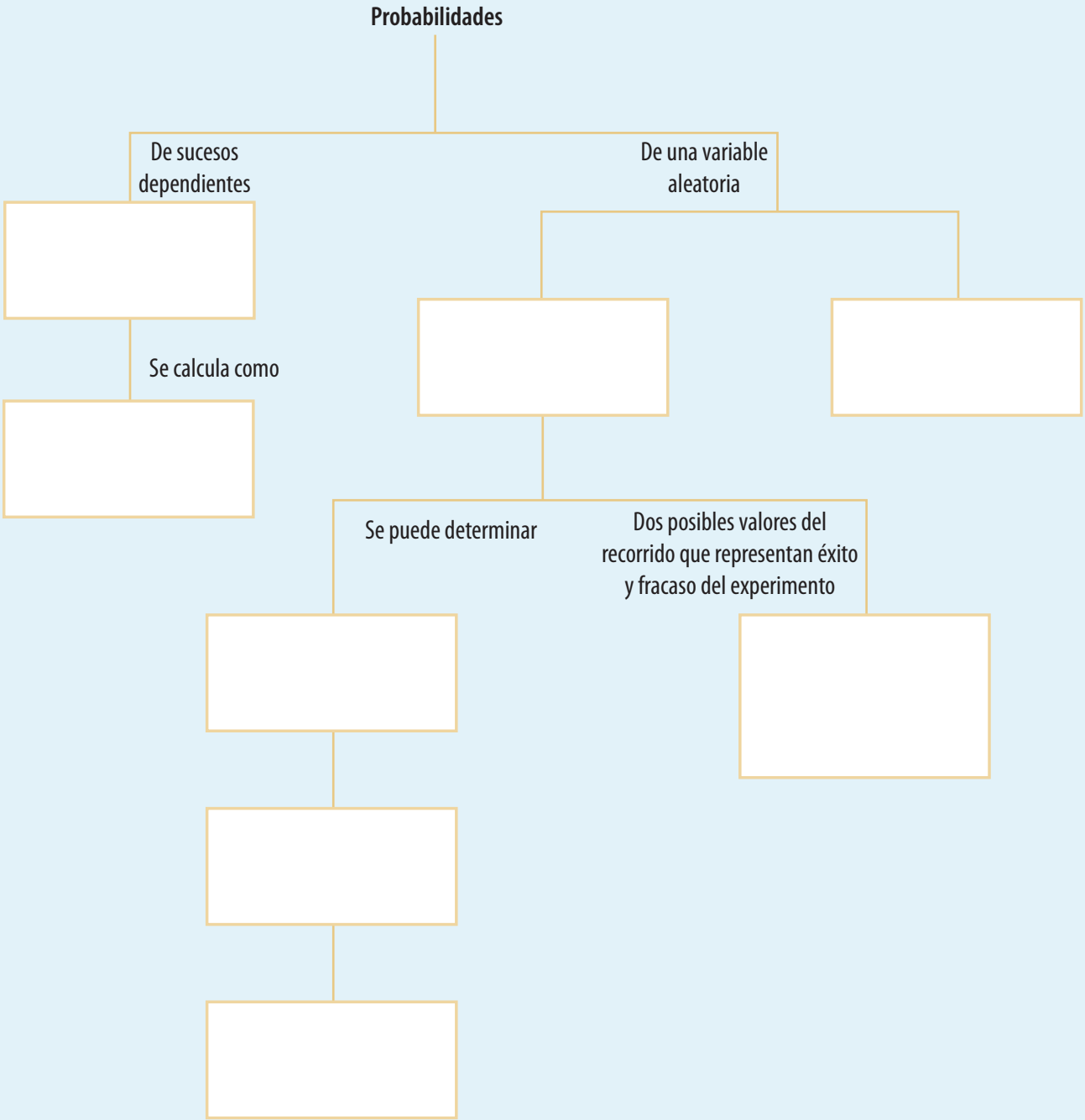
Recuerda que puedes dejar el juego en tu colegio para que otros alumnos también puedan jugar.

Evaluación Unidad 5



Síntesis conceptual de la unidad

Completa el siguiente mapa conceptual con los conceptos de la unidad:



I. Coloca verdadero (V) o falso (F) según corresponda en cada una de las siguientes afirmaciones:

1 ____ El cálculo de los puntajes de postulación a una universidad de un estudiante, es un ejemplo de aplicación del promedio ponderado.

2 ____ La varianza de un conjunto de datos discretos, indica el porcentaje de dispersión de los mismos.

3 ____ Una función de probabilidad, tiene como recorrido, el conjunto de los números reales.

4 ____ La esperanza matemática corresponde a un promedio ponderado.

5 ____ La gráfica de una función de distribución de probabilidades es un histograma.

6 ____ Si el espacio muestral de un experimento aleatorio admite dos resultados, entonces la distribución corresponde a una distribución binomial.

7 ____ En una función de probabilidades los valores de las probabilidades deben ser distintos.

8 ____ La suma de las imágenes en una función de probabilidad de una variable aleatoria siempre es igual a 1

9 ____ Responder los ítemes V o F de una prueba, definiendo la variable aleatoria como el número de verdaderos contestados, corresponde a una distribución binomial.

10 ____ Si X es la variable aleatoria: "la suma de las pintas de una ficha de domino", entonces $f(12) = \frac{1}{12}$

II. Resuelve los siguientes ejercicios. Puedes usar calculadora. Aproxima tus respuestas a la milésima, salvo que se pida otra aproximación:

1 Sean A y B dos sucesos aleatorios con $P(A) = \frac{1}{2}$; $P(B) = \frac{1}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{5}$

Además, se tiene la siguiente información. Determina:

a. $P(A/B)$ **c.** $P(\overline{A}/\overline{B})$

b. $P(B/A)$ **d.** $P(\overline{B}/\overline{A})$

2 De un grupo de 80 hinchas que van al estadio a apoyar a su equipo, 50 son varones, 35 de los hinchas llevan camiseta del equipo y 18 son varones y usan camiseta. Si se escoge un hincha al azar, determina:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea mujer y no use camiseta?

b. ¿Qué probabilidad hay de que sea hombre, si se sabe que el hincha seleccionado no usa camiseta?

3 En la población de caninos en un criadero, el $40\ \%$ tiene pelaje oscuro, el $25\ \%$ es de raza y el $15\ \%$ tiene pelaje oscuro y es de raza. Al escoger un perro al azar:

a. ¿Cuál es la probabilidad de que sea de raza, si tiene pelaje oscuro?

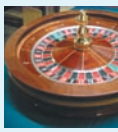
b. ¿Cuál es la probabilidad de que tenga pelaje oscuro, si es de raza?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que no tenga pelaje oscuro ni sea de raza?

4 Una urna contiene bolitas numeradas de 1 a 40, pintadas de azul o rojo. El $55\ \%$ de las pelotitas pares están pintadas de azul y 13 de las impares están pintadas de rojo. Si se extrae una pelotita al azar, ¿qué probabilidad hay de que sea:

a. par, si su color es rojo?

b. impar, si no es roja?



5 Una variable aleatoria X puede tomar los valores 15, 20, 30 y 45 con probabilidades 0,15; 0,18; 0,25 y 0,42, respectivamente. Determina:

a. La función de probabilidad, $P(X = x)$.
b. La función de distribución de probabilidad, $F(x) = P(X \leq x)$.
c. $P(X \leq 15)$
d. $P(X \geq 45)$
e. $P(X < 30)$
f. $P(X > 30)$
g. $P(15 \leq X \leq 45)$

6 La función de probabilidades de una variable aleatoria discreta esta dada por:

X	Probabilidad $P(X)$
1	0,16
2	0,32
3	0,2
4	k
5	0,18

Determina:
a. El valor de k.
b. El gráfico de la función de probabilidades.
c. El gráfico de la función de distribución.
d. Su esperanza.
e. Su varianza.
f. Su desviación estándar.

7 Una variable aleatoria tiene una distribución binomial de parámetros $n = 5$ y $p = 0{,}2$ (la probabilidad de éxito), determina:

a. La función de probabilidad.
b. La función de distribución.
c. $P(2)$
d. $P(X \leq 3)$

Además, se sabe que el valor esperado para esta distribución es $E[X] = np$ y que la desviación estándar $\sqrt{V[X]} = npq$, donde q la probabilidad del fracaso. Según estos datos determina:

e. La esperanza.
f. La desviación estándar.

8 La probabilidad que un estudiante obtenga el título de bio-quimico es 0,3. Encuentra la probabilidad de que en un grupo de siete estudiantes matriculados el primer año:

a. Ninguno de los siete obtenga el título.
b. Todos obtengan el título.
c. Al menos dos obtengan el título.

9 Los resultados de un examen realizado a dos grupos de alumnos de enseñanza media se muestra en la tabla adjunta.

	Aprueban	Reprueban
Grupo A	25	8
Grupo B	18	12

Si se selecciona un estudiante al azar, determina:

a. La probabilidad de que sea del grupo B y apruebe.
b. La probabilidad de que sea del grupo A y repruebe.

10 La probabilidad de que uno de los osos del zoológico traídos recientemente se aclimate sin dificultades a su nuevo hábitat es del 36 %. Con esta información, determina:

a. La probabilidad de que exactamente 4 de 6 osos traídos se aclimaten.
b. La probabilidad de que al menos 2 de 4 osos se aclimaten a su nuevo hábitat.

11 Al definir una variable aleatoria X se ha determinado que su probabilidad de éxito es del 88 %. Si se repite el experimento en las mismas condiciones en 6 oportunidades, calcula y da tu respuesta en porcentajes:

a. La probabilidad de que en exactamente 3 de ellos se obtenga éxito.
b. La probabilidad de que, como máximo 1 de ellos, fracase.
c. La probabilidad de que en más de 4 se obtenga éxito.

III. Resuelve los siguientes problemas de planteo:

1 "Yo creo que no todos podrán costear la salida, al museo para hacer el trabajo; por eso, hay que hacer la rifa, y que sea justo para todos. De las 45 personas que somos en el curso, hay 26 mujeres. De los hombres del curso, hay 9 que pueden pagar". Entonces, ¿cuál es la probabilidad de que al sortear parejas de trabajo, te toque alguien que no pueda pagar, sabiendo que el trabajo es de a dos?

2 Carlos, gerente de marketing de una empresa de venta de automóviles, ha reunido a su grupo de trabajo para informarle que, debido a la caída de la competencia, en el próximo mes la probabilidad de que aumente el precio de los autos 0 km es de 20 %, de que aumenten las ventas es de 35 % y la de que ocurran ambos hechos es de 15 %. Ahora, necesita calcular las siguientes probabilidades. Ayúdalo tú y responde: ¿Cuál es la probabilidad de que:

a. las ventas suban si hay incremento en el precio?
b. suba el precio dado que las ventas aumentan?

Aproxima tus respuestas a números enteros

3 Omar ha entrevistado a varias personas para un trabajo sobre el alcoholismo. 97 le han respondido que beben algún tipo de bebida alcohólica y 53 que no beben ninguna clase de bebida alcohólica. De las personas que ingieren alcohol, 30 han respondido que lo hacen todos los fines de semana. De las personas que no beben, 25 no lo hacen debido a que manejan y el resto porque no les gusta. Según estos datos, Omar ha calculado algunas probabilidades para las conclusiones de su informe. ¿Puedes ahora tú, responder estas preguntas?:

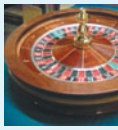
a. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger una persona al azar, ésta no beba todos los fines de semana, si se sabe que ella pertenece al grupo de las personas que bebe?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona escogida al azar, maneje si pertenece al grupo que no bebe?

4 Rosa está comenzando su propia pastelería. Su mejor amiga, que es estadística, le ha ayudado a hacer algunas proyecciones de su negocio en base a los resultados obtenidos en su primer mes de funcionamiento. Ellas han estimado que la probabilidad de vender pasteles del tipo 1, que son los más baratos, es del 56 %, dando una ganancia de $\$\ 97$ por pastel. Los del tipo 2, de precio medio, se venden con una probabilidad del 28 %, dando una ganancia de $\$\ 52$ por pastel y los del tipo 3, los más elaborados y caros, se venden con una probabilidad del 16 % y dan una ganancia de $\$\ 29$ por pastel. Rosa necesita resolver varias dudas, ¿puedes tu ayudarla?:

a. Si se venden 200 pasteles, manteniendo el comportamiento anteriormente señalado, ¿cuánta ganancia se podría esperar?
b. La ganancia promedio podría variar, ¿en qué rango podría fluctuar dicha ganancia?
c. ¿Podría representarse gráficamente la situación de la pastelería, indicando el rango en que puede variar la ganancia esperada?

5 Diego y Tomas fanáticos del fútbol realizaron una encuesta a un plantel de 28 jugadores profesionales sobre el porcentaje de lesiones sufridas en la temporada anterior, todo marchaba bien excepto por un detalle, en la tabla de recuento, que se muestra, Tomas omitió un dato, que ahora no recuerda. La exposición de este tema en su clase de matemática es en dos días más. Ayuda a estos dos estudiantes y determina: (aproxima los valores de **b.**, **c.** y **d.** a la décima y el de **a.** a la centésima)

Lesiones por jugador temporada anterior	Porcentaje de lesiones (%)
0	10,71
1	32,14
2	17,86
3	x
4	10,71
5	7,14



a. Valor de x
b. El valor promedio esperado de las lesiones.
c. La varianza.
d. La desviación estándar.

6 Nicole, Fernanda y Álvaro estudian para la prueba de Matemáticas, probabilidades no es el fuerte de este grupo y un nuevo problema había que resolver. La tabla adjunta representa a una variable aleatoria X, donde se desconoce el valor de k y p. Desesperados y sin saber que hacer pues a todos les daban resultados distintos, el grupo ha dejado uno de sus cuadernos olvidado en la mesa… ahora tú que ya lo has visto, responde las siguientes preguntas:

X	Probabilidad $P(X)$	Probabilidad acumulada $P(X \leq x)$
0	0,1525	0,1525
1	k	0,3617
2	0,1325	p
3	0,0623	0,5565
4	$2k$	0,9747
5	0,0251	1

a. ¿Cuáles son los valores de k y p?
b. ¿Cuál es el valor $2P(1) + P(4)$?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que la variable X tome valores menores que 4?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que la variable X tome valores entre 2 y 4?

7 Victoria es una buena estudiante, pero para la prueba de Biología no pudo estudiar, así que respondió al azar 8 preguntas de verdadero y falso. Viki, ¿cómo te fue? - preguntó Daniela. Más o menos, respondí 8 preguntas al achunte. ¿Podemos calcular las probabilidades? – dijo Daniela, Viki estaba algo desanimada, pero ante esta posibilidad, pensó en cuántas preguntas creía que podía haber acertado. Ahora responde tú las preguntas de Viki: (da tu respuesta en porcentajes)

a. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte 4 preguntas?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte dos o menos?
c. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte 5 o más preguntas?
d. ¿Cuál es la probabilidad de que acierte a todas las preguntas?

IV. Marca la alternativa correcta:

1 En un pueblo hay 25 000 habitantes. De ellos, el 47 % son mujeres. El 34 % de los hombres trabaja en labores agrarias y el resto en otras tareas. ¿Cuál es la probabilidad aproximada, en porcentaje, de que al elegir una persona al azar, esta no trabaje en labores agrarias dado que es hombre?

a. 18 %
b. 30 %
c. 35 %
d. 66 %
e. 72 %

2 En una empresa trabajan 25 hombres y 35 mujeres. 10 de los hombres llegan a su trabajo en auto y 20 de las mujeres usan transporte público para llegar a la empresa. ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un empleado de la fábrica, este llegue en locomoción propia si se sabe que es mujer?

a. $\frac{1}{2}$
b. $\frac{1}{3}$
c. $\frac{1}{4}$
d. $\frac{3}{7}$
e. $\frac{4}{7}$

3 La profesora de Cálculo de la universidad de Sofía ha hecho una estadística de los resultados del examen, tomado la semana pasada, para presentárselos a sus estudiantes. Según los datos de la tabla adjunta, ¿cuál es la probabilidad de que un estudiante no haya aprobado el examen si se sabe que es hombre?

	Aprueban	Reprueban
Hombres	22	7
Mujeres	8	15

a. $\frac{7}{22}$
b. $\frac{7}{29}$
c. $\frac{7}{59}$
d. $\frac{22}{29}$
e. $\frac{22}{52}$

4 Dado los sucesos A y B, de los cuáles se conoce que $P(A) = 0{,}35$, $P(B) = 0{,}45$ y $P(A \cap B) = 0{,}2$, la probabilidad de que ocurra B dado que ha ocurrido A es:

a. $\frac{2}{45}$ **d.** $\frac{12}{15}$

b. $\frac{7}{5}$ **e.** $\frac{15}{24}$

c. $\frac{2}{15}$

5 Al hacer un solo lanzamiento de un dado, la probabilidad que resulte un número menor que 4, si se sabe que el lanzamiento resultó un número impar es:

a. $\frac{5}{6}$ **d.** $\frac{2}{3}$

b. $\frac{7}{9}$ **e.** $\frac{3}{5}$

c. $\frac{15}{17}$

6 El $60\ \%$ de los alumnos de una casa de estudio aprobaron Biología y el $70\ \%$ aprobaron Matemáticas. Además, el porcentaje de alumnos que aprobaron Biología habiendo aprobado Matemáticas es el $80\ \%$. Si un alumno sabe que ha aprobado Biología, ¿qué probabilidad tiene de haber aprobado también Matemáticas?

a. $\frac{93}{90}$ **d.** $\frac{12}{38}$

b. $\frac{45}{65}$ **e.** $\frac{12}{19}$

c. $\frac{15}{17}$

7 En una comuna de la región metropolitana se ha hecho una votación sobre la instalación de una antena telefónica, los resultados vienen dados en la siguiente tabla:

Opinión	Varones	Mujeres	Total
Si	340	320	660
No	140	400	540
	480	720	1 200

La probabilidad de ser varón si ha votado SI es:

a. $\frac{3}{5}$ **d.** $\frac{17}{33}$

b. $\frac{1}{6}$ **e.** $\frac{7}{18}$

c. $\frac{17}{23}$

8 En una competencia de atletismo, el $40\ \%$ pasa el corte de selección de los $100\ \text{m}$ y el $50\ \%$ pasa el corte de los $400\ \text{m}$. Además los atletas que pasan el corte de los $400\ \text{m}$, habiendo pasado el corte de los $100\ \text{m}$ es del $70\ \%$ Si un atleta supera el corte de los $100\ \text{m}$ ¿cuál es la probabilidad de pasar el corte de los $400\ \text{m}$?

a. $\frac{7}{8}$ **d.** $\frac{12}{38}$

b. $\frac{45}{65}$ **e.** $\frac{12}{19}$

c. $\frac{15}{17}$

9 En una casa discográfica el porcentaje de personas que adquieren música rock es del $65\ \%$ y las que adquieren temas románticos es del $48\ \%$. Además se sabe que las personas que adquieren temas románticos y de rock son el $16\ \%$ ¿cuál es la probabilidad que una persona compre música de rock, si ya ha comprado música romántica?

a. $\frac{5}{9}$ **d.** $\frac{5}{9}$

b. $\frac{1}{8}$ **e.** $\frac{4}{7}$

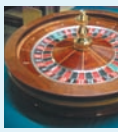
c. $\frac{1}{3}$

10 ¿Cuál es la probabilidad de que, al lanzar un dado normal (no cargado), haya salido un número primo, dado que en el lanzamiento salió un número par?

a. $\frac{7}{9}$ **d.** $\frac{1}{6}$

b. $\frac{1}{3}$ **e.** $\frac{1}{5}$

c. $\frac{4}{6}$



11 De una muestra de 12 cursos de tercero medio de cierta ciudad, se obtuvo la siguiente tabla referida a la probabilidad de sus promedios en Física. ¿Cuál es el promedio esperado?

Promedio en física	Probabilidad de obtenerlo
3	45 %
4	41 %
5	12 %
6	2 %

a. 3,55
b. 3,71
c. 3,96
d. 4,50
e. 4,86

12 Un comerciante de pescado regresa del mercado central con 15 merluzas, 5 congrios y 40 reinetas. Las merluzas las vendió en $ 500 cada una, las reinetas a $ 2 250 y los congrios a $ 4 500 cada uno. Si esta situación se repite en el tiempo, ¿cuál es la esperanza matemática para sus ventas por pescado?

a. $ 1 250
b. $ 970
c. $ 2 000
d. $ 2 200
e. $ 3 100

13 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es Falsa?

a. La suma de los valores del recorrido de una función de probabilidad es 1.
b. El recorrido de una función de distribución es $[0,1]$.
c. El dominio de la función de probabilidades es el conjunto de los números reales.
d. La esperanza de una variable aleatoria no puede ser negativa.
e. Los dominios de una función de probabilidad y una función de distribución son los mismos, independientemente de la variable aleatoria de estudio.

14 La siguiente tabla que representa una función de probabilidad:

X	0	1	2	3	4
Probabilidad	0,13	p	0,27	p	0,4

El valor de p corresponde a:
a. 0,2
b. 0,1
c. 0,13
d. 0,4
e. 0,18

15 Se tiene la siguiente función de probabilidad:

X	0	1	2	3	4
Probabilidad	0,25	0,15	0,24	0,06	0,3

La esperanza de la variable aleatoria X es:
a. 3,2
b. 0,32
c. 4,1
d. 2,01
e. 3,5

16 Dada la siguiente tabla de distribución:

X	Probabilidad $P(X)$	Probabilidad acumulada $P(X \leq x)$
0	0,02	0,02
1	0,18	0,2
2	0,15	b
3	a	0,8
4	0,2	1

Los valores de a y b son respectivamente:
a. 0,45 y 0,35
b. 0,15 y 0,25
c. 0,35 y 0,35
d. 0,32 y 0,25
e. 0,05 y 0,75

17 Para la siguiente función de probabilidad:

X	0	1	2	3	4
Probabilidad $P(X)$	0,32	0,12	0,06	0,35	0,15

El valor de $F(3) = P(X \leq 3)$ es:
a. 0,35
b. 0,12
c. 0,15
d. 0,85
e. 0,75

18 Un jugador lanza un dado corriente. Si sale un número impar gana dicho número en cientos de pesos, pero si sale par entonces pierde esa cantidad en cientos de pesos. La esperanza matemática es:

a. 250
b. 25
c. -25
d. -50
e. -35

19 Consideramos un experimento aleatorio de lanzar una moneda al aire tres veces y anotamos el resultado. Se define la variable aleatoria X como número de caras aparecidas en los tres lanzamientos, la probabilidad de obtener menos de dos caras es:

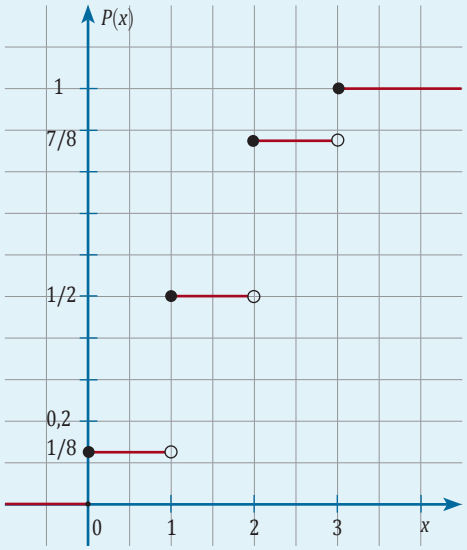
a. $\frac{7}{4}$
b. $\frac{4}{8}$
c. $\frac{2}{3}$
d. $\frac{5}{9}$
e. $\frac{1}{4}$

20 Sea X, el número de neumáticos de un automóvil, seleccionado al azar, que tiene baja la presión. ¿Cuál de las siguientes tres funciones, es una función de distribución de probabilidad para X?

	Funciones		
	A	B	C
X	$P(X)$	$P(X)$	$P(X)$
0	0,3	0,4	0,4
1	0,2	0,1	0,1
2	0,1	0,1	0,2
3	0,05	0,1	0,1
4	0,05	0,3	0,3

a. Solo A.
b. Solo B.
c. Solo C.
d. Solo A y B.
e. Solo B y C.

21 El siguiente grafico representa una función de distribución:



La función de probabilidad que corresponde a la variable aleatoria X es:

a.

X	0	1	2	3
$P(X)$	0,125	0,5	0,875	1

b.

X	0	1	2	3
$P(X)$	0,125	0,25	0,375	0,375

c.

X	0	1	2	3
$P(X)$	0	0,125	0,25	0,375

d.

X	0	1	2	3
$P(X)$	0,125	0,375	0,375	0,125

e.

X	0	1	2	3
$P(X)$	0,125	0,25	0,375	0,5

22 La función de probabilidad de una distribución binomial es:

$$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\cdot q^{n-k}$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es correcta?

a. $n+k=1$.
b. k corresponde al total de la muestra.
c. $P(X=0)=1$.
d. $p+q=1$.
e. $\binom{n}{3}$ representa que existen hasta 3 éxitos.

23 La siguiente tabla representa una función de probabilidad binomial:

X	$P(X)$
0	0,0778
1	0,2592
2	0,3456
3	0,2304
4	0,0768
5	0,0102

Entonces $F(3)$es:

a. 0,9130
b. 0,3174
c. 0,2304
d. 0,3370
e. 0,2138

24 En el siguiente problema: "En una fábrica de cámaras el 5 % sale con defectos. Determina la probabilidad de que en una muestra de 12 se encuentren 2 cámaras defectuosas.", los parámetros de la distribución binomial son:

a. $n=0{,}05;\ p=12$
b. $n=12;\ q=12$
c. $n=12;\ p=0{,}95$
d. $p=0{,}05;\ q=2$
e. $n=12;\ p=0{,}05$

25 Una variable aleatoria X tiene una distribución binomial con los siguientes parámetros, $n=15$ y $p=0{,}5$; entonces, ¿cuál de las siguientes afirmaciones es (son) verdadera (s)?

I. La probabilidad que hayan exactamente 3 éxitos es igual a la probabilidad que hayan 12 fracasos.
II. La probabilidad que hayan 3 éxitos es igual a la probabilidad de que hayan 12 éxitos.
III. La probabilidad que hayan al menos 4 éxitos es igual a la probabilidad que como máximo existan 4 fracasos.

a. Sólo I.
b. Sólo II.
c. Sólo I y II.
d. Sólo I y III.
e. I, II y III.

26 La siguiente corresponde la una distribución binomial de la variable X

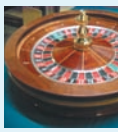
X	**Probabilidad** $P(X)$
0	0,32768
1	0,40960
2	0,20480
3	0,05120
4	0,00640
5	0,00032

Al calcular la probabilidad de que haya como máximo 3 de fracasos de la variable X, se obtiene:

a. 0,73728
b. 0,20480
c. 0,26272
d. 0,94208
e. 0,05792

27 Suponga que el equipo de fútbol Cobreloa, gana cuatro de cinco partidos cuando juegan como local, siguiendo una distribución binomial. Si juega 10 partidos como local durante el campeonato, la probabilidad que gane de 5 a 8 partidos es:

a. 0,624190
b. 0,015698
c. 0,223678
d. 0,301357
e. 0,617806



28 La última novela de un autor ha tenido un gran éxito, hasta el punto de que el 80 % de lectores menores de 30 años ya la han leído. Si se escoge un grupo de 4 amigos entre estos lectores, ¿cuál es la probabilidad de que en ese grupo hayan leído la novela 2 personas?

a. 0,3214
b. 0,1536
c. 0,2423
d. 0,7125
e. 0,1322

29 Se realiza el siguiente experimento: sacar una carta de una baraja de naipe inglés, ver su pinta y número y luego devolverla a la baraja y revolver. Se define la variable aleatoria "el número de ases que se pueden obtener al extraer 4 cartas de esta manera". Entonces, su función de probabilidad representa una distribución:

a. Binomial de parámetros 4 y $\frac{1}{13}$.
b. Binomial de parámetros 4 y $\frac{12}{13}$.
c. Binomial de parámetros 1 y $\frac{1}{13}$.
d. Binomial de parámetros 1 y $\frac{12}{13}$.
e. No binomial.

30 Un alumno tiene probabilidad 0,34 de obtener 700 puntos ponderados en la PSU, 0,26 de obtener 650 puntos, 0,18 de obtener 600 puntos y 0,22 de obtener 550 puntos. Si a través del tiempo él ha mantenido sus puntajes en los distintos ensayos, que puntaje ponderado debiera esperar:

a. 625
b. 636
c. 648
d. 652
e. 661

31 Con respecto a la pregunta anterior, ¿cuál es el rango de variación de los puntajes que el alumno debiera esperar?: (Aproxima los puntajes a números enteros)

a. [500 − 700]
b. [586 − 692]
c. [578 − 693]
d. [588 − 703]
e. [603 − 689]

32 "En dos empresas del rubro automotriz de la misma marca de vehículos, se ha determinado la probabilidad de que, al vender un automóvil recibiendo otro en parte de pago existan las siguientes ganancias, según muestra la tabla:

Empresa A

Ganancia	Probabilidad
$ 200 000	0,24
$ 400 000	0,31
$ 500 000	0,33
$ 600 000	0,12

Empresa B

Ganancia	Probabilidad
$ 200 000	0,18
$ 400 000	0,61
$ 500 000	0,12
$ 600 000	0,09

¿Cuál de las empresas debería esperar una mayor ganancia en promedio?

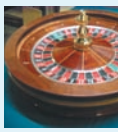
a. La empresa A.
b. La empresa B.
c. Se esperan que ambas ganancias sean iguales.
d. No se puede calcular con los datos dados.
e. No se puede asegurar el promedio entre ambas.

33 ¿Cuál es la desviación estándar aproximada para la empresa A del problema anterior?

a. $ 110 404
b. $ 132 737
c. $ 142 011
d. $ 151 678
e. $ 154 898

34 ¿Cuál es la desviación estándar aproximada para la empresa B del problema 32?

a. $ 98 003
b. $ 100 768
c. $ 110 404
d. $ 127 241
e. $ 132 737



35 ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es la correcta?:

a. Cualquier función cuyo dominio sea los reales y su recorrido $[0,1]$, puede ser una función de una variable aleatoria.
b. La función de distribución puede ser escalonada.
c. Basta tener los productos del valor de la variable aleatoria por su probabilidad para tener, la esperanza matemática respectiva.
d. Si la esperanza matemática de una distribución vale cero por lo menos una de los valores de la variable debe ser cero.
e. Una distribución binomial queda determinada si conocemos el exactamente el número de pruebas o ensayos y la probabilidad de éxito no nula.

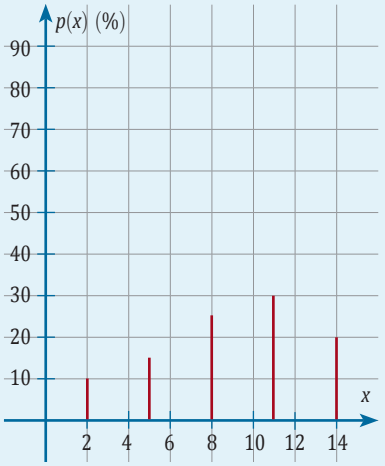
36 La probabilidad de aparición de una pinta durante un lanzamiento en un dado, es inversamente proporcional a dos, si la pinta es par, e inversamente proporcional a cinco, si la pinta es impar. Si la función de probabilidad se simboliza por f, entonces:

a. $f(1)=\frac{10}{21}$
b. $f(2)=\frac{1}{2}$
c. $f(3)=\frac{10}{63}$
d. $f(4)=\frac{10}{42}$
e. $f(5)=\frac{10}{42}$

37 En el siguiente término $\binom{26}{5}\left(\frac{3}{97}\right)^{x}(y)^{z}$ de una distribución binomial cuya probabilidad de éxito es $\frac{3}{97}$, los valores de x, y y z, respectivamente son

a. $5;\frac{3}{97};21$
b. $5;\frac{94}{97};21$
c. $21;\frac{3}{97};5$
d. $21;\frac{94}{97};5$
e. N.A.

38 La gráfica siguiente muestra los valores de una variable aleatoria y las probabilidades respectivas:



Entonces la esperanza matemática es:

a. 9,55
b. 9,5
c. 9,055
d. 9,05
e. 9,005

39 Con respecto a la gráfica anterior se tiene que el valor de $p(5<X)$

a. Supera 0,75
b. Es 0,75
c. Es 0,25
d. Supera 0,25
e. Es otro valor.

40 Si en una gráfica de distribución de una variable aleatoria se muestra que $p(11\leq X<13)=0{,}307$ y $p(13\leq X<14)=0{,}314$ se puede deducir que:

I. La variable no toma valores que esté comprendidos entre 11 y 13
II. $p(13)=0{,}007$.
III. $p(11)$ es menor que $0{,}007$.

a. Solo I.
b. I y II.
c. I y III.
d. II y III.
e. I, II y III.

Criterios para autoevaluar tu aprendizaje

Marca con una ✘ según la evaluación de tu trabajo en esta unidad. Recuerda que hacer esta evaluación responsablemente te entregará información sobre tu proceso de aprendizaje.

Indicadores	+++	++−	+−−
Pude completar el mapa conceptual de la síntesis sin necesidad de mirar mi cuaderno.			
Respondí correctamente el ítem de verdadero y falso.			
Resolví correctamente los ejercicios propuestos.			
Colaboré con mis compañeros y compañeras en el trabajo grupal.			
Soy capaz de explicar los contenidos y procedimientos para la resolución de ejercicios de esta unidad.			
Entiendo el tipo de problemas cotidianos que se pueden resolver con los contenidos de esta unidad.			
Me siento seguro de lo aprendido y creo que podría resolver otros ejercicios que me plantearan.			

Calcula el porcentaje de logro que obtuviste en el ítem III.

Porcentaje de logro

$$PL = \frac{\text{Nº de respuestas correctas}}{40} \cdot 100$$

Porcentaje de logro	Nota obtenida	Nivel de mi aprendizaje	Cómo mejorar
29 % a 0 %	1,0 a 2,5	Alerta	Los contenidos no han sido comprendidos. Debes repasarlos nuevamente y rehacer los ejercicios. Fíjate muy bien en los ejercicios resueltos. Debes pedir ayuda. ¡Ánimo! con trabajo y estudio se puede.
49 % a 30 %	2,6 a 3,5	Muy bajo	La mayoría de los contenidos no han sido comprendidos. Debes volver a repasarlos y rehacer los ejercicios incorrectos. Pídeles ayuda a tus compañeros o compañeras. Vuelve a estudiar; seguro que lo lograrás.
59 % a 50 %	3,6 a 3,9	Bajo	Una gran parte de los contenidos no han sido comprendidos en su totalidad. Rehaz aquellos ejercicios incorrectos, pero antes, vuelve a estudiar los contenidos. Trata nuevamente.
69 % a 60 %	4,0 a 4,7	Medio bajo	Adquiriste una parte de los contenidos, pero aún faltan. Debes corregir aquellos ejercicios incorrectos y revisar los contenidos de los temas en que fallaste. Bien, has avanzado, aunque aún queda camino por andar.
79 % a 70 %	4,8 a 5,4	Medio	Has logrado entender una buena parte de los contenidos; sin embargo, aún faltan otros y afianzar los primeros. Corrige las respuestas erróneas; puedes pedir ayuda si lo deseas. Revisa los contenidos. ¡Puedes hacerlo mucho mejor!
89 % a 80 %	5,5 a 6,2	Medio alto	Has logrado adquirir gran parte de los contenidos. Revisa los ejercicios en los que fallaste y repasa aquellos contenidos. ¡Lo has hecho bien!
100 % a 90 %	6,3 a 7,0	Alto	Has logrado aprender todos o casi todos los contenidos tratados. ¡Muy bien! has logrado los objetivos propuestos. Sigue así.

Evaluación de síntesis 4 (Unidades 1 a 5)

I. Completa cada frase con el concepto o resultado correspondiente según sea el caso:

1 El resultado de $(2-i)^5$, en el conjunto de los números complejos, es _____

2 El conjugado de un número complejo representa gráficamente _____

3 Una ecuación cuadrática siempre tiene solución en el conjunto de los números _____

4 El vértice de la parábola dada por la función $y = 3x^2 - 5x - 1$ es el punto _____

5 Una figura homotética a otra dada resulta invertida si la razón de homotecia es _____

6 Si la razón de homotecia entre dos figuras es 2, entonces la medida de cada uno de los lados de la figura original es _____ de la de los lados de la homotética.

7 La ecuación de la recta que dimidia al II y IV cuadrante del plano cartesiano es _____

8 Si la pendiente de una recta es m, entonces, la pendiente de una recta perpendicular a la primera es _____

9 La esperanza de una variable aleatoria de una función de probabilidad se define como _____

10 Si una variable aleatoria X tiene una distribución binomial, $X \sim B\left(6, \frac{2}{3}\right)$, entonces, la probabilidad de que exista exactamente un éxito es _____

II. Resuelve los siguientes ejercicios, colocando TODO el desarrollo en tu cuaderno. No olvides verificar tus respuestas:

1 Dados los siguientes números complejos, $z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = i - 2$ y $z_3 = i - i^2$, determina el valor de:

a. $(z_1 - z_2) \cdot {z_3}^2$

b. $\frac{z_2}{2z_3} \cdot \overline{z_1}$

2 Encuentra el valor del complejo z, de modo que se cumpla la siguiente igualdad:

$$4z + (i-3)^2 = 3i(z+2)$$

3 Resuelve las siguientes ecuaciones:

a. $(x+4)^2 - (2x-1)^2 = 0$

b. $\frac{x-1}{2x-3} + \frac{4x-1}{x} = \frac{x+2}{2x} + \frac{7}{2}$

4 Dada la siguiente función cuadrática $y = 2x^2 - 5x + 12$, determina:

a. Los puntos de corte de la parábola con los ejes x e y.

b. El punto máximo de la parábola.

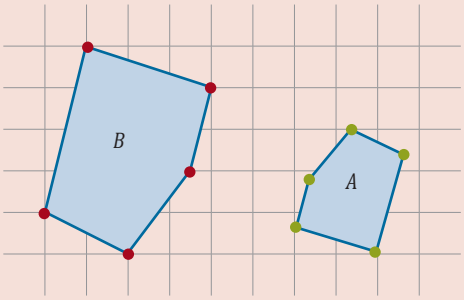
5 A partir de un triángulo de vértices A: $(1,4)$, B: $(-2,3)$ y C: $(0,-4)$ se obtendrá una figura homotética de razón $0{,}25$ y centro de homotecia B. A partir de esta información:

a. Grafica ambas figuras en el plano cartesiano.

b. Encuentra el valor del perímetro de la figura homotética mencionada.

c. Encuentra el valor del área del triángulo homotético mencionado.

6 Dadas la figura A y su homotética B, determina el centro de homotecia y la razón de ésta.



7 Encuentra la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2,5)$ y es:

a. paralela a la recta de ecuación $2x - 3y + 1 = 0$

b. perpendicular a la recta de ecuación $4x + 2y + 6 = 0$

8 Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{array}{|l} 6x - 3y + 3 = 0 \\ y = 2x + 1 \end{array}$$

Determina si las recatas que él representan son paralelas, perpendiculares o secantes.

9 En una urna hay 16 fichas marcadas con el número 1, 22 marcadas con el número 2 ,12 marcadas con el número 3 y 20 marcadas con el número 4. Se extrae una ficha al azar, se anota su resultado y se vuelve a colocar en la urna. Si se define la variable aleatoria "el número de la ficha extraída", determina:

a. La función de probabilidad asociada

b. La esperanza matemática.

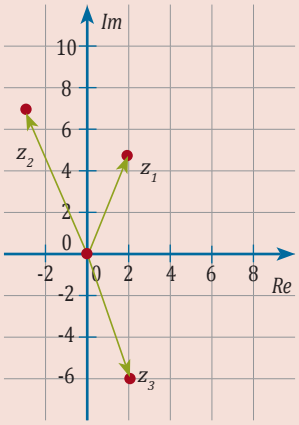
10 Una empresa ha hecho un estudio de mercado y ha estimado que la probabilidad que las dueñas de casa compren un determinado detergente es $\frac{7}{11}$. Determina:

a. La probabilidad de que al encuestar a 20 mujeres, exactamente 12 de ellas hayan comprado el detergente.

b. La probabilidad de que, al encuestar a 30 personas, por lo menos 3 compren el detergente.

III. Resuelve los siguientes problemas:

1 Valentina está estudiando la materia de números complejos. Ella resolvió el siguiente ejercicio correctamente. Sabemos que tú también puedes hacerlo, ¡anímate!... " Dados los complejos representados gráficamente:



Determina:

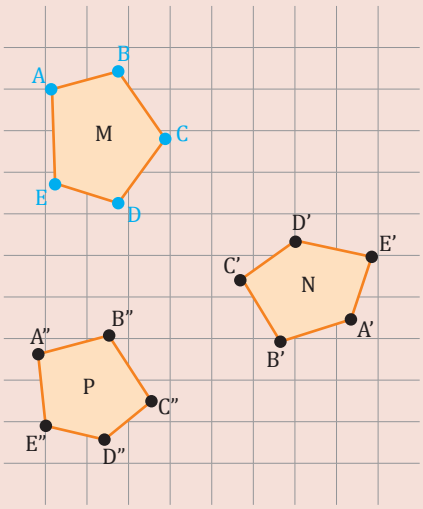
a. $z_1 + z_2 + z_3$. Además grafica el complejo resultante en el gráfico dado.

b. $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_3}{z_1}$

2 Francisco ha notado que la ganancia de su empresa se comporta según una función cuadrática, dependiente de los artículos producidos. Si él ha registrado que para 0 y 200 artículos producidos la ganancia es nula y que la máxima ganancia obtenida es de $\$\ 400\,000$. ¿Puede Francisco estimar la función que regula sus ganancias?, justifica matemáticamente.

3 Victoria trabaja en una galería de arte y para la exposición que debe montar la semana que viene, necesita armar un triángulo rectángulo con unos listones de madera que encontró en la bodega. Su jefe le ha dicho que resulta más fácil si corta un trozo de igual medida en cada uno de ellos. Si los listones miden 17 cm, 31 cm y 33 cm, ¿cuánto debe cortar de cada listón?

4 Jerónimo es dibujante técnico y buscando en Internet ha encontrado un programa muy fácil de usar que realiza homotecias. Con este programa ha hecho el siguiente dibujo:



a. ¿Puedes tu determinar los centros de homotecia y la razón de homotecia para llevar la figura M a N y N a P?

Ahora bien, si Jerónimo necesita construir estas figuras para un aviso publicitario y las medidas de los lados de la figura M son $2{,}05\ \text{m}$, $2{,}03\ \text{m}$, $2{,}02\ \text{m}$, $1{,}71\ \text{m}$ y $2{,}27\ \text{m}$:

b. ¿Cuáles deben ser las medidas de los lados de la figura P? Aproxima tus resultados a la centésima.

5 Omar trabaja en una automotora, su jefe le ha presentado una recta que grafica el comportamiento de la devaluación de uno de los modelos de los automóviles que venden. Como Omar ya conoce a su jefe y sabe que siempre les pide hacer algunos informes y cálculos de lo que él presenta, ha anotado los siguientes datos, valor del vehículo $0\ \text{km}$: \$ 5 990 000, valor del auto después de 3 años: \$ 4 100 000. Efectivamente, su jefe le ha pedido las respuestas de las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la ecuación de la recta que estaba representada en el gráfico y que contenía los datos anotados por Omar?

b. ¿Qué valor tendrá el auto a los seis años de uso, suponiendo que su devaluación se comporta según la recta presentada?

6 Maximiliano ha estado probando una nueva teoría sobre el tráfico en su cuadra para poder argumentar con datos concretos a la municipalidad su petición de repavimentación. El ha calculado que la probabilidad que pase un camión es de $\frac{3}{5}$, lo que realmente destruye el pavimento. Ahora debe estimar algunos datos fundamentales para su estudio y posterior petición, ayúdalo tú, respondiendo las siguientes preguntas:

a. Escribe la expresión que permite calcular la probabilidad que, dentro de p vehículos que pasan por la calle, algunos sean camiones.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que si pasan 30 vehículos por la calle cada hora, exactamente 12 de ellos sean camiones?

7 Inventa tres problemas que te permitan resolver un sistema de ecuaciones para cada caso de intersección entre rectas (paralelas, secantes, coincidentes)

IV. Marca la alternativa correcta:

1 El resultado de $\frac{i^{235}}{3\,i^{1289}} + 4(i^{104} + i^{227})$, en el conjunto de los números complejos, es:

a. $3 - 4\,i$
b. $3 + 4\,i$
c. $5 + 4\,i$
d. $4 - 3\,i$
e. $5 + 3\,i$

2 El módulo del conjugado del complejo $5 - 3\,i$, es igual al:

a. Módulo del complejo $7 + 2\,i$.
b. Módulo del complejo $(2 - i)^2$.
c. Módulo del complejo resultante de la suma de $2\sqrt{2} - 6\,i$ con $\sqrt{2} + 10\,i$.
d. Módulo del complejo resultante del producto de $8\,i + 2$ con $i - 1$.
e. Módulo del complejo$(5 + 3\,i)^{-1}$.

3 La ecuación $\frac{x}{x+2}-\frac{12}{x^2+2x}=\frac{1}{x+2}$ tiene por solución el conjunto:

a. $\{3,4\}$
b. $\{-3,4\}$
c. $\{1,6\}$
d. $\{-1,-6\}$
e. $\{4\}$

4 De la función cuadrática $y=-4x^2+5x-1$, es FALSO afirmar que:

I. Alcanza su máximo en el punto $\left(\frac{5}{8},\frac{9}{16}\right)$.

II. Una de sus ramas corta al eje de las ordenadas en el punto $(0,-4)$.

III. Las ramas de la parábola no cortan al eje de las abscisas.

a. Solo II
b. Solo I y II
c. Solo I y III
d. Solo II y III
e. I, II y III

5 Si a un pentágono regular de lado 28 cm se le realiza una homotecia de centro en uno de sus vértices y razón de homotecia $\frac{1}{7}$, entonces, el perímetro del pentágono homotético obtenido es:

a. 4 cm
b. 20 cm
c. 196 cm
d. 308 cm
e. 980 cm

6 Uno de los vértices de un triángulo es el punto $(2,6)$. El segundo vértice se encuentra en el punto medio del trazo de extremos $(-3,-5)$ y $(-7,5)$ y, el tercer vértice en el origen del sistema coordenado. Su perímetro es:

a. $(5+2\sqrt{10}+3\sqrt{5})$ u
b. $(\sqrt{5}+2\sqrt{10}+3\sqrt{5})$ u
c. $(2\sqrt{95}+5)$ u
d. $(\sqrt{5}+2\sqrt{10}+5)$ u
e. $(\sqrt{85}+2\sqrt{10}+5)$ u

7 La ecuación de la transversal de gravedad trazada desde el vértice C del triángulo de vértices A: $(4,6)$; B: $(2,-7)$ y C: $(-3,9)$ está contenida en la recta de ecuación:

a. $3x+7y-54=0$
b. $19x+12y-51=0$
c. $19x+12y-63=0$
d. $24x+38y-53=0$
e. $24x+19y-91=0$

8 De las rectas representadas por las ecuaciones del siguiente sistema $\left.\begin{array}{l}3x-5y+1=0\\6x+10y-2=0\end{array}\right|$, se puede afirmar que:

a. Son paralelas.
b. Son perpendiculares.
c. Son coincidentes.
d. Son secantes y forman dos ángulos agudos y dos obtusos al intersectarse.
e. Ninguna de las anteriores.

9 Una variable aleatoria X tiene la siguiente función de probabilidad, entonces, su esperanza es:

X	$f(x)$
0	0,25
1	0,13
2	0,42
3	0,15
4	0,05

a. 0,162
b. 0,324
c. 1,100
d. 1,620
e. 1,840

10 Arturo, profesor de Biología, ha hecho una prueba para sus alumnos que consta de 45 preguntas de verdadero y falso. Si un alumno obtiene un 4,0 contestando exactamente el 60 % de ellas correctamente, entonces, la probabilidad de que un alumno obtenga esta nota es, aproximadamente:

a. 5 %
b. 7 %
c. 12 %
d. 22 %
e. 25 %

Evaluación de síntesis 5 (Unidades 1 a 5)

I. Coloca verdadero (V) o falso (F) frente a cada una de las siguientes afirmaciones según corresponda. Justifica las falsas:

1 ____ Para que dos rectas coplanares sean perpendiculares, basta que la pendiente de una de ellas sea la inversa multiplicativa de la pendiente de la otra.

2 ____ Si el discriminante de la fórmula para resolver una ecuación cuadrática es negativo, entonces necesariamente las soluciones de esta ecuación son complejas conjugadas.

3 ____ El dominio de la función de probabilidad de una variable aleatoria discreta, corresponde a los valores que ésta toma.

4 ____ Para encontrar la intersección de dos sucesos dependientes, basta conocer la probabilidad de uno de ellos, dado el otro y multiplicarla por la probabilidad de cualquiera de los dos sucesos en cuestión.

5 ____ Si se realiza una homotecia a un cuadrilátero cualquiera, para obtener otro de mayor superficie, es necesario que el valor de la razón de homotecia sea mayor a uno.

6 ____ Para encontrar la ecuación del eje de simetría de cualquier parábola, es suficiente conocer la suma de las coordenadas x del (de los) punto (s) de intersección, y luego dividirla por dos.

7 ____ Tanto el recorrido de una función de probabilidad de una variable aleatoria discreta, como el de su función de distribución es $[0,1]$

8 ____ Para hallar la distancia entre dos puntos coplanares P_1: (x_1,y_1) y P_2: (x_2,y_2), basta conocer la diferencia entre las coordenadas x y sumarla con la diferencia entre las coordenadas y, para luego extraer raíz cuadrada.

9 ____ Las coordenadas del punto medio de un trazo, dependen de las coordenadas de cada uno de los extremos de este mismo trazo.

10 ____ El valor del módulo de un complejo conjugado es numéricamente igual al tamaño del complejo cuando éste se le representa en un plano complejo.

II. Resuelve los siguientes ejercicios, colocando todo el desarrollo en tu cuaderno. NO olvides revisar tus respuestas:

1 El desarrollo de la varianza de los valores que toma una variable aleatoria se calcula de la siguiente manera:
$0{,}3(2-x)^2+0{,}1(5-x)^2+0{,}4(7-x)^2+0{,}2(8-x)^2=12{,}1$, donde x simboliza la esperanza de dicha variable.

a. Encuentra los valores posibles de la esperanza matemática.
b. Escribe la función de probabilidad de dicha variable.
c. ¿Cuál es la respectiva función de distribución?

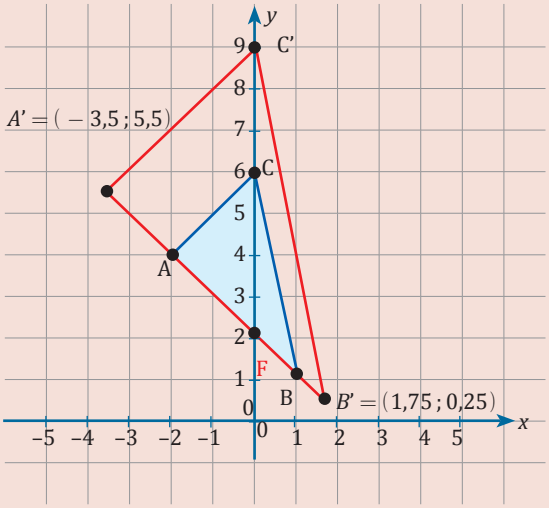
2 El Uno comenta al Otro que: "la probabilidad del suceso A como valor de x, y la probabilidad del suceso B como valor de y, es un punto de la recta $5x - 6y - 0{,}2 = 0$". El Otro agrega: "Fíjate que la recta $2x + y - 1{,}1 = 0$, también contiene el mismo punto". Tercero que les escucha, les interrumpe y les pregunta:

a. Indiquen el punto de intersección involucrado, si es que existe.
b. ¿Cuál de las dos rectas forma un ángulo obtuso con el eje x? ¿Por qué?
c. ¿Serán estas rectas perpendiculares? ¿Por qué?
d. Suponiendo que $A \cap B$ es $0{,}16$ ¿qué es más probable: que la ocurrencia de B influya en la aparición de A, o viceversa? Justifica tu respuesta.

3 El aprendiz de matemático notó que su maestro escondió la parte real y la parte imaginaria del complejo $a + bi$ en una parábola. Cuando observó más de cerca su ecuación: $y = 2x^2 + 19x - 33$, pensó: "tiene que estar en la intersección con el eje horizontal, o bien con el otro... más probable que en el punto más bajo de esta figura".

a. Indica el o los puntos donde la curva intersecta al eje x
b. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección con el eje y?
c. ¿por qué es posible de que exista el punto más bajo en la representación gráfica de $y = 2x^2 + 19x - 33$?
d. Supongque la parte real del complejo, es numéricamente igual a la coordenada x del vértice de la parábola, y su parte imaginaria, igual a la otra coordenada. Anota dicho complejo.
e. Encuentra el módulo del complejo que correctamente hallaste en **c**. Expresa tu respuesta con aproximación a la centésima.

4 La siguiente gráfica muestra el triángulo rojo que es homotético del otro allí dibujado. El centro de dicha homotecia está destacado en rojo



a. Encuentra la razón de esta homotecia.
b. ¿Cuál es la ecuación principal que incluye el centro de la homotecia?
c. Halla las pendientes de las ecuaciones de las rectas que pasan por B y C, como la B' y C'. ¿Qué puedes decir de la posición de estas rectas en el plano? Justifica tu respuesta.

III. Resuelve los siguientes problemas:

1 "...Así es Chanito... todo en este universo está relacionado. Te cuento: cuando aprendí a encontrar la probabilidad de que hallar tres caras en cinco lanzamientos de una moneda cargada, cuya probabilidad de sello es $0{,}9$, simultáneamente aprendí a calcular el cuarto término de $(2 + 3i)^6$ y más aún decidir si era real o imaginario... Si resulta hasta económico, pues usé la misma fórmula, pero con p y q distintos para la potencia del complejo, es decir: 2 y $3i$ respectivamente ...¡y todo estuvo bien, Chanito!... me entiendes ¿no?"

Tú has comprendido todo lo anterior, por tanto ayuda a responder las preguntas que vienen ahora:

a. Encuentra la probabilidad aludida.
b. ¿Cuál es cuarto término del desarrollo de $(2+3i)^6$? ¿Es real o imaginario?

2 Carolina está preparando su última evaluación de síntesis de tercero medio. Te propone el ejercicio que integra conocimiento de las unidades y que estudió durante el presente año. Mira el gráfico que corresponde a la función de probabilidad de una variable aleatoria X, y responde a cada una de las preguntas que vienen posteriormente.

* ver gráfico al final de la página

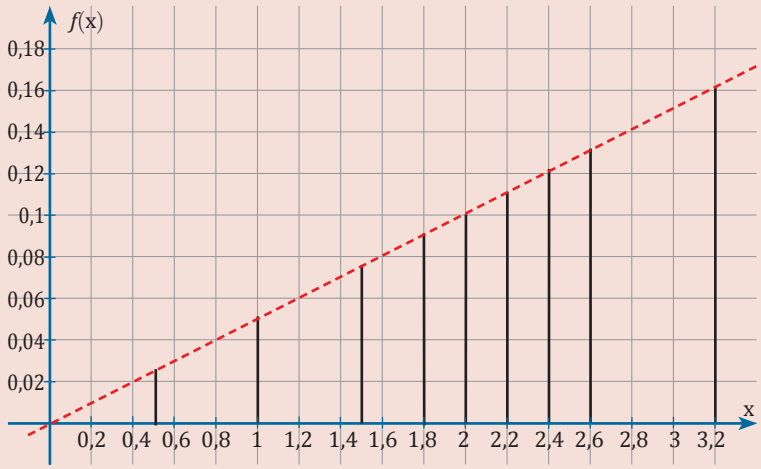
a. Escribe la ecuación principal que contiene los extremos superiores de las varillas ¿A qué corresponde el valor de estos estos extremos?
b. Falta una varilla que dibujar ¿Por qué? ¿Cuánto vale el extremo superior de ella?
c. Anota la función de distribución de esta variable.
d. ¿Cuál es el valor de $E(X)$?
e. Ahora bien, considera el triángulo cuyos vértices son $(0,0)$ y los extremos de la séptima varilla, contándolas de izquierda a derecha. Además, considerando que el centro de una homotecia está en el origen, ¿cuál es la razón de homotecia que permite que el triángulo anterior sea un homólogo de aquel que tiene como un lado, la tercera varilla?

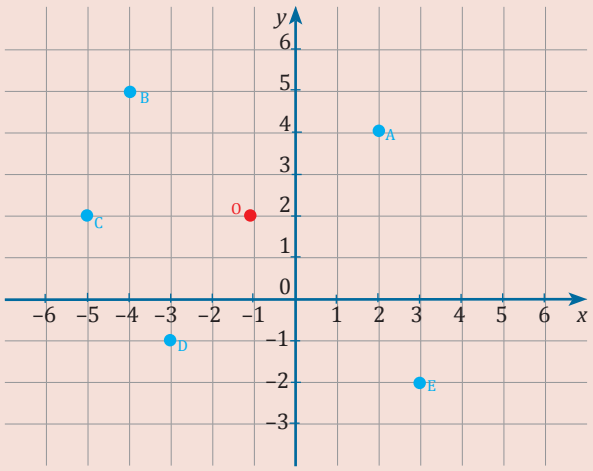
3 *El hermanito menor de Coné tiene tres años y medio y está aprendiendo a unir puntos usando trazos. Ella le dibuja en una hoja blanca, un punto rojo y cinco azules...*

- Cuando vuelva del jardín le pediré que el punto *O*, lo una con cualquiera de los azules...
- *Lo más probable es que sea con aquel que él que vea más cerca... aunque observo que puede elegir cualquiera, porque a todos los veo igualmente probables...*
- ¡Oye, mi hermanito no es ningún errático en sus dibujos. Es muy inteligente, además que es ridículo que todos los puntos tengan la misma probabilidad de que él los elija. Basta que pienses un poco: probablemente lo una con el que esté más cerca!
- *Disculpa, Coné, pero no me malinterpretes... volvamos, tú dices que a medida que se aleje el punto de O, es menos probable...*
- ¡No es ningún misterio que la probabilidad que elija un punto sea inversamente proporcional a la distancia que lo separa de *O* ¿no te parece?... te puedo agregar que en una segunda oportunidad le haré unir los tres puntos colineales, que estoy mirando en mi dibujo!

Decidí retirarme... Coné, habla como una experta psicopedagoga ....

*





Conforme al relato y al gráfico, responde:

a. Encuentra cada una de las distancias involucradas, y exprésalas, con aproximación a la centésima.
b. ¿Cuál es la ecuación general que contiene los tres puntos colineales, si es que existen?
c. Verifica que la constante de proporcionalidad sea aproximadamente 0,82 y escribe la función de probabilidad que represente la situación anterior, asignado el valor 1, a A, 2 a B, y así sucesivamente.

IV. Marca la alternativa correcta:

1 Una variable aleatoria tiene una distribución binomial de parámetros $\left(8,\frac{1}{13}\right)$ entonces los valores de k, x e y en $\binom{8}{k}\cdot\left(\frac{1}{13}\right)^{k}\cdot\left(\frac{x}{y}\right)^{3}$, respectivamente son:

a. 3; 12 y 13
b. 3; 13 y 12
c. 5; 12 y 13
d. 5; 13 y 12
e. 8; 12 y 13

2 Los números complejos que satisface la ecuación $49x^2+16=0$ son:

a. $-\frac{4}{7}i$ y $\frac{4}{7}i$
b. $\frac{4}{7}+\frac{4}{7}i$ y $\frac{4}{7}-\frac{4}{7}i$
c. $-\frac{7}{4}i$ y $\frac{7}{4}i$
d. $0-\frac{4}{7}i$ y $0+\frac{4}{7}i$
e. $0-\frac{7}{4}i$ y $\frac{7}{4}i$

3 Dada la parábola $y=-5x^2+8x-5$, de ella se puede afirmar que:

I. Intersecta al eje x en $\left(\frac{1}{5},0\right)$ y $\left(\frac{7}{5},0\right)$.
II. Su eje de simetría es $x=\frac{4}{5}$.
III. La ordenada del punto más alto es $-\frac{9}{5}$.

Entonces es(son) verdadera(s)

a. Solo II
b. II y III
c. I y II
d. I,II y III
e. I y III

4 En una caja hay cuatro bolas blancas (B) y cinco bolas negras (N). ¿Cuál es el valor de $p(B/N)$ si cada extracción se hace sin reposición?

a. 27,78 %
b. 44,44 %
c. 50 %
d. 55,56 %
e. Otro valor

5 Con respecto a la homotecia de figuras planas, entre las siguientes alternativas, la FALSA es:

a. La homotecia se puede considerar una operación vectorial ya que es la resultante de ponderar vectores dirección (del centro de homotecia a cada punto de la figura) por un escalar (razón de homotecia).
b. Si el centro de homotecia está en uno de los vértices de la figura original, su figura homotética estará unida a la primera por dicho vértice.
c. El centro de la homotecia puede tener cualquier ubicación en el plano.
d. Si la razón de homotecia es negativa y mayor que uno, la figura semejante será más grande, pero habrá experimentado una rotación con respecto a la figura original.

e. Si la razón de homotecia es negativa y menor que uno, la figura semejante será más pequeña con respecto a la figura original.

6 Para que sea M: $(13{,}11)$ el punto medio entre N: $(a+b, b-a)$ y P: $(2a+b, b+3a)$ se debe cumplir que:

a. $3a+2b=26$ y $2b+2a=22$
b. $3a+2b=13$ y $2b+2a=11$
c. $3a+2b=6{,}5$ y $2b+2a=5{,}5$
d. $3a+2b=11$ y $2b+2a=13$
e. $a=-6{,}5$ y $2b+2a=5{,}5$

7 Al efectuar $\frac{5i+2}{1-2i}$ se obtiene:

a. $-\frac{8}{5}+\frac{9}{5}i$
b. $-\frac{12}{5}+\frac{9}{5}i$
c. $\frac{8}{3}-\frac{9}{3}i$
d. $\frac{8}{5}+\frac{9}{5}i$
e. $-\frac{8}{3}+\frac{9}{3}i$

8 La ecuación general de la recta que no es ni paralela, ni perpendicular a $y=x+3$ es:

a. $x-y=-3$
b. $x-y+1=0$
c. $x+y=-3$
d. $y=-\frac{1}{3}x+\frac{5}{3}$
e. $x+3y-5=0$

9 Para determinar la varianza de una variable aleatoria, es necesario conocer:

(**1**) El valor de la esperanza.
(**2**) La información que proporciona el gráfico de su función de distribución.

a. (**1**) por sí sola.
b. (**2**) por sí sola.
c. Ambas juntas, (**1**) y (**2**).
d. Cada una por sí sola, (**1**) o (**2**).
e. Se requiere información adicional.

10 Se desea escribir la función de probabilidad de una variable aleatoria X con seis valores. Para ello es suficiente conocer:

(**1**) Los valores de las probabilidades de cinco de ellos.
(**2**) La razón en que se encuentran las probabilidades de los seis valores.

a. (**1**) por sí sola.
b. (**2**) por sí sola.
c. Ambas juntas, (**1**) y (**2**).
d. Cada una por sí sola, (**1**) o (**2**).
e. Se requiere información adicional.

Mis apuntes



Páginas 6 a 73

Unidad 1
Un nuevo conjunto... los números complejos

Conocimientos previos

Página 11 Trabaja

1 **a.** $8x + 3y$ **c.** $-2a^2b - 3a^2$
b. $14m + 7d$ **d.** $\frac{17}{12}a - 10b - 3c$

2 **a.** $-2x^2 - 2x + 10xy - 11y$
b. $19x^2 - 82xy + 123y^2$
c. $q^2 - pq + 7q - 12p - 33$

3 **a.** $A = 23rs - 6r^2 - 20s^2$, $P = -2r - 2s$
b. $A = (8x - 2)\pi$, $P = (16x^2 - 8x + 1)\pi$

4 **a.** $2a + 34$
b. $-4x^2 - x + 5$
c. $9 + 7m + 8p$
d. $7ab + 54bz - 4az$
e. $-\frac{1}{8}m^2 + mn - \frac{17}{20}n^2$
f. $-5x^3 + 111x^2 - 815x + 1\,229$
g. $8h - 10g - 53g^2h$

5 **a.** $x^2 + 6x + 9$
b. $p^2 - 9$
c. $8a^3 - 12a^2b + 6ab^2 - b^3$
d. $4a^2 + b^2 + c^2 + 4ab + 4ac + 2bc$
e. $9a^6 + 48a^3b^4 + 64b^8$
f. $7x^2 - 10xy + 3y^2$

6 **a.** $6x$ **c.** $2; p$
b. $3x; 9x^2$ **d.** $9k^2$

7 **a.** $(2x \cdot 11) - (2x + 1) = 239$ **b.** 24

8 * Solución pie de página

9 $x = 13$

10 **a.** $3a^3 - a^2 + 3a + 2a^2b - 3ab + b^2 + 5b$
b. $4a^2b - a^2 + 3a - 14ab + b^2 + 5b$
c. $8a^2b - 41a^2 - 7a - 6ab + b^2 + 5b$
d. $3a^3 - a^2 - 3a - a^2b - 8ab - 2ab^2 + b^2 + 5b$
e. $a^3 - 3a^2 + 2a^2b - 10ab + ab^2 + b^2 + 5b$

11 **a.** $12a + 15b - 3$
b. $\frac{6a^2 + 19a + 15}{2}$
c. $\frac{8a^2 + 26a - 21b - 18b^2 + 15}{2}$
d. $22x^2 - 2y$
e. $4a^2 + 3ab - b^2$
f. $15x+7y$
g. $(6b + 14ab - 8a)\pi$

12 **a.** $y = 28$ cm **b.** 19 cm, 36 cm y 56 cm

13 17 cm y 24 cm

14 **a.** $z = 12$ cm
b. Si. Porque un par de lados tiene igual medida de 25 cm
c. $P = 356$ cm **d.** 5 120 cm^2

15 **a.** $4pq - 4q$ **b.** $-2q^3$

16 **a.** $A_1 = 6x^2 + 12x + 4$;
$A_2 = 52x^2 + 112x + 24$;
$V_1 = x^3 + 3x^2 + 2x$;
$V_2 = 24x^3 + 72x^2 + 48x$
b. $46x^2 + 100x + 20$; 24 veces

17 **a.** $\$\left(\frac{8xn + 4x}{3x + 50}\right)$
b. $\frac{2nx^2 + 20nx - 10n}{x}$ lápices.
c $\$\,(x + 15n + 3)$

18 **a.** $m^2 - n^2$ **b.** 1

8 *

Columna A	Columna B
$(5x + 3y)(2x - y) + 4xy$	$-16x^2 - 2xy + 3y^2$
$7x^2 + (3x - 6)y + 9y(x + 3)$	$-3y^2 + 7xy - 16x + 30$
$(-3x + 2y)^2 - (5x - y)^2$	$7x^2 - 40xy + 12$
$(x + 2y)(x - 2y) + 6(x^2 - 6xy + 2)$	$10x^2 + 5xy - 3y^2$
$2(x - 5)(x - 3) + (2x - y)(3y - x)$	$7x^2 + 12xy + 21y$

19 **a.** $4x^2 - 2x$

b. Para Fila A: $24x^4 + 120x^3 + 116x^2 - 16x$;
Para Fila B: $24x^4 + 40x^3 + 92x^2 + 24x$

c. $6x^4 + 20x^3 + 19x^2 - 9x + 2$

d. $60x^5 + 53x^4 - 36x^3 - 9x^2 + 9x - 2$

e La diferencia entre la altura de la Fila A con respecto al de la Fila B, es decir, $4x^2 + 3x - 2 - (4x^2 + 3x - 2)$ resulta 0. Esto indica que los paralelepípedos tienen la misma altura.

20 **a.** $x^2 + 11$

b. **i.** $x^3 + 9x^2 + 11x + 99$

ii. $x^4 - x^3 + 13x^2 - 11x + 22$

iii. $x^3 + 8x^2 - 7x + 18$

Página 17 *Trabaja*

1 **a.** $11\,i$

b. $-0{,}2\,i$

c $\frac{17}{30}\,i$

d. $\frac{32}{25}\,i$

e. $27\,i$

f. $-4\sqrt{3}\,i$

g. $45{,}5\,i$

h. $2{,}25\,i$

i. $\frac{3\sqrt{2}}{16}\,i$

j. $-\frac{16}{7}\,i$

2 **a.** $-i$

b. -1

c. $-10\,i$

d. -15

e. $\frac{1}{16}\,i$

f. i

g. 1

h. -49

i. $-3\sqrt{2}$

j. $\frac{38}{21}$

3 **a.** $-1, -16, -36, -100$ y -121

b. $i^{32} = 1$

c. Según la fórmula, el área debiera ser $2365{,}88\,i\ \text{m}^2$, es decir, no es un número real.

d. el paso de $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$ a $\sqrt{-1 \cdot -1}$ no está permitido, ya que no son números reales.

e. Por ejemplo: $n = 8; m = 2; p = 3$. Una condición es que m sea divisor de $4n$ y p tome los valores entre 0 y 3.

Página 22 *Trabaja*

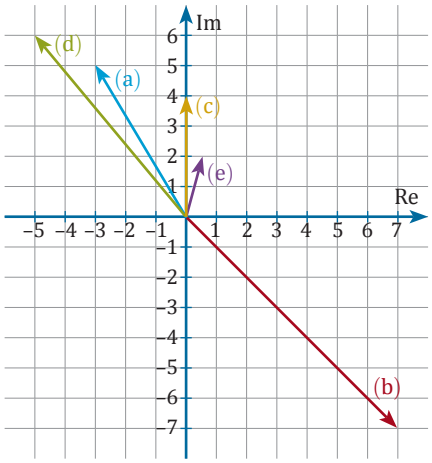
1 **a.** $-3 + 5\,i$

b. $7 - 7\,i$

c. $4\,i$

d. $-5 + 6\,i$

e. $\frac{1}{2} - \frac{7}{4}\,i$

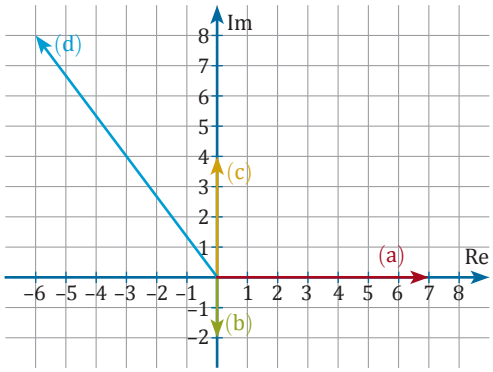


2 **a.** $(7,0)$

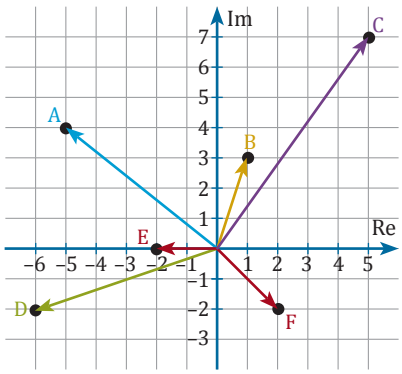
b. $(0, -2)$

c. $(0,4)$

d. $(-6,8)$



3 A=(−5+4i), B=(1+3i), C=(5+7i), D=(−6,−2), E=(−2), F=(2−2i)



4 Un rectángulo.

5 $z_1 = 1 - 3\,i, \quad z_2 = -2 - 7\,i$

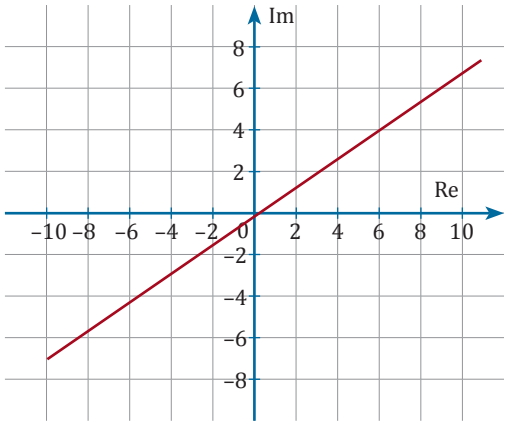
6 $z_2 = (4,1) = 4 + i,$
$z_3 = (4, -3) = 4 - 3i,$
$z_4 = (2, -3) = 2 - 3i$

7 $z = (-3,4), \quad z' = (5, -1)$. Punto medio: $\left(1, \frac{3}{2}\right)$.

8 $(3); (5\,i); (4); (-4,5); (-2,5\,i); (3 - 3\,i);$
$(6 - 3\,i); (-6 - i); (3,5 + 6\,i); (-7 + 5\,i)$

9 **a.** Re(z) = Im(z)

b. Pueden ser, por ejemplo: $(3 + 2\,i), (6 + 4\,i),$
$(-3 - 2\,i)$



10 $(-6), (2 - 5\,i), (-6 - 7\,i), (4 - 2\,i), (-7\,i),$
$(2 + 3\,i)$

Página 26 *Trabaja*

1 **a.** Disminuir en 13 unidades.

b. Disminuir en 7 unidades.

2 **a.** $x = 3, \; y = 8$ **b.** $x = \frac{18}{5}, y = \frac{104}{15}$

3 $a = 0, \; b = \frac{7}{2}$

4 $10 - 12\,i$

5 $\frac{674}{45} + \frac{14}{3}\,i$

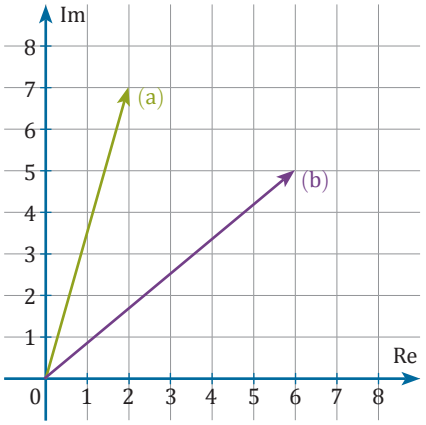
6 $\text{Re} = 2, \quad \text{Im} = -21$

7 $\text{Re} = b, \; \text{Im} = -a - 2b - \frac{7}{9}$

8 Sí

9 **a.** $2 + 7\,i$ **b.** $6 + 5\,i$

c.



d. $2\,z_1$

10 **a.** $-2 - 7\,i$ **b.** $6 + 5\,i$

11 **a.** $-117 - 133\,i$ **b.** $-\frac{4}{5} - \frac{92}{5}i$

12 **a.** $12 + 19\,i$ **b.** $10 + 293\,i$

c. $-\frac{1}{16} + \frac{19}{24}i$

13 $\frac{571}{100} - 3\,i$

14 $a = 4$

15 Un real puro.

16 $-\frac{2}{17} + \frac{8}{17}\,i$

17 $-34 - 10\,i$

18 $\frac{450}{23} + \frac{270}{23}\,i$

19 $\text{Re}(z) = \frac{3}{11}, \; \text{Im}(z) = -\frac{10}{11}$

20 $33 - 8\,i$

Página 28 *Trabaja*

11 **a.** $z^2 = 8i, \; z^4 = -64, \; z^6 = -512i, \; z^8 = 4\,096,$
$z^{10} = 32\,768i, \; z^{12} = -262\,144$

b. Son potencias tales que: $z^n = (2a^2)^{\frac{n}{2}}$,
con n par.

12 En el plano complejo cada complejo representa un vector, con lo que la multiplicación de dos complejos será también un vector y no representará por tanto un área o la medida de una superficie.

13 $\frac{27}{32}[\sqrt{5} - 1] + \frac{9}{8}[\sqrt{5} - 1]$

14 **a.**

Ejercicio	Número	Suma	Producto
i.	$2+5i$	$7+7i$	$29i$
ii.	$4-3i$	$1+i$	$25i$
iii.	$-\frac{3}{4}+\frac{5}{3}i$	$\frac{11}{2}+\frac{11}{2}i$	$\frac{481}{144}i$
iv.	$-9-\frac{1}{2}i$	$-\frac{19}{2}-\frac{19}{2}i$	$\frac{325}{4}i$

b. Los productos son números imaginarios puros y las sumas son complejos de la forma $a+ai$.

15 I cuadrante: $a+ai$; II cuadrante: $-a+ai$; III cuadrante: $-a-ai$; IV cuadrante: $a-ai$

16 $x=1+i; y=2i$

Página 35 *Trabaja*

1 **a.** $1-7i$ **e.** $\frac{26}{5}+\frac{8}{5}i$

b. $\sqrt{2}+2i$ **f.** $\frac{1}{5}$

c. $-\frac{1}{10}+\frac{6}{5}i$ **g.** $\frac{77}{61}+\frac{176}{61}i$

d. $\frac{24}{37}i$ **h.** $-\frac{1\,209}{205}+\frac{312}{205}i$

2 No, $z_1=-1+2i$ y $z_2=4-i$

3 **a.** Sí **b.** No

Página 35 *Trabaja*

1 **a.** $5-3i, -0,8\overline{9}+16i$, asociatividad

b. $5-3i$, conmutatividad

2 clausura

3 **b.** porque $z-(z'-z'')=z-z'+z''$

4 $z+(3+4i)=-(4-8i)$ $/+[-(3+4i)]$

$\{z+(3+4i)\}+[-(3+4i)]$
$=-(4-8i)+[-(3+4i)]$

$z+\{(3+4i)+[-(3+4i)]\}$
$=-(4-8i)+[-(3+4i)]$ */asociatividad*

$z+0=-(4-8i)+[-(3+4i)]$ */inverso aditivo*

$z=-(4-8i)+[-(3+4i)]$ */elemento neutro*

$z=(-4+8i)+(-3-4i)$

$z=-7-4i$ */clausura*

5 **a.** $-\frac{9}{10}-\frac{4}{5}i$

b. $-3-\frac{8}{3}i$

6 No

7 **a.** $-13+14i=(2-i)(-8+3i)$

c. No. Sí

8 $z=\left(-\frac{3}{25}, -\frac{4}{25}\right)$

9 -2

10 $=\frac{(a+b\,i)(b+a\,i)}{(b-a\,i)(b+a\,i)}$

$=\frac{(ab+a^2i+b^2i+ab\,i^2)}{(b^2+a^2)}$

$=\frac{(b^2+a^2)\,i}{(b^2+a^2)}$

$=\frac{\cancel{(b^2+a^2)}\,i}{\cancel{(b^2+a^2)}}$

$\frac{a+b\,i}{b-a\,i}=i$

Página 41 *Trabaja*

1 $(1+i), \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\right)$

2 $z=-4-9i, |z|=\sqrt{97}$

3 **a.** $|z|=2, |\overline{z}|=2,$ **b.** $z^{-1}=\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}i,$

c. $\overline{z^{-1}}=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4}i,$ **d.** $(\overline{z})^3=8i$

4 **a.** $k=-8$ **b.** $k=2$

5 Sí

6 $(3+4i)$ y $(3-4i)$

7 Se triplica

8 **a.** Todos deben tener parte real igual a -2.

b. Una recta paralela al eje imaginario que pasa por -2.

9 Sí

Página 42 *Trabaja*

1 **a.** $\frac{8}{17}+\frac{15}{17}i$

b. Uno de ellos siempre tiene módulo igual a 1.

c. $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}i$

2 Su módulo es igual a 9.

3 Sólo sucede con el complejo $0+0\,i$.

4 $\frac{3\sqrt{241}}{20}$

5 **a.** $5\sqrt{5}$ **b.** $\sqrt{986}$

Página 49 *Trabaja*

1 **a.** $|z|=\sqrt{29}, \alpha \approx 292°$

b. $|z|=\sqrt{61}, \alpha \approx 229°$

c. $|z|=\sqrt{73}, \alpha \approx 160°$

d. $|z|=4, \alpha = 0°$

e. $|z|=9, \alpha = 270°$

2 **a.** $z \approx 1{,}6+3{,}6\,i$

b. $z \approx 0{,}4-1{,}9\,i$

c. $z \approx -3{,}5-4{,}9\,i$

d. $z \approx -0{,}7+3{,}4\,i$

e. $z \approx 1{,}2+6{,}9\,i$

3 **a.** $|z\cdot z'|=81, \gamma = 170°$

b. $\left|\frac{z'}{z}\right|=9, \delta = 70°$

c. $|\sqrt[3]{z'}|=3, \varepsilon = 40°$

d. $|z^4|=81, \varphi = 200°$

4 **a.** $|z'\cdot z''|=5\sqrt{27}, \alpha = 197°$

b. $\left|\frac{z'''}{z''}\right|=\frac{\sqrt{13}}{5}, \beta = 74°$

c. $|z'\cdot z''|=5\sqrt{27}, \gamma = 163°$

d. $\left|-\frac{z'''}{z''}\right|=\frac{\sqrt{13}}{5}, \delta = 254°$

5 **a.** z: $|z|=81, \gamma = 280°$ y z': $|z'|=6, \delta = 48°$

b. $|z^2|=6561, \varepsilon = 200°$

c. $|\sqrt[5]{z'}|=\sqrt[5]{6}, \varphi = 8°$

6 **a.** $60°$

b. $|-z|=4, \alpha = 240°$

c. $|\overline{z}|=4, \beta = 300°$

7 **a.** $43°$

b. $|z\cdot z'|=40, \alpha = 193°$

c. $\left|\frac{z'}{z}\right|=1{,}6, \beta = 43°$

d. $150°$

8 $|z|=2\sqrt{2}, \alpha = 127°$

9 z: $|z|=20, \alpha = 87°$ y z': $|z'|=2, \beta = 13°$

10 z': $|z'|=\frac{2\sqrt{15}}{5}, \alpha = 7{,}5°$ y

z'': $|z''|=2\sqrt{15}, \beta = 57{,}5°$

Página 50 *Trabaja*

1 No, porque aunque $|4+2\,i| \approx 4{,}5$, su ángulo es aproximadamente $26°$.

2 z^2: $|z^2|=4, \alpha = 60°$; z^3: $|z^3|=8, \alpha = 90°$;

$\sqrt{z}$: $|\sqrt{z}|=\sqrt{2}, \alpha = 15°$;

$\sqrt[3]{z}$: $|\sqrt[3]{z}|=\sqrt[3]{2}, \alpha = 10°$

3 **a.** $|z|=3\sqrt{2}, \alpha = 45°$

b. $|z|=2, \alpha = 0°$

c. $|z|=\sqrt{26}, \alpha = 259°$

d. $|z|=\sqrt{53}, \alpha = 106°$

e. $|z|=\sqrt{10}, \alpha = 288°$

4 2,5 m al este y 4,3 m al norte

5 $|z|=\frac{13\sqrt{34}}{17}, \alpha = 69°$

Página 50 *Trabaja más...*

I. Números Imaginarios

1 **a.** **i.** $\sqrt{3}i$ **ii.** $10\,i$

b. **i.** i^{86}, i^{90} y i^{94} **ii.** i^{51}, i^{63} y i^{75}

iii. i^{105}, i^{125} y i^{145}

2 **a.** $13{,}75\ i$ **b.** $13{,}75\ i$; Sí

c. $-8\ i = 8\ i^3$, de aquí, $\sqrt[3]{-8\ i} = \sqrt[3]{8\ i^3}$, por tanto, $\sqrt[3]{-8\ i} = 2\ i$.

$= \frac{8}{i} \cdot 1$

$= \frac{8}{i} \cdot \frac{i}{i}$

$\frac{8\ i}{i^2}$

$\frac{8\ i}{-1}$

$\frac{8}{i} = -8\ i$

d Sumamos $12\ i$ con el sucesor de $23\ i$. Es decir, $12\ i + 24\ i$ es igual a $36\ i$. Por otro lado, veamos que $12\ i + 23\ i$ es igual a $35\ i$. El sucesor de $35\ i$ sería $36\ i$. En efecto, son iguales. El razonamiento está valiéndose de una propiedad de los naturales.

e. $+1, n = 4, ..., ...,16, ...,$ es decir, un par que sea un *múltiplo* de 4

$-i, n = 3{,}7{,}11{,}15, ...,$ es decir, al impar siguiente a un par que no sea un *múltiplo* de 4

f. **i.** $i \log 4{,}5$ **ii.** $-i \log 5$

g. $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\ i\right)^2$

$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\ i + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ i\right)^2$

$= \frac{1}{2} + i - \frac{1}{2}$

$= i$

h. $-\frac{5}{2}$. No

i. No. 19 unidades imaginarias (14 de Maritza y 5 de Paula).

II. Números complejos y operatoria

1 **a.** $-\frac{11}{2} + \frac{98}{5}\ i$ **b.** 0

c. $\frac{18}{5} - \frac{21}{4}\ i$

2 $\frac{38}{37} + \frac{68}{37}\ i$

3 **a.** $x^2 + 9$

b. $x^2 - 2x + 5$

c. $x^2 - 4x + 7$

d. $x^2 + (-4 + 2\ i)x + (11 + 2\ i)$

4 **a.** $10 + 31\ i$ **d.** $-20 + 48\ i$

b. $17 - \frac{11}{5}i$ **e.** $-59\ 049\ i$

c. $-2\ 944 + 576\ i$ **f.** $-256 - 544\ i$

5 **a.** $20 + 40\ i$ **b.** $-17 + 27\ i$

6 **a.** No **b.** Sí

c. No

7 **a.** $8 - i$ **b.** $x^4 - 1$

8 **a.** $\sqrt{3}i$ **b.** 0

9 **a.** 1 a la derecha, 6 hacia arriba

b. 4 a la derecha, 6 hacia arriba

c. 1 a la derecha, 1 hacia arriba
En general, si $z_2 - z_1 = e + fi$, e representa la traslación horizontal y f la traslación horizontal.

III. División de complejos y propiedades de la operatoria

1 **a.** **i.** $\frac{11 - 58i}{41}$

ii. $-\frac{8}{25} + \frac{44}{25}i$

iii. $\frac{107\ 584}{86\ 125} + \frac{2\ 788}{86\ 125}\ i$

iv. $\left(\frac{107\ 584\ 2\ 788}{86\ 125\ 86\ 125}\right)$

b. $-\frac{181}{579} - \frac{7}{579}i$

c. $\frac{45}{52} - \frac{97}{52}i$

d. Sí, su parte real es $-\frac{18}{5}$, por lo tanto, menor a 4.

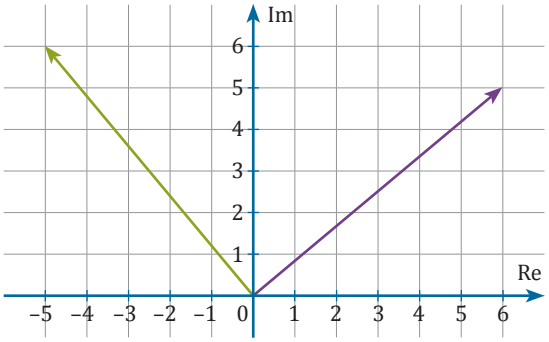
e. $23 + 102i$

2 **a.** $\sqrt{3}\ i$

b. $-2 + i$

c. $-\frac{1}{10}$

3 a.



$6 + 5i$

b. $a = \frac{81}{29}$, $b = -\frac{72}{29}$ y $n = 4$

c. $\frac{8}{95} - \frac{49}{145}i$

d. $\frac{281}{580} - \frac{137}{580}i$

e. $-\frac{4}{25} + \frac{3}{25}i$

f. $-\frac{44}{89} - \frac{17}{89}i$

g. $-\frac{87}{325} + \frac{59}{325}i$

h. $\frac{25}{109} - \frac{15}{218}i$

i. $-1 + 4i$ y $-1 - 4i$ o $6 - 5i$ y $6 + 5i$

j. Dividir 10 por $-14 - 25i$; otra manera es dividir por 10 la expresión $\frac{10}{-14 - 25i}$.
Se obtiene:
$\frac{1}{-1{,}4 - 2{,}5i}$ es decir, $(-1{,}4\ ;\ 2{,}5\ i)^{-1}$.
Aplicar la fórmula para encontrar el inverso multiplicativo de un complejo no nulo.

k. $\frac{3}{13} - \frac{11}{13}i$

l. Parte real: $\frac{1}{18}$. Parte imaginaria: $-\frac{1}{2}$.

m. $\left(\frac{28}{17}, \frac{61}{17}\right)$

n. $\frac{8}{5} + \frac{4}{5}i$

o. $k = \frac{37}{3}$; $k' = -49$

p. $\frac{22\ 066}{21\ 025} + \frac{21\ 024}{21\ 025}i$

q. $-\frac{1}{7} + 0\ i$

r. $-\frac{1}{65} + \frac{8}{65}i$

s. $0 + 0\ i$ no tiene inverso multiplicativo.

IV. Módulo y conjugado

1 a. $-\frac{136}{149} + \frac{24}{149}i$

b. $-\frac{136}{149} + \frac{24}{149}i$

c. $-105 + 165i$

d. $60 - 16i$

e. $\frac{3}{16} - \frac{17}{16}i$

2 a. $3\sqrt{13}$ u

b. $\frac{\sqrt{10}}{20}$ u

c. $\sqrt{31\,610}$ u

d. $2\sqrt{65}$ u

e. $\frac{5\sqrt{10}}{2}$ u

3 a. $\sqrt{65}$

b. $\frac{6\sqrt{145}}{145}i$

c. $\frac{4\sqrt{13}}{41} + \frac{5\sqrt{13}}{41}i$

d. $34\sqrt{34}$

e. 25

V. Otra forma de representar los complejos

1 a. $16 - 8i$; $\alpha \approx 333°$; $|z| = 8\sqrt{5}$ u

b. $-4 - 28i$; $\alpha \approx 261°$; $|z| = 4$ u

c. $5 + \frac{13}{2}i$; $\alpha \approx 52°$; $|z| = \frac{\sqrt{269}}{2}$ u

d. 4; $\alpha \approx 0°$; $|z| = 4$ u

e. $7 - 2i$; $\alpha \approx 344°$; $|z| = \sqrt{53}$ u

2 a. $|A| = 75$ u; $\alpha = 165°$

b. $|B| = \sqrt[3]{9}$ u; $\alpha = 70°$

c. $|C| = 5\sqrt{34}$ u; $\alpha = 172{,}5°$

d. $|D| = 0{,}90$ u; $\alpha = 325°$

e. $|E| = \frac{2\sqrt{85}}{25}$ u; $\alpha = 45°$

3 a. $|A| = 8\sqrt{85}$ u; $\alpha = 358°$

b. $|B| = \frac{\sqrt{10}}{8}$ u; $\alpha = 89°$

c. $|C| = 5\sqrt{34}$ u; $\alpha = 215{,}5°$

d. $|D| = 0{,}90$ u; $\alpha = 15°$

e. $|E| = \frac{2\sqrt{85}}{25}$ u; $\alpha = 48°$

4 **a.** $|z| = 4$ u; $\alpha = 48°$

b. $|z| = 36$ u; $\alpha = 240°$

c. $|z| = 10\sqrt{5}$ u; $\alpha = 143°$

d. $|z| = 1{,}80$ u; $\alpha = 80°$

e. $|z| = 3\sqrt{26}$ u; $\alpha = 109°$

f. $|z| = 6\,553$ u; $\alpha = 336°$

g. $|z| = \frac{8\sqrt{5}}{5}$ u; $\alpha = 38°$

h. Como para multiplicar dos complejos se multiplican sus módulos (números reales) y se suman sus ángulos (números reales) y para éstos la multiplicación y la suma es asociativa, entonces se cumple dicha propiedad.

5 **a.** Se forma un cuadrado de lado $2\sqrt{2}$ u, $P = 8\sqrt{2}$ u, $A = 8$ u^2.

b. No, lo correcto es $|z| = \sqrt{290} \approx 17{,}03$ u y $\alpha = 334°$.

c. **i.** $|z| = \frac{\sqrt{65}}{2}$ u; $\alpha = 61°$

ii. $|z| = \frac{\sqrt{65}}{2}$ u; $\alpha = 61°$

iii. $|z| = 2$ u; $\alpha = 151°$

iv. $|z| = 16$ u; $\alpha = 270°$

v. $|z| = 160\sqrt{26}$ u; $\alpha = 313°$

d. **i.** $|z| = 5$ u; $\alpha = 37°$

ii. $|z| = 5$ u; $\alpha = 270°$

iii. $|z| = \sqrt{29}$ u; $\alpha = 248°$

iv. $|z| = \sqrt{13}$ u; $\alpha = 304°$

v. $|z| = 8$ u; $\alpha = 0°$

e. $z = 2 + i = (2,1) \Rightarrow |z| = \sqrt{5}$ y $\alpha = 27°$

Por un lado:
$(2+i)^3 \Rightarrow |z^3| = \sqrt{5^3} = \sqrt{125}$ y $\alpha = 81°$
$\Rightarrow ((2+i)^3)^2 \Rightarrow |(z^3)^2| = (\sqrt{125})^2 = 125$ y $\alpha = 162°$

Por otro lado:
$(2+i)^6 \Rightarrow |z^6| = \sqrt{5^6} = \sqrt{125}$ y $\alpha = 162°$

f. Por ejemplo, se puede tomar a: $|a| = 5$; $\alpha = 70°$ y b: $|b| = 2$; $\alpha = 60°$. Ahora bien, si $m = 2$ y $n = 3$, entonces tendremos que:

$$\left.\begin{array}{l}\sqrt{a}: |\sqrt{a}| = \sqrt{5},\ \alpha = 35° \\ \sqrt[3]{b}: |\sqrt[3]{b}| = \sqrt[3]{2},\ \alpha = 20°\end{array}\right\rangle \Rightarrow \sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{b} = \sqrt[6]{500},\ \alpha = 55°$$

Y por otro lado:

$$\left.\begin{array}{l}a^3: |a^3| = 125,\ \alpha = 210° \\ b^2: |b^2| = 4,\ \alpha = 120°\end{array}\right\rangle \Rightarrow |a^3 \cdot b^2| = 500,\ \alpha = 330°$$

g. $|z| = \frac{\sqrt{29}}{15}$, $\alpha = 280°$

h. **i.** Sí, $|z| = 2$, $\alpha = 0°$

ii. No, $|z_1^3| = 2\sqrt{2}$, $\alpha = 135°$ y $|z_2 : z_4| = 1$, $\alpha = 90°$

iii. Sí, $|z| = 1$, $\alpha = 180°$

VI. Ejercicios miceláneos

1 **a.** $-11 + 2i$

b. $\sqrt{65} + 2\sqrt{10} - 9$

c. $-\frac{25}{4} + \frac{33}{4}i$

d. $-18i$

e. $\frac{6}{17} + \frac{2}{17}i$

f. $-\frac{53}{65} - \frac{96}{65}i$

g. $\sqrt{522}$

h. $\frac{36}{13} + \frac{63}{13}i$

2 **a.** $(-3,1)$

b. $(20, -12)$

c. $(16,0)$

d. $\left(\frac{16}{17}, -\frac{4}{17}\right)$

e. $(4,9)$

3 **a.** $z_M = \frac{3}{2} + 2\,i$; $z_N = -\frac{3}{2} + 2\,i$; $z_P = -\frac{3}{2} - 2\,i$; $z_Q = \frac{3}{2} - 2\,i$

b. $P = 14$ u

c. 7,85 u

d. $P = 10$ u

e. Sí. Porque las coordenadas requeridas son $(-1{,}75\ ;\ 0)$, y la sección del eje real contempla el rombo original que abarca desde $(-3{,}0)$ hasta $(3{,}0)$.

4 **a.** $|z| = \sqrt{145}$ u, $\alpha = 139°$

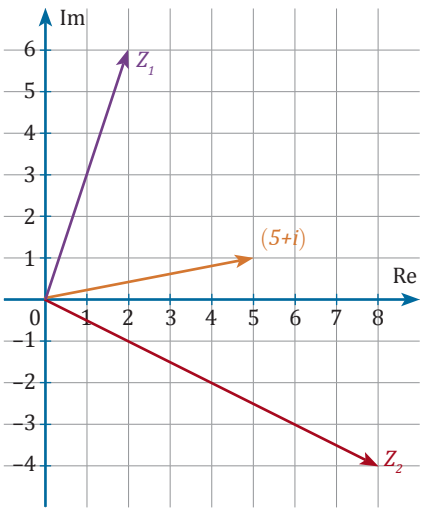
b. $|z| = \sqrt[4]{\frac{9}{5}}$ u, $\alpha = 36{,}5°$

c. $|z| = \sqrt[14]{29^3}$ u, $\alpha = 48°$

d. $|z| = \sqrt{\frac{145}{9}}$ u, $\alpha = 19{,}5°$

e. $|z| = \frac{15}{2}$ u, $\alpha = 54°$

5 **a.**



6 **a.** $(16{,}1)$ **b.** $\left(\frac{279}{10}, \frac{17}{10}\right)$

7 **a.** $-\frac{4}{17} + \frac{1}{17}i$ **b.** $-\frac{21}{194} - \frac{23}{194}i$

8 **a.** $(9, -46)$ **b.** $(-512, -384)$

9 **a.** 6 **b.** 1

10 **a.** $\frac{7}{50} - \frac{3}{10}i$

b. $\frac{1}{5}\sqrt{2} + \frac{211}{325}i$

c. $2{,}0\overline{6} + 1{,}\overline{6}i$

11 **a.** $\sqrt{3}$ **c.** 2

b. 2 **d.** $a = -5$; $a = 5$

12 **a.** $-2 + 11i$

b. $-2 + 11i$

c. Sí

d. Por ejemplo, si $a + bi = 5 - 8i$ y $c + di = 0 + 0i$.

14 **a.** Sí **b.** $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i$

15 **a.** $-964 + 243\,i$; $\mathbb{C}$

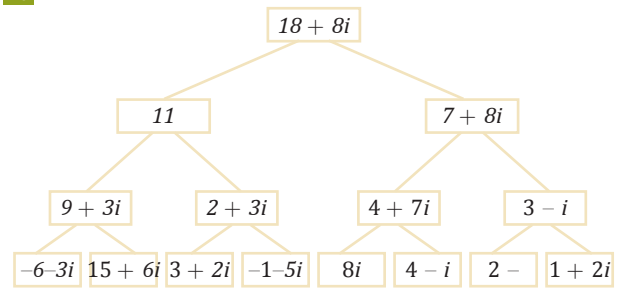
b. 20; $\mathbb{N}$

c. 5; $\mathbb{N}$

d. 4; $\mathbb{N}$

e. 27; $\mathbb{N}$

16



17 La respuesta depende del paralelogramo que hayas dibujado. Pídele a tu profesor que revise este ejercicio contigo.

18 $-22 - i$

19 **a.** $z = 4 - 14\,i$ **d.** $z = \frac{-21 - 27\,i}{52}$

b. $z = \frac{6 + 35\,i}{97}$ **e.** $z = \frac{12 - 9\,i}{2}$

c. $z = \frac{-5 + 20\,i}{17}$

20 **a.** $3 - 2\,i$; $(3, -2)$; $|z| = \sqrt{13}$ y $\alpha = 326°$

b. $-5 + 4\,i$; $(-5{,}4)$; $|z| = \sqrt{41}$ y $\alpha = 141°$

c. $0 + 8\,i$; $(0{,}8)$; $|z| = 8$ y $\alpha = 90°$

d. $2 + 6\,i$; $(2{,}6)$; $|z| = 2\sqrt{10}$ y $\alpha = 72°$

e. $-4 - 3\,i$; $(-4, -3)$; $|z| = 5$ y $\alpha = 217°$

21 No es posible, porque el ángulo que forma el complejo $(5,12)$ con el eje real (segundo lado del triángulo) es $67°$ y debería ser de $60°$ para que fuera realmente equilátero.

22 **a.** $6\sqrt{5}$ **b.** $\frac{-33+11i}{10}$

24 Sí, es 21

25 $6+48i$

26 i^2

27 Al multiplicar $a+bi$ por i, aparece $-b$ como número real y a pasa a ser el imaginario ai. Con i^2, a se convierte en su opuesto aditivo y bi solo cambia de signo, es decir, $a-bi$. Ahora bien, al multiplicar por i^3, a pasa a ser el imaginario $-ai$, y aparece b como número real. Al multiplicar $a+bi$ por i^4, a y bi se mantienen intactos.

28 $-2-3i$

29 $-i$

30 $\frac{5}{18}$

32 $-\frac{38}{5}$

33 i^{26}

34 **a.** $90°$

Evaluación de la Unidad 1

Página 65

I.



II.

1 V **2** V **3** F **4** F

5 V **6** F **7** F **8** V

9 F **10** V

Ejercicios de resumen de la unidad

Página 66

I.

1

+	1	− 1	i	$-i$
1	2	0	$1+i$	$1-i$
− 1	0	-2	$-1+i$	$-1-i$
i	$1+i$	$-1+i$	$2i$	0
$-i$	$1-i$	$-1-i$	0	$-2i$

−	1	− 1	i	$-i$
1	0	2	$1-i$	$1+i$
− 1	-2	0	$-1-i$	$-1+i$
i	$-1+i$	$1+i$	0	$2i$
$-i$	$-1-i$	$1-i$	$-2i$	0

:	1	− 1	i	$-i$
1	1	-1	$-i$	i
− 1	-1	1	i	$-i$
i	i	$-i$	1	-1
$-i$	$-i$	i	-1	1

·	1	− 1	i	$-i$
1	1	−1	i	$-i$
− 1	−1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	−1	1
$-i$	$-i$	i	1	−1

2 $-13\sqrt{6}+5i$

3 $-5+\frac{5}{2}i$

4 $\frac{2}{13}+\frac{29}{13}i$

5 $364{,}49+12i$

6 $\left(\frac{33}{6}a, -7a\right)$

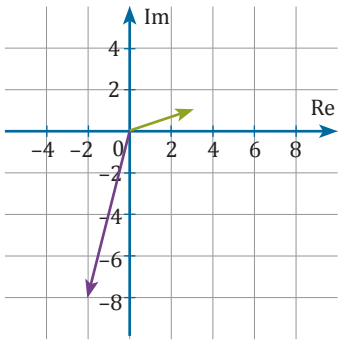
7 $-\frac{8}{25}i$

8 $b=-\frac{1}{10}$

9 **a.** $-56+82i$

b. Re(z) debe disminuir en 12 unidades e Im(z) debe disminuir en 8,8 unidades.

10



11 $-4+7i$

12 $z=\frac{13}{4}-\frac{3}{4}i$

13 No se encuentra respuesta pues es un ejemplo que debe presentar el estudiante.

14 $-\frac{339}{25}-\frac{252}{25}i$

15 $z=\left(-\frac{3}{4}, \frac{17}{2}\right)$ y $z'=\left(\frac{1}{4}, -\frac{15}{2}\right)$

16 **a.** $x=0$

b. $\text{Re}(z)=0,\ \text{Re}(z')=0$

17 $\frac{31}{4}-\frac{1}{2}i$

18 Sí

19 $a=4$

20 $n=1$

21 **a.** $z=-13+12i,\ z'=-13-12i$

b. No, el resultado es $24i$.

22 $z=18+26i$

23 **a.** -10

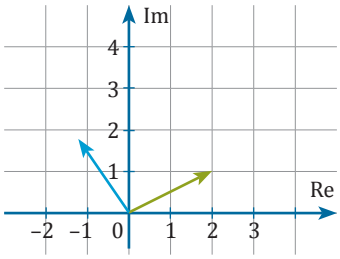
b. $-46-22i$

24 $z_1=5+14i, z_2=6+9i$

25 $\frac{191}{2}-76i$

26 $-\frac{624}{25}-2i$

27 **a.**



b. $(0{,}9\ ;\ 2{,}6)$

c. En ningún cuadrante, se encuentra sobre el eje imaginario positivo.

28 **a.** $|z_1 \cdot z_2|=36,\ \alpha=96°$

b. $|\sqrt{z_1}|=2,\ \alpha=25{,}5°$

29 $x^2+6x+11$, trinomio de la forma x^2+bx+c

30 $-\frac{9}{2}-i$

II.

1 $\left(\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)$ o $\left(-\frac{3}{5}-\frac{4}{5}i\right)$

2 $-\frac{8}{5}-\frac{13}{10}i$

3 $5-\frac{1}{3}i$

III.

1 a.	**2** c.	**3** c.	**4** c.
5 e.	**6** a.	**7** e.	**8** e.
9 b.	**10** c.	**11** b.	**12** c.
13 b.	**14** c.	**15** b.	**16** a.
17 d.	**18** c.	**19** a.	**20** b.
21 b.	**22** d.	**23** d.	**24** c.
25 d.	**26** a.	**27** d.	**28** a.
29 c.	**30** d.	**31** c.	**32** b.
33 e.	**34** b.	**35** a.	**36** d.
37 c.	**38** e.	**39** d.	**40** d.



Páginas 74 a 155

Unidad 2
Ecuaciones cuadráticas y función cuadrática

Conocimientos previos

Página 79 *Trabaja*

1 **a.** $b^3(b-1)$
b. $7(2a-3b+5)$
c. $4m(m-5a)$
d. $x(a+b+c)$
e. $4bx(a^3-1)$
f. $4x(5-3y+z)$
g. $(x+4)(x-1)$
h. $(a+3)(a+1)$
i. $(m+7)(m-2)$
j. $(y-5)(y-4)$
k. $(t-3)(t+2)$
l. $(p-8)(p-1)$
m. $(u-5)^2$
n. $(x-3)^2$
o. $(5x^2+4)^2$
p. $(7m-1)^2$
q. $(m^2+6)^2$
r. $(x+2)(x-1)$
s. $(a-20)(a-1)$
t. $x^2(x-3)(x+1)$
u. $2x(x^4-3x^3-8x^2+12x+16)$
v. $(x-12)^2$
w. $\frac{3}{4}xy\left(x-\frac{3}{2}y\right)$
x. $(n-8)(n-2)$

2 **a.** $a(b+c+d)$
b. $5ax(x-2)$
c. $(x-y)(6p^2-3q)$
d. $(3a+b)(5a^2+1)$
e. $(3+4x)(m+n)$
f. $(k+b)(d-w)$
g. $(k+2)^2$
h. $(5x-2m)^2$
i. $(a^n+b^m)^2$
j. $(p-2)(p+3)$
k. $(m-4)(m-2)$

3 **a.** $(5m+2p)(5m-2p)$
b. $(ak+b^2m^2)(ak-b^2m^2)$
c. $\left(\frac{1}{2}a-\frac{4}{5}b\right)\left(\frac{1}{2}a+\frac{4}{5}b\right)$
d. $(a^c+2b^m)(a^c-2b^m)$
e. $(5x^2+4y^4)(5x^2-4y^4)$
f. $(m^{3a}-p^{4b})(m^{3a}+p^{4b})$

4 **a.** $3x(3x-2)(3x+2)$
b. $5x(x-4)^2$
c. $(x-3)(x+3)(x^2+9)$
d. $3x(x^2-3)^2$

5 **a.** $4a(1-b)$ **b.** $(3x-2)(3x-3)$

6 **a.** $k=-11$ **b.** $k=6$ **c.** $k=x^2$

7 **a.** Sí **b.** No **c.** Sí

8 **a.** $3x-2$ **b.** Sí **c.** Es cierto

Ecuaciones cuadráticas: ¿qué son, cómo se resuelven y para qué sirven?

Página 84 *Trabaja*

1 **a.** $-2\sqrt{3}$ y $2\sqrt{3}$
b. -5 y 5
c. $x=\pm i$
d. $\sqrt{\frac{5}{13}}$ y $-\sqrt{\frac{5}{13}}$
e. $-\frac{\sqrt{7}}{14}$ y $\frac{\sqrt{7}}{14}$
f. -6 y 6
g. $\sqrt{6}$ y $-\sqrt{6}$
h. $-\frac{\sqrt{30}}{3}$ y $\frac{\sqrt{30}}{3}$
i. 9 y -9
j. -2 y 2

Página 86 *Trabaja*

2 **a.** 0 y 8,2

b. 0 y $\frac{9}{4}$

c. 0 y $\frac{10}{31}$

d. 0 y $-\frac{32}{11}$

e. 0 y 0,25

f. 0 y $\frac{77}{39}$

g. 0 y -5

h. 0 y $-\frac{3}{2}$

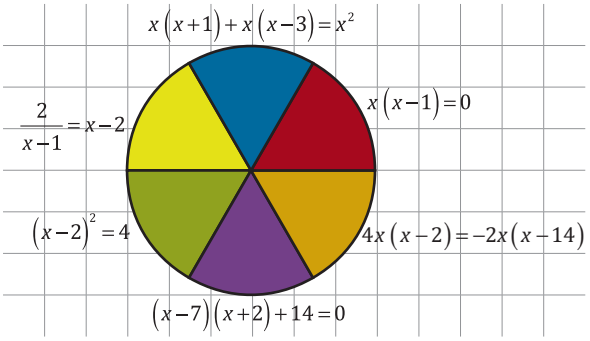
i. 0 y $-\frac{585}{16}$

j. 0 y 1

Página 87 *Trabaja*

1 **a.** 0 **b.** 0 ó – 14

c.



d. 30 bolsas con 50 monedas cada una

e. 0 o – 12

Página 90 *Trabaja*

3 **a.** 5 y 9

b. 0,5

c. $\frac{1}{2}$ y – 4

d. –1 y 2

e. 3 y 11

f. 3 y 7

g. -3 y 6

h. 1 y 16

i. 2

j. 0,25

Página 90 *Trabaja*

2 **a.** A y C, sol: 3 y 5; B y D, sol: -3 y -5

b. $x = 7$

c. bases: 6 dm y 13 dm, altura: 8 dm

d. A: 9 y – 2, B: -9 y -4

e. 27 en cada fila y 12 en cada columna

Página 92 *Trabaja*

4 **a.** 4 y -36

b. $3+\sqrt{10}$ y $3-\sqrt{10}$

c. 5 y $-\frac{1}{2}$

d. $\frac{7+3\sqrt{5}}{2}$ y $\frac{7-3\sqrt{5}}{2}$

e. $x=\frac{-1\pm 2\sqrt{6}\,i}{5}$

f. $\frac{5}{2}$ y $-\frac{1}{2}$

g. 7 y $-\frac{3}{2}$

5 **a.** 12 dm, 15 dm y 2 dm

b. 23 o – 18

Página 96 *Trabaja*

6

a. $\frac{1}{3}$ y -12

b. $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$

c. $x=\frac{2}{3}\pm\frac{5}{3}i$

d. -8 y 6

e. $\frac{-9+\sqrt{73}}{2}$ y $\frac{-9-\sqrt{73}}{2}$

f. $\frac{1+\sqrt{33}}{4}$ y $\frac{1-\sqrt{33}}{4}$

g. –0,5 y 0,25

h. 16 y 6

i. 2

j. $-\frac{44}{3}$ y 4

7 **a.** 31 o – 31 **b.** 15 o – 15

8 $12\sqrt{2}$ m

Página 97 *Trabaja*

3 2,38 $\frac{\text{km}}{\text{s}}$

4 Radio 3 cm, diferencia 420 cm^3

5 3 cm.

6 2 metros.

7 Uno se demora 10 semanas y el otro 15 semanas. Para aquel que demorara diez semana, se ahorraría un 40% del tiempo que tendría que ocupar, y para el otro, un 60%.

8 $\frac{12\sqrt{7}}{7}$ cm y $\frac{16\sqrt{7}}{7}$ cm

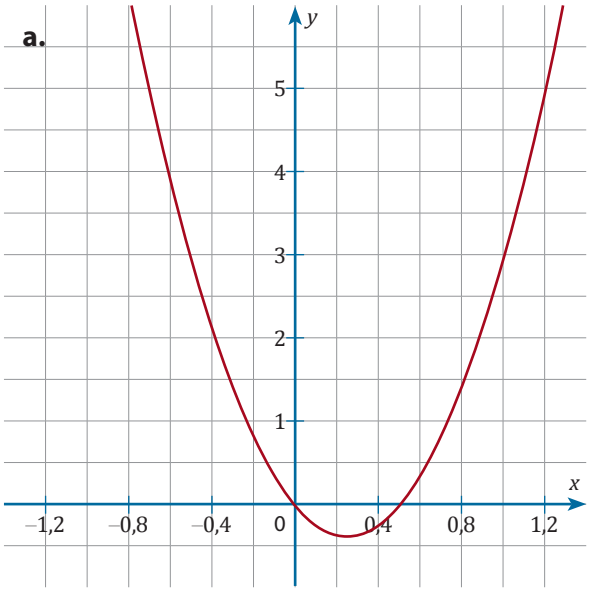
9 **a.** 0,5 **b.** 4,5

Función cuadrática: ¿qué es y en qué se utiliza?

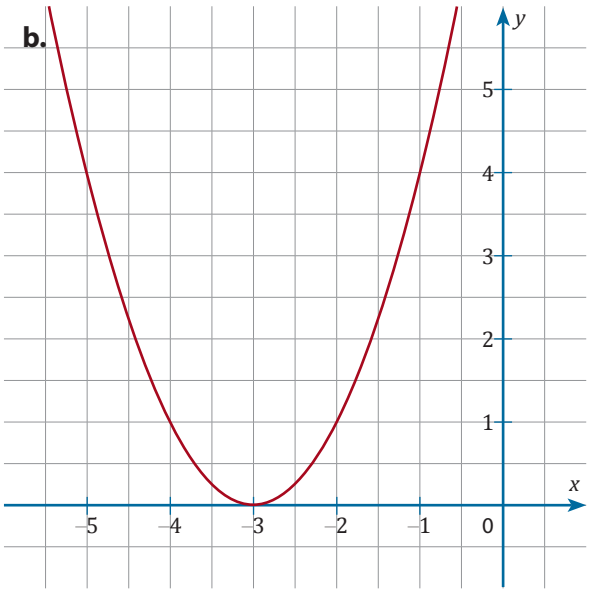
Página 104 *Trabaja*

1

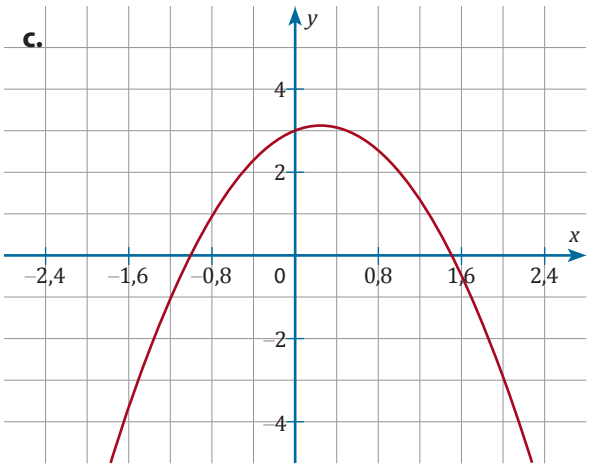
a.



b.



c.



2 **a.** No **b.** No **c.** Sí

3 **a.** Cóncava hacia arriba.
b. Cóncava hacia arriba.
c. Cóncava hacia abajo.

Página 104 *Trabaja*

1 **a.** Cóncava hacia abajo.
b. Cóncava hacia arriba.
c. Cóncava hacia abajo.
d. Cóncava hacia arriba.
e. Cóncava hacia abajo.
f. Cóncava hacia abajo.
g. Cóncava hacia abajo.
h. Cóncava hacia arriba.

2 Sí, son ciertos los datos.

Página 109 *Trabaja*

4

Ejercicio	Intersección con eje x	Intersección con eje y
a	(11,0) y (–8, 0)	(0, –176)
b	(5, 0)	(0, –25)
c	$(1-\sqrt{3},0)$ y $(1+\sqrt{3},0)$	(0, 2)
d	(1,0) y (16, 0)	(0, 16)
e	(–3, 0)	(0, 27)
f	(–14, 0) y (14, 0)	(0, 196)

5 Punto de Partida: $(\sqrt{2},0)$. Punto de llegada $(0,0)$.

Página 113 *Trabaja*

6 **a.** $\left(-\frac{1}{2},-2\right)$ **b.** $(8,32)$ **c.** $\left(\frac{3}{8},\frac{3}{2}\right)$

7 **a.** Sí **b.** No **c.** Sí

8 **i.** b **ii.** c **iii.** a

9 **i.** azul **ii.** verde **iii.** amarillo

10 **a.** III
b. II
c. Está sobre el eje y.

Página 115 *Trabaja*

3 **a.** $x = \frac{7}{2}$ **c.** $x = 0$ **e.** $x = \frac{2\sqrt{3}}{3}$

b. $x = -\frac{3}{4}$ **d.** $x = 1$

4 **a.** a los 4 segundos **b.** $x = \frac{17}{2}$

Página 117 *Trabaja*

5 $x + y = 44$

$5x^2 + 6y^2 = s$

$5x^2 + 6(44 - x)^2 = s$

$\underbrace{11x^2 - 528x + 11\,616 = s}_{\text{función de segundo grado}}$

Encontrar el valor mínimo de s equivale a encontrar las coordenadas del mínimo de la parábola que la representa. Esto corresponde a la coordenada del vértice para x.

$$x = -\frac{-528}{22} \rightarrow x = 24$$

Como $x + y = 44$, se tiene se tiene que uno de los valores es 24 y el otro 20.

6 Del grupo de Amaro.

7 **a.** $T = 96{,}86$ °C.

b. 100 °C

Página 119 *Trabaja más...*

I. Ecuaciones del tipo $ax^2 + c = 0$

1 **a.** $x = \pm\frac{7\sqrt{5}}{5}i$

b. $-\sqrt{2}, \sqrt{2}$

c. $x = \pm 3i$

2 26

3 $6\sqrt{10}$ cm

4 **a.** 25 u **c.** $\sqrt{5}$ mm

b. 15 cm **d.** 24 mm

5 52 o -52

6 131, 24 m

7 20 cm y $2\sqrt{5}$ cm

8 5,08 m

II. Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx = 0$

1

a. 0 y $\frac{7}{5}$

b. 0 y 10

c. 0 y $\frac{2}{11}$

d. 0 y $-\frac{7}{2}$

e. 0 y $-\frac{22}{5}$

f. 0 y $\frac{35}{11}$

g. 0 y $-\frac{11}{3}$

h. 0 y -1

i. 0 y 0,25

j. 0 y -8

k. 0 y $-\frac{2}{5}$

l. $\frac{32}{3}$ cm y $\frac{3}{4}$ cm

III. Ecuaciones del tipo $ax^2 + bx + c = 0$

1 **a.** $-\frac{1}{3}$ y $-\frac{3}{2}$

b. -11 y -7

c. 30 y 11

d. $\frac{2}{5}$ y -4

e. $\frac{7-\sqrt{61}}{2}$ y $\frac{7+\sqrt{61}}{2}$

f. $\frac{-7-\sqrt{57}}{2}$ y $\frac{-7+\sqrt{57}}{2}$

g. -3

h. -8 y -3

i. -6 y -7

j. 10

k. 2

l. 0 y -30

2 **a.** $y = \frac{-7 \pm \sqrt{161}\,i}{7}$

b. $\frac{21-\sqrt{33}}{8}; \frac{21+\sqrt{33}}{8}$

c. $z = \frac{6}{13} \pm \frac{5}{26}i$

3 $-\frac{10}{3}$

4 **a.** 12 y 14

b. Si m $= 7, \frac{158}{14}$. Si m $= -5{,}5, -\frac{158}{11}$

5 $-1{,}8$ y 3

6 $2\sqrt{26}$ cm

7 $a = 0{,}75$ dm; $b = 7$ dm; $h = 2{,}25$ dm

8 **a.** 3 y $\frac{10}{7}$ **c.** 7

b. 12 **d.** 10

9 **a.** k $= -9$ y 2; $a = -8$ y $b = -18$; $a = 3$ y $b = 4$

b. $-8x^2 - 18x - 7 = 0$; $3x^2 + 4x - 7 = 0$

c. $-\frac{7}{4}$ y $\frac{1}{2}$

IV. Ejercicios misceláneos de ecuaciones cuadráticas

1 **a.** $x = \frac{-3 \pm \sqrt{33}}{4}$

b. 9 y -5

c. 3 y $\frac{1}{8}$

d. $\frac{3}{5}$ y $-\frac{4}{7}$

e. $x = \frac{9 \pm \sqrt{31}}{2}$

f. $x = \frac{1 \pm 3\sqrt{7}\,i}{4}$

g. $x = \frac{5 \pm 2\sqrt{30}}{5}$

h. $\frac{-13 \pm \sqrt{127}}{7}$

2 **a.** 3 y 1

b. -7 y 3

c. $\frac{2}{3}$ y -5

d. $(2+\sqrt{13})$ y $(2-\sqrt{13})$

e. 3 y -2

f. $x = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{10}$

g. $x = \frac{-5 \pm \sqrt{33}}{4}$

3 **a.** No **b.** Sí **c.** Sí

4 **a.** $x^2 + 3x - 40 = 0$

b. $27x^2 - 12x + 1 = 0$

c. $x^2 - 4x + 13 = 0$

5

COLUMNA A	COLUMNA B
$x^2 + 5x + 4 = 0$	3 y -1
$2x^2 - 9x + 1 = 0$	0 y 1
$x^2 = 2x + 3$	$\frac{3 \pm \sqrt{33}}{3}$
$x = 2x(x+4)$	-1 y -4
$x^2 - x = 0$	0 y $-\frac{7}{2}$
$3x^2 - 6x = 8$	$\frac{9 \pm \sqrt{73}}{4}$

6 Sólo a. con e.

7 **a.** $x = \pm 2$

b. $x = \pm 8$

c. $x = \pm 3$

d. $x = \pm 3$

e. $x = \pm 1$

f. $x = \pm 4$

g. $x = \pm 2$

h. $x = \pm\sqrt{\frac{3}{5}}$

i. $x = \pm\sqrt{2}$

j. $x = 0;\ x = 2$

k. $x = 0;\ x = -\frac{5}{9}$

l. $x = 0;\ x = \frac{1}{5}$

m. $x = 0;\ x = 7$

n. $x = 0;\ x = -3$

ñ. $x = 0;\ x = -\frac{20}{21}$

o. $x = -1 \pm 4\sqrt{2}i$

p. $x = 0;\ x = 10$

8 **a.** $A = 144\ \text{m}^2$

b. $x = 0$ y $x = 3$

c. 100 personas

d. 3 y 6 horas

e. Pedro 15 días, Diego 10 días

f. 6

g. 12 y 8 metros

h. 25 personas

9 **a.** $x = -12;\ x = 3$

b. $x = -\frac{4}{5}; x = \frac{1}{2}$

c. $x = \frac{3}{4}; x = 6$

10 13:00

11 700 gr y 300 gr

12 $20\ \text{m} \cdot 10\ \text{m}$

13 4 y $\frac{4}{3}$, el volumen aumenta

14 áreas: $10\ \text{m}^2$ y $6\ \text{m}^2$, cada galón rinde $2\ \text{m}^2$

15 52 años

16 $t = \sqrt{15}\ \text{s}$

17 $y = 1$, eran 8 trabajadores y tardarían 6 días

18 **a.** $12x^2 + 9x = 1$ **b.** 5,8 %

19 Representa el volumen, $x = 5$; aristas: 2 dm, 7 dm y 16 dm.

20 105 y 97

21 **a.** $\frac{x(x+2)}{2} = 60$

b. base: 10 cm, altura: 12 cm, lados: 13 cm

c. $P = 36$ cm

22 Compró 24 alcachofas a $ 240 cada una.

23 **a.** $(x-1)(x-3) = -2$

b. $(2+i)$ y $(2-i)$

c. Al conjunto de los números complejos.

24 30 cm, 130 cm y 70 cm

25 dos números reales, 2 y -2

26 **a.** $k = \frac{9 \pm 3\sqrt{13}}{2}$

b. $x^2 + x - 12 = 0$

27 **a.** 1 y $-\frac{5}{2}$

b. $\left(\frac{7}{8}+\frac{\sqrt{239}}{8}i\right)$ y $\left(\frac{7}{8}-\frac{\sqrt{239}}{8}i\right)$

c. $\sqrt{2}$

28 **a.** $x^2+(x+1)^2=7^2+3\cdot 4$

b. $x=5$

29 7 series de 14 abdominales cada una.

30 Aproximadamente 14,8 m.

31 **a.** $\left(\frac{69}{78}+\frac{\sqrt{7\ 719}}{78}i\right)$ y $\left(\frac{69}{78}-\frac{\sqrt{7\ 719}}{78}i\right)$

b. $x_1=7+\sqrt{55}$ y $x_2=7-\sqrt{55}$

c. $x=1$

d. 0 y -5

e. $x_1=\frac{-9+\sqrt{129}}{4}$ y $x_2=\frac{-9-\sqrt{129}}{4}$

32 **a.** 3 cm

b. 10 cm, 2 cm y 3 cm

c. 60 cm^3

d. 92 cm^2

33 5 cm

34 **a.** $x^2-6x+34=0$

b. -3 y -4, pertenecen al conjunto de los números enteros.

c. Sí, en $\mathbb{R}$ o en $\mathbb{C}$.

35 14 filas con 16 árboles cada una.

36 Con Genaro, las soluciones de la ecuación de Humberto son $x_1=-32+8\sqrt{15}$ y $x_2=-32-8\sqrt{15}$. Una posible ecuación para las soluciones de Genaro es $x^2-64=0$.

37 Se debieron agregar 7 cm con los que las medidas finales son 8 cm, 15 cm y 15 cm.

38 9 y 16 cm

39 **a.** $x=\frac{-59\pm 3\sqrt{69}}{22}$

b. $x=\frac{-8\pm\sqrt{35}\,i}{3}$

c. $x=13$

d. $x=\frac{1}{2}$

e. $x=\frac{1}{2}$ y $x=-3$

40 0,5 % de interés mensual.

41 **a.** $\frac{x(x-10)\cdot 8}{3}=616$, con x: largo

b. largo: 21 cm, ancho: 11 cm

c. Aproximadamente 2 frascos (área total a pintar: 1 080,24 cm^2).

42 **a.** 0 y $-\frac{13}{3}$

b. $x=\frac{-7\pm\sqrt{97}}{4}$

c. $x=\frac{-4\pm\sqrt{2}}{2}$

d. $k=\frac{3}{8}$

e. $S=-\frac{3}{2}$ y $P=-\frac{5}{2}$

43 **a.** $x^2+(x+2)^2=(2\sqrt{61})^2$, con x: diagonal basal

b. diagonal basal: 10 cm, alto: 12 cm

c. $x^2+(x+2)^2=10^2$, con x: ancho

d. ancho: 6 cm, largo: 10 cm

e. $V=576\ cm^3$, $A=432\ cm^2$

44 **a.** 7 y 52 o -7 y -52

b. 23 y 17

c. 18

d. 4 y $-\frac{6}{5}$

e. 21 y -24

V. Ejercicios de función cuadrática

1 **a.** Sí, porque el coeficiente de x^2 es menor a cero

b. $\left(-\frac{5}{3},-\frac{35}{3}\right)$ y $(1,-1)$.

c. ambos tienen la misma ordenada

2 $(-1,4)$ y $(0,5\ ;4)$

3 **a.** $(-4,5)$ y $(2,5)$

b. No lleva respuesta ya se debe verificar.

4 **a.** Cualquier número $\mathbb{R}^+$

b. Cualquier número $\mathbb{R}^-$

c. 1 y 5

5 **a.** Cero; $\Delta=-80$, menor a cero

b. Dos; $\Delta=225$, mayor a cero.

c. Uno, $\Delta=0$.

d. Dos; $\Delta=4$, mayor a cero.

e. Cero; $\Delta=-6,\overline{6}$, menor a cero.

f. Dos; $\Delta=1,\overline{7}$, mayor a cero.

6 Tienen los mismos puntos de intersección, y que son: $(1{,}5;0)$ y $(-2{,}0)$ y $(1{,}5;0)$ y $(-2{,}0)$

7 $y = -3x^2 + 11x - 11$

8 **a.** $\left(\frac{\sqrt{11}+1}{5}, 0\right)$ **b.** $(0, -2)$

9 **a.** $-\sqrt{6}$ y $\sqrt{6}$

b. $y = 0{,}5x^2 - \sqrt{6}x + 3$; $y = 0{,}5x^2 - \sqrt{6}x + 3$

10 **a.** $\left(-\frac{5}{4}, 0\right)$ **b.** $(0; -4{,}5)$

11 42 unidades de área

12 **a.** $(7, -34)$, máximo.

b. $(0{,}1)$, máximo.

c. $\left(\frac{9}{8}, -\frac{95}{16}\right)$, máximo.

d. $(0, -12)$, mínimo.

e. $\left(\frac{3}{2}, \frac{71}{4}\right)$, mínimo.

f. $\left(\frac{4}{3}, -\frac{1}{3}\right)$, mínimo.

13 25 cm.

14 **a.** $\in$ **b.** $\in$ **c.** $\notin$

15 **a.** hacia arriba **b.** hacia abajo **c.** hacia abajo

16 **a.** N **b.** N **c.** P

17 **a.** $(3{,}0), (-8{,}0)$ y $(0, -24)$

b. $\left(\frac{1}{3}, 0\right), \left(-\frac{3}{2}, 0\right)$ y $(0, -3)$

c. $(0{,}0)$ y $(25{,}0)$

d. $(-4{,}0); (4{,}0)$ y $(0{,}48)$

e. No corta al eje x, $(0{,}13)$

18 **a.** $(4{,}1)$

b. $(-3, -2)$

c. $(5, -4)$

d. $\left(\frac{1}{2}, -\frac{25}{4}\right)$

e. $(3{,}0)$

f. $(5, -4)$

19 **a.** Sí **b.** Sí **c.** No

20 **a.** $x = \frac{1}{2}$

b. $x = 10$

c. $x = \frac{19}{30}$

d. $x = 6$

e. $x = 3$

f. $x = -8$

g. $x = \frac{19}{40}$

21 **a.** 2 unidades hacia abajo

b. 12 unidades hacia arriba

22 **a.** 6 unidades a la derecha

b. 0,25 unidades a la izquierda

c. 3 unidades a la derecha

23 **a.** 9 metros

b. ambos números son 60

c. 3 segundos y 17 segundos

d. 7 unidades

25 **b.**, **a.** y **c.**

26 Cualquier valor para a, tal que no sea igual $-\frac{1}{2}$

27 $k = 8$

28 solo **b.** y **e.**

29 14

30 **i.** $f(x) = -x^2 + 3$

ii. $f(x) = 3x^2 + 16x - 35$

iii. $f(x) = -x^2 + 5x + 24$

31 I cuadrante, negativa

32 **a.** 12 y -12

b. $f(x) = -4x^2 - 12x + 9$ y $f(x) = -4x^2 + 12x + 9$

33 Sí.

34 **a.** V **b.** F **c.** V **d.** F **e.** V

VI. Problemas de función cuadrática.

1 **a.** No, $(1{,}18)$ no pertenece a la curva. Las ventas fueron 20 unidades, por tanto $(1{,}20)$, sí está en la curva.

b. Septiembre 2009.

c. 140 unidades.

d. No, se proyecta vender 350 unidades.

e. Si, las ventas debieran alcanzar las 650 unidades, según la curva de proyección

2 **a.** $(0{,}0)$

b. $\left(1, \frac{55}{16}\right)$; 3,58 km

3 $\left(\frac{-1-\sqrt{13}}{2}, 0\right), \left(\frac{-1+\sqrt{13}}{2}, 0\right)$ y $(0, -3)$

4 $4 + 2\sqrt{6}$

5 **a.** Los tres valores están correctos, pues están comprendidos entre –0,5 y 1, que son las abscisas de los puntos de corte.

b. $\frac{1}{8}$

6 **a.** a 10 m **b.** No, es 8 m

7 Tienen los mismos puntos de intersecciones con el eje x: $(1{,}5\,;\,0)$ y $(4{,}0)$. Difieren en el punto de intersección con el eje y, ya que son $(0{,}12)$ y $(0{,}18)$, respectivamente.

8 $(0,\ -9)$, $(3,\ 0)$ y $(7,\ 0)$, $(0,\ -9)$, $(3,\ 0)$ y $(7,\ 0)$ y $(0,\ -9)$, $(3,\ 0)$ y $(7,\ 0)$

9 15 000 unidades. Sucede por la forma parabólica de la curva.

10 El punto de referencia está en $d = 0$, es decir $(0{,}0)$, es decir $d = 0$, es decir $(0{,}0)$ de la gráfica.

Por tanto, en $(0{,}5)$, el móvil se encuentra detenido a 5 km de este punto.

$(1{,}0)$, transcurrido una hora, el móvil se ha desplazado acercándose al punto de referencia y llegando a él.

$(5{,}0)$. Después de haberse alejado del punto de referencia, se devuelve, transcurrido cinco horas de iniciado el movimiento.

11 **a.** No.

b. 125 unidades.

c. Aproximadamente \$12.

12 $\left(1, \frac{3}{2}\right)$

13 La función, puesto que los costos mínimos dan $-\frac{9}{2}$.

14 \$ 140 000 000 en 30 años

15 Después de los 25 años.

16 1 000 bacterias

17 Se debe disminuir la base y aumentar la altura en 1,5 cm. El área máxima será 21,125 cm^2.

18 15 000 copias, después de 15 días de lanzado el CD.

19 **a.** $U(p) = -\frac{1}{500}p^2 + 7p$, con p: unidades producidas

b. *USD* 6 125

c. 1 750 unidades

d. Crece entre las 1 y las 1 750 unidades.

e. Decrece entre las 1 751 y las 3 500 unidades.

20 **a.** a los 8 años

b. *USD* 1 168

c. *USD* 1 200

d. a los 16 años

e. a los 83 años aproximadamente

21 **a.** $y = -2x^2 + 7x - 3$

b. $x = \frac{7}{4}$

c. 6,25 unidades

d. 2,5 unidades

22 **a.** $S(m) = -\frac{1}{2}m^2 + \frac{3}{2}m + 12$

b. al año y medio

c. aproximadamente 1 312 salmones

d. aproximadamente a los 6 años

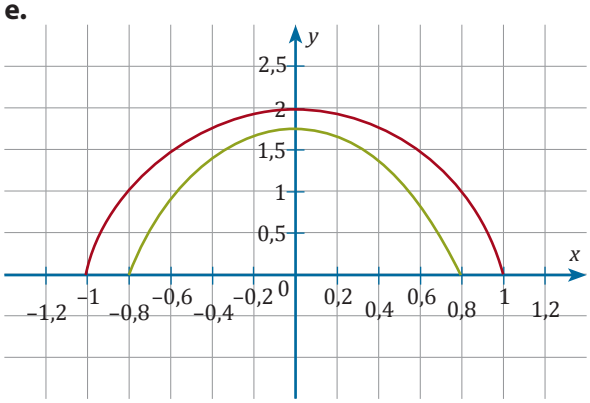
23 **a.** $h(x) = -2x^2 + 2$, con x: metros (suelo)

b. a 1,5 m

c. $h(x) = -\frac{45}{16}x^2 + 1{,}8$, con x: metros

d. 1,8 m

e.



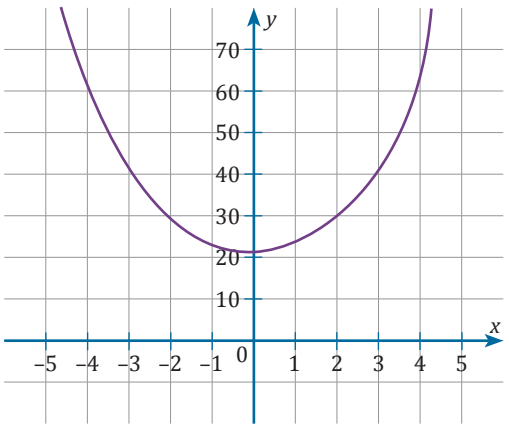
24 **a.** No tiene puntos de corte con eje x, la solución de la ecuación asociada es $x = \frac{-1 \pm \sqrt{251}\,i}{6}$.

b. $(0{,}21)$

c. Sí, pertenece a la parábola

d. $\left(-\frac{1}{6}, \frac{251}{12}\right)$

e.



25 **a.** $y = \frac{2}{3}x^2 - \frac{8}{3}x + 3$

b. $y = -\frac{1}{6}x^2 + \frac{11}{6}x - 3$

c. $V_{P_1} = \left(2, \frac{1}{3}\right)$, $V_{P_2} = \left(\frac{11}{2}, \frac{49}{24}\right)$

d. P_1: no tiene cortes con eje x, las soluciones de la ecuación asociada son: $x = \frac{4 \pm \sqrt{2}\, i}{4}$

P_2:$(2,0)$ y $(9,0)$

e. $(0, -3)$

Taller de profundización

Página 138 *Trabaja*

1 **a.** $(3 - i), (-3 + i)$

b. $(-2 + 4i), (2 - 4i)$

c. $(-8 - 3i), (8 + 3i)$

2 **a.** $(1 - i), (-1 + i)$

b. $(-1 + 4i), (1 - 4i)$

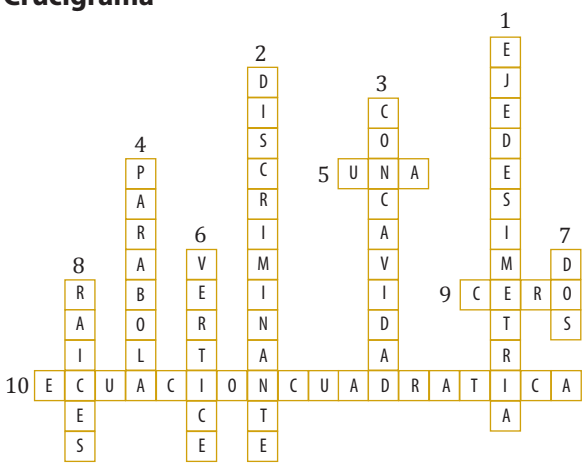
c. $(-1 - 2i), (1 + 2i)$

Evaluación de la unidad

Página 141

Síntesis conceptual

I. Crucigrama



II.

1 $\frac{7 + \sqrt{97}}{2}$ y $\frac{7 - \sqrt{97}}{2}$

2 -2 y $0{,}75$

3 0 y 8

4 -6 y 1

5 $-1{,}2$ y 5

6 $-4 + \sqrt{10}$ y $-4 - \sqrt{10}$

7 4 y -2

8 0 y 5

9 3 y 7

10 3 y -7

11 2 y 6

12 $\frac{3 - 3\sqrt{33}}{4}$ y $\frac{3 + 3\sqrt{33}}{4}$ y

III.

1 Sí.

2 No.

3 Sí.

4 Sí.

5 Sí.

6 Sí.

IV.

1 50 m por 21 m.

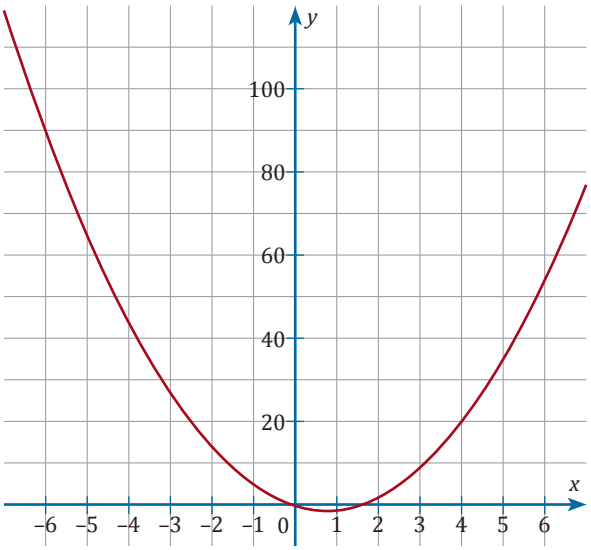
2 16, 12 y 20 cm.

3 8 m por 14 m.

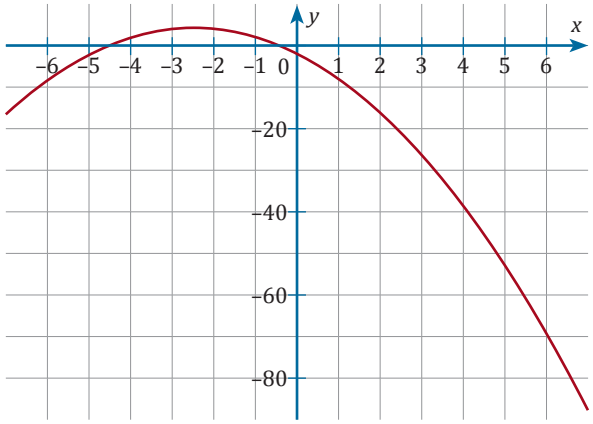
4 No. Porque $n\,(n+1) = 1\,200$ no tiene solución en $\mathbb{N}$, siendo n un natural a buscar.

V. Grafica las siguientes funciones cuadráticas:

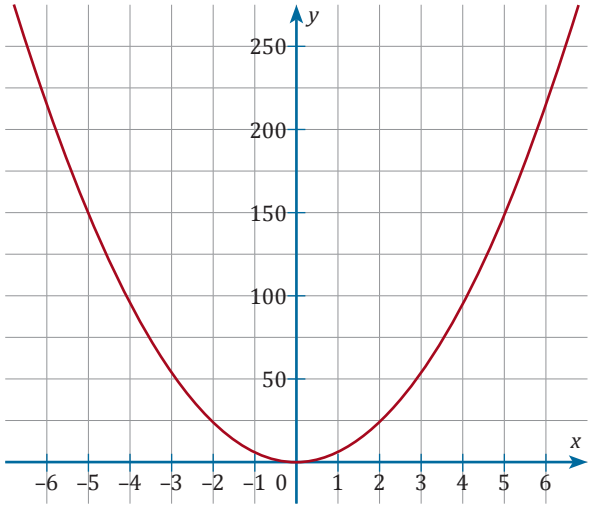
1 $y = 2\,x^2 - 3\,x$



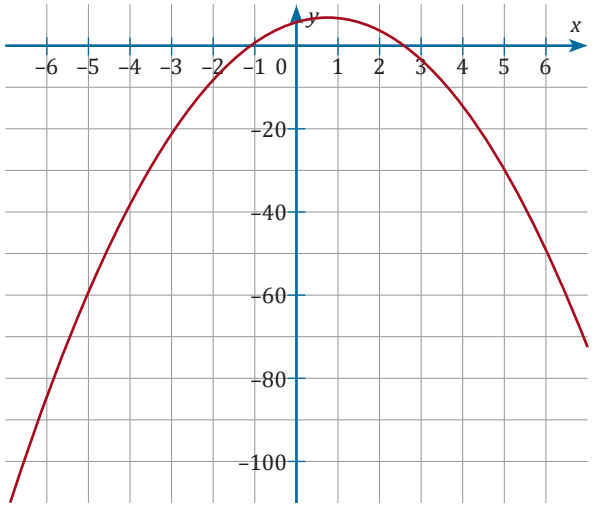
2 $y = -x^2 - 5x - 2$



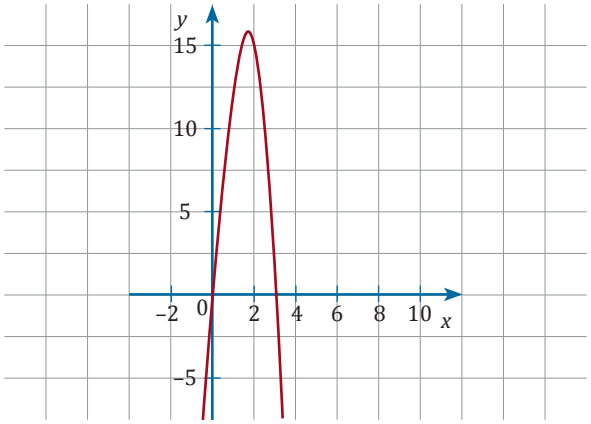
3 $y = 6\,x^2$



4 $y = -2\,x^2 + 3\,x + 6$



5 $y = -7\,x^2 + 21\,x$



VI.

concavidad	Punto(s) de corte(s) con el eje x	Punto de corte con el eje y	vértice	eje de simetría
1 Hacia abajo	$\left(-\frac{2}{3},0\right)$ y $(0,0)$	$(0,0)$	$\left(-\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$	$x = -\frac{1}{3}$
2 Hacia arriba	No hay	$(0,2)$	$(0,2)$	$x = 0$
3 Hacia arriba	$(0,0)$	$(0,0)$	$(0,0)$	$x = 0$
4 Hacia abajo	$\left(\frac{-1-\sqrt{22}}{3},0\right)$ y $\left(\frac{-1+\sqrt{22}}{3},0\right)$	$(0,7)$	$\left(-\frac{1}{3},\frac{22}{3}\right)$	$x = -\frac{1}{3}$
5 Hacia arriba	No hay	$(0,2)$	$\left(-\frac{1}{2},\frac{7}{4}\right)$	$x = -\frac{1}{2}$
6 Hacia abajo	$\left(\frac{1}{3},0\right)$ y $(1,0)$	$(0,-1)$	$\left(\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$	$x = \frac{2}{3}$
7 Hacia arriba	No hay	$(0,9)$	$(0,9)$	$x = 0$
8 Hacia abajo	$\left(\frac{7}{3},0\right)$	$(0,-49)$	$\left(\frac{7}{3},0\right)$	$x = \frac{7}{3}$

VII.

1 2,25 s

2 Sí, en los puntos $(0, -3)$ y $(1, 2)$.

3 $a = 1$; (0,1) y (1,0) por ejemplo.

4 Solo $y = -(5 - x)^2 + 8$ tiene máximo pues sus ramas se abren hacia abajo.

5 $(1, 3)$, I cuadrante y $\left(-\frac{1}{4}, \frac{23}{16}\right)$, II cuadrante.

VIII.

1 a	**11** b	**21** c	**31** a
2 e	**12** c	**22** c	**32** e
3 d	**13** d	**23** a	**33** e
4 e	**14** c	**24** b	**34** c
5 b	**15** a	**25** d	**35** b
6 e	**16** d	**26** a	**36** e
7 d	**17** e	**27** c	**37** b
8 b	**18** d	**28** e	**38** b
9 c	**19** c	**29** d	**39** e
10 d	**20** c	**30** b	**40** e

Evaluación de síntesis unidades 1 y 2

Página 150

I.

1 $\left(-\frac{3}{34}, -\frac{5}{34}\right)$ o $-\frac{3}{34}, -\frac{5}{34}\,i$

2 $5 + 5i$

3 $0 - 12\,i$ o $0 + 12\,i$

4 $0 + 0\,i$

5 Vectores sobre el eje real

6 $y = -x^2 + 6x - 11$

7 1

8 $\frac{1}{9}$

9 $ax^2 + bx = 0$

10 Números complejos

II.

1 $Dom\, f = \mathbb{R}$ $\quad$ $Rec\, f = [-12, \infty[$

2 **a.** $-\frac{2}{3}$ y $\frac{1}{2}$

b. $-\frac{24}{25} - \frac{7}{25}\,i$

c. 1

3 **a.** $\begin{array}{|l} 12x^2 - 9y^2 = 40 \\ \underline{-66xy = 198} \end{array}$

b. $x = 1$ y $y = -3$; $x = 3$ y $y = -1$

c. $1 + 3i$ y $3 + i$

4 **a.** No. Como $z_1 = \sqrt{z_2}$ luego $z_1^{\,2} = z_2$.
Pero $z_1 \cdot z_2 = z_3$, entonces $z_1 \cdot z_1^{\,2} = z_3$.
Así $z_1^{\,3} = z_3$.
Por tanto $z_3 = z_1^{\frac{3}{2}}$ es falso

b. $25\sqrt{5}$

c. $-4^6(352 - 52\,i)$, o bien,
$-1\,441\,792 + 212\,992\,i$

5 **a.** 3,75 km $\quad$ **c.** 0,75 km

b. 1,50 min $\quad$ **d.** 3 min

III.

1 61 y 67

2 $(5,6)$

3 **a.** $5 - 12\,i$; $-5 - 12\,i$ y $-5 + 12\,i$

b. $30 + 16\,i$; $-16 - 30\,i$

4 **a.** $(0,0)$ y $(2,0)$

b. Sí. 0 y 2

c. $(1,3)$

d. Sí. Porque el valor máximo de la función cuadrática es 3.

5 50,24 mm^2

6 4,2

7 $-9 + 56{,}125\,i$; segundo cuadrante. La parte real es negativa y la parte compleja positiva.

8 **a.** 341

b. Sí, $(1641)_5$

c. 8

d. Sí. $\frac{3}{5}$

9 $h(x) = 0{,}02x^2 - 2x + 110$

10 $(1, -4)$; el inverso multiplicativo es $\left(\frac{1}{17}, \frac{4}{17}\right)$

IV.

1 d	3 a	5 e	7 d	9 a
2 b	4 c	6 b	8 e	10 c



Páginas 156 a 239

Unidad 3
Plano Cartesiano y Homotecia... un nuevo paso en geometría

Conocimientos previos

Página 161 *Trabaja*

1 **a.** 8:1 **b.** 15:14
c. Depende de la cantidad de alumnos de ambos cursos en tu colegio.
d. Depende del número de salas y el número de oficinas de tu colegio.

2 8:3

3 36 cm

4 $ 162 500

5 **a.** $\frac{1}{3}$ **b.** $\frac{3}{2}$ **c.** $\frac{4}{1}$ **d.** $\frac{1}{5}$ **e.** $\frac{1}{3}$ **f.** $\frac{3}{4}$

6 **a.** $\frac{9}{5}$; 9 antecedente, 5 consecuente.
b. a:7; a antecedente, 7 consecuente.
c. $\frac{3}{4}:\frac{11}{5}$; $\frac{3}{4}$ antecedente, $\frac{11}{5}$ consecuente.

7 **a.** $m = 7$; **b.** $m = \frac{17}{6}$

8 **a.** $\frac{5}{4}$; 1,25
b. antecedente: 15; consecuente: 5

9 **a.** $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{3}{5}$ **c.** $\frac{1}{10}$

10 $\frac{9}{25}$

11 $\frac{8}{27}$

12 **a.** 12 niñas; **b.** $\frac{1}{3}$

13 **a.** 1:200; **b.** 1,4 cm

14 33 años.

15 $ 800 000

16 4 800 L

17 849 843 750 km²

18 20 L y 32 L

19 **a.** $\frac{5}{4}$ **b.** 1 250 baldosas;
c. 1 600 baldosas blancas.

20 **a.** $x = 3$; **b.** $x = \frac{16}{15}$ **c.** $x = \frac{406}{25}$

21 **a.** $k = \frac{9}{2}$ **b.** $k = -2$

22 $ 3 600

23 **a.** No; **b.** 30 personas.

24 Si.

25 45 s

26 117 cm

27 14,4 m

28 6 cm, 4 cm y 10 cm

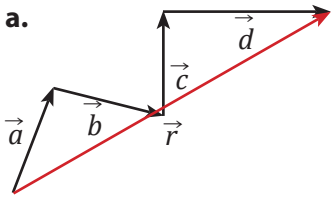
29 **a.** $x = 3$ cm; **b.** $y = 8$ cm

30 $x = 15$ cm

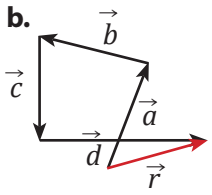
31 **a.** Si son semejantes; **b.** 2,5; **c.** 2,5

32 30 cm

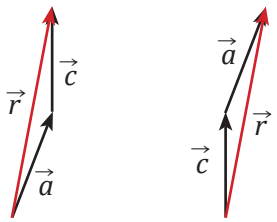
33 **a.**



b.

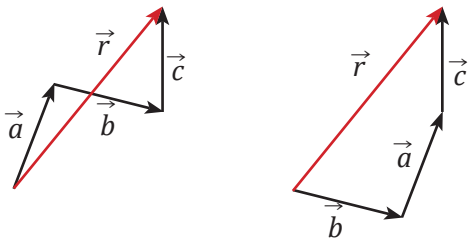


34 **a.**



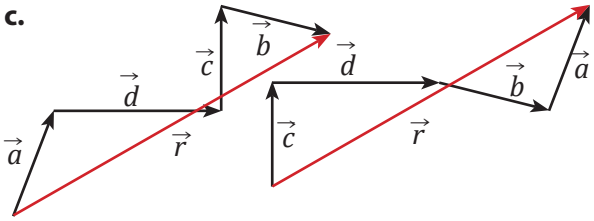
Las longitudes de los vectores obtenidos tienen igual medida.

b.



Las longitudes de los vectores obtenidos tienen igual medida.

c.



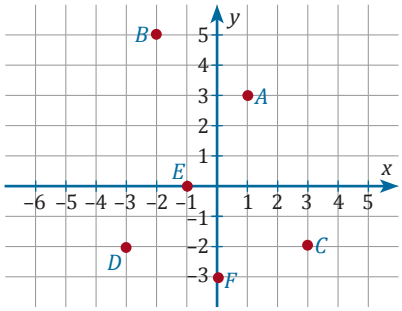
Las longitudes de los vectores obtenidos tienen igual medida.

d. Propiedad conmutativa

Plano Cartesiano y sus elementos... volvamos a mirarlo

Página 168 *Trabaja*

1



2 $A(1,1)$; $B(4{,}5\ ;-2)$; $C(-4-3)$; $D(-2-1)$; $E(-3{,}0)$; $F(0,-3)$

3 **a.** $m=3$ **b.** $m=\frac{1}{2}$ **c.** $m<3$

4 **a.** $M_{\overline{AB}}=(5,1)$ **b.** $M_{\overline{cd}}=\left(2,\frac{11}{8}\right)$

c. $M_{\overline{EF}}=\left(-\frac{5}{12},-\frac{493}{198}\right)$

5 $B(9,12)$

6 **a.** $x=3, y=\frac{3}{2}$ **d.** $a=-\frac{5}{2}, b=1$

b. $a=7, b=9$ **e.** $a=-1, b=-11$

c. $a=10, b=-10$

7 **a.** $a=\frac{14}{17}, b=\frac{18}{17}$ **c.** $a=\frac{24}{31}, b=\frac{39}{62}$

b. $a=-\frac{41}{23}, b=\frac{11}{23}$

Distancia entre dos puntos y sus aplicaciones

Página 174 *Trabaja*

1 **a.** $2\sqrt{10}$ **b.** $\sqrt{10}$ **c.** $3\sqrt{10}$

d. $\sqrt{\frac{455\,121}{1\,166\,400}}$ **e.** $\sqrt{\frac{105\,109}{8\,100}}$

2 **a.** $\sqrt{13}$ **b.** $\sqrt{10}$ **c.** $\sqrt{17}$ **d.** $\sqrt{37}$ **e.** $2\sqrt{2}$

3 **a.** $a=5\pm\sqrt{11}$

b. No existe un valor de b que cumpla con lo pedido

c. $a=\frac{4\pm\sqrt{791}}{5}$

d. $b=\pm\frac{\sqrt{13}}{13}$

e. $a=\frac{17\pm3\sqrt{139}}{26}$

4 **a.** $\overline{AB}=\overline{BC}=\sqrt{5}$,
$\overline{AC}=2\sqrt{5}\Rightarrow\overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$

b. $\overline{AB}=\sqrt{17}, \overline{BC}=\frac{\sqrt{85}}{2}$,
$\overline{AC}=\frac{\sqrt{85}}{2}\Rightarrow\overline{BC}=\overline{AC}$

c. $\overline{AB}=\overline{BC}=\overline{CD}=\overline{DA}=\sqrt{5}$

d. Ambas diagonales miden $\sqrt{13}$ u

e. $(\sqrt{85})^2=(\sqrt{5})^2+(\sqrt{80})^2\Rightarrow$
$(\overline{AB})^2=(\overline{AC})^2+(\overline{BC})^2$. Por lo tanto el Teorema de Pitágoras se cumple, con lo que el triángulo es rectángulo.

5 **a.** $d_{\overline{AC}}=4$; **b.** $d_{\overline{AB}}=\sqrt{13}$

c. $d_{\overline{AB}}=\sqrt{13}$ **d.** $P=4+2\sqrt{13}$ u

6 **a.** E: $(-2{,}2)$; D: $(5,-1)$; H: $(7{,}3)$

b. $d_{\overline{CD}}=\sqrt{8}$ u; $d_{\overline{AB}}=\sqrt{10}$ u

c. $M_{\overline{HC}}=(4{,}3)$; $M_{\overline{FC}}=(3,-1)$

7 **a.** $P=(20+\sqrt{40})$ u; **b.** $A=30$ u^2

8 **a.** $\sqrt{41}$ u **b.** 5 u **c.** $\sqrt{82}$ u

9 **a.** $P=4(2+\sqrt{2})$ u; $P_1=8(2+\sqrt{2})$ u

b. $A=8$ u^2; $A=32$ u^2

c. $r=2$

d. $\frac{P}{P_1}=2$

e. $\frac{A}{A_1}=4=2^2$

f. La razón entre los perímetros es igual a la razón de semejanza y la razón entre las áreas es igual a la razón de semejanza al cuadrado.

10 **a.** $d_{\overline{AB}} = \sqrt{20}$ u; $d_{\overline{BC}} = 8$ u; $d_{\overline{AC}} = \sqrt{20}$ u

b. $M_{\overline{BC}} = (2, -1)$

c. $d_{\overline{AM}} = 2$ u

d. Un triángulo isósceles.

e. $P = (8 + 2\sqrt{20})$ u

f. $A = 8$ u^2

Página 175 *Trabaja*

1 **a.** $(\sqrt{8})^2 + (\sqrt{18})^2 = (\sqrt{26})^2 \Rightarrow 8 + 18 = 26$. Se cumple.

b. D: $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\overline{AB} = \overline{AD} = \frac{\sqrt{26}}{4}$. Se cumple.

2 **a.** $P = (\sqrt{13} + \sqrt{37} + 2\sqrt{26} + 4\sqrt{2})$ u

b. $\left(-\frac{1}{2}, 4\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, 0\right)$, $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{2}\right)$, $\left(\frac{9}{2}, -\frac{3}{2}\right)$ y $(3,3)$

c. $P = \left(\sqrt{17} + \frac{\sqrt{85}}{2} + \sqrt{13} + \frac{\sqrt{90}}{2} + \frac{\sqrt{53}}{2}\right)$ u

d. No.

e. $P = \left(\frac{\sqrt{117}}{4} + \frac{\sqrt{241}}{4} + \frac{\sqrt{153}}{4} + \frac{\sqrt{178}}{4} + \frac{\sqrt{221}}{4}\right)$ u. No se cumple.

f. $A_1 = 43$ u^2, $A_2 = 27{,}25$ u^2. No se cumple.

g. Solo en los triángulos.

3 **a.** C: $(3 - 2\sqrt{3}, 3 + 2\sqrt{3})$

b. $M_{\overline{BC}} = \left(\frac{7 - 2\sqrt{3}}{2}, \frac{8 + \sqrt{3}}{2}\right)$

c. $\sqrt{15}$ u

d. $\sqrt{15}$ u

e. $\sqrt{15}$ u

f. $\sqrt{5}$ u

g. $6\sqrt{5}$ u

h. $5\sqrt{3}$ u

4 **a.** $P = \left(\sqrt{5} + \frac{\sqrt{29}}{2} + \sqrt{26} + \frac{\sqrt{17}}{2} + \frac{\sqrt{13}}{2}\right)$ u

b. $\sqrt{20}$ m **c.** $\frac{\sqrt{106}}{2}$ m

d. 12,5 m^2 **e.** 15 m^3 = 15 000 litros

f. $5 \cdot 5$ m **g.** 12,5 m^2

5 **a.** E: $(-3,0)$, F: $(1,0)$ y G: $(-1,-2)$

b. $P = (2\sqrt{2} + 2)$ u

c. $P = (4\sqrt{2} + 4)$ u

d. 1 u^2

e. 4 u^2

6 **a.** Un cuadrado.

b. $\sqrt{13}$ u

c. $P = 4\sqrt{13}$ u y $A = 13$ u^2

d. $\left(-2, \frac{5}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{2}, 2\right)$, $\left(1, \frac{9}{2}\right)$ y $\left(-\frac{3}{2}, 5\right)$

e. $P = 2\sqrt{26}$ u

7 **a.** $\left(-\frac{5}{2}, 4\right)$, $\left(-\frac{3}{2}, 4\right)$, $\left(-\frac{1}{2}, 5\right)$, $\left(\frac{3}{2}, 4\right)$, $(-2,3)$ y $\left(\frac{1}{2}, 3\right)$

b. $(14 + 2\sqrt{5})$ u

c. 8 u^2

d. $\overline{AF} = 2\sqrt{5}$ u y $\overline{BH} = \sqrt{13}$ u

e. 18 u^2

8 **a.** No, por que no se cumple el teorema de Pitágoras. $(\sqrt{10})^2 + (\sqrt{5})^2 \neq (\sqrt{13})^2$

b. $P = (\sqrt{10} + \sqrt{15} + \sqrt{13})$ u

c. $\frac{\sqrt{17}}{2}$ u

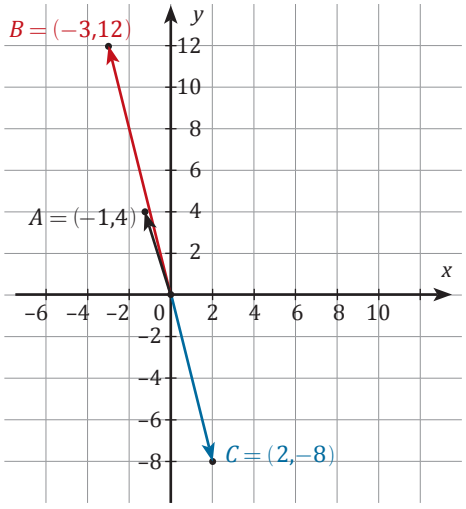
d. $A = 3{,}53$ u^2

e. $A = 9 - 1{,}5 - 3 - 1 = 3{,}5$ u^2. El error se produce por la aproximación de las raíces.

Homotecia, una mirada en perspectiva

Página 182 *Trabaja*

1 $\vec{b} = (-3,12)$; $\vec{c} = (2,-8)$



2 $x = -13$; $y = 6$; $\vec{u} = (-13,6)$

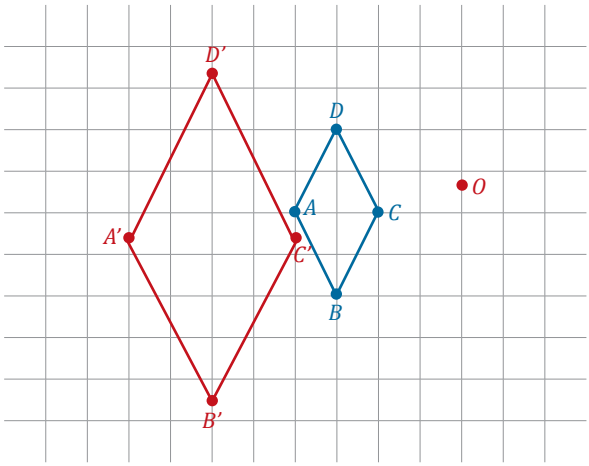
3 10,5

4 No. Porqué si $-3k = 21$, entonces $k = -7$, Pero $-7 \cdot -8$, no es 26.

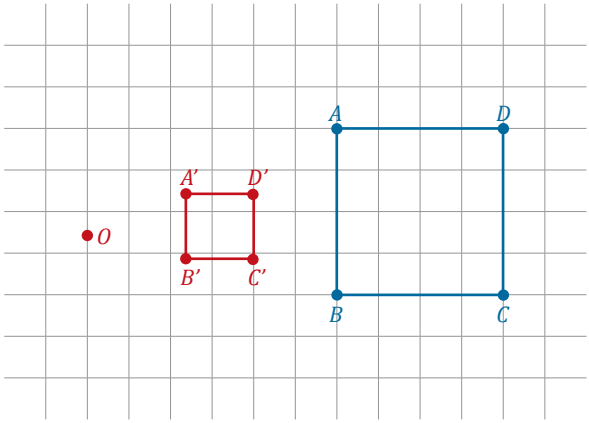
5 $(2{,}2\,;2{,}6)$

Página 193 *Trabaja*

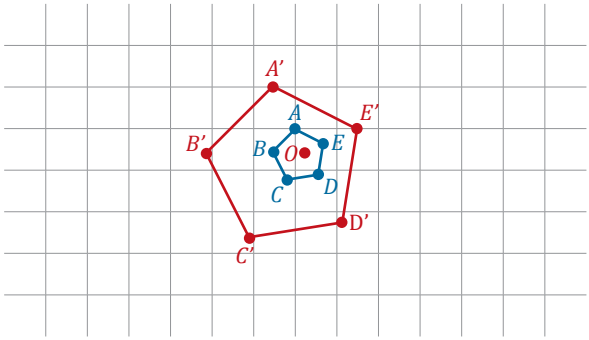
1 **a.**



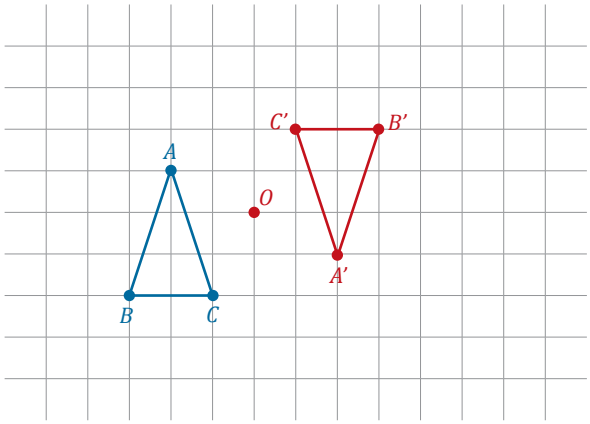
b.



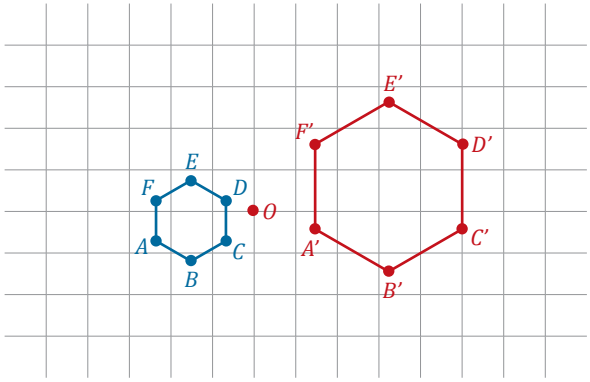
c.



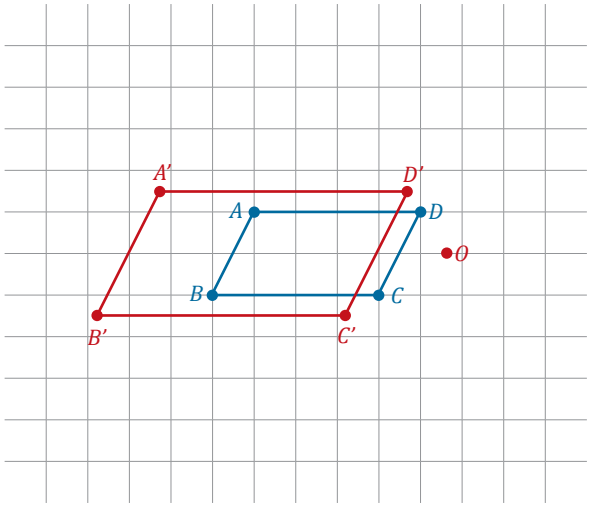
d.



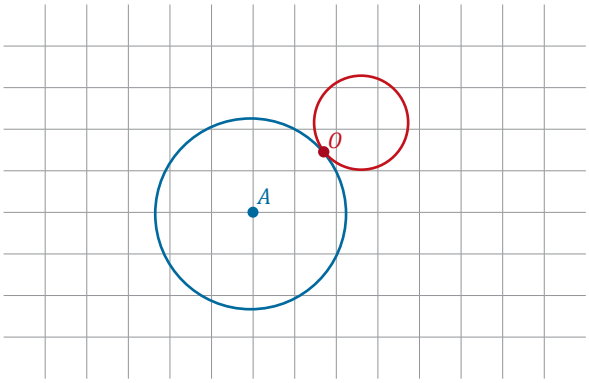
e.



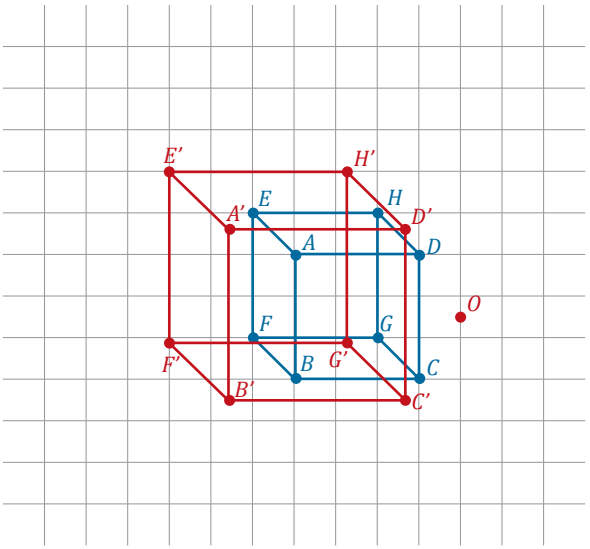
f.



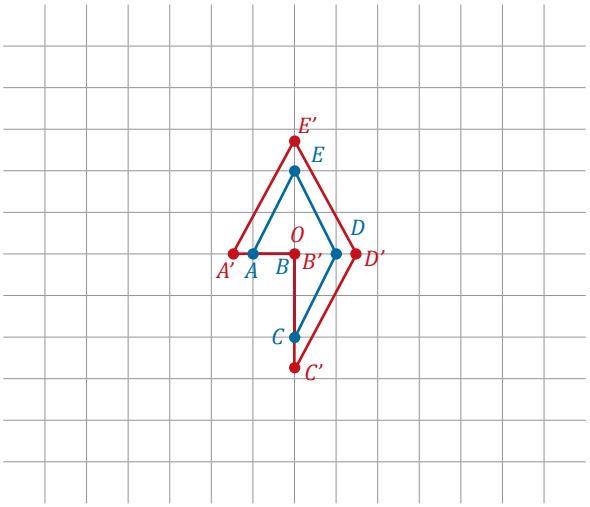
g.



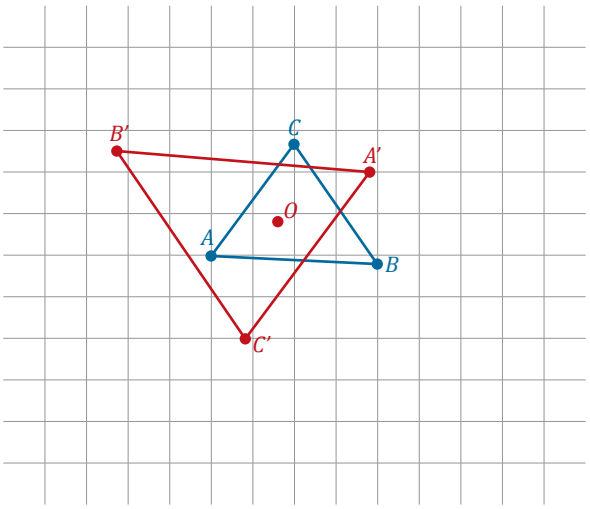
h.



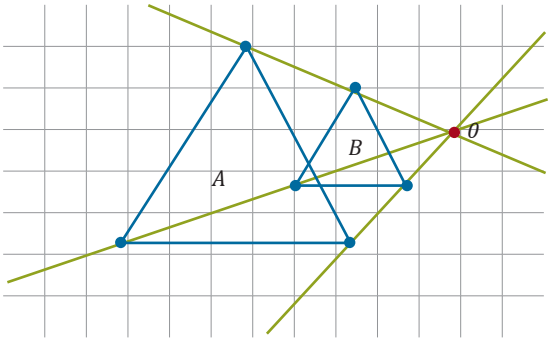
i.



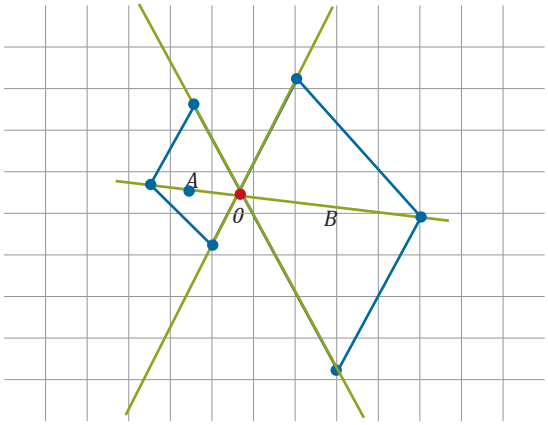
j.



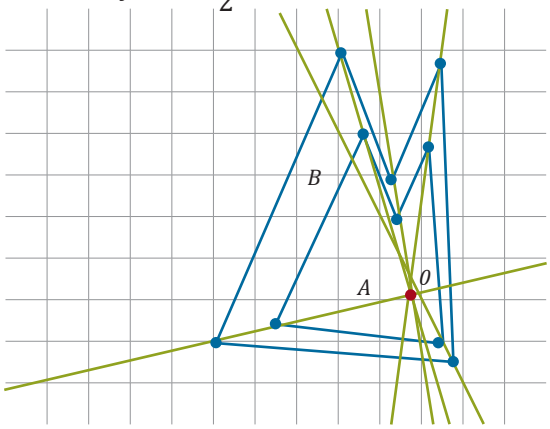
2 a. Centro: O, razón: $\frac{1}{2}$.



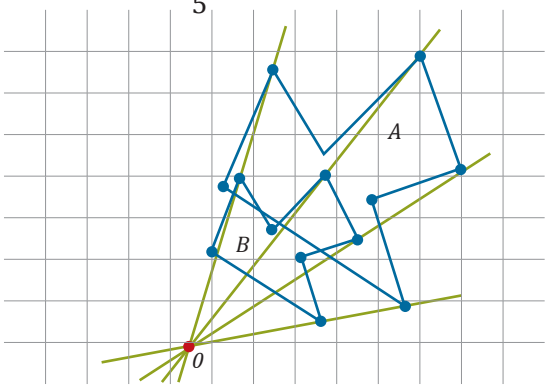
b. Centro O y razón – 2.



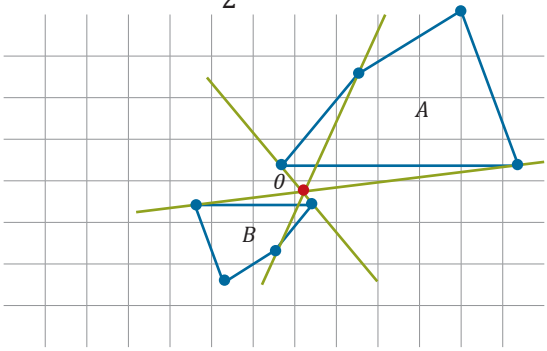
c. Centro O y razón $\frac{3}{2}$.



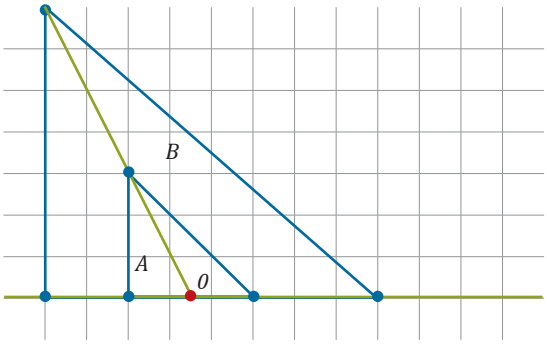
d. Centro O razón $\frac{3}{5}$.



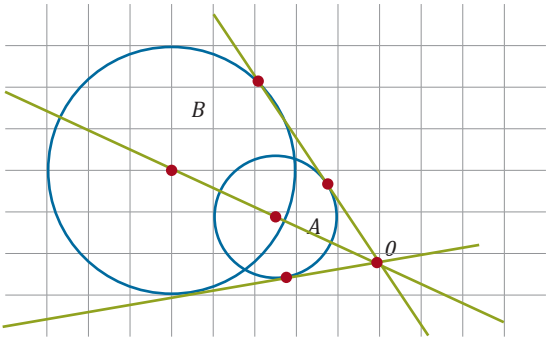
e. Centro O, razón $-\frac{1}{2}$.



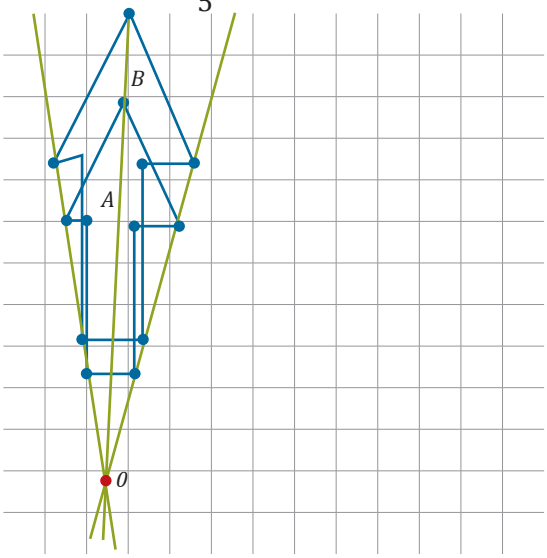
f. Centro O, razón 2.



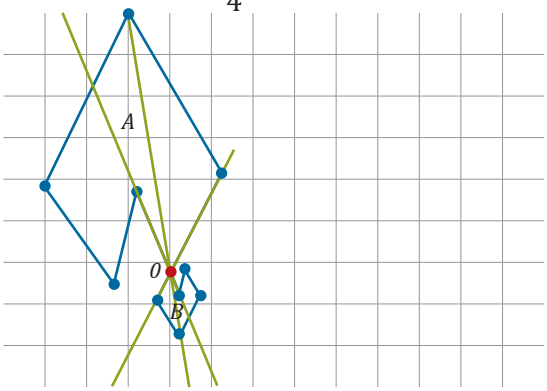
g. Centro O, razón 2.



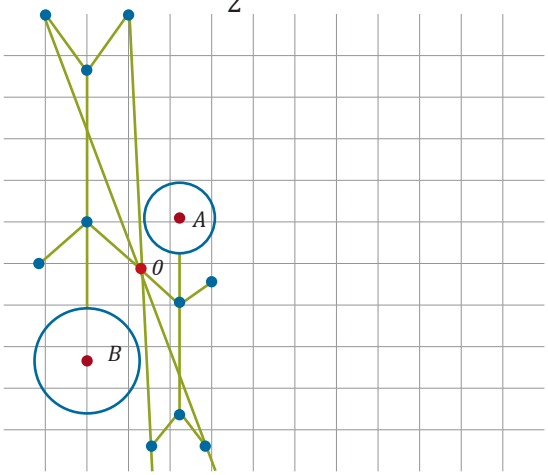
h. Centro O, razón $\frac{6}{5}$.



i. Centro O, razón $-\frac{1}{4}$.



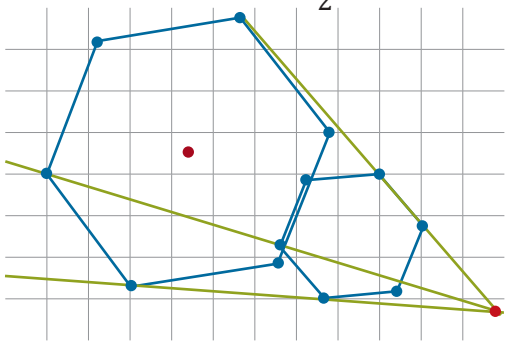
j. Centro O, razón $-\frac{3}{2}$.



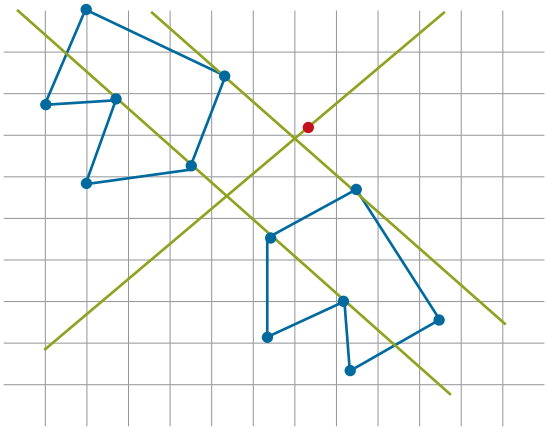
3 **a.** 18 cm **b.** $\frac{10}{3}$ cm **c.** $\frac{9\sqrt{3}}{5}$ cm

d. $\frac{24}{35}$ cm **e.** $\frac{18}{35}$ cm

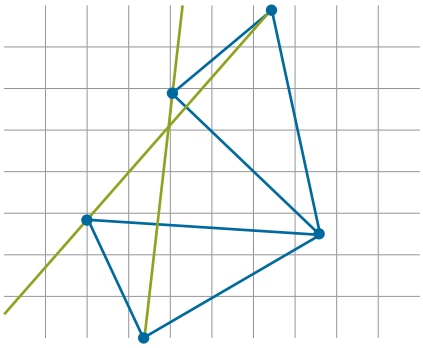
4 **a.** Sí, homotecia de razón $\frac{1}{2}$.



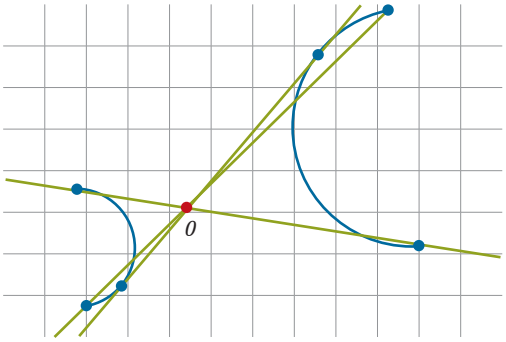
b. No, es una simetría axial.



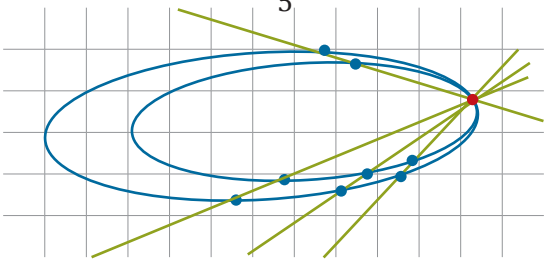
c. No, es una rotación con respecto a O en 73,5°.



d. Si, homotecia de centro O y razón -2.



e. Sí, homotecia de razón $\frac{4}{5}$.

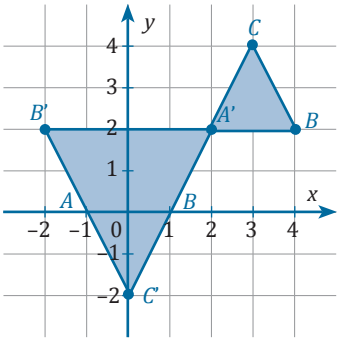


5 **a.** $\frac{12}{7}$ **b.** $\frac{15\sqrt{2}}{2}$ **c.** $\frac{36}{5}$ **d.** $\frac{4}{3}$ **e.** $\frac{9}{4}$

6 **a.** 61,5 cm **b.** 1 300 cm^2 **c.** $\frac{410}{27}$ cm

d. $\frac{184}{3}$ cm^2 **e.** $\frac{8\sqrt{3}}{9}$ cm^2

7 **a.**

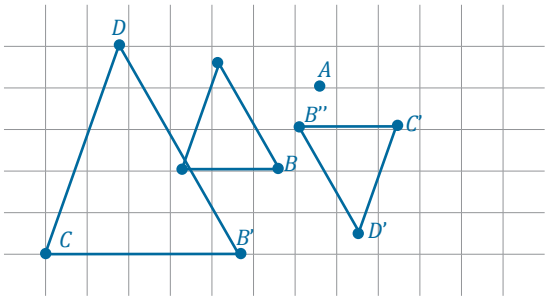


b. $(2\sqrt{5}+2)$ u **c.** 2 u²
d. $(4\sqrt{5}+4)$ u **e.** 4 u²

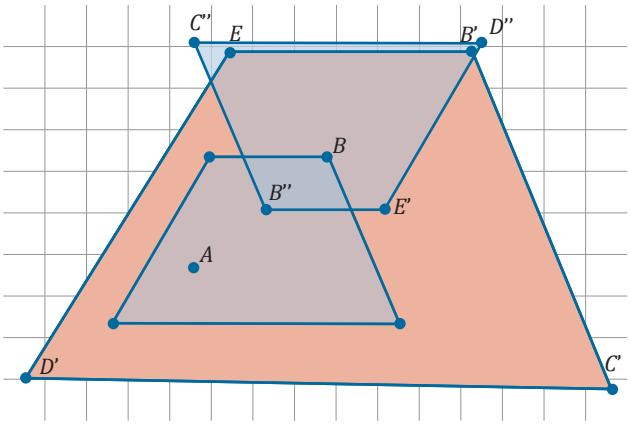
8 **a.** $P = 3{,}47$ u **b.** 1,37 u **c.** 1 u
d. 6 u² **e.** $\frac{2}{3}$ u²

9 $A' = (2,2)$, $B' = (1{,}2\,;\,0{,}4)$, $C' = (0{,}4\,;\,-0{,}4)$, $D' = (1{,}2\,;\,1{,}2)$

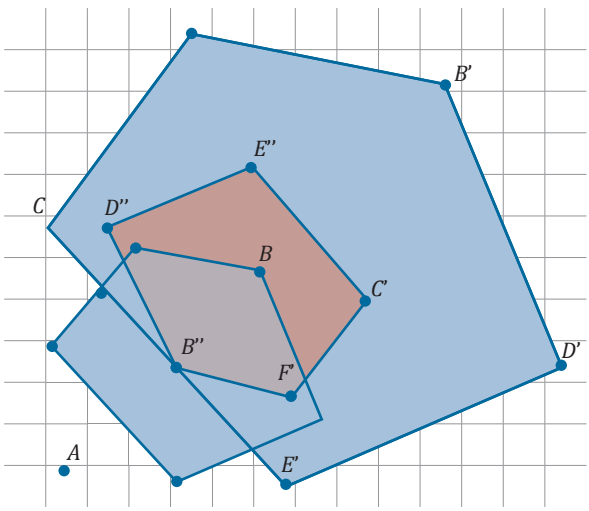
10 **a.**



b.



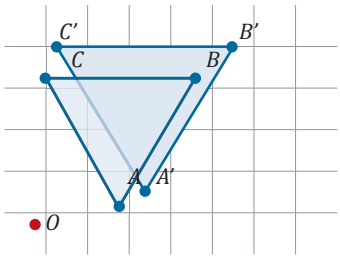
c.



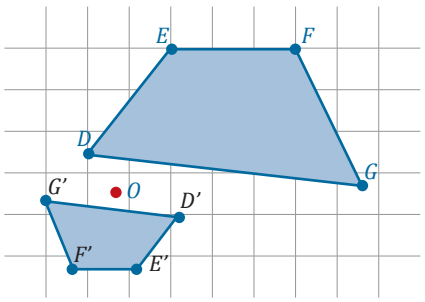
d. No.

Página 197 *Trabaja*

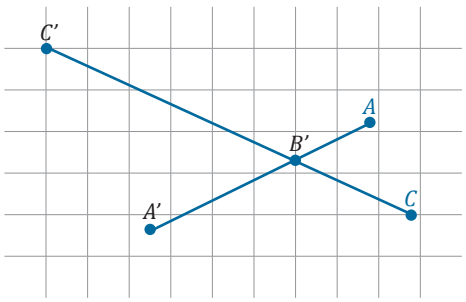
1 **a.** Centro O, razón positiva y mayor que 1.



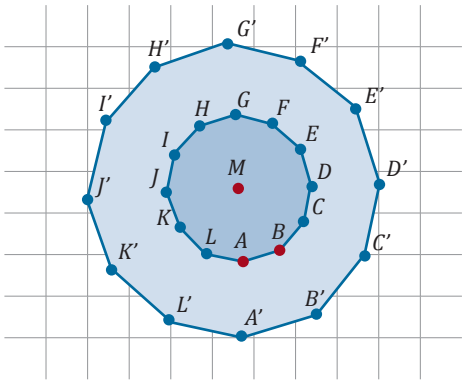
b. Centro O, razón negativa entre -1 y 0.



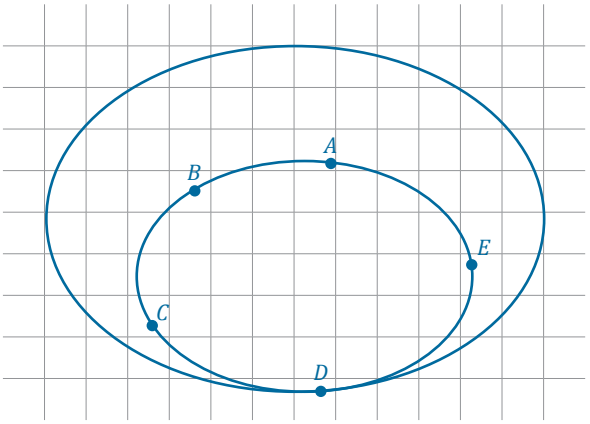
c. Centro B', razón negativa e igual a -2.



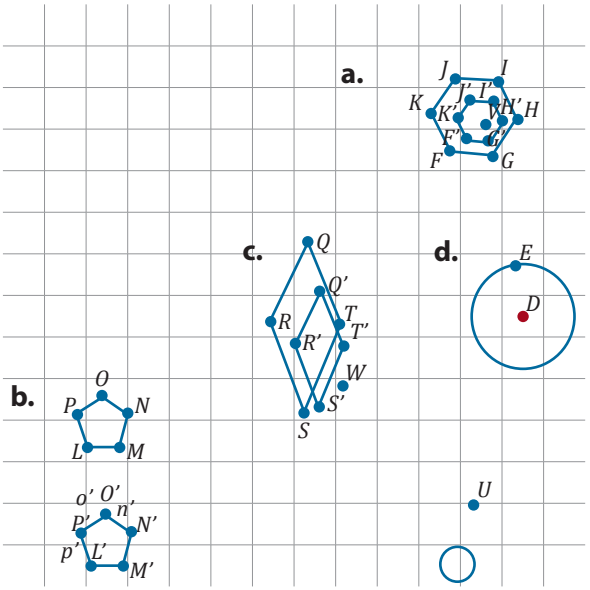
d. Centro M, razón positiva y mayor que 1.



e. Centro D, razón positiva y mayor que 1.



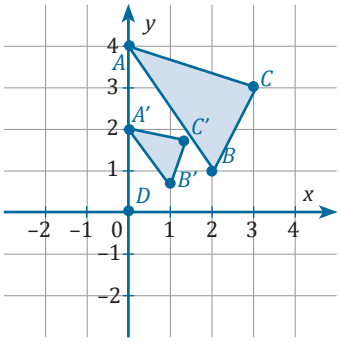
2



3 **a.** $\frac{\sqrt{10}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2}$

b. $\frac{1}{2}$ **c.** 3,5 u² **d.** $\frac{7}{8}$ u²

e.

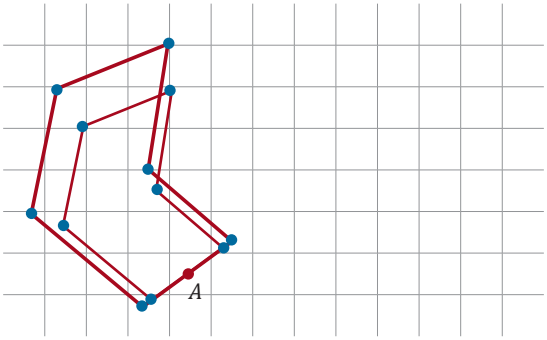


4 **a.** Sí, pues se cumple el teorema de Thales.

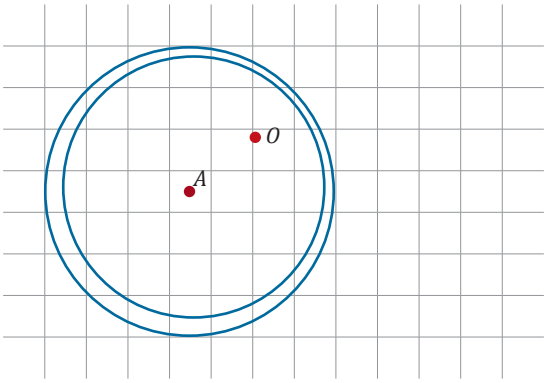
b. Sí, con centro en el punto donde está Tamara y razón el cuociente entre la distancia de Tamara al edificio y a la estaca.

c. Sí **d.** 10 m **e.** 15 m

5 **a.**



b. Centro O



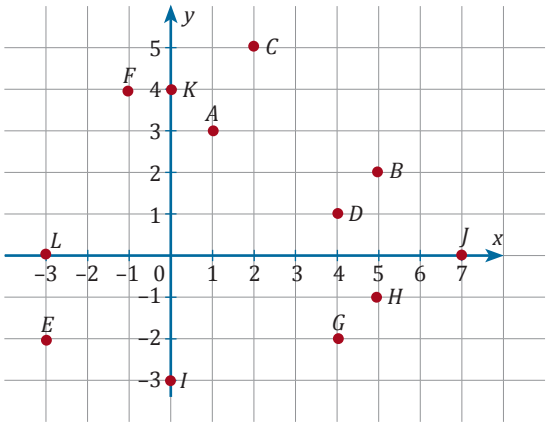
c. $\frac{2}{11}$ **d.** 44,4 % aprox. **e.** 60 cm

Aplicaciones de la homotecia

Página 200 *Trabaja más...*

I. Plano Cartesiano y punto medio

1 **a.**, **b.** y **c.**

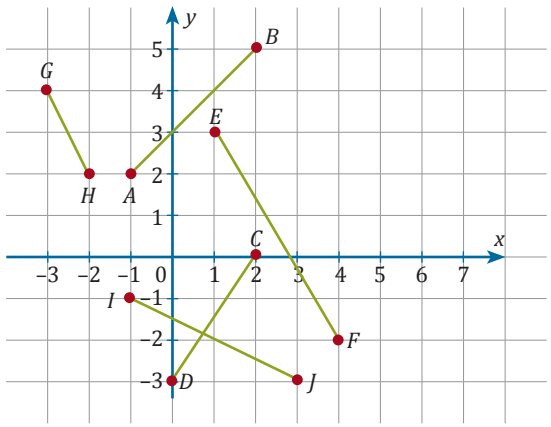


2 O

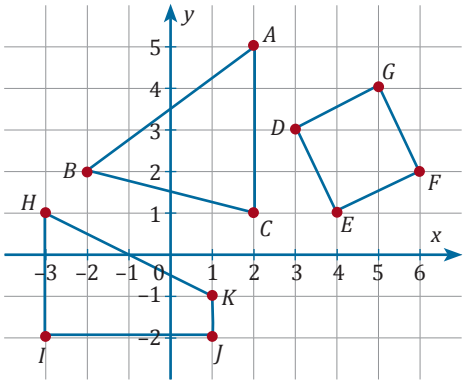
3 O

4 A: $(-2,-3)$, B: $(3,5)$, C: $(7,4)$, D: $(1,1)$, E: $(2,4)$, F: $(-1,2)$, G: $(-3,5)$, H: $\left(-\frac{1}{2},-1\right)$, I: $(0,0)$, J: $\left(\frac{5}{2},0\right)$, K: $(-1,0)$, L: $\left(0,\frac{7}{2}\right)$ y M: $\left(0,-\frac{3}{2}\right)$

5



6 **a.** triángulo **b.** cuadrado **c.** trapecio



7 **a.** $M_{\overline{AB}}=(0,4)$ **b.** $M_{\overline{CD}}=\left(1,-\frac{1}{2}\right)$

c. $M_{\overline{EF}}=(1{,}5\ ;5)$ **d.** $M_{\overline{GH}}=\left(\frac{15}{8},\frac{5}{2}\right)$

e. $M_{\overline{IJ}}=(-4,-6)$

8 **a.** B: $(2,3)$ **b.** D: $(4,-2)$ **c.** F: $(5,6)$

9 **a.** $x=7, y=-8$ **b.** $x=12, y=-11$

c. $x=0, y=-8$

10 **a.** A': $(0,5)$ **b.** A'': $(0;\ 1{,}25)$

11 **a.** La ordenada debe ser cero.

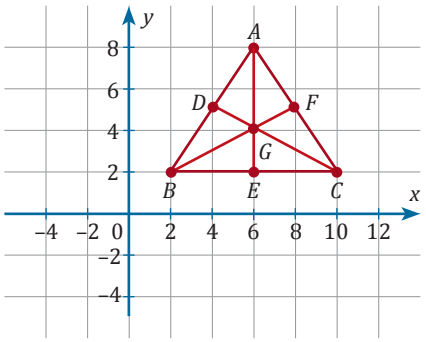
b. La abscisa debe ser cero.

12 Un trapecio.

13 A: $(-2,5)$; B: $(3,0)$; C: $(-4,7)$; D: $(1,2)$ (estos puntos no son los únicos que cumplen la condición)

14 **a.** $M_{\overline{AB}}=(4,5)$; $M_{\overline{AC}}=(8,5)$; $M_{\overline{BC}}=(6,2)$

b.



c. G: $(6,4)$

15 **a.** $180°$. $\overline{SN}=6{,}40$, $\overline{SI}=5{,}12$ e $\overline{IN}=1{,}28$. Por esto, $\overline{SN}=\overline{SI}+\overline{IN}$, luego los puntos son colineales.

b. $0°$. $\overline{CO}=8{,}06$, $\overline{CN}=4{,}03$ y $\overline{NO}=4{,}03$. Se tiene que los puntos son colineales ya que $\overline{CO}=\overline{CN}+\overline{NO}$. Pero $\measuredangle CON$ tiene su vértice en O, siendo sus lados $\overline{CO}$ y $\overline{ON}$. Es decir, que el lado $\overline{ON}$ está superpuesto sobre el otro lado.

c. $60°$. ΔPRS es equilátero y su lado mide 3,61 u

d. $30°$. ΔAOB es rectángulo en A, su hipotenusa mide 3 u y sus catetos 1,5 u y 2,6 u

e. $45°$. ΔCGF es rectángulo en G, su hipotenusa mide 4,24 u y sus catetos son iguales de medida 3 u. Por tanto, $\measuredangle GFC=\measuredangle GCF$, es decir, de $45°$ cada uno.

f. $55{,}49°$. El cuadrilátero es simétrico con respecto al eje y. $\overline{DA}=5{,}39=\overline{CD}$; $\overline{AB}=3{,}61=\overline{BC}$. Por lo anterior, el ángulo en A igual al ángulo en C, es decir, $55{,}49°$

16 **a.** $(-13,-4)$ **b.** $(1,-11)$ **c.** $\left(\frac{1}{6},16\right)$

17 **a.** M: $(-0{,}05\ ;\ 0{,}05)$ segundo cuadrante, ya que la abscisa es negativa y la ordenada positiva.

b. M: $(11{,}5\ ;-38)$ segundo cuadrante, ya que la abscisa es positiva y la ordenada negativa.

18 B: $(1, -1)$

19 **a.** M: $(-27{,}5\ ;15)$ y N: $(5{,}5\ ;-45)$

b. N, pues está a 45 unidades, en cambio M solo está a 15 unidades.

c. S: $(-27{,}5\ ;-45)$ y T: $(5{,}5\ ;15)$

d. Las diagonales de un rectángulo se intersectan en el punto medio de cada una de ellas. El punto medio de $\overline{ST}$ es $\left(\frac{-27{,}5+5{,}5}{2};\frac{-45+15}{2}\right)$, es decir, $(-11, -15)$, las cuales son las coordenadas de A.

20 $(5{,}9)$

II. Distancia entre dos puntos

1 **a.** $3\sqrt{5}$ u **b.** $3\sqrt{2}$ u

c. $\frac{\sqrt{149}}{4}$ u **d.** $\frac{\sqrt{173}}{4}$ u

e. $\sqrt{14}$ u

2 **a.** $\sqrt{5}$ u **b.** $6\sqrt{5}$ u

c. $\frac{\sqrt{122}}{2}$ u **d.** 5,2 u **e.** $2\sqrt{17}$ u

3 **a.** $M_{\overline{AB}}=(-1{,}5\ ;\ 2{,}5)$; $M_{\overline{BC}}=(1{,}5\ ;4)$; $M_{\overline{CD}}=(3;\ 2{,}5)$; $M_{\overline{DA}}=(0{,}1)$

b. $P=(\sqrt{18}+\sqrt{45})$ u

c. Un trapecio y un paralelogramo.

4 **a.** C: $(1, -1)$ **b.** $A=12$ u^2

5 **a.** $\left(\frac{9}{2},2\right)$, $\left(\frac{7}{2},-\frac{3}{2}\right)$, $\left(2,\frac{1}{2}\right)$, $(3,4)$

b. 12,28 u **c.** Un paralelogramo

6 **a.** Sí, $\overline{DE}$ y $\overline{AE}$ **b.** $\overline{DE}$ y $\overline{AE}$ **c.** $P=26{,}86$ u

d. 8,49 u **e.** 8,06 u

7 Las respuestas dependen del triángulo que se dibuje. Revisa con tu profesor.

8 **a.** $(\sqrt{20})^2+(\sqrt{20})^2=(\sqrt{40})^2 \Rightarrow (\overline{AB})^2+(BC)^2=(\overline{AC})^2$, por lo tanto se cumple el teorema de Pitágoras

b. $\sqrt{10}$ u

c. $\sqrt{10}$ u, ambas.

d. 15,26 u, aprox.

e. 9,99 u^2, aprox.

9 **a.** $\left(-4,\frac{5}{3}\right)$ y $\left(\frac{5}{2},-5\right)$ **b.** $\frac{\sqrt{3\,121}}{6}$ u

c. $\left(-\frac{3}{4},-\frac{5}{3}\right)$ **d.** $\left(0,-\frac{4}{3}\right)$ y $\left(\frac{13}{2},-8\right)$

e. Trasladando $\left(-\frac{3}{4},-\frac{5}{3}\right)$, en cuatro unidades hacia la derecha y tres hacia abajo, para quedar en $\left(\frac{13}{4},-\frac{14}{3}\right)$, que es el punto medio de los hallados en **d.**

10 **a.** 2,72 u **b.** 2,79 u **c.** 2,60 u **d.** 1,53 u

e. 2,40 u **f.** 4,01 u **g.** 2,08 u

h. Son $\overline{AJ}$, $\overline{BH}$ y $\overline{CI}$. Debido a que $\overline{AJ}=4{,}01=\overline{AH}$; $\overline{BH}=2{,}40=\overline{BI}$ y $\overline{CI}=2{,}08=\overline{CJ}$

i. Sí. Porque $(\overline{CJ})^2+(\overline{JO})^2=(\overline{CO})^2$, debido a que, $(2{,}08)^2+(1{,}53)^2=(2{,}58)^2$.

11 **a.** $\overline{AC}=\overline{AB}=\sqrt{160}$, $\overline{BC}=2\sqrt{160} \Rightarrow \overline{AC}+\overline{AB}=\overline{BC}$

b. $\overline{AB}=2\sqrt{2}$, $\overline{BC}=8\sqrt{2}$, $\overline{AC}=10\sqrt{2} \Rightarrow \overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$

c. $\overline{AB}=\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\overline{BC}=\sqrt{2}$, $\overline{AC}=\frac{5\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \overline{AB}+\overline{BC}=\overline{AC}$

d. $\overline{AB}=8$, $\overline{BC}=6$, $\overline{AC}=2 \Rightarrow \overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AB}$

e. $\overline{AB}=\frac{9\sqrt{10}}{2}$, $\overline{BC}=\frac{13\sqrt{10}}{6}$, $\overline{AC}=\frac{7\sqrt{10}}{3} \Rightarrow \overline{AC}+\overline{BC}=\overline{AB}$

12 **a.** $\overline{AB}=\overline{AC}=\frac{\sqrt{10}}{2}$, $\overline{BC}=\sqrt{10}$

b. $\overline{AB}=\overline{AC}=\sqrt{2}$, $\overline{BC}=\sqrt{2}$

c. $\overline{AB}=\overline{AC}=\frac{\sqrt{13}}{2}$, $\overline{BC}=\sqrt{13}$

d. $\overline{AB}=\overline{AC}=2\sqrt{13}$, $\overline{BC}=4\sqrt{13}$

e. $\overline{AB}=\overline{AC}=\frac{\sqrt{13}}{3}$, $\overline{BC}=\frac{2\sqrt{13}}{3}$

13 **a.** $8\sqrt{2}$ u **b.** 8 u^2

c. $(1, -1)$, $(3, -1)$, $(3,1)$ y $(1,1)$.

d. 4 u, ambas **e.** 4 u^2

14 **a.** Isósceles, $P = (2 + 2\sqrt{5})$ u, $A = 2$ u^2.

b. Escaleno, $P = (5 + \sqrt{3})$ u, $A = 3$ u^2.

c. Escaleno, $P = (3 + 2\sqrt{2} + \sqrt{5})$ u, $A = 3$ u^2.

d. Isósceles, $P = (2\sqrt{10} + 2\sqrt{5})$ u, $A = 5$ u^2.

e. Escaleno, $P = (3 + \sqrt{5} + 2\sqrt{2})$ u, $A = 3$ u^2.

15 **a.** $(2 + \sqrt{3}, 3 + \sqrt{3})$ y $(2 - \sqrt{3}, 3 - \sqrt{3})$

b. $(-4 + \sqrt{10}, 3 + \sqrt{10})$ y $(-4 - \sqrt{10}, 3 - \sqrt{10})$

16 Q ya que $\overline{CP} = \sqrt{5}$ u $= \overline{CR}$, pero $\overline{CQ} = \sqrt{10}$ u

17 **a.** $\overline{QP} = 6{,}71$ u, $\overline{PR} = 4{,}47$ u y $\overline{QR} = 11{,}18$ u. Se cumple que $\overline{QR} = \overline{QP} + \overline{PR}$. Por tanto, los puntos son colineales.

b. $\overline{GH} = 4{,}47$ u, $\overline{HI} = 5{,}66$ u y $\overline{GI} = 10$ u. Se cumple que $\overline{GI} \neq \overline{GH} + \overline{HI}$. Por tanto, los puntos no son colineales.

18 **a.** $\overline{AB} = 5\sqrt{2}$ u, $\overline{BC} = \sqrt{5}$ u y $\overline{CA} = 3\sqrt{5}$ u. La hipotenusa eses $\overline{AB}$. Además se cumple que $\overline{AB}^2 = \overline{BC}^2 + 2$, ya que $(5\sqrt{2})^2 = (\sqrt{5})^2 + (3\sqrt{5})^2$. Por tanto, ΔABC es rectángulo en C. C es el vértice opuesto a la hipotenusa.

b. $1{,}5\sqrt{2}$ unidades.

c. $\overline{BD} = 0{,}5\sqrt{2}$ u, $\overline{AD} = 4{,}5\sqrt{2}$ u, $\overline{CD} = \sqrt{4{,}5}$ u, luego $\overline{CD} = \sqrt{4{,}5}$. Esto es $1{,}5\sqrt{2}$ unidades.

19 **a.** $\frac{2{,}01}{3{,}11} = 0{,}65 \quad \frac{1{,}9}{2{,}94} = 0{,}65$

b. $\frac{2{,}01}{1{,}12} = 1{,}80; \quad \frac{1{,}9}{1{,}05} = 1{,}80$

c. $\frac{2{,}01}{1{,}5} = 1{,}34; \quad \frac{3{,}13}{2{,}33} = 1{,}34$

d. $\frac{1{,}9}{1{,}5} = 1{,}26; \quad \frac{2{,}94}{2{,}33} = 1{,}26$

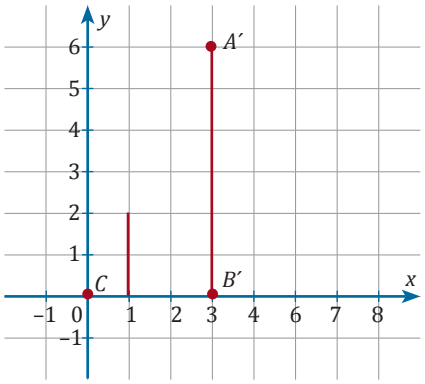
20 **a.** $\frac{2{,}11}{3{,}16} = 0{,}66; \quad \frac{2{,}99}{4{,}47} = 0{,}66$

b. $\frac{1{,}68}{5{,}1} = 0{,}33; \quad \frac{1{,}48}{4{,}47} = 0{,}33$

c. $\frac{1{,}71}{3{,}16} = 0{,}54; \quad \frac{2{,}76}{5{,}1} = 0{,}54$

III. Homotecia

1 **a.**



b. A': $(3,6)$; B': $(3,0)$

c. $r = -2$

d. $d = \sqrt{20}$ u

2 **a.** A_1: $(-8,8)$; B_1: $(-4,0)$; C_1: $(8,8)$; D_1: $(4,16)$

b. A_2: $(-2,2)$; B_2: $(-1,0)$; C_2: $(2,2)$; D_2: $(1,4)$

c. A_3: $(6,-6)$; B_3: $(3,0)$; C_3: $(-6,-6)$; D_3: $(-3,-12)$

3 Tiene dos soluciones: geométrica y por vectores. Geométricamente : Se traza una línea que pase por A y B, se dibuja un triángulo rectángulo con A y B vértice de la hipotenusa, luego, se dibuja a partir del punto A un triángulo rectángulo invertido respecto al primero (razón negativa) y con la medida de los catetos igual al doble del anterior (razón -2), obteniéndose de esta forma el punto homotético B
Por vectores: Se calculan las coordenadas del vector que de A a B, luego este vector se pondera por -2 y a las coordenadas obtenidas se le suman las coordenadas del centro de homotecia.

4 **a.** A': $(14,-5)$

b. B': $(-2,-1)$

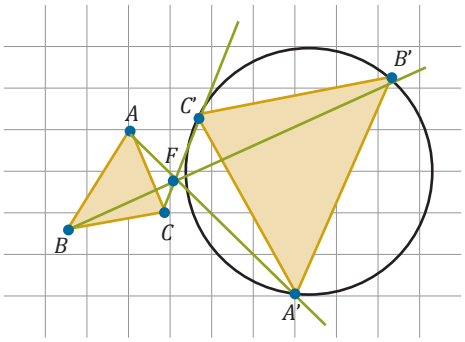
c. C': $(8,13)$

d. $M_{\overline{A'B'}} = (6,-3)$

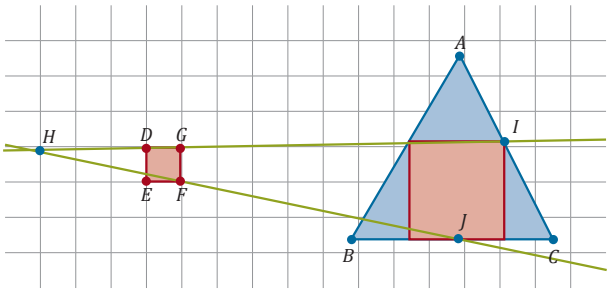
e. $d_{\overline{AB}} = \sqrt{68}$ u; $d_{\overline{A'B'}} = 2\sqrt{68}$ u

f. Si cumple.

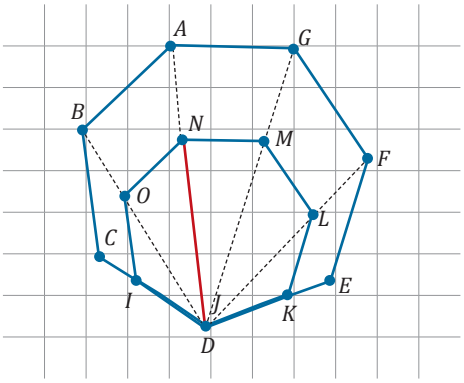
5 **a.**



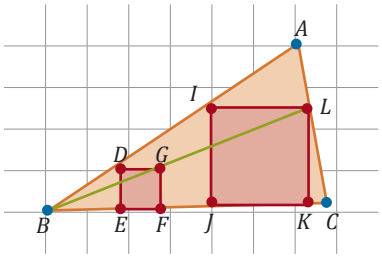
b.



6 Heptágono $ABCDEFG$ auxiliar, DN diagonal de 20 cm colocada sobre la diagonal auxiliar, IO, ON, NM, ML, LK, trazos paralelos a los lados auxiliares, obteniendo de esta forma el heptágono pedido.



7 El cuadrado $DEFG$ es auxiliar, B es centro de homotecia, segmento BL determina lado del cuadrado pedido.



8 Las respuestas van a variar dependiendo del centro de homotecia elegido. Revisa con tu profesor.

9 **a.** Un heptágono que incluye completamente el heptágono en color morado; es semejante ya que es homotético como se menciona en el enunciado.

b. $1{,}8$

c. El centro de homotecia es un punto interior de $\overline{BC}$, es decir, un punto de un lado, y además con una razón que es superior a 1

d. $11{,}02$ u

e. $-0{,}8$

10 **a.** Sí, los cuatro puntos están contenidos en L_1. El centro de homotecia H. L_2 también contiene cuatro puntos colineales, todos distintos a los anteriores, excepto H.

b. $-10{,}64$ y $-5{,}01$. Las coordenadas de G"

c. $-11{,}26$ y $3{,}78$. Las coordenadas de E"

d. Para obtener la abscisa de un punto homotético homólogo a otro, se procede de la siguiente manera:

i. Se calcula la diferencia entre la abscisa del punto a quién se aplica la homotecia y la abscisa del centro de homotecia.

ii. La diferencia anterior se multiplica por la razón de la homotecia.

iii. A la abscisa del centro de homotecia se agrega el producto obtenido en ii.
Para obtener la ordenada, se procede de la misma manera anterior, pero cambiando la palabra "abscisa" por "ordenada"

e. $3{,}36$ y $3{,}48$. Las coordenadas de G

f. Para obtener la abscisa de un punto a quien se aplica la homotecia a partir de la abscisa de su punto homotético homólogo a otro, se procede así:

i. Se calcula la diferencia entre la abscisa del punto homotético homólogo y la abscisa del centro de homotecia.

ii. La diferencia anterior se amplifica por el inverso multiplicativo la razón de la homotecia.

iii. A la abscisa del centro de homotecia se agrega el producto obtenido en ii.

Para obtener la ordenada, se procede de la misma manera anterior, pero cambiando la palabra "abscisa" por "ordenada"

11 a. $\overline{MA} = 2{,}99$ u; $\overline{AN} = 2{,}01$ u; $\overline{MN} = 5$ u. Nótese que $\overline{MA} + \overline{AN} = 2{,}99 \text{ u} + 2{,}01 \text{ u} = 5 \text{ u}$. Por lo tanto, $\overline{MA} + \overline{AN} = \overline{MN}$. Por lo tanto estos tres puntos son colineales.

b. i. $\frac{\overline{MN}}{\overline{MA}} = \frac{5}{2{,}99}$, aproximadamente 1,67.

ii. $\frac{\overline{AN}}{\overline{AM}} = -\frac{2{,}01}{2{,}99}$, aproximadamente $-0{,}67$

iii. $\frac{\overline{NA}}{\overline{NM}} = \frac{2{,}01}{5}$, es decir, 0,402

iv. $\frac{\overline{MA}}{\overline{MN}} = \frac{2{,}99}{5}$, es decir, 0,598

v. $\frac{\overline{AM}}{\overline{AN}} = -\frac{2{,}99}{2{,}01}$, aproximadamente $-1{,}49$.

vi. $\frac{\overline{NM}}{\overline{NA}} = \frac{5}{2{,}01}$, es decir, 2,49.

12 a. Haciendo la salvedad de que el signo negativo, indica que el vértice homólogo de un polígono homotético está girado con respecto al vértice del polígono original; son inversas multiplicativas. O bien, su producto vale 1.

b. Uno de ellos será el centro de homotecia, otro el vértice del polígono original, y el último, el vértice homólogo del polígono homotético. Se establece la razón de homotecia, comparando la distancia del centro homotecia al vértice homólogo el polígono homotético, con respecto a la distancia entre el centro de homotecia y el vértice respectivo del polígono original. La razón es negativa cuando el centro de homotecia está ubicado entre los otros dos puntos.

c. Sí. El número total de relaciones homotéticas es igual al número total de permutaciones, sin repetición, a partir tres elementos.

d. 24.60.

e. $(n-2)(n-1)n$

13 a. En el gráfico, ver cuadrilátero de color violeta.

b. 49,5 u

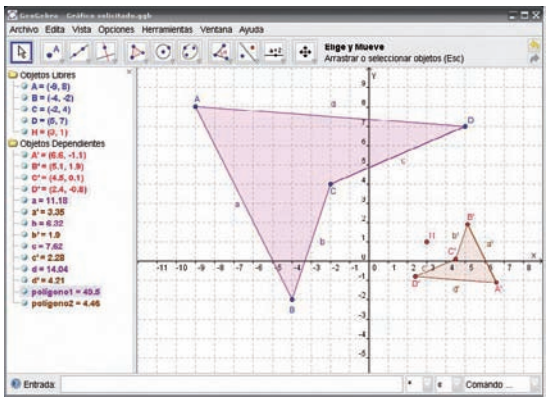
c. En el gráfico, ver cuadrilátero de color rosáceo.

d. A': $(6{,}6\ ;\ -1{,}1)$, B': $(5{,}1\ ;\ 1{,}9)$, C: $(4{,}5\ ;\ 0{,}1)$ y D: $(2{,}4\ ;\ -0{,}8)$

e. $\overline{A'B'} = 3{,}35$ u, $\overline{B'C'} = 1{,}9$ u, $\overline{C'D'} = 2{,}28$ u y $\overline{D'A'} = 4{,}21$ u

f. Porque H es exterior al polígono original.

g. $-\frac{5{,}83}{1{,}75}$. Corresponde a la razón de homotecia para una transformación aplicada al polígono resultante y obtener el polígono original manteniendo el mismo centro de homotecia.



14 a. 6 cm **b.** 1,2 cm **c.** $\frac{4}{5}$

d. $\frac{783}{5}$ u **e.** $\frac{3\,753}{4}\sqrt{3}$ u^2

15 a. $\overline{AE} = 10{,}05$ u **b.** 0,7 **c.** 2,53 u

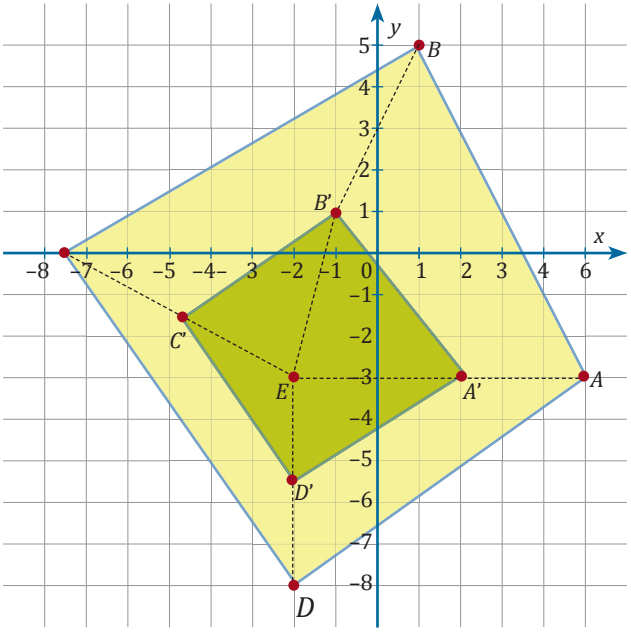
d. $\frac{7}{3}$ **e.** 5,88 u

16 a. $\overline{AB} = \overline{BC} = \overline{CD} = \overline{DA}$ es aproximadamente igual a 9,43.

b. $(-4{,}5\ ;\ -1{,}5)$

c. 0,5

d. $(2, -3)$,$(-0{,}5\ ;1)$,$(-4{,}5\ ;\ -1{,}5)$ y $(-2;\ -5{,}5)$. Ver cuadrilátero en verde.



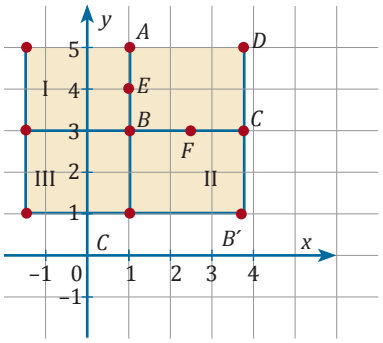
e. No, porque es aproximadamente 3,34 unidades

17 **a.** 209,11 u

b. No. El punto medio de $\overline{OA}$ es $(-4{,}85\ ;\ 2{,}83)$, y el punto medio de $\overline{OB}$ es $(2{,}5\ ;\ 2{,}83)$

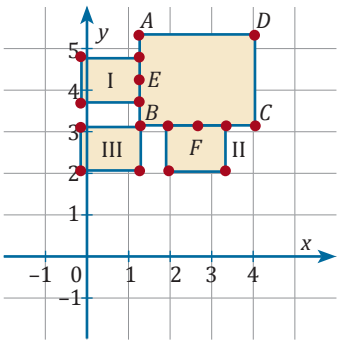
c. $\frac{4}{7}; \frac{8}{5}$

18 **a.**

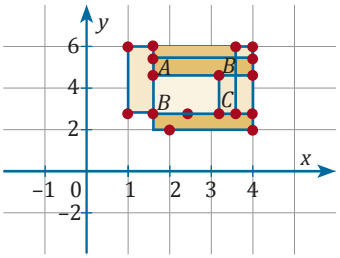


b. 4

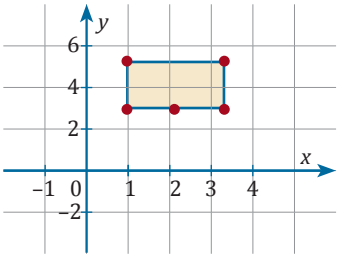
c.



d.



e.



IV. Ejercicios Misceláneos

1 **a.** $d_{\overline{AB}} = 6$ u; **b.** $M_{\overline{AB}} = (-1{,}2)$; **c.** $r = 3$

2 **a.** 7 unidades a la izquierda en forma horizontal.

b. A': $(-10, -2)$

c. $d_{\overline{A'B}} = 12$ u

3 $x = -1$ o $x = 5$

4 **a.** Rotación.

b. Rotación.

c. Traslación.

d. Una homotecia de razón negativa.

5 **a.** Si son colineales.

b. Si son colineales.

c. No son colineales.

6 **a.** $M_1 = (-3;\ -0{,}5)$; $M_2 = (-1;\ -0{,}5)$; $M_3 = (-1, -2)$

b. $P = 7$ u **c.** $A = 1{,}5$ u^2

7 **a.** A_1: $(1;\ 1{,}5)$ **b.** $d_{\overline{AA_1}} = 1{,}8$ u

c. $M_{\overline{CA_1}} = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{4}\right)$

8 **a.** $P = (1 + \sqrt{5} + \sqrt{8})$ u

b. $P' = 2(1 + \sqrt{5} + \sqrt{8})$ u

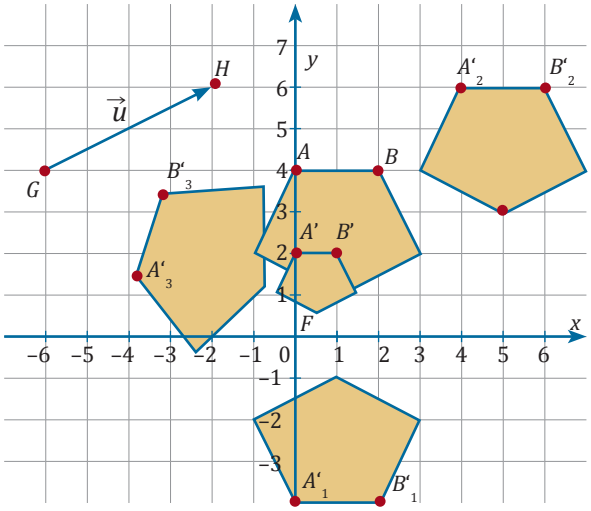
c. $r = 2$

d. $A = 1$ u^2, $A' = 4$ u^2

e. $\frac{A'}{A} = 4$

f. $r = 3$

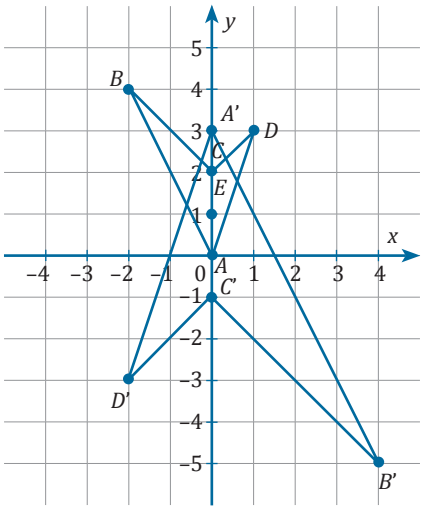
9



10 **a.** $\vec{v} = (20, -2)$

b. H: (1,67 ; 7,47)

11 **a.**



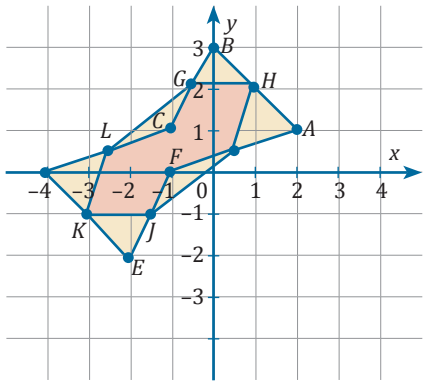
b. $A = 2$ u^2

12 **a.** -4 **b.** Q y M en el II; P en el III. **c.** $2\sqrt{269}$ u

d. $\overline{P'Q} = \overline{PQ'} = 8{,}2$ u; $\overline{QM} = \overline{MP} = 16{,}4$ u;
$\overline{P'Q'} = \overline{P'Q} + \overline{QM} + \overline{MP} + \overline{PQ'} = 49{,}2$ u

e. M: $(-13{,}6)$

13

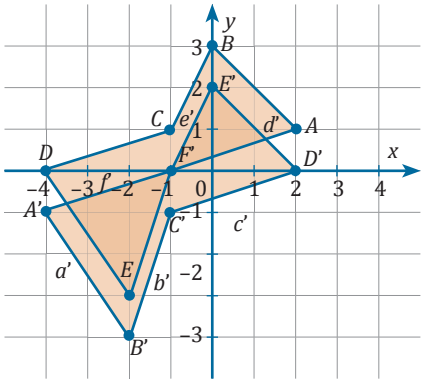


a. El original es cóncavo y el otro convexo.

b. $P = (2\sqrt{8} + 2\sqrt{10} + 2\sqrt{5})$ u

c. $P = (8 + \sqrt{10})$ u

d.



e. 9 u^2

14 **a.** $\overline{AG} + \overline{GD} = \overline{AD}$, ya que,
1,97 u + 2,09 u = 4,06 u

b. $\overline{FG} + \overline{GB} = \overline{FB}$, porque
1,47 u + 2,80 u = 4,27 u

c. 4,99 u + 0,82 u = 5,81 u

d. El punto medio es $(4{,}5\ ;4)$ y no corresponde a las coordenadas de D.

e. No. $(\overline{AD})^2 + (\overline{DB})^2 \neq (\overline{AB})^2$, debido a que, $(4{,}06)^2 + (1{,}87)^2 \neq (4{,}47)^2$

f. No. $\frac{\overline{CG}}{\overline{GE}} = -6{,}01$; $\frac{\overline{DG}}{\overline{GA}} = -1{,}06$. Nótese que basta con dos comparaciones, para afirmar que no hay una razón de homotecia común.

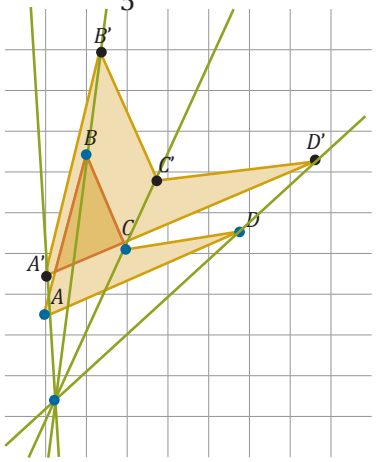
15 **a.** $\overline{AB} = 10{,}28$ u; $\overline{BG} = 5{,}15$ u $= \overline{GA}$

b. 135°

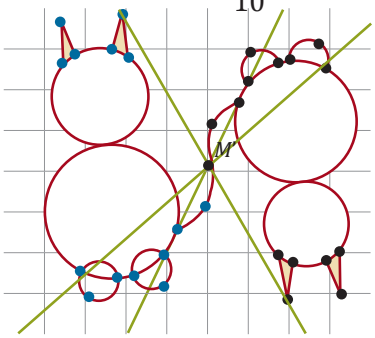
c. $\overline{PR} = 13{,}72$ u, $\overline{RS} = 8{,}59$ u y $\overline{SP} = 9{,}54$ u

d. No. El ΔABG es isósceles, sin embargo, el ΔPRS es escaleno. Cómo no son semejantes, no se puede establecer ningún tipo de homotecia entre ambos.

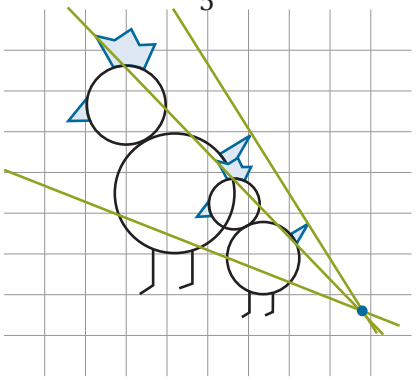
16 **a.** Centro E, razón $\frac{7}{5}$.



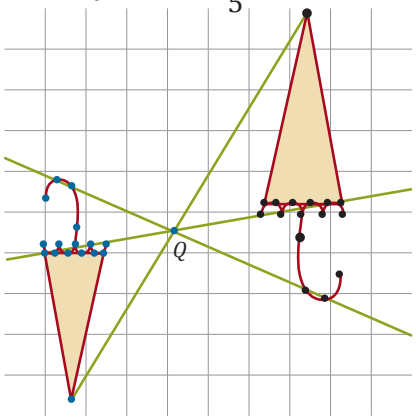
b. Centro M, razón $-\frac{9}{10}$.



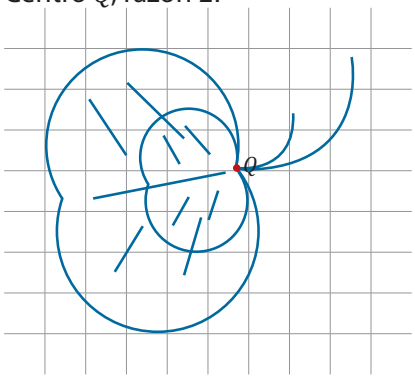
c. Centro O, razón $\frac{3}{5}$.



d. Centro Q, razón $-\frac{8}{5}$.



e. Centro Q, razón 2.

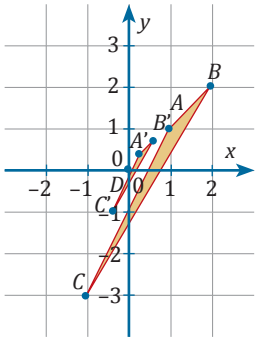


17 **a.** 42 cm y 21 cm **b.** 45,5 cm

c. 304,5 cm **d.** $\frac{20\,736}{49}$ cm^2

e. $\frac{\sqrt{2\,704}}{7}$ cm

18 **a.**

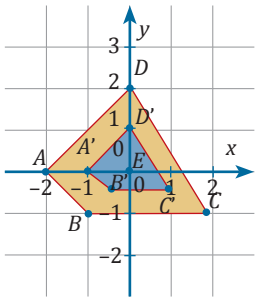


b. 3,90 u **c.** $A_T = 1$ u^2, $A_{Th} = 0{,}11$ u^2

d. No hay intersección entre ambos, por lo tanto el área de la intersección es 0.

19 Una rotación, con un ángulo en sentido horario, luego una simetría axial, luego una traslación, luego una homotecia de razón negativa, luego una rotación y finalmente una homotecia.

20 **a.**



b. $P = (3 + \sqrt{13} + 3\sqrt{2})$ u

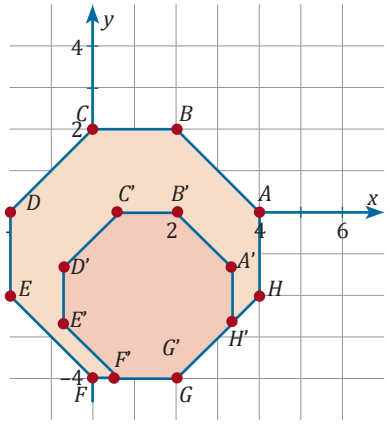
c. $P = \left(\frac{3 + \sqrt{13} + 3\sqrt{2}}{2}\right)$ u

d. $A = 6{,}5\ \text{u}^2$

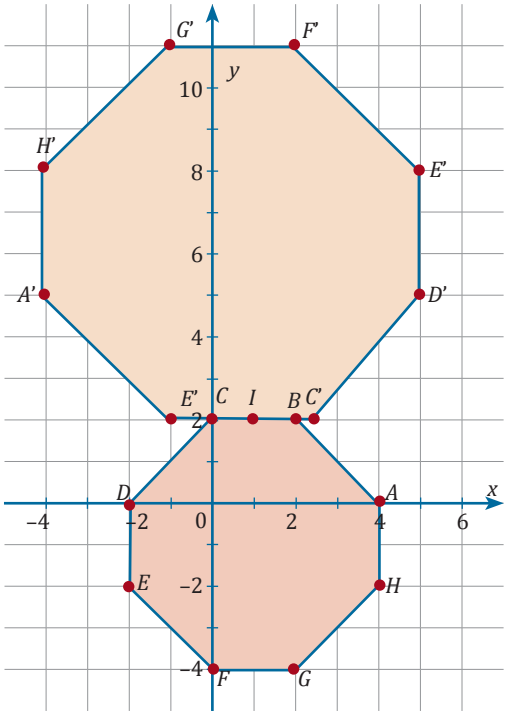
e. $A = 1{,}625\ \text{u}^2$

f. $A = 4{,}875\ \text{u}^2$

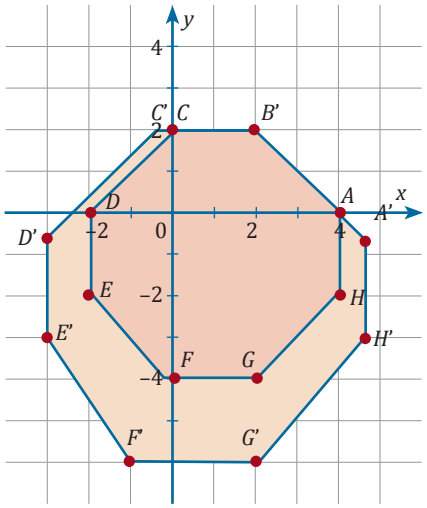
21 **a.**



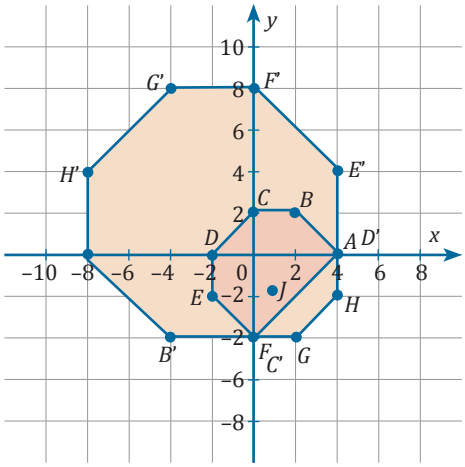
b.



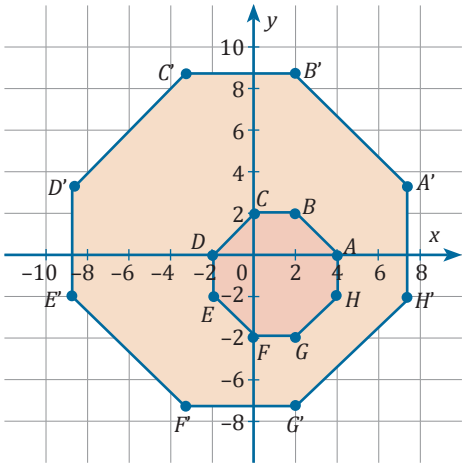
c.



d.



e.



22 Existen muchas transformaciones posibles. Ellas dependen de donde esté el heptágono. Revisa con tu profesor tus respuestas.

23 **a.** 12,19512 km **b.** 2,09 u **c.** 103,54 km

d. 21,25 km. El camino señalado en azul es curvado y no se apunta desde el inicio hacia Viña del Mar. En cambio el segmento directo es rectilíneo y se apunta directamente a Viña del Mar, por tanto, aparece como el camino más corto entre ambas ciudades.

e. 39,63 km

f. Santiago. Usando el camino en azul. No se ve claramente cuál de ellos es el menor. Sin embargo, comparando las medidas de los trazos, se puede decir que el que va de Curacaví a Santiago (4,30 u) es menor que el de Curacaví a Viña del Mar (4,89 u). Por tanto, Curacaví queda más cerca de Santiago.

g. 116,95 km

h. El trayecto Santiago- Curacaví-Casablanca-Viña del Mar (117,56 km) se aproxima mejor al valor de la ruta, en azul, desde Santiago a Viña del Mar (124,79 km), que el trayecto Santiago- Casablanca-Viña del Mar (116,95 km)

i. Dividiendo cada vez más la ruta desde Santiago a Viña del Mar, que está señalada en azul, en trayectos rectilíneos más pequeños, obteniendo sus medidas y luego sumándolas, para finalmente expresarlas en km.

j. El punto medio es por tanto (7,07 ; 1,66) Curacaví debiera moverse 853,65 m hacia E y 3 170,73 m hacia N.

24 a. Radio: $1{,}84 \cdot 106$ m.

b. El valor aproximado y aceptado del radio lunar es $1{,}74 \cdot 10^6$ m ; 1 000 km ; No. Corresponde a un poco menos que la distancia aproximada entre las ciudades de Arica y Chañaral :1 093,42 km.

c. El orificio del techo de la cámara oscura.

d. 208,33. El signo negativo se debe el triángulo homólogo a que se forma en la cámara oscura está girado. Además, sus lados son proporcionales pero mayores, porque 208,33 es mayor que 1.

e. Radio: $6{,}96 \cdot 10^8$ m. Por tanto, el diámetro es $1{,}392 \cdot 10^9$ m.

Nota: El radio lunar aceptado es $6{,}95 \cdot 10^8$ m.

f. Sí. Es numéricamente más pequeña por ser más negativa, pero la razón, en su significado ¡no!, ya que su valor es muy superior a 208,33. Más específicamente $6 \cdot 10^{10}$.

25 a. $\overline{AB} = 7{,}04$ u; $\overline{CD} = 0{,}77$ u; $\overline{RQ} = 0{,}82$ u

b. Las medidas están correctas; sólo hay que volver a escribir $\overline{PA} = 1{,}90$ u $\overline{TU} = 6{,}50$ u

c. No. $\overline{PS} \neq \overline{PR} + \overline{RS}$, debido a que $7 \text{ u} \neq 2{,}31 \text{ u} + 6{,}69 \text{ u}$.

d. Si. $\overline{PT} = \overline{PQ} + \overline{QT}$, es decir, $7{,}12 \text{ u} = 2{,}40 \text{ u} + 4{,}73 \text{ u}$.

e. $\overline{RQ} = 0{,}82$ u

f. $\overline{CD}$ = 0,77 u

g. $\frac{7}{5}$

h. 12,29 u

i. aproximadamente 9,86 u y 9,84 u respectivamente.

j. Multiplicarlos por $\frac{13}{14}$

k. Multiplicarla por $\frac{13}{14}$

26 a. En la intersección de los segmentos que unen los bordes de ambas letras. El cristalino.

b. En la retina

c. $-0{,}1$

d. 7 mm

e. Porque la existencia de la E invertida es consecuencia de la aparición o no de la E objeto. No ocurre en la visión, que la E invertida, aparezca antes que la E objeto. Simplemente ésta es independiente de la visión de una persona que la ve.

f. 20 mm

g. Se reduce en un 28,57 %. Permanece negativa pero su módulo va disminuyendo.

h. Aumenta en un 66,67 %. Su módulo va aumentando, y continúa siendo negativa.

i. Va disminuyendo su tamaño y tiende a desaparecer. Se hace cada vez más imperceptible para el ojo. El módulo, la razón homotética se acerca cada vez más a 0.

j. Se hace cada vez más grande, pero se va perdiendo la amplitud de enfoque de la letra.

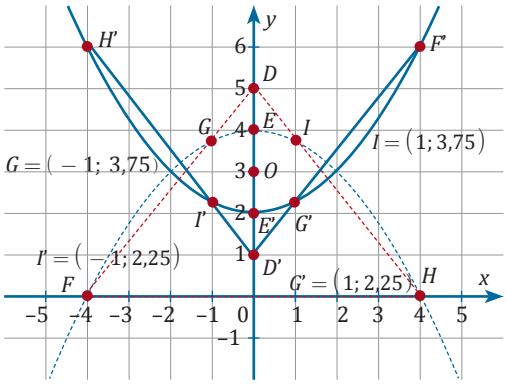
El valor de la razón homotética es cada vez más negativo, pero destacando que modularmente va aumentando.

k. $\frac{\text{tamaño de la letra imagen}}{\text{tamaño de la letra objeto}} = -|\text{razón homotética}|$

27 Sí.

28 Sí. Porque $(4{,}12)^2 \neq (3{,}16)^2 + (3{,}61)^2$

29 Razón homotética es igual a -1



30 **a.** 2,92 unidades de trayecto cósmico.

b. 10,6288 unidades de trayecto cósmico.

31 **a.** Centro de homotecia A y la razón es 0,5.

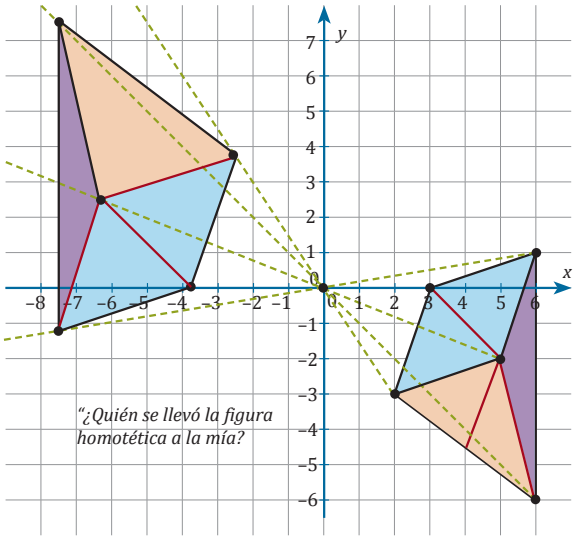
b. Centro de homotecia B y la razón es 0,5.

c. Sí. C: $(-2{,}6)$ y E: $(-1{,}0)$ entonces el punto medio es $\left(\frac{-2+(-1)}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$, es decir, $(-1{,}5\ ;3)$ y que corresponde a las coordenadas de G.

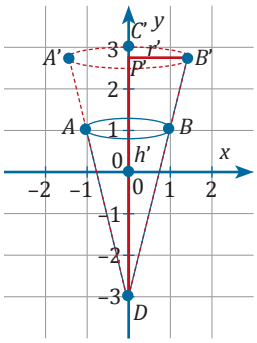
32 $(3{,}4)$; el radio aproximado mide 2,24 m, por tanto la medida aproximada del borde es 14,07 m

33 Total a borrar: 4,06 cm; distancia entre punta y punta : 3,16 cm; el valor del lado: 2,54 cm; el largo total del contorno: 35,56 cm.

34



35 radio: $\sqrt{2}$ cm; base: 6 cm^2; altura: 6 cm



36 $\sqrt{2}$ cm; base: 6,18 cm^2; altura: 5,66 cm

37 **a.** 1°: $\frac{1}{8}$ cm^3, 2°: 1 cm^3, 3°: 8 cm^3, 4°: 64 cm^3 y 5°: 512 cm^3

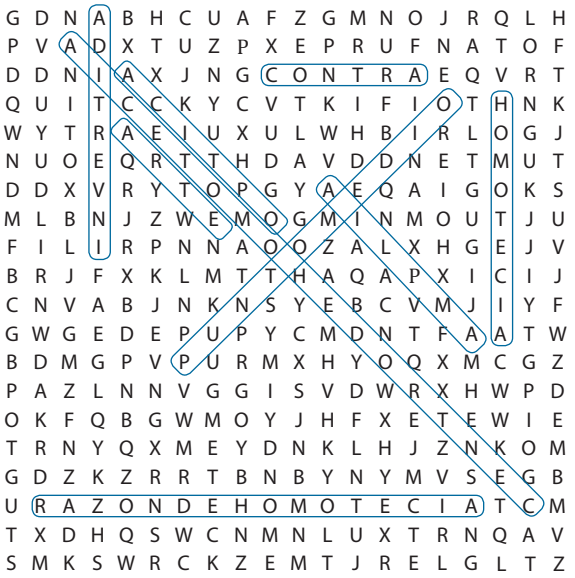
b. 16

c. 4

Evaluación de la unidad

Página 222

Síntesis conceptual



Ejercicios de resumen de la unidad

I.

1 Plano cartesiano; perpendiculares; $(0,0)$.

2 Plano cartesiano; cuatro; cuadrantes; romanos; contrario.

3 Punto medio, $M_{\overline{AB}} = \left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$.

4 Longitud; $d_{\overline{PQ}} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$.

5 Homotecia; semejante; centro de homotecia, razón de homotecia.

6 Mayor.

7 -1.

8 Centro de homotecia.

9 1.

10 Dentro.

II.

1 **a.** Semieje negativo del eje y.

b. I y III cuadrantes; II y IV cuadrantes.

c. Intersección de los ejes coordenados; I cuadrante.

2 **a.** Uno en el I cuadrante y el otro en el III cuadrante. Uno en el II y el otro en el IV cuadrante.

b. Ambos en el III cuadrante; ambos en el IV cuadrante.

3 **a.** I y II cuadrantes. **b.** II y IV cuadrante.
c. IV cuadrante.

4 **a.** $\overline{SP} = 15$ u; $\overline{RS} = 20$ u y $\overline{PR} = 25$ u. Nótese que al sumar las longitudes de dos trazos siempre supera la medida del tercero. Esto quiere decir que dicho puntos no son colineales, sino que constituyen un triángulo cuyo lado mayor es $\overline{PR}$.

b. No. Se cumple que $\overline{PR}^2 = \overline{RS}^2 + \overline{SP}^2$, ya que $(25)^2 = (20)^2 + (15)^2$. Por tanto, $\Delta\ PRS$ es rectángulo en S. S es el vértice opuesto a la hipotenusa.

c. 12 u.

d. $M = (1;\ 0{,}5)$.

e. 3,6.

5 **a.** $(-1{,}5)$. **b.** $\sqrt{45}$ u.

c. $\sqrt{180}$ u. **d.** -2.

e. La razón de homotecia es -2, es decir negativa y valor absoluto mayor que uno. El signo menos, significa que el polígono homotético está girado con respecto a la figura original. El número 2, indica que respecto de la medida de un lado del polígono original, la medida del lado homólogo del polígono homotético, es el doble de ésta.

6 **a.** 15,4 u. **b.** 21,56 u.

c. $r_1 = 2, r_2 = -0{,}1$ y $r_3 = -7$.

d. 21,56 u, es decir el perímetro de $\Delta X_3 Y_3 Z_3$.

e. $\overline{Z_1 Z_3} = 2{,}55$ u; $\overline{Z_3 Z} = 1{,}69$ u; $\overline{ZH} = 4{,}24$ u y $\overline{HZ_2} = 0{,}85$ u. Al sumar estos valores, se obtiene 9,33 u que corresponde a $\overline{Z_1 Z_2}$.

f. comprobación directa.

g. $r_1 \cdot r_2 = 2 \cdot (-0{,}1) = -0{,}2$.

7 **a.** $\overline{AB} = \sqrt{20} \approx 4{,}47$, $\overline{A'B'} = \sqrt{20}$. Sí. Son hexágonos regulares cuyos lados miden igual.

b. $(11{,}73\ ;\ 11{,}54)$.

c. En ambos casos es $(6,6).G$.

d. -1.

e. Sí. Como los hexágonos están girados uno respecto del otro es la razón del signo menos. El valor 1 es porque son congruentes. Ninguno es más grande que el otro.

8 **a.** $(0;\ -2,4)$. **b.** $(-2,4\ ;-3)$

c. $\frac{3,84}{6,40}=0,6$. **d.** -1.

e. A_3: $(0,4)$, A_4: $(4,5)$, A': $(0;\ 2,4)$ y B': $(2,4\ ;3)$.

f. Centro de Homotecia en $(0,3)$, razón -1 aplicado a B' para obtener su homotético en el segundo cuadrante. Centro de Homotecia en $(0,5)$, razón -1 aplicado a A_4 para obtener su homotético en el segundo cuadrante. Unir los puntos para formar la figura en dicho cuadrante y que es simétrica al primer y tercer cuadrantes. Centro de homotecia H y la razón $-0,6$ aplicados a los puntos homotéticos obtenidos para el segundo cuadrante. Completar la figura en el cuarto cuadrante conservando la simetría requerida.

9 **a.** 1,4 cm. **b.** 2,5 cm. **c.** 97,2 cm^2.

d. Es el cuadrado de la razón.

III.

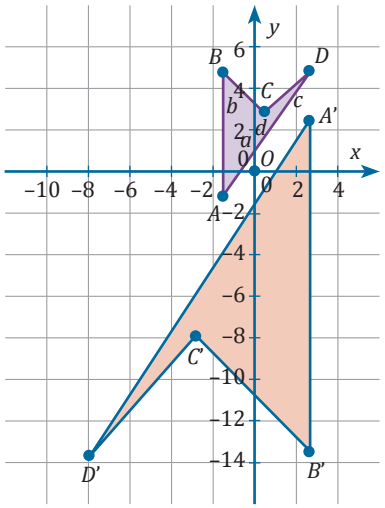
1 Correctas: $(-4,-3)$ y $(9,6)$; Incorrectas $(-1,-1)$ y $(6,6)$.

2 Tienen la misma abscisa, pero distinta ordenada; Ejemplo el punto medio entre $(6,4)$ y $(6,-1)$ tienen abscisa común 6. Las coordenadas del punto medio son $\left(6;\frac{4+(-1)}{2}\right)$, es decir, $(6;\ 1,5)$ conservando así la abscisa.

Para la otra pregunta, los puntos tienen la misma ordenada, sin embargo, sus abscisas son diferentes. Ejemplo $(-1,5)$ y $(7,5)$ sólo tienen la ordenada igual: 5. Las coordenadas del punto medio son $\left(\frac{-1+7}{2},5\right)$, esto es,$(3,5)$, manteniendo así la ordenada.

3 A 9,90 unidades; tiene el mismo valor. La distancia entre dos puntos de un plano cartesiano, equivale o puede servir para calcular el módulo de la diferencia de dos números complejos cuyas notaciones como pares ordenados es similar, pero en el plano complejo.

4 Perímetro del polígono original (en color café) es: 18,87 u. El perímetro del polígono homotético es: 50,95 u

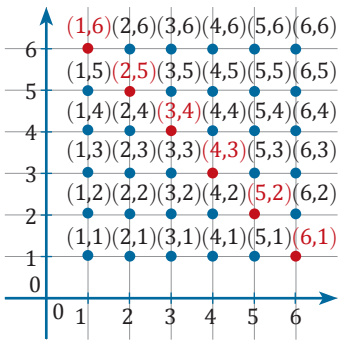


5 **a.** $P_{ABC}=17$ u

b. $A_{ABC}=\frac{21}{4}$ u^2

c. $P_{DEFGH}=\left(1+1\sqrt{2}+2\sqrt{4,25}\right)$ u

6 **a.**



b. Los pares son los que aparecen en rojo en la gráfica anterior.

c. Son $(1,1)$ y $(6,6)$. Las coordenadas de cada uno de ellos, son iguales. Sus valores son el menor y el mayor número que se puede obtener en el lanzamiento de un dado común y no cargado.

7 139,12 m; (6,6) y (31,6)

8 **a.** El rayo D viajó $8{,}64 \cdot 103$ km, y $11{,}36 \cdot 103$ km para el otro.

b. 1,83 s

9 **a.** $G = (-0{,}5\ ;\ 1{,}5)$, razón del homotecia: $\frac{3}{4}$; polígono original: $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$

b. $\frac{17}{20}$

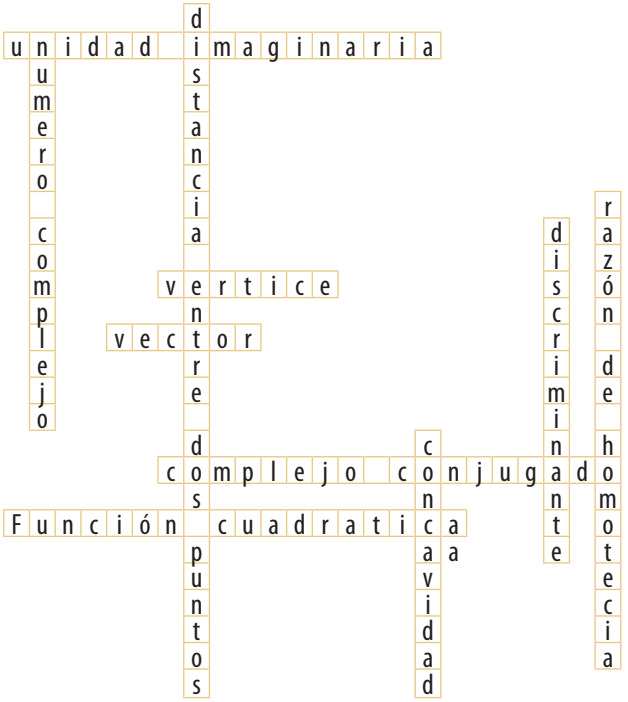
IV.

1 b.	**2** e.	**3** c.	**4** d.	**5** a.	**6** e.
7 c.	**8** d.	**9** b.	**10** a.	**11** c.	**12** d.
13 e.	**14** b.	**15** a.	**16** d.	**17** c.	**18** b.
19 a.	**20** e.	**21** e.	**22** d.	**23** b.	**24** c.
25 a.	**26** c.	**27** b.	**28** d.	**29** e.	**30** e.
31 d.	**32** a.	**33** c.	**34** e.	**35** b.	**36** b.
37 e.	**38** d.	**39** e.	**40** a.		

Evaluación de síntesis de las unidades 1 a 3

Página 236

I.



II.

1 **a.** $8 - 7\,i$ **b.** $-15 - 5\,i$

c. $\frac{11}{26} + \frac{23}{26}\,i$ **d.** $5\,i$

e. $2\sqrt{65} + 5\sqrt{10}\,i$

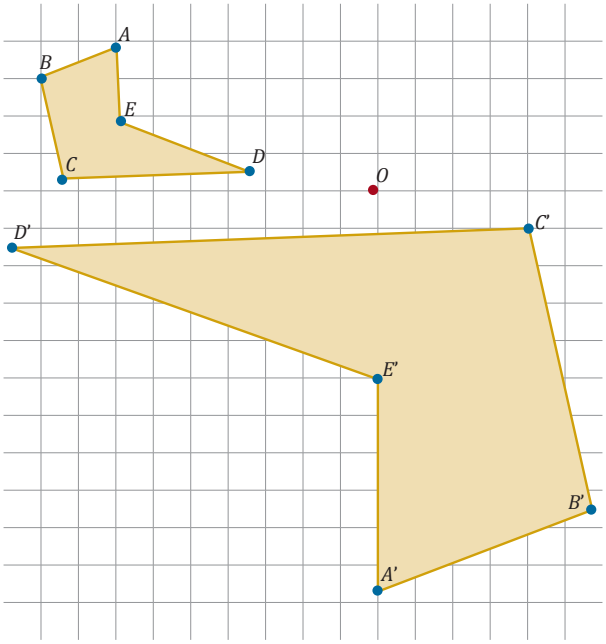
2 **a.** $x = \frac{3 \pm \sqrt{17}}{4}$ **b.** $x = \frac{-7 \pm \sqrt{241}}{16}$

3 **a.** La parábola no corta al eje x.

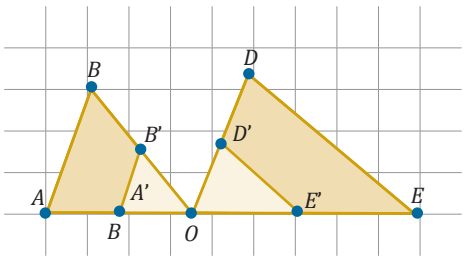
b. (0,8) **c.** $\left(\frac{1}{2}, \frac{31}{4}\right)$

4 **a.** $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$ **b.** $\sqrt{197}$ u

5 **a.**



b.



6 168,75 cm²

III.

1 Amplificó por $(7\,i + 1)$ y debería haberlo hecho por $(7\,i - 1)$. El resultado correcto es $-\frac{1}{48} - \frac{65}{48}\,i$.

2 $\frac{13}{2}\sqrt{5} - \frac{2}{3}\,i$

3 40 cm

4 24 botellas a $ 790 cada una.

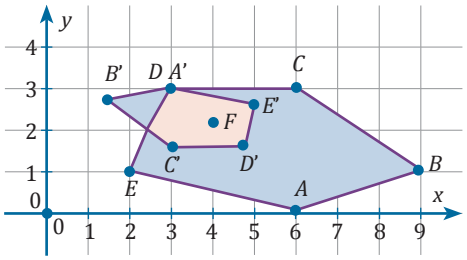
5 12

6 **a.** Eje x: $(3+\sqrt{6},0)$ y $(3-\sqrt{6},0)$.
La segunda curva no intersecta al eje x.
Eje y: $(0,1)$ y $(0,-3)$.

b. $\frac{2}{3}\sqrt{65}$ u

c. No se intersectan.

7 **a.**



b. $P=(3+2\sqrt{10}+\sqrt{5}+2\sqrt{2})$ u

IV.

1 b **2** c **3** a **4** a **5** b **6** b

7 a **8** d **9** e **10** e



Páginas 240 a 323

Unidad 4
Rectas en el plano... una mirada analítica

Conocimientos previos

Página 245 *Trabaja*

1 **a.** Dom $f=\mathbb{R}$

b. Rec $f=\mathbb{R}$

c. $f(2)=3$

d. 1

2 3

3 $-\frac{1}{12}$

4 2

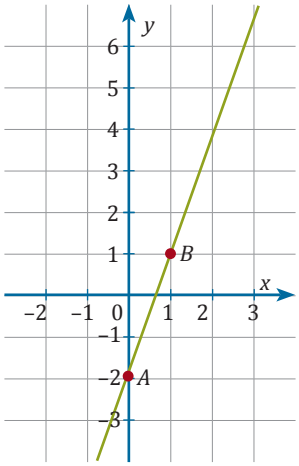
5 **a.** Para cualquier número real.

b. No es posible para $x=3$.

c. $Dom\, f=\{x\in\mathbb{R}/x\geq -4\}$

6 **a.** $-\frac{8}{11}$

b.



7 **a.** $y=-2x+2$ **b.** $x=-\frac{7}{2}$

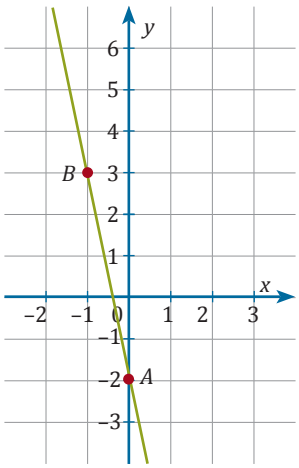
8 **a.** 5 **c.** 0

b. 2 **d.** 5

9 **a.**

x	-7	-3	-1	0	1	$\frac{1}{5}$	2
$f(x)$	33	13	3	-2	-7	-3	-12

b.



10 **a.** Si

b. Si

c. No

d. Si

e. Si

11 **a.** F
b. V
c. F
d. V
e. V

12 Una función lineal es del tipo $f(x) = ax + b$ con a y b reales. Todas son lineales porque tienen esta forma. Solo varían en el nombre de la letra que las menciona, el nombre de su variable y sus coeficientes.

a. Es una función constante, con $a = 0$ y $b = 2\,013$.
b. $a = -\frac{4}{7}$ y $b = -\frac{15}{16}$.
c. $a = 330$ y $b = -2$.
d. $a = \frac{69}{60}$ y $b = \frac{41}{90}$.

13 **a.** $-\frac{10}{11}, \frac{19}{6}$ **b.** $\frac{7}{5}$ y $-\frac{2}{5}; -\frac{14}{25}$
c. $h(x) = 17x + 29$
d. Sí. Porque es una función del tipo $f(x) = ax + b$ con a y b reales. En particular, $a = 17$ y $b = 29$

14 **a.** $\frac{86}{195}$ **b.** Disminuir en $\frac{7}{65}$.
c. No. Es $\frac{1}{3} - \frac{n^2}{5}$ **d.** $\frac{5}{18}$

15 **a.** $\frac{8}{21}$
b. No. $h(7) = -\frac{139}{9}$ y $h(3) + h(4) = -\frac{131}{9}$
c. Sí. $3,\overline{2}x - h(x) = 5,\overline{5}x - \frac{8}{9}$. Luego es una función del tipo $f(x) = ax + b$ con a y b reales. En particular, $a = 5,\overline{5}$ y $b = -\frac{8}{9}$
d. $\frac{8}{39}$

16 **a.** Sí. Porque es una función del tipo $f(x) = ax + b$ con a y b reales. En particular, $a = 2$ y $b = 16$
b. Valores positivos.
c. Mayores a 16
d. 26 cm
e. 18 cm y los 36 cm, ambos inclusive
f. 6,25 cm
g. Mayores a 3,375 cm y menores a 19,525 cm, sin incluirlos.

17 **a.** $f(x)$, verde; $g(x)$, fucsia; $h(x)$, azul; $t(x)$, negro.
b. $f(3) = 5$; $g(3) = 3$; $h(-2) = 1$; $t(-2) = 1$
c. 6
d. 5 bajo g. 5 bajo f.
e. Sí. $t(2,6) = 5,6$ y $f(2,6) = 5,6$. Es decir, las imágenes son iguales.

18 **a.** $T_F = \frac{9}{5}T_C + 32$
b. $T_F = 212$ °F

Determinando la ecuación de una recta

Página 253 *Trabaja*

1 **a.** $y = 5x - 3$
b. $y = -6x + 8$
c. $y = \frac{5}{3}x - \frac{1}{2}$
d. $y = 2x - 5$
e. $y = -\frac{1}{5}x + \frac{1}{2}$
f. $y = \frac{3}{4}x - \frac{2}{5}$

2 **a.** $y = 4x + 18$
b. $y = -\frac{x}{6} - 7$
c. $y = -x - 2$

3 **a.** Punto B a la recta de **a.**
b. Punto A a la recta de **b.**
c. Punto C a la recta de **c.**

4 **a.** 9
b. $\frac{1}{3}$
c. $\frac{8}{3}$

5 **a.** $y = \frac{11}{10}x - 2$ **b.** $y = -\frac{3}{4}x + \frac{23}{4}$
c. $y = -7x + 12$ **d.** $y = -\frac{2}{17}x + \frac{173}{17}$

6 **a.** $y = -\frac{4}{23}x + \frac{379}{23}$ **b.** $y = -x$
c. $y = -2x - 2$ **d.** $y = x$

7 **a.** $y = \frac{9}{14}x - \frac{80}{7}$ **b.** $y = -\frac{5}{7}x + \frac{9}{7}$
c. $y = 1,1x - 9,6$ **d.** $y = \frac{16}{3}x + \frac{22}{3}$
e. $y = \frac{27}{13}x - \frac{74}{65}$

Página 254 *Trabaja*

1 **a.** $y = 1$ **b.** $y = \frac{x}{3} - \frac{8}{3}$

c. $y = \frac{x}{3} + \frac{5}{3}$ **d.** $y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$

e. $y = \frac{x}{2} - \frac{1}{2}$

2 **a.** $y = 4x$ **b.** $y = x$

3 **a.** $x = 0$ **b.** $y = 0$

c. $y = -\frac{3}{2}x + 3$ **d.** $y = \frac{3}{2}x + 3$

e. $y = -3x - 6$ **f.** $y = 3x - 6$

4 **a.** $y = -\frac{x}{2} + 5$

b. $y = -\frac{2}{3}x + \frac{17}{3}$, es falso que sea la misma recta, los puntos no son colineales

c. $x = 2$

d. $y = 1$

5 **a.** $x = -7$ **b.** $y = \frac{33 - \sqrt{5}}{5}$

c. $\left(\frac{33}{11}, \frac{66}{11}\right)$ **d.** $\left(\frac{33}{16}, \frac{99}{16}\right)$

e. $y = \frac{36}{5}$

Definiendo la ecuación de la recta

Página 260 *Trabaja*

6 **a.** $-3x + 8y + 10 = 0$

b. $5x + y - 9 = 0$

c. $5x - 7y - 6 = 0$

7 **a.** $y = -\frac{8}{5}x - \frac{29}{5}$

b. $y = -7x + 3$

c. $y = \frac{2}{3}x - \frac{1}{2}$

8 **a.** $3x - 2y - 10 = 0$

b. $a = -\frac{5}{3}$ y $b = -\frac{110}{3}$

c. Sí. La ecuación es $x - 2y + 100 = 0$. Al remplazar las coordenadas del punto, se tiene, $20 - 2 \cdot (-40) + 100 = -20 - 80 + 100$ lo que da 0. Por tanto, $(-20,40)$ es un punto de ella.

d. $4x + y - 50 = 0$

e. La diagonal menor, formada por el primer y tercer punto, mide 53,85, en cambio la otra mide 70,71, la ecuación solicitada es $2x + 5y - 70 = 0$

9 **a.** $y = \frac{4}{3}x - \frac{4}{30}$ **b.** $y = -\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}$

c. Presentan el mismo valor para el coeficiente de x, y diferente el valor del otro coeficiente.

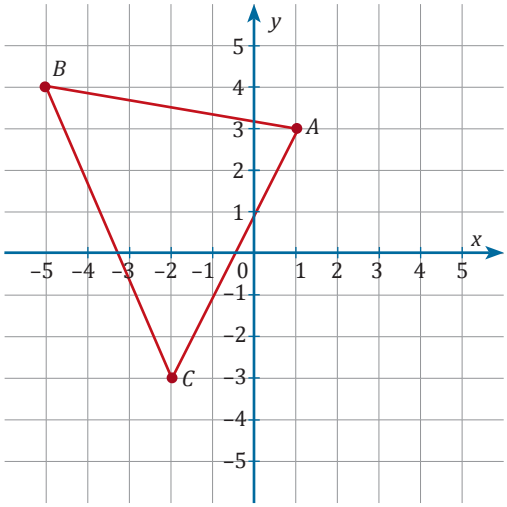
d. Al amplificarse por 10 las coordenadas del primer par de puntos, se obtienen las coordenadas del segundo par de puntos. Una conjetura es que si al comparar dos pares de puntos en un plano, de tal modo que las coordenadas de un primer par de puntos, se amplifican por algún factor que permita conseguir las coordenadas del segundo par de puntos, entonces la pendiente de la recta que pasa por el primer par de puntos, es igual a la pendiente de la recta que pasa por el segundo par de puntos. Sólo difieren en el coeficiente libre.

10 **a.** $y = 0{,}5x + 3$ **b.** $y = -\frac{2}{3}x + 11$

c. $y = 2x + 19$; $y = -\frac{17}{3}x + \frac{34}{3}$

$y = 25x + 134$

11 **a.**



b. $\left(-\frac{7}{2}, \frac{1}{2}\right)$; $\left(-2, \frac{7}{2}\right)$; $\left(-\frac{1}{2}, 0\right)$

c. $8x + 8y + 4 = 0$; $5x - 9y + 22 = 0$; $x = -2$

d. $\left(-2, \frac{4}{3}\right)$

e. Construye y revisa con tu profesor.

12 **a.** $x - 7y + 6 = 0$

b. Para B: 1,86 m; para C: 0,43 m; para D: 1,57 m

c. $x + y - 5 = 0$

d. $x = 5$

13 **a.** $-x+y=0$
b. $x+5y+22=0$
c. $x-7y+36=0$
d. $4x-7y-24=0$
e. $2x+3y-12=0$

14 **a.** **i.** $43x+18y+15=0$
ii. $17x-y-6=0$
iii. $14x-4y+21=0$
b. **i.** $6x-2y-1=0$
ii. No hay intersección, por lo tanto no hay recta que se pueda determinar.
iii. No hay intersección, por lo tanto no hay recta que se pueda determinar.

15 **a.** $N=\frac{3}{29}p+1$
b. 3,5
c. $N=\frac{3}{20}p-\frac{7}{20}$
d. 46
e. Cualquiera de las dos, porque ambas contemplan los 29 puntos en su construcción.

Analizando un poco más las rectas

Página 272 *Trabaja*

1 **a.** Pendiente negativa.
b. Pendiente positiva.
c. Pendiente cero.

2 **a.** $-\frac{5}{3}$
b. -3
c. $\frac{2}{3}$

3 **a.** $k=\frac{13}{14}$
b. $k=-3$
c. $k=\frac{2}{3}$

4 Si lo son.

5 **a.** No son perpendiculares.
b. Si son perpendiculares.
c. Si son perpendiculares.

6 **a.** $k=6$
b. $k=-2$
c. $k=-4$

7 **a.** Mayor de $90°$ y menor de $180°$.
b. El punto de intersección es $(0,-54)$ cuya ordenada es negativa.
c. Mayor a -9 pero menor a $-9+\sqrt{226}$.
d. 0,5

8 **a.** Cualquier punto de esta recta es de la forma (a,a). Por tanto, cualquier triángulo rectángulo cuyos vértices sean el origen, un punto distinto de ella del primer cuadrante, y la proyección de este punto sobre el eje x, es isósceles.
b. Mayor que $0°$ y menor que $45°$.
c. $\frac{12}{7}$

9 **a.** $y=-\frac{5}{7}x-12$ **b.** $y=\frac{33}{67}x+\frac{11}{7}$

10 **a.** $22x-8y+71=0$ **b.** $y=-\frac{4}{11}x+\frac{12}{11}$
c. L_2 y L_3 no son perpendiculares. La ecuación principal de L_3 es $y=-\frac{49}{32}x+\frac{147}{32}$.
Al realizar el producto de sus pendientes, es decir, $-\frac{4}{11}\cdot-\frac{49}{32}$ se obtiene $\frac{49}{88}$, que es distinto de -1. Por lo tanto, el ángulo entre las rectas L_2 y L_3 no es recto.
d. Sí. L_2 es perpendicular a L_1. El producto de sus pendientes, que es $-\frac{4}{11}\cdot\frac{11}{4}$ es igual a -1. Así, el ángulo entre las rectas L_2 y L_1 es recto, por lo tanto, el ΔABC es rectángulo en A.

11 **a.** $y=0{,}5x+6{,}75$
b. $2x-4y+11=0$
c. Su valor está entre $0°$ y $90°$, sin incluirlos. La pendiente es positiva ya que su valor es 0,5, y por esto, el ángulo es agudo.
d. Con el eje x: $(-5{,}5;\ 0)$;
con el eje y: $(0;\ 2{,}75)$
e. $8x+4y-41=0$
f. $(1{,}4\ ;\ 7{,}45)$.
g. 3,58

12 **a.** $x = 2$

b. Sí. Solamente se requiere la abscisa de F, la cual es 2

c. $(2;\ 3{,}75)$ y $(2;\ 7{,}75)$, respectivamente.

d. $0°$ y $90°$, sin incluirlos.

e. Concurren en $(2;\ 3{,}75)$. Como $L_T \parallel L$, y lo respondido en **d.**, el ángulo es agudo.

Página 274 *Trabaja*

1 **a.** $\left(-1,\frac{3}{2}\right); \left(-\frac{3}{2},-\frac{1}{2}\right); (-2,1); \left(\frac{5}{2},1\right)$

b. $y = 4x + \frac{11}{2}; y = -\frac{1}{7}x - 5; y = 4x - 9;$ $y = -\frac{1}{7}x + \frac{19}{2}$

c. Si, las que contienen a los lados opuestos del cuadrilátero formado por los puntos medios.

d. Sí.

e. Tomar los vértices de un cuadrilátero cualquiera como $(a,b); (c,d); (e,f); (g,h)$ y repetir el proceso hecho numéricamente.

2 **a.** $(2,4)$ y $(-12,3)$

b. $x - 14y + 54 = 0$

c. $x - 14y + 62 = 0$

d. $14x + y + 165 = 0$

3 **a.** $x - 16y - 12 = 0$

b. No, la primera tiene pendiente $\frac{1}{16}$ y la otra $-\frac{1}{16}$, por lo tanto, $\frac{1}{16} \cdot -\frac{1}{16} \neq -1$.

c. $\left(24,\frac{9}{4}\right)$

d. Sí, ambas tienen pendiente $-\frac{1}{16}$.

e. $-\frac{3}{112}$

4 **a.** $y = 27\,500x - 54\,893\,500$

b. $y = 13\,000x - 25\,850\,000$

c. No, pues las rectas tienen distinta pendiente y distinto coeficiente de posición, por lo tanto los puntos no son colineales. Las ventas en el 2005 debieran haber sido, según las ventas de los años anteriores, 244 000.

5 **a.** $\Delta l = l_i \cdot \alpha \cdot \Delta t$, entonces, $l_f - l_i = l_i \cdot \alpha \cdot (t_f - t_i)$, por lo tanto, $l_f = 0{,}0165\ t_f + 1\,499{,}67$

b. Es del tipo $y = ax + b$ donde l_f corresponde a y, $0{,}0165$ a a, t_f a x y finalmente $1\,499{,}67$ a b.

c. $0{,}0165$

d. $1\,499{,}67$. Es el valor, en m, de la longitud del puente a 0 °C.

e. $1\,500{,}2475$ m

f. $l_f = 0{,}0165\ t_f + 1\,500{,}0825$

g. A que las temperaturas iniciales son diferentes.

h. $1\,500{,}2475$ m

i. 15 °C

Rectas y soluciones de sistemas de ecuaciones, ¿cómo se relacionan?

Página 282 *Trabaja*

1 **a.** $m_1 = -3; \qquad m_2 = -3$

b. No tiene solución.

c. Incompatible, rectas paralelas.

2 $a = -\frac{5}{6}$

3 **a.** Sistema con solución única.

b. Sistema incompatible.

c. Sistema indeterminado.

4 $a = \frac{5}{4}; b = -\frac{1}{2}$

5 **a.** Sistema con solución única, rectas secantes.

b. Sistema con solución única, rectas secantes.

c. Incompatible, rectas paralelas.

d. Indeterminado, rectas coincidentes.

e. Sistema con solución única, rectas secantes.

6 **a.** Sistema incompatible, rectas paralelas.

b. Sistema con solución única, rectas secantes.

c. Sistema indeterminado, rectas coincidentes.

d. Sistema con solución única, rectas secantes.

7 $-7x + 3y = 6$, en general cualquiera que sea una amplificación de los coeficientes de x e y y de un coeficiente libre distinto al dado. Las rectas son paralelas.

8 **a.** $a = -2; b = 2$

b. $a = -2; b \neq 2$

9 Ambas rectas tienen igual pendiente, $\frac{4}{3}$, por lo tanto son paralelas, entonces el sistema es incompatible, no tiene solución.

10 **a.** $\begin{array}{l} x-2y+9=0 \\ x-2y-1=0 \end{array}$

b. Uno de ellos puede ser $\begin{array}{l} x-2y+9=0 \\ 3x+y-10=0 \end{array}$

c. Uno de ellos puede ser $\begin{array}{l} x-2y+9=0 \\ 2x-4y+18=0 \end{array}$

d. $\begin{array}{l} 3x+y-10=0 \\ x-2y-1=0 \\ x+2y-5=0 \end{array}$

Página 284 *Trabaja más...*

I. Ecuación de la recta

1 **a.** No

b. Si

c. Si

2 **a.** $y=-3x+8$

b. $y=\frac{5}{4}x-2$

c. $y=-\frac{141}{57}x-\frac{13}{19}$

3 **a.** $y=5x-7$

b. $-5x+y+7=0$

4 Uno de ellos puede ser, C: $(1,-2)$.

5 **a.** $\left(\frac{3}{5},0\right)$; $(0,-3)$

b. $\left(\frac{1}{4},0\right)$; $\left(0,-\frac{2}{7}\right)$

c. $\left(\frac{5}{3},0\right)$; $(0,5)$

6 A: $(1,-10)$; B: $(3,-16)$; C: $(5,-22)$

7 $k=8$

8 **a.** $y=-\frac{2x}{3}+\frac{8}{3}$

b. $y=-7x-29$

c. $5x-2y+10=0$

9 **a.** $y=x-1$

b. $y=-2x+9$

c. $y=-\frac{x}{2}+4$

10 **a.** $a=-\frac{1}{3}$

b. $a=\frac{1}{4}$

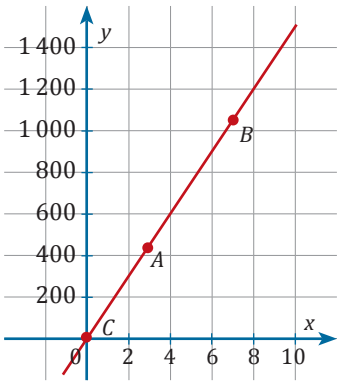
11 **a.** $-2x+3y+1=0$

b. $3x-4y-2=0$

12 $y=-3x+2$

13 **a.** $y=150x$

b.



c. \$ 3 750

14 **a.** $y=\frac{3}{2}x+250$

b. \$ 75 250

c. 16,5 km

15 **a.** $y=\frac{9}{5}x+32$

b. 68 °F

c. 45 °C

16 **a.** $y=x+4$

b. $m=-1$

c. $x+y+4=0$

d. $A=32$ u^2

e. $P=4\sqrt{32}$ u

f. $P=(8+\sqrt{32})$ u

17 **a.** $\begin{array}{l} -5a+b=-2 \\ -2a+b=-6 \end{array}$

b. $\begin{array}{l} -\frac{2}{3}a+b=\frac{3}{2} \\ 11a+b=-31 \end{array}$

c. $\begin{array}{l} b=-\frac{6}{7} \\ 9a+b=-3 \end{array}$

d. $\begin{array}{l} \frac{11}{17}a+b=6 \\ 5a+b=6 \end{array}$

e. $\begin{array}{l} 1,\overline{3}a+b=-1 \\ 1,0\overline{3}a+b=1 \end{array}$

18 **a.** $y = -\frac{4}{3}x - \frac{10}{3}$ **b.** $y = -\frac{39}{14}x - \frac{5}{14}$

c. $y = -\frac{5}{21}x - \frac{6}{7}$ **d.** $y = 6$

e. $y = -\frac{20}{3}x + \frac{77}{3}$

19 **a.** **i.** $\left(-\frac{2}{3}, 2\right); \left(-\frac{5}{4}, 2\right)$ **ii.** $(-1{,}5); \left(\frac{1}{3}, -3\right)$

iii. $\left(-\frac{19}{3}, -\frac{1}{3}\right); \left(-\frac{12}{5}, -\frac{6}{35}\right)$

iv. $\left(-\frac{2}{3}, -2\right); \left(\frac{1}{3}, -2\right)$

v. $\left(\frac{1}{6}, \frac{5}{3}\right); \left(-\frac{79}{21}, \frac{79}{7}\right)$

vi. $\left(-\frac{10}{33}, -\frac{107}{33}\right); \left(-\frac{5}{44}, \frac{161}{44}\right)$

b. **i.** $0x + y - 2 = 0$

ii. $3x + 2y - 7 = 0$

iii. $595x - 14\,455y - 2\,759 = 0$

iv. $4x + 3y + 2 = 0$

v. $1\,212x + 495y - 1\,027 = 0$

vi. $20\,042x + 2\,750y + 14\,990 = 0$

20 $y = -\frac{5}{7}x - \frac{15}{7}$

21 $y = \frac{8}{9}x + \frac{31}{9}$

22 **a.** No. El sistema formado por las ecuaciones para obtener a y b, no tiene solución, ya que se obtiene $0 = \frac{5}{3}$.

b. $x = -\frac{2}{3}$

23 **a.** **i.** $\frac{x}{3} + \frac{y}{2} = 1$

ii. $\frac{x}{\frac{2}{11}} + \frac{y}{-1} = 1$

iii. $\frac{x}{7} + \frac{y}{\frac{7}{5}} = 1$

iv. $\frac{x}{\frac{42}{5}} + \frac{y}{-8} = 1$

b. **i.** $5x + 2y - 10 = 0$

ii. $70x + 13y - 91 = 0$

iii. $4x - 3y - 24 = 0$

iv. $819x + 900y - 910 = 0$

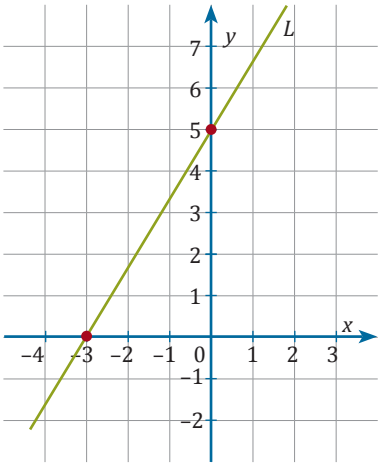
c. **i.** No presenta la variable x

ii. No presenta la variable y

iii. La igualdad $-65x + y = 0$, no permite, que su lado derecho pueda dividirse por algún número para obtener 1.

d. Si la forma general está representada por $Ax + By + C = 0$, donde A, B y C números enteros pero ninguno de ellos sea cero, entonces se puede ordenar como $Ax + By = -C$. Se divide cada término de la ecuación por el número que está en el lado derecho de ella. En esta ocasión es $-C$. Así se obtiene $\frac{A}{-C}x + \frac{B}{-C}y = 1$. Finalmente se reescribe como $\frac{x}{\frac{-C}{A}} + \frac{y}{\frac{-C}{B}} = 1$.

24 **a.**



b. $(-3{,}0); (0{,}5)$

c. La abscisa de la intersección de la recta con el eje x, corresponde al valor de p. La ordenada del punto de intersección de la recta con el otro eje, es el valor de q.

d. **i.** $\frac{x}{4} + \frac{y}{-1} = 1$ **ii.** $\frac{x}{-2} + \frac{y}{-4} = 1$

iii. $\frac{x}{\frac{5}{2}} + \frac{y}{\frac{3}{2}} = 1$

e. A partir de la ecuación segmentaria, se obtienen los valores de p y q. Se ubican $(p{,}0)$ y $(0{,}q)$, que corresponderán a las intersecciones de la recta con los ejes x e y respectivamente. Se traza la recta solicitada, atravesando por los puntos mencionados anteriormente.

f. En el gráfico, se determina los puntos de las intersecciones de la recta con los ejes coordenados. La abscisa del punto de intersección de la recta con el eje x, proporcionará el valor de p, en cambio, la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje y, dará el valor de q. Se reemplazan dichos números en la ecuación estándar de la forma segmentaria.

25 **a.** P': $(7,1)$; P'': $(1, -7)$

b. La recta que pasa por P'' y P' es $4x - 3y - 25 = 0$. Al reemplazar las coordenadas de P en el lado izquierdo de ella, tenemos $4 \cdot 4 - 3 \cdot (-3) - 25$, es decir 0, idéntico al lado derecho. De aquí que estos tres puntos pertenecen a la misma recta.

c. El valor del numerador corresponde a la unidades que hay que sumar a la ordenada de P para obtener la ordenada de P'. Por otro lado, el entero del denominador proporciona las unidades que hay que sumar a la abscisa de P, para conseguir la otra coordenada de P'.

d. Sí. El punto medio de $\overline{P''P'}$ es $\left(\frac{7+1}{2}, \frac{1+(-7)}{2}\right)$. Esto es $(4, -3)$, es decir, las coordenadas de P.

e. Para **a.** P': $(1,1)$; P'': $(7, -7)$. Para **b.** Se verifica, remplazando las coordenadas de cada punto en la ecuación $4x + 3y - 7 = 0$. Para **c.** el análisis es similar al de **b.** pero usando la pendiente igual a $-\frac{4}{3}$

f. P'': $(2{,}5\ ; -5)$

g. $\overline{PP'} = 5$ u; $\overline{P''P} = 2{,}5$ u; $\overline{P''P'} = 7{,}5$ u

h. $\overline{P''P'} = \overline{PP'} + \overline{P''P}$ ya que es verdad que $7{,}5 = 5 + 2{,}5$. Por tanto, son colineales.

i. 1:2

j. Porque dicha relación no es 1:1.

26 **a.** -10

b. 4

c. $\frac{\sqrt{2}+4}{3}$

27 **a.** Si pertenece.

b. Si pertenece.

28 **a.** $y = \frac{x}{2} + \frac{11}{2}$

b. $y = 0{,}72x - 2{,}23$

c. $y = -1{,}19x - 1{,}59$

II. Análisis de rectas

1 **a.** No es perpendicular.

b. Si es perpendicular.

2 $k = 6$

3 No

4 $y = \frac{3}{5}x + 1$

5 **a.** $k = 3$

b. $k = 2$

6 $3x + y + 4 = 0$

7 $y = -3x - 1$

8 $y = \frac{4}{3}x + 1$

9 **a.** $y = -\frac{3}{5}x + 3$

b. $y = \frac{5}{4}x - 2$

c. $y = -3$

10 Coincidentes.

11 $k = \frac{11}{5}$

12 $k = -\frac{7}{4}$

13 **a.** Pasa por el origen.

b. Paralela al eje x.

c. Paralela al eje y.

d. Pasa por el origen.

14 **a.** No, porque $m_1 \cdot m_2 \neq -1$.

b. Si, porque tienen igual pendiente.

c. Si, el punto de intersección es $(6,0)$.

15 **a.** $\frac{30}{43}$ **b.** -5 **c.** $-14; 14$

16 **a.** $y = \frac{19}{20}x + 98$ **b.** $y = 6{,}\overline{3} - \frac{31}{3}$

17 **a.** $L_2 \parallel L_3$; $L_1 \parallel L_7$ y $L_4 \parallel L_6$

L_2: $y = 9x - 28$ y L_3: $y = 9x + 42$;
L_1: $y = -1{,}5x$ y L_7: $y = -1{,}5x + 10{,}5$;
L_4: $y = \frac{3}{8}x - \frac{21}{8}$ y L_6: $y = \frac{3}{8}x - \frac{17}{8}$

b. L_8: $y = \frac{5}{6}x + \frac{28}{3}$

c. L_9: $3x + 2y - 28 = 0$

d. La pendiente de L_8 es $\frac{5}{6}$, sin embargo, $-\frac{3}{2}$ es la pendiente de L_9. Estos valores no son iguales, por tanto, no son paralelas.

18 **a.** $-\frac{5}{24}$ **b.** -2 **c.** $-1; 0{,}5$

19 **a.** $(7, -2)$

b. No. Porque las pendientes de las rectas son $-0{,}6$ y -4. Su producto no es -1.

20 **a.** $\frac{1}{8}$ **b.** $\left(-\frac{7}{16}, \frac{31}{7}\right)$ **c.** $\left(-\frac{9}{16}, -\frac{25}{7}\right)$

d. $y = 24x + \frac{87}{7}$

21 **a.** $17x + y + 82 = 0$

b. La pendiente de la recta que contiene los puntos M, N y P es igual a -17. Este valor se obtiene haciendo el cuociente entre las diferencias entre las ordenadas y abcisas de puntos de ella. En particular, se eligieron los puntos M y P.

c. $y = \frac{1}{17}x + \frac{54}{17}$

d. Si elegimos a P: $(-4, -14)$ como el punto de concurrencia, y la recta a conseguir es del tipo $y = ax + b$, escogemos a igual a -1 y determinamos b. Finalmente tenemos: $y = -x - 18$.

e. Se elige como el punto de concurrencia cualquier punto de la recta que contiene los puntos colineales. Luego, se escoge cualquier valor para a, que no sea ni -17, ni $\frac{1}{17}$, para evitar escribir una recta que sea paralela o perpendicular. Usando las coordenadas del punto y el valor de a, se determina b. Finalmente se remplaza los valores de a y b en $y = ax + b$.

22 **a.** $y = 0{,}8x + 1{,}4; y = 0{,}8x + 6$

b. Son iguales.

c. $3x + 2y - 12 = 0; 3x + 2y + 11 = 0$

d. Tienen el mismo valor de sus pendientes, que es, $-1{,}5$.

e. Sí, porque está formado por dos pares de lados paralelos. Además, $3x + 2y - 12 = 0$ no es perpendicular ni a $y = 0{,}8x + 1{,}4$, ni a $y = 0{,}8x + 6$, ya que $-1{,}5 \cdot 0{,}8$ no es igual a -1. Lo mismo ocurre con $3x + 2y + 11 = 0$.

f. $\sqrt{58}$ y $5\sqrt{2}$

g. $(-1{,}5\ ;\ 2{,}5)$

III. Rectas y sistemas de ecuaciones

1 **a.** Si se intersectan en el punto.

b. Si se intersectan en el punto.

c. No se intersectan en el punto.

d. Si se intersectan en el punto.

2 **a.** Paralelas.

b. Coincidentes.

c. Secantes.

3 $k = \frac{1}{2}$

4 $k \neq -\frac{3}{8}$

5 **a.** $\frac{2}{3}, -\frac{3}{2}$ **b.** 3,5; 0,6 **c.** $-\frac{9}{4}, \frac{13}{3}$

d. 2,5; $\frac{5-\sqrt{13}}{2}$ o $\frac{5+\sqrt{13}}{2}$

IV. Ejercicios misceláneos

1 **a.** Ángulo agudo.

b. Ángulo obtuso.

c. No existe ángulo (la recta es paralela al eje x).

2 2

3 **a.** $\frac{42}{5}$

b. $-42x + 5y + 10 = 0$

c. $y = \frac{42}{5}x + \frac{1}{5}$

4 $y = 5x + 17$

5 **a.** L_1: $y = -\frac{x}{3} + \frac{7}{3}$

b. L_2: $y = -2x - 1$

c. L_3: $y = \frac{4}{3}x - \frac{13}{3}$

d. L_4: $y = 3x - 6$

e. P: $(2{,}5\ ;\ 1{,}5)$

f. $d_{\overline{AB}} = 6{,}32$ u

g. $d_{\overline{CP}} = 4{,}74$ u

h. $A \approx 15$ u^2

6 **a.** Paralela. **c.** Perpendicular.

b. Perpendicular. **d.** Secantes.

7 $y = x - 1$

8 15 unidades cuadradas.

9 **a.** 20

b. $-6{,}38x - 8{,}51y = 2{,}13$

c. $-6{,}38x - 8{,}51y = -29{,}79$

d. 4,2

e. $4x - 3y = 7$

f. 3

10 **a.** 79,25 cm

b. 63 cm

c. 50 cm

11 **a.** $y = 32\ 000x + 24\ 000; y = 37\ 600x$

b. Cuando pasan 4,29 meses la segunda oferta es más conveniente, de ahí en adelante la primera es mejor.

c. \$ 280 000 y \$ 300 800

12 **a.** Verdadero.

b. Falso.

c. Verdadero.

d. Verdadero.

e. Verdadero.

13 **a.** $-2x + 3y - 2 = 0$

b. $-3x - 2y + 14 = 0$

c. 1,66 u

d. $P = 8{,}61$ u

e. $A = 3\ \text{u}^2$

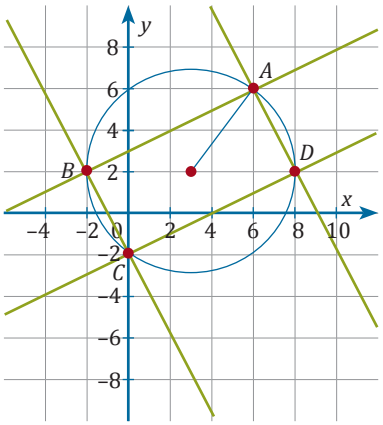
14 **a.** Si

b. $-x + 2y = 6;\ -2x - y = 2; x - 2y = 4$ y $2x + y = 18$

c. P: $(3{,}2)$

d. 5

e.



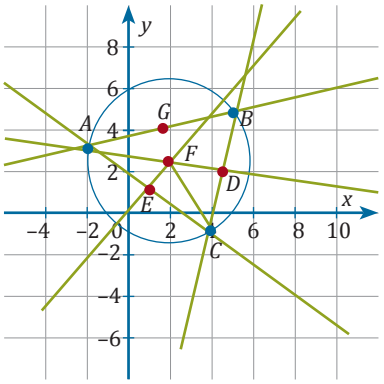
15 **a.** $14x + 4y - 37 = 0$

b. $-3x + 2y + 1 = 0$

c. O: $(1{,}95\ ;\ 2{,}43)$

d. $R = 1{,}99$ u

e.



16 **a.** $\overleftrightarrow{PQ}: y = 0{,}5x - 1$; $\overleftrightarrow{QR}: y = -2x - 1$; $\overleftrightarrow{RS}: y = 0{,}5x + 4$ y $\overleftrightarrow{SP}: y = -2x - 11$

b. $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{QR}$ y $\overleftrightarrow{PQ} \perp \overleftrightarrow{SP}$ ya que el producto de las pendientes, $0{,}5 \cdot -2$, es -1 en ambos casos. Análogamente, $\overleftrightarrow{RS} \perp \overleftrightarrow{QR}$ y $\overleftrightarrow{RS} \perp \overleftrightarrow{SP}$ debido a que $0{,}5 \cdot -2$, la multiplicación de las pendientes,en cada caso, es -1.

c. $\overleftrightarrow{PR}: 3x - y + 9 = 0$; $\overleftrightarrow{QS}: x + 3y + 3 = 0$

d. La pendiente de $\overleftrightarrow{PR}$: $3x - y + 9 = 0$ y para $\overleftrightarrow{QS}$ es $-\frac{1}{3}$. Observemos que una es la inversa multiplicativa de la otra y con signos contrarios.

e. Como los lados son perpendiculares entre sí, como lo respondido en **b.** tenemos un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos interiores son rectos. Por tanto, puede ser un rectángulo, o bien, un cuadrado. Pero como las diagonales son perpendiculares, según lo contestado en **d.**, necesariamente es un cuadrado.

17 **a.** $\overleftrightarrow{AB}$: $x - y + 4 = 0$; $\overleftrightarrow{BC}$: $2x + y - 7 = 0$; $\overleftrightarrow{CD}$: $5x - 2y + 32 = 0$ y $\overleftrightarrow{DA}$: $2x + y + 2 = 0$

b. Los valores de las pendientes son: para a $\overleftrightarrow{AB}$, 1; para $\overleftrightarrow{BC}$, -2; para $\overleftrightarrow{CD}$, 2,5, finalmente -2, correspondiente a $\overleftrightarrow{DA}$.

c. Como $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{DA}$ son las únicas paralelas, ya que tienen el mismo valor de la pendiente, -2, por tanto, este cuadrilátero tiene solamente un par de lados paralelos que son $\overline{BC}$ y $\overline{DA}$.

18 **a.** Se intersectan en $(-2{,}6)$. Las pendientes son 0,25 y 5, luego su producto no es -1. Por tanto estas rectas son concurrentes pero no perpendiculares.

b. L_2 y L_3, $(-3{,}1)$; L_1 y L_4, $(6{,}57\ ;\ 8{,}14)$; L_2 y L_4, $(2, -1)$; L_4 y L_5, $(4{,}3)$; L_1 y L_5, $(2{,}7)$

c. L_1 y L_2, $(-10{,}31\ ;\ 3{,}92)$; L_2 y L_5, $(7, -3)$; L_3 y L_4, $(-7;\ -19)$; L_3 y L_5, $(-0{,}71\ ;\ 12{,}43)$

d. L_3 y L_6, $(-5{,}9\ ;\ -13{,}5)$

e. $(7, -3)$

f. Tercer cuadrante. L_6 y L_4 concurren en $(-5{,}9\ ;\ -13{,}5)$. Es decir, un punto que sus coordenadas negativas.

19 a. Concurren en $\left(\frac{290}{13}, \frac{627}{13}\right)$. No son perpendiculares porque las pendientes son $\frac{7}{5}$ y 4. El producto de estas no es -1.

b. Se intersectan en $\left(\frac{8}{7}, \frac{109}{21}\right)$.

c. De la resolución del sistema de ecuaciones respectivo, se obtiene que $x = \frac{123}{17}$ e $y = \frac{211}{34}$. O bien, al remplazar cada uno los valores anteriores en la ecuación de cada una de las rectas, se obtiene la igualdad. Las pendientes son 6 y $\frac{1}{6}$. Por tanto se trata de dos rectas que son distintas, y que además no son perpendiculares, ya que el producto de las pendientes no es -1.

d. Se intersectan en $(1{,}5\overline{63}\ ;\ 0{,}9\overline{18})$. Las respectivas pendientes son $-\frac{3}{4}$ y $\frac{4}{3}$, luego, su producto es -1. Por tanto, son perpendiculares.

20 a. Como $m = 4$, luego $y = 4x - \frac{4}{3}$.

b. Ya que $m = \frac{101}{294}$, entonces $y = \frac{101}{294}x - \frac{101}{882}$.

21 a. $y = 0; y = -0{,}5x + 5{,}5; y = 2x + 8$

b. $6\sqrt{5}$ y $3\sqrt{5}$; 15

c. $(-1{,}0)$

d. $(-4{,}0)$ y $(-1{,}0)$; $(-1{,}0)$ y $(11{,}0)$

e. $6^2 = 3 \cdot 12$. El lado izquierdo de esta igualdad es 36, valor que coincide con el producto de 3 por 12.

f. $3\sqrt{5}$; $6\sqrt{5}$ y 6

g. $(3\sqrt{5})^2 = 15 \cdot 3$. Ambos lados de la igualdad vale 45.

h. $(6\sqrt{5})^2 = 15 \cdot 12$. El lado izquierdo de esta igualdad es $36 \cdot 5$, es decir, 180. El producto de 15 por 12 también vale 180.

22 a. $0{,}10x - y + 1{,}68 = 0$; $0{,}66x + 0{,}75y - 1{,}12 = 0$ y $0{,}94x - 0{,}34y + 0{,}78 = 0$

b. $(-0{,}22\ ;\ 1{,}67)$

c. $\frac{\overline{EB}}{\overline{BA}} = \frac{4{,}27}{11{,}40}$, esto es aproximadamente 0,374 y que coincide con la aproximación en $\frac{\overline{EC}}{\overline{CA}} = \frac{3{,}35}{8{,}94}$

d. $\frac{\overline{DC}}{\overline{CB}} = \frac{\overline{DA}}{\overline{AB}}$. El valor de la razón aproximadamente es 0,470; $\frac{\overline{FA}}{\overline{AC}} = \frac{\overline{FB}}{\overline{BC}}$. El valor aproximado de la razón es 0,689.

23 a. Si P: (x,y) se tiene:

i. $\begin{cases} x + y = 40 \\ x + 5 = 3(y - 5) \end{cases}$ **ii.** $\begin{cases} x + y = 40 \\ y - 5 = 3(x + 5) \end{cases}$

iii. $\begin{cases} x + y = 40 \\ x - 5 = 3(y + 5) \end{cases}$ **iv.** $\begin{cases} x + y = 40 \\ y + 5 = 3(x - 5) \end{cases}$

b. i. P: $(25{,}15)$ y P': $(30{,}10)$

ii. P: $(5{,}35)$ y P': $(10{,}30)$

iii. P: $(35{,}5)$ y P': $(30{,}10)$

iv. P: $(15{,}25)$ y P': $(10{,}30)$

c. i. $x + y - 40 = 0$ **ii.** $x + y - 40 = 0$

iii. $x + y - 40 = 0$ **iv.** $x + y - 40 = 0$

d. Hay solo una recta que contiene todas las duplas posibles.
La ecuación de esta recta está presente en el enunciado del problema y como parte de cada sistema de ecuaciones. Los puntos que están en duplas, en realidad, son todos colineales.

24 a. $x + 5y - 27 = 0$; $7x - 3y + 1 = 0$; $4x + y + 6 = 0$

b. 4,99 u

c. 19 u^2

d. $\left(-\frac{67}{100}, 3\right)$

e. 4,21 u

25 a. $x - y - 1 = 0; y = 1$

b. $2x - 3y + 1 = 0$; $2x - y - 1 = 0$; $2x - 3y - 3 = 0$; $2x - y - 5 = 0$

c. paralelogramo

d. 4 u^2

e. 11,70 u

26 **a.** $(-2,1); \left(-\frac{3}{5}, -\frac{2}{5}\right); \left(5, \frac{10}{3}\right)$

b. $6{,}53 \text{ u}^2$

c. $16{,}09 \text{ u}$

d. $187x - 280y + 327 = 0$,
$117x - 350y + 257 = 0$,
$70x + 70y - 257 = 0$

e. $1{,}63 \text{ u}^2$

27 **a.** Cualquiera que tenga la misma pendiente, por ejemplo, $3x - y - 9 = 0$.

b. Cualquiera que tenga pendiente inversa y con signo contrario, por ejemplo,
$y = -\frac{1}{3}x + 2$.

c. Cualquiera de pendiente distinta a 3 y $-\frac{1}{3}$, por ejemplo, $9x + 2y - 36 = 0$.

d. Cualquiera que tenga sus parámetros amplificados, por ejemplo, $6x - 2y + 2 = 0$.

e. $3x - y = 0$

28 Pueden ser infinitos sistemas, por ejemplo:

a. $\begin{cases} x + y - 5 = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}$

b. $\begin{cases} x - y = 4 \\ -2x + y + 9 = 0 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 15x + 15y + 7 = 0 \\ 15x - 15y + 13 = 0 \end{cases}$

d. $\begin{cases} x + y = 2 - \sqrt{5} \\ 3x - y = 6 + \sqrt{5} \end{cases}$

e. $\begin{cases} 2x - y = 0 \\ x + y - 3a = 0 \end{cases}$

29 **a.** Sistema con solución única, rectas secantes.

b. Sistema indeterminado, rectas coincidentes.

c. Sistema incompatible, rectas paralelas.

d. Sistema con solución única, rectas secantes.

e. Sistema con solución única, rectas secantes.

30 **a.** Sí, $2x + y - 1 = 0$

b. No

c. No

31 **a.** $6x - y - 4 = 0$

b. $5x - y - 7 = 0$

c. $4x - 5y - 4 = 0$

d. $8x + 16y - 15 = 0$

V. Problemas misceláneos

1 **a.** Paralelas de que tienen la misma pendiente.

b. Los restos o residuos de cada división.

c. La abscisa corresponde al cuociente, y la ordenada, al dividendo.

d. 25 en $y = 3x + 1$; 53 en $y = 3x + 2$; 56 en $y = 3x + 2$; 75 en $y = 3x + 0$; 82 en $y = 3x + 1$.

e. $y = 3x + 4$ no puede incluirse, porque al dividir por 3, el resto 4 estaría superando el valor del divisor, lo cual no es correcto según el algoritmo de la división. Para $y = 3x - 1$, el resto no puede ser negativo.

f. $y = 7x + 0; y = 7x + 1; y = 7x + 2;$
$y = 7x + 3; y = 7x + 4; y = 7x + 5;$
$y = 7x + 6$

g. n. Porque los residuos posibles son 0, 1, 2,3,... $n - 1$, es decir, n residuos. Como se escribe una ecuación por cada residuo, hay n ecuaciones posibles dependiendo del dividendo.

2 **a.** $d = \frac{1108}{11}t + 100$

b. $\frac{1108}{11} = 100{,}\overline{72} \approx 100{,}7 \frac{\text{km}}{\text{h}}$. Corresponde a la pendiente de la recta.

c. Representa la distancia que pasa el auto, desde el lugar de la observación.

d. Aproximadamente $125{,}18 \text{ km}$.

e. $d = \frac{7\ 789}{82}t - \frac{685\ 819}{8\ 200}$
Sí. Aproximadamente a $297{,}12 \text{ km}$;
$120{,}43 \frac{\text{km}}{\text{h}}$.

f. Coquimbo. No. Porque aún el vehículo permanece en el segmento iniciado en Los Vilos, y que está contenido en la tercera recta.

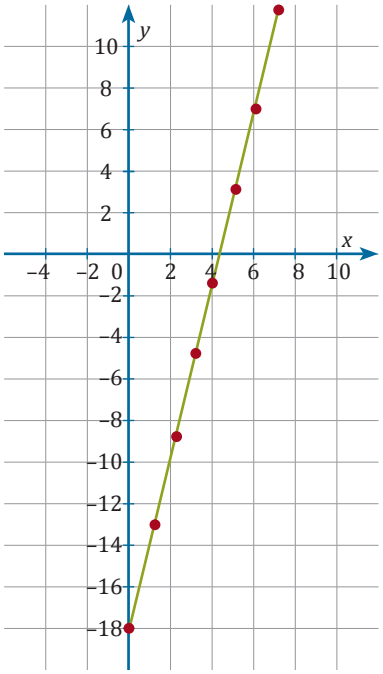
g. $d = 525{,}93; d = 537{,}60$

h. Ambas representan el auto objetivo que está detenido. Primeramente en Coquimbo, que está a $525{,}93 \text{ km}$ del puesto de observación, y en La Serena, a $537{,}60 \text{ km}$ del mismo puesto.

i. $11{,}67$

j. Ella te estará esperando, ya que el auto blindado demorará $1{,}52 \text{ h}$, en cambio, tú aproximadamente $1{,}82 \text{ h}$.

3 **a.** Son puntos de una recta.



b. $y = 4x - 17$

c. 4. Con el valor de pendiente.

d. Proporciona el primer término.

e. 27; 51; 99

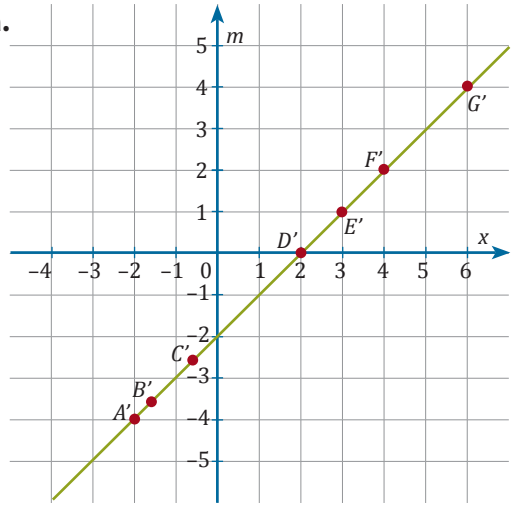
f. 14; 20; 25

g. No. Al resolver $276 = 4x - 17$, se obtiene $x = 73{,}25$, el cual no es un número natural.

h. En la ecuación principal de recta se va remplazando x, por los valores 1, 2, 3, 4, 5, en adelante. Los valores de y que ordenadamente van apareciendo, conforman la segunda sucesión. Ejemplo: Dada la ecuación de la recta $y = -\frac{2}{3}x + 5$, podemos formar $\frac{13}{3}, \frac{11}{3}, \frac{9}{3}, \frac{7}{3}, \frac{5}{3} \ldots$

La diferencia entre cualquiera que no sea el primero, y su anterior es constante, igual a la pendiente de la recta. Esto es $-\frac{2}{3}$.

4 **a.**



b. Sí. Se tiene que $\overline{A'B'} = 0{,}5\sqrt{2}$; $\overline{B'C'} = \sqrt{2}$; $\overline{C'D'} = 2{,}5\sqrt{2}$; $\overline{D'E'} = \sqrt{2}$; $\overline{E'F'} = \sqrt{2}$; $\overline{F'G'} = 2\sqrt{2}$ y $\overline{A'G'} = 8\sqrt{2}$.

$\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{D'E'} + \overline{E'F'} + \overline{F'G'} =$
$= 0{,}5\sqrt{2} + \sqrt{2} + 2{,}5\sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

$\overline{A'B'} + \overline{B'C'} + \overline{C'D'} + \overline{D'E'} + \overline{E'F'} + \overline{F'G'} = \overline{A'G'}$.
Por lo tanto, los puntos son colineales.

c. $m = x - 2$; $x - m - 2 = 0$.

d. Sí. Como la abcisa es -10, se tiene $m = -10 - 2$, es decir, -12

e. El punto de abcisa -10 se obtiene remplazando este valor en la ecuación de la parábola. Por lo tanto el punto es $(-10{,}33)$. Como $m = -12$, tenemos que la ecuación principal de la recta tangente a la parábola en este punto es $y = -12x - 87$.

f. Los puntos son $(-4{,}19)$ y $(8{,}19)$. Las respectivas pendientes son : -6 y 6. Por los tanto las ecuaciones de las rectas tangentes son: $y = -6x - 5$ y $y = 6x - 29$.

g. El valor de la pendiente es -8. Entonces la ecuación solicitada es $y = -8x - 15$.

h. El coeficiente de x de la ecuación de m es el doble del coeficiente de x^2 en la parábola.

i. Sí.

j. Sí.

5 a. *

b. Todas las rectas se han construido a partir de este punto: solo se han ido variando los valores de A, B, y C de manera que se cumpla $A \cdot 4 + B(-1) + C = 0$, y luego fijados estos coeficientes, se expande esta relación a otros puntos de la forma (x,y). Obviamente al intersectar cualquiera de estas rectas los harán en $(4, -1)$, a menos que sean paralelas coincidentes, que tendrán en infinito puntos más.

c. Son las ecuaciones de rectas constantes, paralelas a los ejes coordenados.

d. Sí. Si P: (m,n) es el punto de concurrencia, entonces la recta paralela al eje vertical $x = m$, contiene todos los puntos cuya ordenada es cualquier real. En particular, si esta ordenada vale n. Es decir, $x = m$ contiene a P: (m,n). Lo mismo sucede con $y = n$, pero con respecto de la abscisa de P.

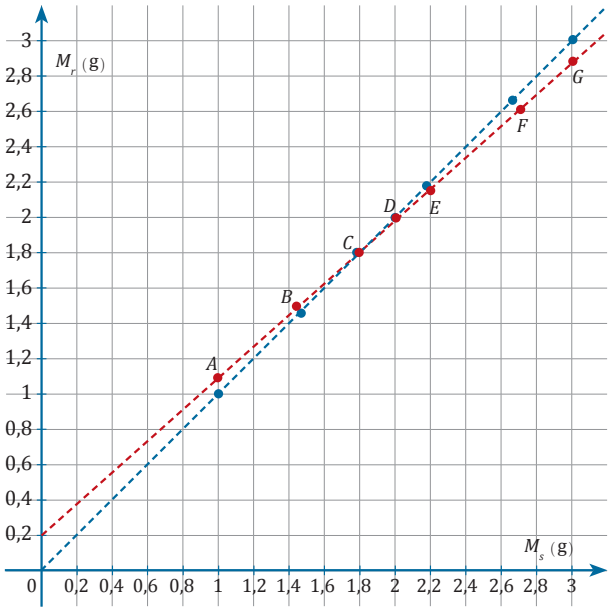
e. Sí. La pendiente de $-3x + 13y + 25 = 0$ es $\frac{3}{13}$, y $-\frac{13}{3}$ es la correspondiente a $13x + 3y - 49 = 0$. El producto de ambas pendientes vale -1. Por lo tanto, son perpendiculares.

f. Que el coeficiente de x en $-3x + 13y + 25 = 0$ es el inverso aditivo del coeficiente de y en $13x + 3y - 49 = 0$. Nótese que 13 es el coeficiente de y en la primera ecuación y es igual al coeficiente de x en la otra. Difieren en los valores de los otros coeficientes.

g. Por **e.**, si una de las rectas es $Ax + By + C = 0$, la otra lleva $-A$ y B, es decir, $Bx + (-A)y + C' = 0$, o bien, A y $-B$, es decir, $(-B)x + Ay + C'' = 0$. Las respectivas pendientes son $-\frac{A}{B}$ y $\frac{B}{A}$. Su producto es -1, por tanto son perpendiculares.

Si $Ax + By + C = 0$ y $A'x + B'y + C' = 0$. Para que ambas rectas sean paralelas deben tener los mismos valores de los coeficientes de x e y, o bien los múltiplos de una recta con respecto de la otra. Los valores de C y C' difieren. En particular si se quiere tener paralelas coincidentes, basta tomar solo una ecuación y amplificarla por cualquier real no nulo. La ecuación resultante será paralela coincidente con la primera.

6 a. Son puntos (en rojo) que pertenecen a una recta.



b. $M_r = 0{,}9M_s + 0{,}2$

c. La muestra D que coincide tanto la enviada como la solicitada. Su masa es 2 g.

d. Mirando comparativamente los puntos en azul, con los rojos del gráfico, las muestras A, B y C tienen una masa mayor que las respectivas solicitadas. A medida que la masa solicitada aumenta en este orden, la diferencia anterior va disminuyendo. Por el contrario, para las muestras D y E, las masas recibidas son menor que las solicitadas. Si la masa solicitada aumenta en este orden, la diferencia anterior va aumentando.

*

A	B	Relación numérica.	C	Forma general de la recta obtenida
22	-37	$22 \cdot 4 + -37 \cdot (-1) = 125$	-125	$22x - 37y - 125 = 0$
-3	13	$(-3) \cdot 4 + 13 \cdot (-1) = -25$	25	$-3x + 13y + 25 = 0$
13	3	$13 \cdot 4 + 3 \cdot (-1) = 49$	-49	$13x - 3y - 49 = 0$

e. Sí. 0,9 es el coeficiente numérico de la variable, y sería el valor de la pendiente. 0,2 es el número libre, que correspondería al valor del coeficiente de posición. Este valor se puede apreciar en la intersección de la recta en rojo con el eje y, es decir, cuando la balanza no estaría detectando masa alguna.

7 **a.** $8x + 13y - 12 = 0$

b. $15x - 2y - 35 = 0$

c. $7x - 55y + 7 = 0$

d. $3x - 12y - 8 = 0$

e. $x + y + 5 = 0$

f. $36x + 5y + 18 = 0$

g. $50x - y - 22 = 0$

8 **a.** $\overleftrightarrow{GK}: y = \frac{37}{21}x + \frac{1178}{105}$; $\overleftrightarrow{IJ}: y = \frac{16}{9}x + \frac{187}{18}$

b. No. Al remplazar D: $(-3{,}2\ ;\ 3{,}8)$ en $\overleftrightarrow{AC}: y = \frac{19}{11}x + \frac{102}{11}$ se obtiene $3{,}8 = 3{,}7\overline{45}$, el cual es incorrecto.

c. $\overleftrightarrow{FE}: y = 0{,}5$; $\overleftrightarrow{GH}: y = 1$; $\overleftrightarrow{IB}: y = 1{,}5$; $\overleftrightarrow{JK}: y = 4{,}7$

d. $\overline{JL}: 37x + 22y + 15 = 0$; $\overline{ED}: 165x + 100y + 148 = 0$

e. $\overleftrightarrow{BC}: y = -\frac{19}{11}x - \frac{136}{55}$. No. Al sustituir H: $(-2{,}1)$ en la ecuación $\overleftrightarrow{BC}$, no se logra la igualdad, ya que $1 \neq \frac{54}{55}$.

9 **a.** **i.** $60°$ **ii.** $120°$

b. No. La pendiente de $\overline{JL}$ es $-1{,}68\overline{1}$, que es diferente de $-1{,}65$, valor de la pendiente de $\overline{ED}$.

c. $(52{,}3\ ;\ 103{,}3\overline{6})$

d. Son paralelas ya que el valor de sus pendientes es $\frac{5}{3}$.

e. $\overleftrightarrow{GF}$ intersecta al eje vertical en $\left(0, \frac{26}{3}\right)$ y $\overleftrightarrow{BH}$ lo hace en $\left(0, \frac{7}{3}\right)$, por tanto, la diferencia es $\frac{19}{3}$.

f. Por ejemplo: ¿Cuáles son las coordenadas del punto donde concurren $\overleftrightarrow{IA}$ y $\overleftrightarrow{CD}$? Respuesta: $(-4{,}35\ ;\ 1{,}5)$

10 **a.** $C = \frac{5}{9}F - \frac{160}{9}$

b. $K = \frac{5}{9}F + 255{,}37\overline{2}$; $K = \frac{5}{9}F + \frac{2\ 298{,}35}{9}$

c. Aproximadamente: $274{,}82$ K $(274{,}81\overline{6}$ K); $294{,}67$ K $(294{,}\overline{6}$ K).

d. $105{,}53$ °F

e. Berlín: tres grados **Fahrenheit**, equivale a $-16{,}\overline{1}$ °C, la cantidad de grados de error es $19{,}1$ °C $(19{,}\overline{1}$ °C). Estocolmo: 0 grado **Fahrenheit**, es decir, $-17{,}\overline{7}$ °C, hay un error aproximado en 17,8 °C. Copenhague: un grado **Fahrenheit**, esto es, $-17{,}\overline{2}$ °C , Por lo tanto, error aproximado de 18,2 °C.

f. Barcelona: 288,15 K; Bruselas: 280,15 K; Paris: 281,15 K; Madrid: 280,15 K.

11 **a.** $x - y + 400 = 0$ **b.** $x = 1\,600$

c. $x + 4y - 5\,600 = 0$ **d.** $\left(\frac{6\,400}{3}, \frac{2\,000}{6}\right)$

e. $x = 1\,400$

12 **a.** $75s - 4m = 0$, donde s: segundos y m: metros

b. 375 metros

c. $69{,}\overline{3}$ segundos

d. No.

13 **a.** Sistema con solución única, rectas secantes.

b. Sistema con solución única, rectas secantes.

c. Sistema indeterminado, rectas coincidentes.

d. Sistema incompatible, rectas paralelas.

e. Sistema con solución única, rectas secantes.

14 **a.** $x + 7y - 16 = 0$; $5x - y - 8 = 0$; $11x + 5y + 40 = 0$

b. $7x - y - 8 = 0$; $5x - 11y + 12 = 0$; $x + 5y - 10 = 0$

c. $\left(\frac{25}{18}, \frac{31}{18}\right)$

d. $21x + 3y + 24 = 0$; $9x - 9y = 0$; $x + y + 2 = 0$

e. $(-1, -1)$

f. Aproximadamente $29{,}35$ u.

g. 36 u^2

15 **a.** $x - y = 0$ **b.** $x - y - 10 = 0$

c. $2x - 3y - 10 = 0$

d. La velocidad del crecimiento de las utilidades, en los tramos de ventas de artículos.

e. El crecimiento de las utilidades no es constante, el mayor crecimiento se produce entre los tramos de 0 a 20 mil artículos y de 30 a 40 mil artículos. Existen tramos de ventas donde no se produce aumento de utilidades y para ventas entre 50 a 80 mil, el crecimiento de las utilidades es menor que en los otros tramos donde se presenta crecimiento.

16 **a.** $6x + 5y + 13 = 0$

b. $2x - 3y - 11 = 0$

c. $6x - 10y + 1 = 0$

d. $8x + 13y - 38 = 0$

e. $43x - 480y + 1\ 132 = 0$

17 **a.** No, ninguno de sus lados son perpendiculares. Sus ecuaciones son: $y = \frac{3}{4}x + \frac{17}{4}; y = -3x + 8; y = 2$

b. Sí, la recta $y = 2x + 5$ es perpendicular con la recta $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$.

c. No, ninguno de sus lados son perpendiculares. Sus ecuaciones son: $y = \frac{3}{5}x + \frac{18}{5}; y = -\frac{1}{3}x + \frac{8}{3}; y = -5x + 12.$

d. No, ninguno de sus lados son perpendiculares. Sus ecuaciones son: $y = 2x - 1; y = -\frac{5}{6}x + \frac{14}{3}; y = \frac{3}{10}x - \frac{22}{5}.$

e. Sí, la recta $y = -5x + 8$ es perpendicular con la recta $y = \frac{1}{5}x + \frac{14}{5}$.

18 **a.** $3x - 2y + 2 = 0$

b. $x + y - 6 = 0$

c. $7x + 2y - 62 = 0$

d. $(4,7); (8,3)$ y $(6,0)$

e. $7x + 2y - 42 = 0; x + y - 11 = 0;$ $3x - 2y - 18 = 0$

f. $40\ \text{u}^2$

g. $33{,}08\ \text{u}$

h. Obtusángulo escaleno.

i. $\left(\frac{47}{5}, \frac{17}{5}\right)$

19 **a.** $3x - y - 7 = 0$

b. $3x + 4y - 32 = 0$

c. $5x - 8y - 24 = 0$

d. La velocidad inicial en cada intento fue aumentando.

Taller de profundización

Página 306

1 **a.** $x^2 + y^2 + 2x - 4y - 4 = 0$

b. $x^2 + y^2 - 14x - 10y + 67 = 0$

c. $25x^2 + 25y^2 + 100x + 150y + 309 = 0$

d. $(x - 0{,}2)^2 + (y - 0{,}67)^2 = 4$

2 **a.** $C: (5,6), r = \sqrt{61}$

b. $C: \left(-\frac{9}{2}, 1\right), r = \frac{\sqrt{83}}{2}$

c. $C: (1,3), r = \sqrt{41}$

d. $C: \left(-\frac{3}{4}, \frac{1}{5}\right), r = \frac{2\sqrt{10}}{5}$

3 **a.** $(x + 0{,}5)^2 + (y - 2{,}5)^2 = 6{,}5$

b. $(x + 1{,}5)^2 + (y - 0{,}5)^2 = 12{,}5$

c. $(x - 1{,}5)^2 + (y + 5{,}17)^2 = 68{,}94$

d. $(x + 1{,}97)^2 + (y - 0{,}82)^2 = 8{,}88$

Evaluación de la unidad 4

Página 307

Síntesis conceptual

1 Conocer alguno de estos conjuntos de datos:

- Dos puntos por los que pasa la recta.
- Su pendiente y coeficiente de posición.
- Su pendiente y un punto por el que pasa.
- Su coeficiente de posición y un punto por el que pasa.

2 Sus pendientes son iguales o el sistema de ecuaciones lineales formado por sus ecuaciones es incompatible.

3 El producto de sus pendientes es igual a -1.

4 El sistema de ecuaciones lineales formado por sus ecuaciones es indeterminado.

Ejercicios de resumen de la unidad

I.

1 El grado de inclinación de la recta.

2 El valor de la ordenada del punto de intersección de la recta con el eje y.

3 Iguales.

4 El producto de ellas es igual a -1.

5 Secantes.

6 Coincidentes.

7 Paralelas.

8 Cero.

9 $x = c$, donde c es una constante.

10 $y = x$

II.

1 **a.** $13x - 6y - 8 = 0$
b. $5x + 16y - 32 = 0$
c. $6\sqrt{5}x + \sqrt{3}y - 7\sqrt{15} = 0$

2 **a.** $5x - 3y - 13 = 0$
b. $6x + y = 0$
c. $y = \frac{160}{19}$
d. $x = -\frac{3}{2}$

3 **a.** Se cortan, pero no perpendicularmente.
b. Son perpendiculares.
c. Son paralelas.

4 **a.** $x + 4y - 5 = 0$ **b.** $y = 1$
c. $5x + 3y + 9 = 0$ **d.** $(-3, -15)$
e. No **f.** $10\ \text{u}^2$
g. $1{,}5\ \text{u}^2$ **h.** $x = -3$

5 **a.** Coincidentes. **b.** Secantes.
c. Secantes.

6 **a.** $x + y - 4 = 0$ **b.** $x - y + 2 = 0$
c. $4\sqrt{2}\,\pi$ **d.** $8\,\pi$

7 **a.** $5x - 6y + 45 = 0$ **b.** $6x + 5y - 55 = 0$
c. Hay infinitas, una puede ser $10x - 12y - 30 = 0$
d. Hay infinitas, una puede ser $x + 2y - 30 = 0$
e. $\left(\frac{81}{7}, \frac{50}{7}\right)$

8 **a.** $3x + 2y - 7 = 0$
b. $3x - 2y + 8 = 0$ **c.** $\left(-\frac{1}{6}, \frac{15}{4}\right)$
d. $\left(\frac{7}{3}, 0\right)$ **e.** $(0,4)$
f. $9{,}38\ \text{u}^2$ **g.** $0{,}04\ \text{u}^2$

9 **a.** Cualquiera que pertenezca a la recta $3x - 2y - 7 = 0$, por ejemplo, $\left(0, -\frac{7}{2}\right)$.
b. Cualquiera que pertenezca a la recta $2x + 3y + 4 = 0$,, por ejemplo, $(-2,0)$.
c. Hay infinitos, uno puede ser $(-3,6)$, pero no debe pertenecer a ninguna de las rectas anteriores.

III.

1 **a.** $5x - 4y = 0$; $8x + 10y + 82 = 0$; $10x - 8y - 164 = 0$; $4x + 5y - 41 = 0$
b. Hay un par de rectas con pendiente $\frac{5}{4}$ y otro par con pendiente $-\frac{4}{5}$.
c. $164\ \text{u}^2$
d. $51{,}24\ \text{u}$

2 **a.** $101x - 10y + 20\,200 = 0$
b. \$209 070
c. 16 468 aproximadamente.

3 **a.** $\left(\frac{306\,479}{13}, \frac{}{13}\right)$ **b.** $\left(-\frac{215\,401}{26}, \frac{}{26}\right)$
c. $\left(\frac{7}{3}, 2\right)$ **d.** $65\ \text{u}^2$ **e.** $26{,}24\ \text{u}$
f. $10x + 12y - 43 = 0$; $4x + 5y - 25 = 0$; $14x + 22y - 81 = 0$

4 **a.** En la segunda parte está mal remplazado el punto, debiera decir, $y + 3 = \frac{2}{5}(x - 2)$, con lo que la respuesta correcta es $2x - 5y - 19 = 0$.
b. Al amplificar la primera ecuación se olvidó hacerlo también con el término libre, con lo que el sistema debiera quedar $\left.\begin{array}{r} 6x - 3y = -27 \\ 6x + 3y = 10 \end{array}\right|$, así la solución será $\left(-\frac{17}{12}, \frac{37}{6}\right)$.

5 **a.** $x + 2y - 9 = 0$ **d.** $20{,}8\ \text{m}$, aprox.
b. $4x + 3y - 26 = 0$ **e.** $10\ \text{m}^2$
c. $3x + y - 12 = 0$

IV.

1 a.	**2** a.	**3** d.	**4** b.
5 d.	**6** e.	**7** c.	**8** a.
9 c.	**10** e.	**11** d.	**12** b.
13 c.	**14** c.	**15** b.	**16** a.
17 d.	**18** e.	**19** b.	**20** a.
21 b.	**22** c.	**23** d.	**24** a.
25 a.	**26** e.	**27** d.	**28** b.
29 c.	**30** a.	**31** e.	**32** d.
33 b.	**34** d.	**35** e.	**36** b.
37 d.	**38** d.	**39** c.	**40** d.

Evaluación de síntesis de las unidades 1 a 4

Página 317

I.

1 F	**2** V	**3** V	**4** V	**5** F
6 V	**7** F	**8** V	**9** V	**10** V

II.

1 **a.** $-5-2i$

b. $-2-9i$

c. $-\frac{137}{89}-\frac{237}{89}i$

2 i

3 **a.** $x=\pm 5$

b. $x=0$ o $x=-5$

4 $p=1$

5 **a.** Positiva. **b.** $V:(3,-5)$ **c.** $x=3$

6 **a.** A': $(1\ ;\ -1{,}5)$, B': $(0{,}5\ ;1)$, C': $(-1{,}5\ \ ;-1)$

b. $d_{\overline{AA'}}=5{,}41$ u

c. $P=15{,}86$ u

7 **a.** $5x+2y+11=0$

b. $3x+7y+15=0$

c. $-2x+3y-12=0$

III.

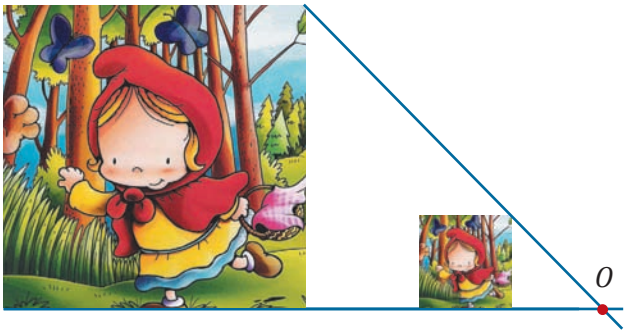
1 **a.** $\frac{5}{2}-i$ **b.** $\frac{43}{16}-4i$

2 **a.** 30 millones de utilidades a un costo de \$ 50 000.

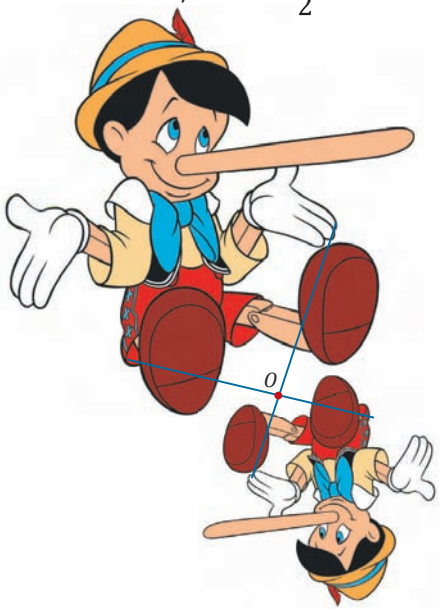
b. Sobre los cien mil pesos las utilidades son negativas.

c. La función que modela no permite que la empresa crezca lo suficiente y sirve solo si los costos fluctúan entre \$ 0 y \$ 100 000.

4 **a.** Centro O, razón 0,3



b. Centro O, razón $-\frac{1}{2}$



5 **a.** $5x-y-15=0$; $3x+4y-9=0$; $6x-5y-6=0$

b. $(3,0)$

c. $A=34{,}5$ u^2; $P=26{,}92$ u

IV.

1 **b.**	**2** **c.**	**3** **d.**	**4** **e.**
5 **d.**	**6** **a.**	**7** **d.**	**8** **a.**
9 **b.**	**10** **c.**		



Páginas 320 a 407

Unidad 5

Probabilidad y estadística... una mirada con mayor profundidad

Conocimientos previos

Página 327 *Trabaja*

1 **a.** aleatorio

b. aleatorio

c. predeterminado

d. aleatorio

e. predeterminado

f. aleatorio

2 **a.** $E=\{c,s\}$

b. $E=\{1,2,3,4,5,6\}$

c. $E=\{cc,\ cs,\ sc,\ ss\}$

3 4,5

4 **a.** $\bar{x} = 1{,}96$ **b.** $Var = 1{,}13$
c. $S = 1{,}06$ **d.** 54,08 %
e.

N° de hijos	N° de personas	Frecuencia relativa
0	12	12/265
1	87	87/265
2	95	95/265
3	46	46/265
4	21	21/265
5	4	4/265

3 733 puntos aproximadamente.

4 **a.** $\bar{X}_A = 8{,}68, \bar{X}_B = 7{,}72$ **b.** $Var(A) = 27{,}24$
c. $Var(B) = 22{,}90$ **d.** $S(A) = 5{,}22$
e. $S(B) = 4{,}79$
f. $CV(A) = 60{,}14\ \%$, $CV(B) = 62{,}05\ \%$
g. En ambas muestras los datos son heterogéneos y se agrupan hacia los valores iniciales. La mayor variabilidad en ellos se produce en la ciudad B.

5 **a.** $\bar{x} = 15$
b. $Var = 20{,}125$
c. $S = 4{,}49$
d. $CV = 29{,}93\%$
e. 1° lugar: $ 660 000, 2° lugar: $ 315 000 y 3° lugar: $ 150 000

6 **a.** 29,34
b. 17,20
c. Sí. El promedio ponderado resultante es 30,34
d. Sí. El promedio ponderado resultante es $-58{,}68$, el cual es igual a $-2 \cdot 29{,}34$ aumenta en una unidad.

7 **a.** 5,8 **b.** 6,0
c. No, porque su coeficiente de variación es 25,52 %.

8 **a.** 45 % **b.** 15
c. No. La desviación estándar es 4,58. De aquí que el coeficiente de variación sea igual a 30,55 %, es decir, alto.

9 **a.** No. Reúnen $ 409 550.
b. $ 409 750
c. $ 7 351,70048; $ 7 495,83218
d. En el primer caso. Debido a que su coeficiente de variabilidad es de 1,795 % versus 1,829 %.

10 **a.** $\frac{4}{7}$ y $\frac{3}{7}$. $ 392 857
b. $ 14 846
c. $\frac{1}{3}, \frac{1}{4}$ y $\frac{5}{12}$
d. $ 19 643, ya que el nuevo sueldo promedio es $ 412 500
e. No, el coeficiente de variación inicial es 3,78 % y el otro es 6,27 %, es decir, hay un aumento en variabilidad, por tanto, disminuye la homogeneidad de los sueldos.

11 668,8 puntos

12 81

13 $ 880

14 **a.** 20 **b.** 4,47 **c.** 49,69

15 **a.** 186,6 cm **b.** 40,54 **c.** 6,36
d. 3,41 %

16 **a.** $Var = 379\,950\,038{,}9$ **b.** $CV = 15{,}64\ \%$

17 **a.** $\overline{x_A} = 6{,}4$; $\overline{x_M} = 6{,}4$; $\overline{x_{MJ}} = 6{,}4$
b. desviación estándar A = 2,9; desviación estándar M = 2,49; desviación estándar MJ = 2,64
c. $CV_A = 45\ \%$; $CV_M = 38{,}97\ \%$; $CV_{MJ} = 41{,}3\ \%$
d. El alumno de excelencia académica es Marco

18 2,21 Kg.

19 55,83 %

20 $\frac{7}{12}$

21 **a.** 0,0622 **b.** $P(pedida) \approx 1{,}6\ \%$

Sucesos dependientes... probabilidad condicionada

Página 334 *Trabaja*

1 0,3

2 **a.** 0,75 **b.** 0,50

3 Son iguales.

4 53,8 %

5 67 % aprox.

6 **a.** $\frac{28}{73}$ **b.** $\frac{8}{23}$

7 $\frac{9}{13}$

8 **a.** $\frac{1}{13}$ **b.** $\frac{1}{10}$

9 20 %

10 45,71 %

Página 336 *Trabaja*

1 **a.** $\frac{81}{119}$ **b.** $\frac{11}{13}$ **c.** 0

2 $\frac{4}{15}$

3 Por ejemplo, puede ser que la probabilidad de que el turno 1 lo atienda, dado que viene con desperfectos mecánicos es $\frac{6}{11}$.

4 36 %

5 34 %

Tabulando las probabilidades

Página 349 *Trabaja*

1 **a.**
$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{39} \text{ si la bolita marca 1} \\ \frac{25}{78} \text{ si la bolita marca 2} \\ \frac{37}{78} \text{ si la bolita marca 3} \end{cases}$$

b. Si se define x como 1 si es palo corto y 2 si es palo largo, entonces:
$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{15} \text{ si } x = 1 \\ \frac{43}{45} \text{ si } x = 2 \end{cases}$$

2

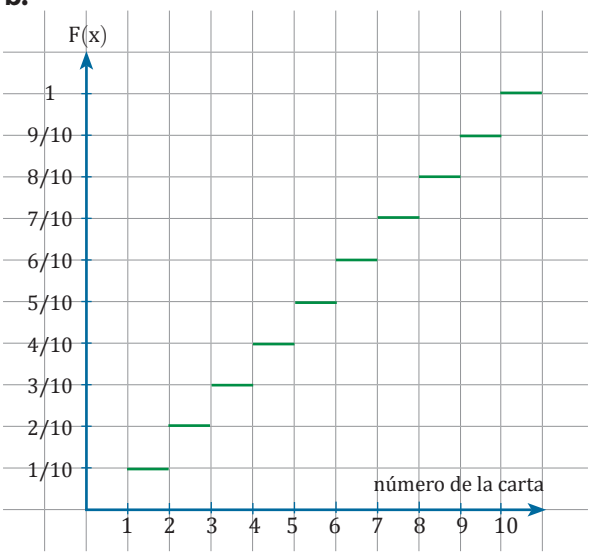
N° de la cara del dado	$P(X)$	$F(X \leq x)$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$
2	$\frac{4}{21}$	$\frac{41}{105}$
3	$\frac{1}{5}$	$\frac{62}{105}$
4	$\frac{4}{21}$	$\frac{82}{105}$
5	$\frac{1}{105}$	$\frac{83}{105}$
6	$\frac{4}{21}$	$\frac{103}{105}$
7	$\frac{1}{105}$	$\frac{104}{105}$
8	$\frac{1}{105}$	1

3

N° de sellos	$P(X)$	$F(X \leq x)$
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
2	$\frac{1}{4}$	1

4 **a.** $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{10} \text{ si } x = 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 \\ 0 \text{ en otros casos} \end{cases}$

b.



c. $\frac{5}{10}$ **d.** $\frac{2}{10}$ **e.** $\frac{4}{10}$

5 **a.**

N° de puerta	Probabilidad	Probabilidad acumulada
0	$\frac{12}{17}$	$\frac{12}{17}$
1	$\frac{2}{17}$	$\frac{14}{17}$
2	$\frac{3}{17}$	1

b. $E(x) = \frac{8}{17} \approx 0{,}47$

c. Lo esperado en este concurso es sacar una llave que no abra la puerta.

6 **a.** $m = \frac{3}{14}$

b. $E(x) = 2{,}57$. El jugador debiera esperar entre 2 y 3 tarjetas amarillas, estando más cercanas a tres.

7 **a.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{16} \text{ si la suma es 2 u 8} \\ \frac{2}{16} \text{ si la suma es 3 o 7} \\ \frac{3}{16} \text{ si la suma es 4 o 6} \\ \frac{4}{16} \text{ si la suma es 5} \end{cases}$$

b.

Suma de las caras	$F(X \leq x)$
2	1/16
3	3/16
4	6/16
5	10/16
6	13/16
7	15/16
8	16/16

c. $E(x) = 5$

d. $Var(x) = 2{,}5$

e. $S(x) = 1{,}58$

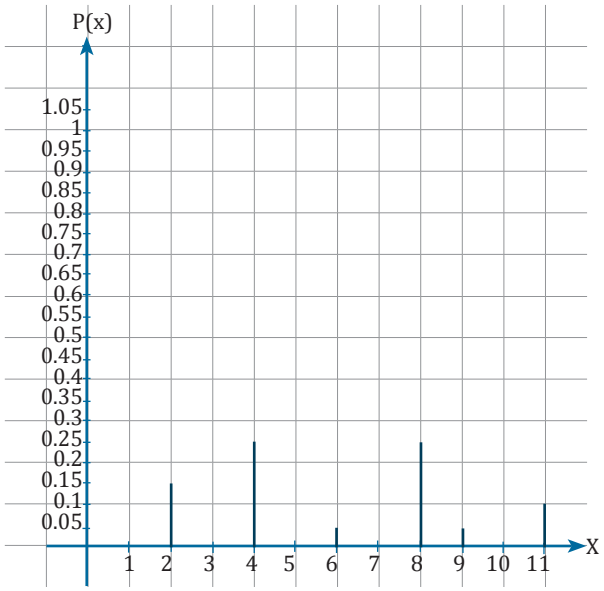
f. Al lanzar muchas veces los dados se espera que el valor para la suma de los puntos de las caras sea 5. Los valores no son muy dispersos, estos se concentran alrededor de 4 y 5.

8 **a.**

Valor de X	Probabilidad
2	$\frac{3}{20}$
4	$\frac{5}{20}$
6	$\frac{1}{20}$
7	$\frac{5}{20}$
8	$\frac{3}{20}$
9	$\frac{1}{20}$
11	$\frac{2}{20}$

b. $\frac{5}{20}$

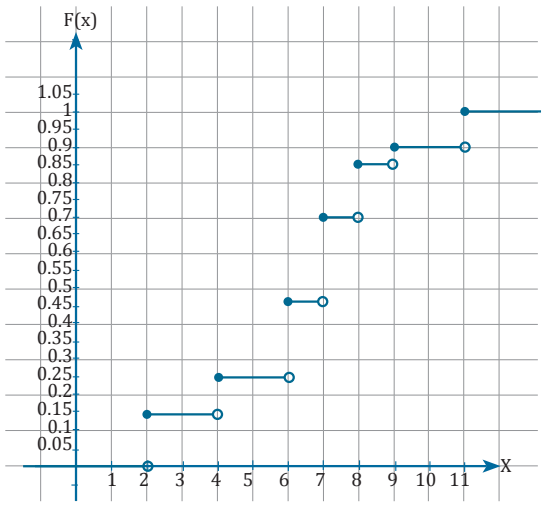
c.



d.

Valor de X	Probabilidad
$x < 2$	0
$2 \leq x < 4$	$\frac{3}{20}$
$4 \leq x < 6$	$\frac{8}{20}$
$6 \leq x < 7$	$\frac{9}{20}$
$7 \leq x < 8$	$\frac{14}{20}$
$8 \leq x < 9$	$\frac{17}{20}$
$9 \leq x < 11$	$\frac{18}{20}$
$11 \leq x$	$\frac{20}{20}$

e.



f. $\frac{3}{20}$

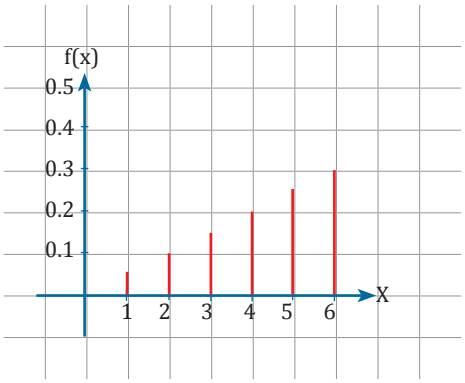
9 **a.** $f(1)=\frac{1}{21}; f(2)=\frac{2}{21}; f(3)=\frac{3}{21}; f(4)=\frac{4}{21};$ $f(5)=\frac{5}{21}$ y $f(6)=\frac{6}{21}$

b. $\frac{1}{21}$

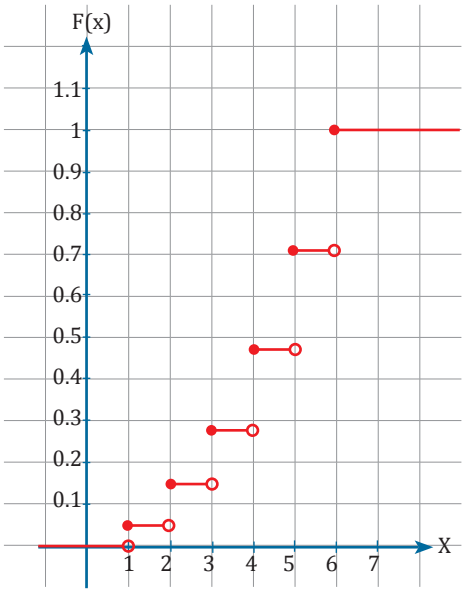
c.

Intervalos de X	$F(x)$
$x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	$\frac{1}{21}$
$2 \leq x < 3$	$\frac{3}{21}$
$3 \leq x < 4$	$\frac{6}{21}$
$4 \leq x < 5$	$\frac{10}{21}$
$5 \leq x < 6$	$\frac{15}{21}$
$6 \leq x$	$\frac{21}{21}$

d.



e.



f. $\frac{10}{21}$

10 $a = 0{,}3$

Página 350 *Trabaja*

1 **a.**

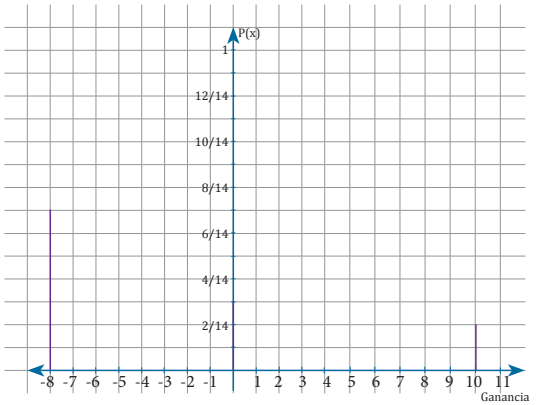
Ganancia	Probabilidad
40	$\frac{997}{1\,000}$
-17	$\frac{3}{1\,000}$

b. $E(x) = 39{,}871$. Debería esperar ganar $ 39 por caja aproximadamente.

2 **a.**

Ganancia	Probabilidad
-8	$\frac{1}{2}$
0	$\frac{3}{14}$
10	$\frac{2}{7}$

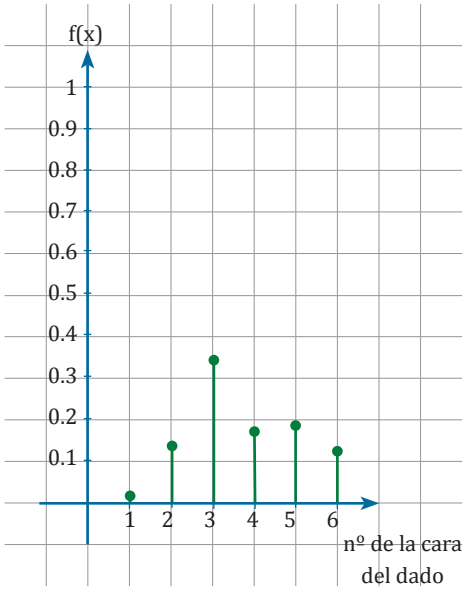
b.



c. $E(x) = -1{,}14$. Estela puede esperar perder entre 1 y 2 pesos.

d. Su hermano le debería aconsejar que no jugara. O bien, que lo hiciera para entretenerse un rato, lo que se espera perder no es mucho.

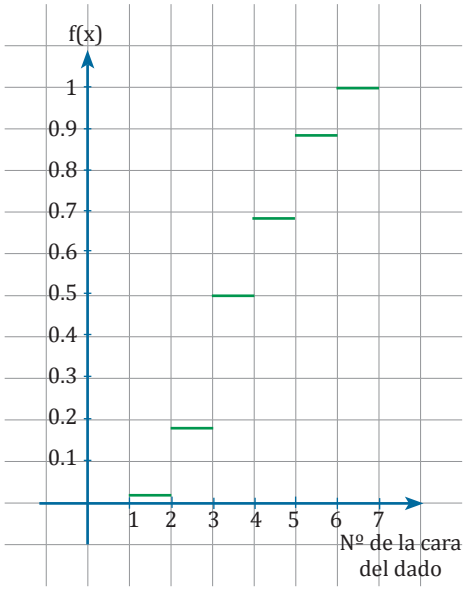
3 **a.**



b.

N° de la cara del dado	$F(x)$
1	0,02
2	0,17
3	0,50
4	0,68
5	0,87
6	1

c.



d. 0,50

e. 0,32

f. 3,76. Se obtendrá un número entre 3 y 4.

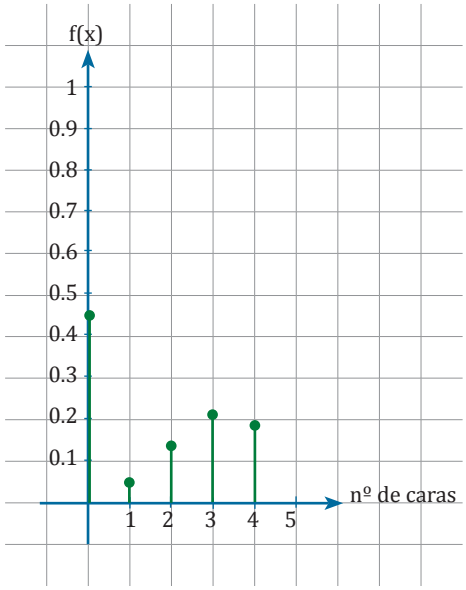
g. 1,7624

h. 1,33

4 **a.** $m = 0{,}19$

b. 0,52

c.



d. 1,68. Se debieran obtener entre 1 y 2 caras.

e. 2,45

f. 1,57

g. El número de caras que se obtendrán al lanzar las monedas se concentrarán entre las 0 y las 3 caras.

5 **a.**

N° de sombrero	Probabilidad
1	$\frac{7}{32}$
2	$\frac{2}{32}$
3	$\frac{5}{32}$
4	$\frac{6}{32}$
5	$\frac{4}{32}$
6	$\frac{8}{32}$

b.

N° de sombrero	F(x)
1	$\frac{7}{32}$
2	$\frac{9}{32}$
3	$\frac{14}{32}$
4	$\frac{20}{32}$
5	$\frac{24}{32}$
6	1

Si, por ejemplo, se quiere $P(x \leq 2)$, significa la probabilidad que sea escogido el sombrero 1 o 2.

c. $E(x) \approx 3{,}69$. Es decir, entre el sombrero 3 y 4. Por lo tanto, debe esperar ir con sombrero de pita o de ala ancha.

d. $Var(x) = 3{,}39$

e. $S(x) = 1{,}84$. Es decir, el rango de variación, considerando la media, será entre 1,85 a 5,53. Por lo tanto, la mayoría de las veces tendrá mayor probabilidad de escoger sombreros entre el 2 y el 5, o sea, jockey, pita, ala ancha o vaquero.

Distribuciones de probabilidad...
Distribución Binomial

Página 364 *Trabaja*

1 a. $\binom{20}{4} \cdot \left(\frac{7}{13}\right)^4 \cdot \left(\frac{6}{13}\right)^{16} \approx 0{,}0018 = 0{,}18\ \%$

b. $\sum_{k=0}^{4} \binom{30}{k} \cdot \left(\frac{6}{13}\right)^k \cdot \left(\frac{7}{13}\right)^{30-k} \approx 0{,}00015 = 0{,}015\ \%$

c. $\binom{40}{3} \cdot \left(\frac{6}{13}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{13}\right)^{37} \approx 1{,}097 \cdot 10^{-7} = 0\ \%$

2 a. Es dicotómica: existe solo éxito o fracaso. La probabilidad se mantiene constante en las diversas repeticiones del experimento.

b. $X \sim B\left(n, \frac{1}{3}\right)$, entonces:

$$F(X) = \sum_{i=0}^{3} \binom{n}{i} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-i}$$

c. $\binom{20}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{17} \approx 0{,}043 = 4{,}3\ \%$

d. $1 - \binom{45}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{42} \approx 0{,}999 = 99{,}9\ \%$

e. $\binom{100}{3} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{97} \approx 4{,}9 \cdot 10^{-14} = 0\ \%$. Mientras el experimento se repita una mayor cantidad de veces, la probabilidad de ganar se hacer menor.

3 a. $\binom{400}{3} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^3 \cdot \left(\frac{49}{50}\right)^{397} \approx 2{,}78\ \%$

b. $\sum_{k=0}^{5} \binom{500}{k} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^k \cdot \left(\frac{49}{50}\right)^{500-k} \approx 6{,}58\ \%$

c. $\binom{600}{2} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^2 \cdot \left(\frac{49}{50}\right)^{598} \approx 0{,}041\ \%$

d. $\sum_{k=0}^{3} \binom{100}{k} \cdot \left(\frac{1}{50}\right)^k \cdot \left(\frac{49}{50}\right)^{100-k} \approx 85{,}9\ \%$

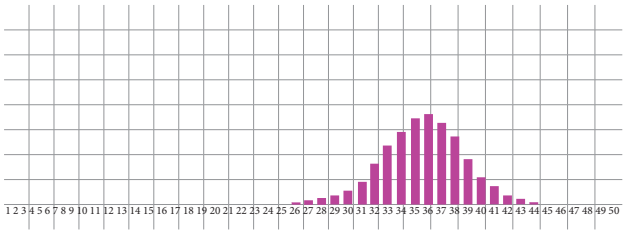
4 a. $\binom{50}{6} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^6 \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{44} \approx 2{,}429 \cdot 10^{-18} = 0\ \%$

b.

$$\sum_{k=0}^{3} \binom{50}{k} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^k \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{50-k} \approx 7{,}26 \cdot 10^{-5} \approx 0{,}0073\ \%$$

c. $\binom{50}{10} \cdot \left(\frac{2}{7}\right)^{10} \cdot \left(\frac{5}{7}\right)^{40} \approx 0{,}0532 = 5{,}32\ \%$

d.



5 a. $\binom{100}{60} \cdot (0{,}53)^{60} \cdot (0{,}47)^{40} \approx 0{,}0301 = 3{,}01\ \%$

b.

$$\sum_{k=0}^{4} \binom{100}{k} \cdot (0{,}53)^k \cdot (0{,}47)^{100-k} \approx 1{,}067 \cdot 10^{-26} = 0\ \%$$

c. $\binom{100}{50} \cdot (0{,}47)^{50} \cdot (0{,}53)^{50} \approx 0{,}0665 = 6{,}65\ \%$

6 a. 32,77 %
b. 40,96 %
c. 26,27 %
d. 26,24 %

7 a. No. Porque dicha probabilidad es de aproximadamente 4,9 %.
b. 29,85 %
c. No importa el orden en que se aparezca los cinco éxitos en las sietes pruebas.
d. 99,23 %
e. 34,51 %

8 a. 0,2461 **b.** 0,999 **c.** 0,623

9 a. 0,3456 **b.** 0,4752

10 13 %

Página 365 *Trabaja*

1 **a.** $\binom{20}{5}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^5\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{15}\approx 0{,}0013 = 0{,}13\ \%$

b. $\sum_{k=0}^{2}\binom{20}{k}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^k\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{20-k}\approx 5{,}041\cdot 10^{-6} = 0{,}000504\ \%$

c. $\binom{20}{1}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^1\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{19}$
$\approx 3{,}299\cdot 10^{-7} = 0{,}000033\ \%$

d. 1° caso: $\binom{30}{2}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^2\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^{28}$
$\approx 1{,}13\cdot 10^{-9} = 1{,}13\cdot 10^{-7}\ \%$,
2° caso: $\binom{10}{7}\cdot\left(\frac{3}{5}\right)^7\cdot\left(\frac{2}{5}\right)^3\approx 0{,}215 = 21{,}5\ \%$
Es mejor la 2° situación.

e. Sí, tenía razón Margarita, pues la probabilidad de **a.** es muy baja, entonces Margarita sabía que su hermana perdería.

2 **a.** Es la función de probabilidad:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{27}\text{ si hay 0 mujeres}\\ \frac{2}{9}\text{ si hay 1 mujer}\\ \frac{4}{9}\text{ si hay 2 mujeres}\\ \frac{8}{27}\text{ si hay 3 mujeres}\end{cases}$$

b. $F(x)=\sum_{k=0}^{3}\binom{3}{k}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^k\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{3-k}$

c. $\frac{1}{27}$

d. $P(x\leq 2)=\frac{19}{27}$

e. $P(\text{a lo menos un hombre}) =$
$1-P(x=3)=1-\frac{8}{27}=\frac{19}{27}$

3 **a.** Es la función de probabilidad:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{3\,125}\text{ si resuelve 0 casos}\\ \frac{4}{625}\text{ si resuelve 1 caso}\\ \frac{32}{625}\text{ si resuelve 2 casos}\\ \frac{128}{625}\text{ si resuelve 3 casos}\\ \frac{256}{625}\text{ si resuelve 4 casos}\\ \frac{1\,024}{3\,125}\text{ si resuelve 5 casos}\end{cases}$$

b. $F(x)=\sum_{k=0}^{5}\binom{5}{k}\cdot(0{,}8)^k\cdot(0{,}2)^{5-k}$

c. 66,6 %

d. Equivale a que se resuelvan 2 o 3 casos, es decir, 25,6 %.

e. $P(0)=0{,}032\ \%$

f. $p(x<0)=0\ \%$; $p(x\geq 5)=1$

4 **a.** 0,45 % **b.** 67,23 % **c.** 38,1 %

5 **a.** $7{,}58\cdot 10^{-7}\ \%$ **b.** $9{,}2\cdot 10^{-4}\ \%$ **c.** 0,144 %

Página 368 *Trabaja más...*

I. Probabilidad condicionada

1 (2 %;5,1 %)

2 **a.** $\frac{1}{6}$ **b.** $\frac{13}{20}$

3 **a.** 8 **b.** $\frac{3}{7}$ **c.** 0,625 **d.** 0,125

4 $\frac{3}{7}$

5 Sí, porque $P(A/B)=\frac{5}{8}$ y $P(B/A)=\frac{25}{44}$

6 **a.** $\frac{5}{24}$ **b.** $\frac{21}{24}$

7 **a.** $\frac{7}{55}$ **b.** $\frac{2}{5}$ **c.** $\frac{48}{55}$ **d.** $\frac{3}{5}$

8 **a.** $\frac{1}{9}$ **b.** $\frac{1}{9}$ **c.** $\frac{1}{4}$ **d.** $\frac{2}{9}$ **e.** $\frac{1}{12}$

9 11,25 %

10 **a.** $\frac{1}{2}$ **b.** $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{1}{3}$ **d.** $\frac{1}{6}$

11 32 %

12 **a.** 11,7 % **b.** 15 % **c.** 6,7 %

13 $\frac{1}{6}$, aproximadamente un 17 %

14 **a.** $\frac{2}{21}$ **b.** $\frac{5}{829}$ **c.** $\frac{4}{9}$ **d.** $\frac{10}{29}$ **e.** $\frac{1}{56}$

15 **a.** $\frac{7197}{7\,500}$

b. Sí, ya que, $p(\overline{d}/A\cup B)\approx 97{,}41\ \%$ versus $p(\overline{d}/C)=95\ \%$

c. 1,95 %. Si al elegir al azar un LCD, la probabilidad de que aparezca con algún defecto y haya sido producido por la máquina robotizada C, es de un 1,95 %

d. Sí, porque $p(d/A)p(A) + p(d/B)p(B) + p(d/C)p(C) = 0{,}5\ \% + 1{,}08\ \% + 1{,}95\ \%$. El total es $3{,}53\ \%$. Por otro lado, la probabilidad de un LCD sin defectos detalladamente es $p(d \cap A) = 0{,}02 \cdot 0{,}25 = 0{,}005$, $p(d \cap B) = 0{,}03 \cdot 0{,}36 = 0{,}0108$ y $p(d \cap C) = 0{,}05 \cdot 0{,}39 = 0{,}195$. Al sumarlas y expresar porcentualmente el total, tenemos $p(d) = 3{,}53\ \%$

e. 409,10 dólares.

II. Función de probabilidad y función de distribución acumulada.

1 **a.**

Intervalos de X	$F(x)$
$x < 0$	0
$0 \leq x < 2{,}5$	0,20
$2{,}5 \leq x < 4$	0,25
$4 \leq x < 5{,}5$	0,40
$5{,}5 \leq x < 7$	0,65
$7 \leq x$	1

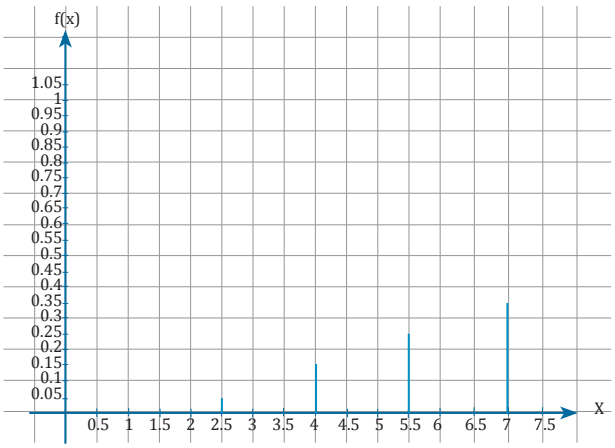
b. La función de probabilidad evaluada en 5,5, es decir, la probabilidad de aparición de 5,5

c.

Valor de X	$f(X)$
0	0,20
2,5	0,05
4	0,15
5,5	0,25
7	0,35

d. 7. 0,35

e.



f. ¿Cuál es el valor de $p(4 \leq x \leq 7)$? 0,75

2

X	Probabilidad $P(X)$
0	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$

3

X	Probabilidad $P(X)$
1	$\frac{10}{36}$
2	$\frac{8}{36}$
3	$\frac{6}{36}$
4	$\frac{4}{36}$
5	$\frac{2}{36}$

4 $a = 0{,}40$

5 **a.** $E(X) = 3{,}68$

b. $V(X) = 3{,}177$

6 **a.** $F(2) = P(x \leq 2) = 0{,}53$

b. $F(4) = P(x \leq 4) = 0{,}8$

c. $P(x > 3) = 0{,}35$

7 $a = 0{,}16$; $b = 0{,}45$; $c = 0{,}86$

8 $E(X) = 50$; el jugador espera ganar $\$\ 50$ al término del juego.

9 $a = 0{,}1$ y $b = 0{,}4$

10 $E(X) = 4{,}8$

11 **a.** $V(X) = 3{,}49$

b. 1,86

12 **a.** $V(X) = 3{,}7$

b. $\sqrt{V(X)} = 1{,}92$

13 **a.** Positivo, porque la esperanza es 0,001, es decir, mayor a cero.

b. $123{,}932699 \approx 123{,}9327$

c. Sí. Los números: -9, 0,7 y 8, pues está comprendido entre $-11{,}132$ y 11,136.

d. La cantidad es 19. La nueva esperanza matemática es 19,001, y se calcula desarrollando:
$0{,}24 \cdot 33 + 0{,}15 \cdot 27 + 0{,}13 \cdot 0 + 0{,}25 \cdot 10 + 0{,}23 \cdot 19{,}7$

e. $123{,}932699 \approx 123{,}9327$. Es el mismo valor que el obtenido en **b.** Si a cada valor de la variable se le agrega una cierta cantidad, su esperanza varía en dicha cantidad, pero la varianza no cambia su valor.

14 **a.** $-\$\,26{,}446 \approx -\$\,26$. No, termina perdiendo dicha cantidad.

b. A partir de $\$\,0$ hasta inclusive $\$\,164$.

15 **a.** 3,6

b. 2,04

c. $1{,}42828569 \approx 1{,}43$

d. Aproximadamente 11,1 %

III. Distribución binomial

1 **a.** 0,2322

b. 0,317

c. 0,9832

d. 0,0142

e. 1

2 0,124

3 **a.** 0,75

b. 0,36

4 **a.** $7{,}797 \cdot 10^{-3}$

b. 0,9999

c. $5{,}31 \cdot 10^{-7}$

d. 0,1175

5 **a.** 0,0916

b. 0,9999

6 **a.** 0,2587

b. 0,9417

c. 0,0582

d. 0,8055

7 **b.** Sí. Porque equivale a $1 - P(5)$, esto es, $1 - 0{,}05032844 = 0{,}94967156$.

c.

Número de logros en cinco ensayos k	Probabilidad $P(k)$	$P(k) \cdot k$
0	0,01845281	0
1	0,11276719	0,11276719
2	0,27565313	0,55130625
3	0,33690938	1,01072813
4	0,20588906	0,82355625
5	0,05032844	0,25164219
Total $\rightarrow$	1	2,75

Sí.

d. $E(X) = 2{,}75 = 5 \cdot 0{,}55$

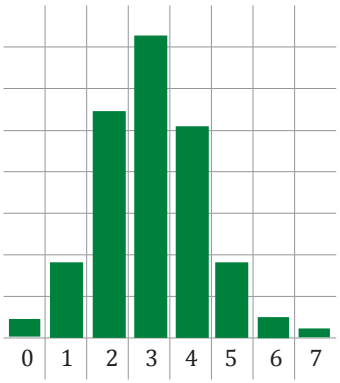
e. Si X es una variable aleatoria, tal que $X \sim B(n,p)$, donde n es el número de ensayos y p es la probabilidad de logro, éxito, acierto, etc., entonces $E(X) = n \cdot p$

8 **a.** aprox. 0,234, un 23,4 %

b. aprox. 0,35, un 35 %

c. aprox. 0,025, un 2,5 %

d.



9 **a.** $4{,}38 \cdot 10^{-47}$

b. $1{,}16 \cdot 10^{-43}$

c. $3{,}51 \cdot 10^{-49}$

d. $8{,}74 \cdot 10^{-41}$

10 **a.** 28 %

b. 42 %

c. 94 %

d. 6 %

e. 1 %

11 **a.** 0,031 aprox.

b. 0,928 aprox.

c. 0,997 aprox.

d. 0,54 aprox.

12 **a.** 18,6%

b. 5,3%

c. 0,4%

d. $6{,}57 \cdot 10^{-6}$ %

e. 19,5%

IV. Ejercicios Misceláneos

1 **a.** $\frac{2}{3}$

b. $\frac{1}{3}$

2 **a.** 53,85 %

b. 45,16 %

c. $P(\text{mujer, si no proviene de América}) = 56{,}41$ %, ya que la otra es 43,59 %

d. $P(\text{no sea mujer, si proviene de América}) = 53{,}85$ % es mayor, porque $P(\text{mujer, si no proviene del resto del mundo})$ es 46,15 %

3 **a.** $\frac{3}{8}$

b. $\frac{5}{8}$

c. $\frac{15}{56}$

d. $\frac{5}{14}$

e. Sí, porque la extracción, sin reposición, de una bola, el cual constituye en sí un suceso, influye en la probabilidad de la elección de otra bola y ver su color en la siguiente extracción. Esto último constituye el suceso dependiente.

4 **a.** $\frac{21}{32}$ **b.** $\frac{15}{32}$

5 $\frac{1}{9}$

6 **a.** $\frac{5}{9}$ **b.** $\frac{15}{90}$ **c.** $\frac{24}{40}$

7 **a.** $\frac{5}{54}$ **b.** $\frac{111}{170}$

8 **a.** $\frac{4}{15}$ **b.** $\frac{16}{25}$

9 $\frac{1}{2}$

10 **a.** 0,286 **b.** 0,428

11 **a.** 0,0881 **b.** 0,6363

12 **a.** 0,825 **b.** 0,0467 **c.** 0,40901

13 **a.** 0,3

b. $\frac{97}{129}$

c. $\frac{31}{122}$

d. No. Porque comparando, $p(\text{fumador moderado/hipotenso}) = \frac{21}{95} \approx 22{,}11$ % y $p(\text{hipertenso/no es fumador}) = \frac{43}{169} \approx 25{,}44$ %, por lo tanto, la $p(\text{hipertenso/no es fumador})$ es mayor.

e. No. Tenderán a fumar moderadamente ya que la esperanza matemática es aproximadamente 1,27.

f. Sí, a pesar que tenderá a disminuir el consumo, mantendrá su conducta de fumar moderadamente , porque el valor de la esperanza es 0,73684211.

g. No. La esperanza es 0,9047619, no tiende a cero, pues está en la cercanía de fumar moderadamente.

14 **a.**

X	Probabilidad $P(X)$	Probabilidad acumulada $P(X \leq x)$
0	0,1	0,1
1	0,25	0,35
2	0,05	0,4
3	0,3	0,7
4	0,3	1

b. $E(X) = 3{,}45$

c. $V(X) = 1{,}94$

d. $\sqrt{V(x)} = 1{,}39$

15 **a.** y **b.**

X	Probabilidad $P(X)$	Probabilidad acumulada $P(X \leq x)$
0	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{16}$
1	$\frac{4}{16}$	$\frac{5}{16}$
2	$\frac{6}{16}$	$\frac{11}{16}$
3	$\frac{4}{16}$	$\frac{15}{16}$
4	$\frac{1}{16}$	$\frac{16}{16}$

c. $E(X) = 2$ **e.** $\sqrt{V(x)} = 1$

d. $V(X) = 1$

16 **a.** y **b.**

X	Probabilidad $P(X)$	Probabilidad acumulada $P(X \leq x)$
0	0,034	0,034
1	0,279	0,313
2	0,489	0,802
3	0,195	1

c. $E(X) = 1{,}842$ **e.** $\sqrt{V(x)} = 0{,}765$

d. $V(X) = 0{,}5867$

17 **a.** y **b.**

X	Probabilidad $P(X)$	Probabilidad acumulada $P(X \leq x)$
0	0,2758	0,2758
1	0,5149	0,7907
2	0,2092	1

c. $E(X) = 0{,}9333$

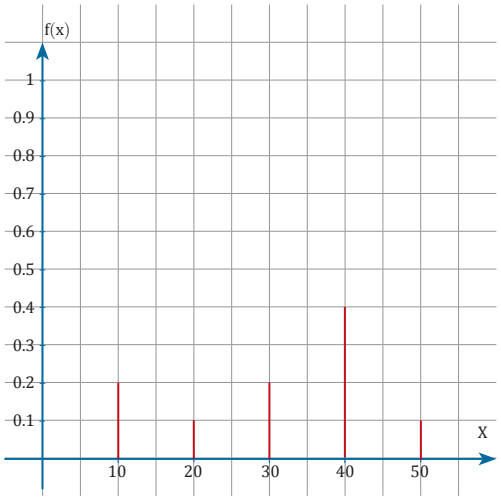
18 **a.** 0,7

b. 0,9

c. 0,1

d. $f(20) = 0{,}1; f(30) = 0{,}2; f(40) = 0{,}4$

e.

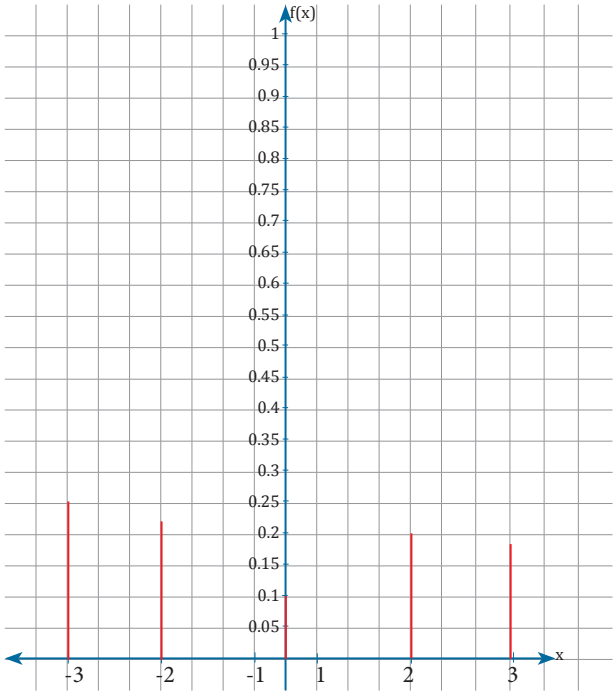


f. 31

19 **a.** $f(-3) = 0{,}25; f(-1) = 0{,}23; f(0) = 0{,}10; f(2) = 0{,}23$, y $f(3) = 0{,}19$

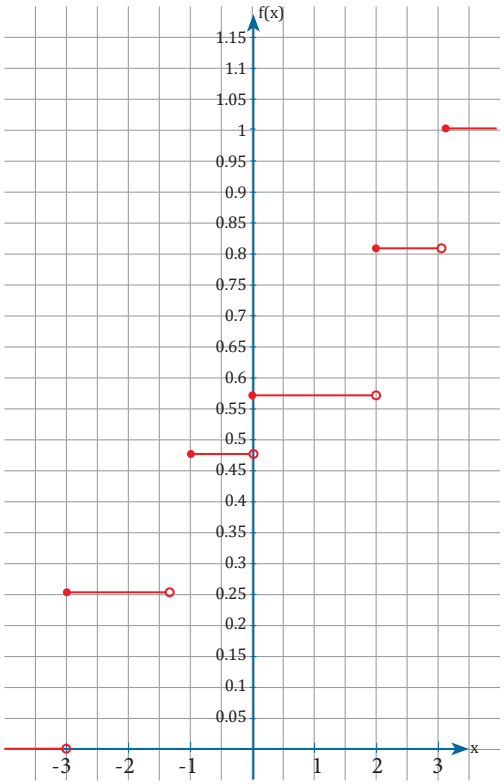
b. 0,54. Que se pierda un punto o se gane dos puntos. 0,46

c.



d. $F(X) = \begin{cases} 0 & x < -3 \\ 0{,}25 & -3 \leq x < -1 \\ 0{,}48 & -1 \leq x < 0 \\ 0{,}58 & 0 \leq x < 2 \\ 0{,}81 & 2 \leq x < 3 \\ 1 & 3 \leq x \end{cases}$

e.



f. No. El valor es $p(x \leq 0) = 0{,}58$

20 **a.** 2,1

b. Es el valor que está en el centro, al escribir de manera creciente los valores que toma la variable aleatoria.

c. $V(X) = 0{,}9666$

21 **a.** 2,1

b. Sí. Es 0,891, es decir, distinto a la original 0,9666.

c. Por ejemplo: $p(0) = 0{,}02 = p(4{,}2)$; $p(0{,}6) = 0{,}11 = p(3{,}6)$; $p(1{,}8) = 0{,}24 = p(2{,}4)$ y $p(2{,}1) = 0{,}22$

d. Permanece igual, es decir, 2,1.

e. Si una variable aleatoria X, que tiene un número impar de valores que puede tomar, y además su gráfica es simétrica, entonces la esperanza matemática es el valor central de X.

22 0,1

23 **a.** 9

b. 10,5

c. 3,24

24 **a.** 10,8 %

b. 20,4 %

c. 15,2 %

25 **a.** $\frac{2}{3}$

b. $\frac{4}{9}$

c. $\frac{11}{50}$

26 **a.** 0,052

b. 0,66

27 **a.** 75 %

b. 1 %

c. 5 %

d. 86,67 %

e. 86,67 %. Porque el suceso de "que un penal se ataje" depende del suceso: "que el portero titular esté presente y lo ataje", o bien, del suceso: "el portero suplente esté presente y lo ataje". Pero estos dos últimos sucesos son los que están descritos en **d.** Por lo tanto, la probabilidad de que un penal se ataje, evitando así un gol es simplemente la probabilidad expresada en **d.**

f. 86,54 %

28

	8º	2 M	3M	
Mujeres	95	65	40	200
hombres	115	50	15	180
	210	115	55	380

a. $\frac{1}{4}$

b. $\frac{3}{11}$

c. $\frac{23}{76}$

d. 25,07 %

e. 3,95 %

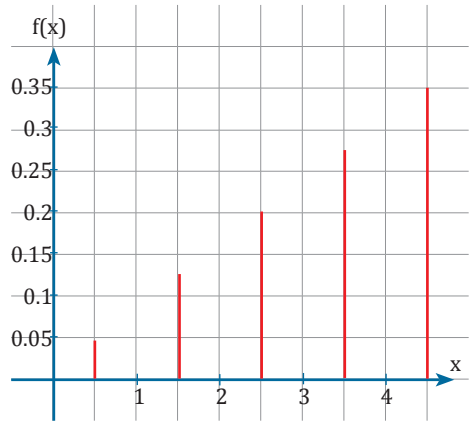
f. 91,34 %

g. 47,44 %

29 **a.** $\frac{3}{5}, \frac{8}{5}, \frac{13}{5}, \frac{18}{5}$ y $\frac{23}{5}$

b. $f\left(\frac{3}{5}\right) = \frac{3}{65}, f\left(\frac{8}{5}\right) = \frac{8}{65}, f\left(\frac{13}{5}\right) = \frac{13}{65}, f\left(\frac{18}{5}\right) = \frac{18}{65}$ y $f\left(\frac{23}{5}\right) = \frac{23}{65}$

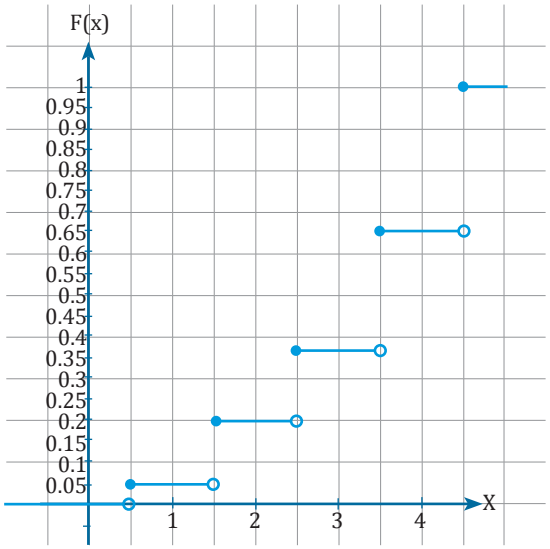
c.



d. $\frac{219}{65}$

e. $F(X) = \begin{cases} 0 & x < \frac{3}{5} \\ \frac{3}{65} & \frac{3}{5} \leq x < \frac{8}{5} \\ \frac{11}{65} & \frac{8}{5} \leq x < \frac{13}{5} \\ \frac{24}{65} & \frac{13}{5} \leq x < \frac{18}{5} \\ \frac{42}{65} & \frac{18}{5} \leq x < \frac{23}{5} \\ 1 & \frac{23}{5} \leq x \end{cases}$

f.



30 **a.** 10 %

b. Sí. Porque cada informe contiene la fecha de cumpleaños de cada beneficiario. Por tanto el número de informes de un mes determinado, representa al número de beneficiarios de dicho mes. En particular, $p(X = 2)$ es igual a 5 %. Esto es, la probabilidad de elegir uno de los beneficiarios atendidos por Belén, y cuyo cumpleaños sea en febrero.

c. * Ver tabla

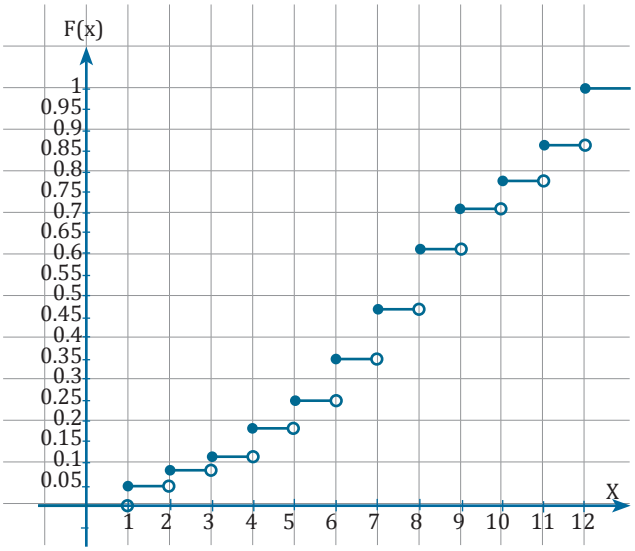
d.

Intervalos de X	$F(X)$
$x < 1$	0
$1 \leq x < 2$	0,03
$2 \leq x < 3$	0,08
$3 \leq x < 4$	0,11
$4 \leq x < 5$	0,17
$5 \leq x < 6$	0,24
$6 \leq x < 7$	0,34
$7 \leq x < 8$	0,46
$8 \leq x < 9$	0,61
$9 \leq x < 10$	0,71
$10 \leq x < 11$	0,78
$11 \leq x < 12$	0,86
$12 \leq x$	1

*

$f(1) = 0{,}03$	$f(2) = 0{,}05$	$f(3) = 0{,}03$	$f(4) = 0{,}06$	$f(5) = 0{,}07$	$f(6) = 0{,}10$
$f(7) = 0{,}12$	$f(8) = 0{,}15$	$f(9) = 0{,}10$	$f(10) = 0{,}07$	$f(11) = 0{,}08$	$f(12) = 0{,}14$

e.



f. Responde al valor de la probabilidad de elegir al azar, un informe comprendido entre enero y septiembre, ambos incluidos. También responde a la probabilidad de encontrar uno de los beneficiarios atendidos por Belén, y cuyo cumpleaños no se celebre, ni en octubre, ni en noviembre, ni en diciembre.

g. 40 %

h. El gráfico presentado en este problema, puede rápidamente transformarse en una representación gráfica de la función de probabilidad. ¿Qué cambios harías respecto de los nombres y la graduación de los semiejes, como también de los rectángulos? Respuesta: Respecto del semieje horizontal, se debiera nombrar por el nombre de la variable aleatoria X, y remplazar cada mes, por el valor asociado de la variable aleatoria. En el semieje vertical, cambiar "número total" por probabilidad (%), y cada número de la graduación dividirlo por 100, ya que este es el número de beneficiarios que deben ser saludados por Belén. Finalmente, cambiar cada rectángulo por una varilla vertical de igual longitud a él.

31 **a.** 13

b. 52

c. A partir del 8 hasta finalizar con el 18.

d. 55,47 %

e. Los valores están muy alejados de la esperanza.

32 **a.** En una gran venta de cajas de paquetes ¿qué utilidad tienen por paquete, si el ocho por ciento de la producción de la primera, y el nueve por ciento de *Fideos Celestinos* aparece mal rotulados? $ 101 para ambas.

b. No, ambas perciben la misma utilidad neta por unidad.

c. Para *Fideos Alcahuetes*: $ 10, y $ 12 para la otra empresa.

d. *Fideos Celestinos* tiene una ventaja de $ 2 sobre la otra.

e. Solo *Fideos Celestinos* con $ 221 de utilidad, versus *Fideos Alcahuetes* con $ 218

f. 36 %

g. Por ejemplo: ¿Qué tan probable es que de diez paquetes de *Fideos Alcahuetes* y elegidos al azar, aparezcan tres mal rotulados? 3,43 %.

33 **a.** No les favorecía porque la esperanza es $-\$\ 17$.

b. Aproximadamente $ 489.

34 **a.** 64,96 %

b. Sí, porque es aproximadamente 0,16 %.

c. 0,2 %

d. 2,8 %

e. Que Kenita no estalle en ninguna de las diez llamadas porque no encuentre ningún teléfono ocupado.

35 **a.** 21,10 %

b. 1,81 %

c. 30,36 %

d. 9,22 %

e. La probabilidad de que en 11 edificios fiscalizados hayan 2 o 5 que presenten anomalías en las medidas de seguridad o bien ninguno.

36 **a.** 16,12 %

b. 25,08 %

c. 6,28 %

d. 2,12 %

e. 0,026 %

f. 0,07 %

37 **a.** 100 %, porque con solo dos intervenciones se logra un 29,85 % de recuperación.

b. 100 %, ya que con tres intervenciones se logra un 26,78 % de recuperación.

c. 0 %, debido a que la probabilidad aludida es de un 18,48 %

d. 0 %. Basta observar lo respondido en **a.** o **b.**

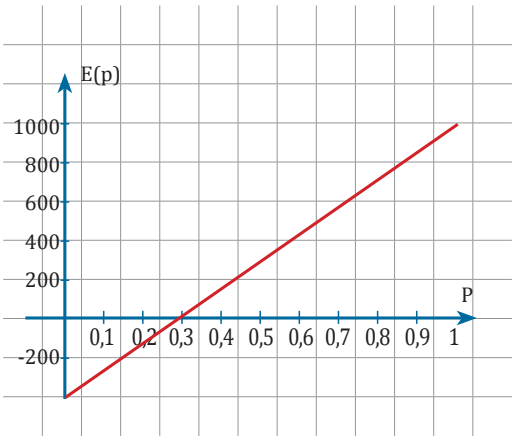
e. 100 % pues dicha probabilidad es 9 %, inferior a 25 %

38 **a.** $E(X) = 1000p - (1 - p)350$

b. La fórmula se puede reescribir como $E(X) = 1350p - 350$. Es del tipo: $y = mx + n$, donde $E(x) = 1\,350p + 350$ (y, m, x, n)

c. Corresponde a que por cada 0,1 unidad que cambie la probabilidad, se produce un cambio de $ 135 en el valor de la esperanza matemática.

d.

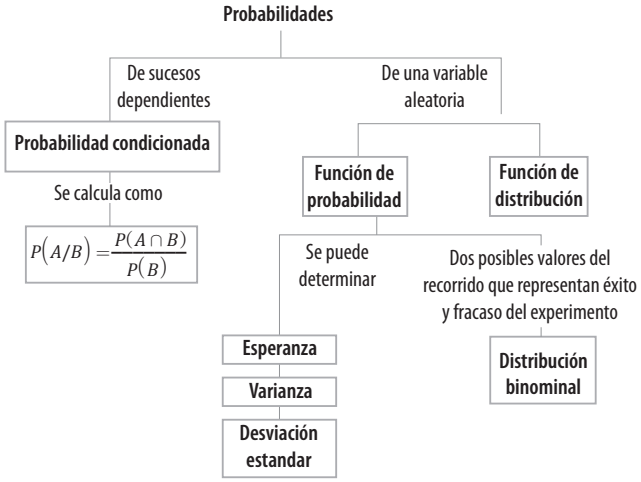


e. Mayor que $\frac{14}{27} \approx 0{,}519$

Evaluación de la Unidad 5

Página 387

Síntesis conceptual



Evaluación de la unidad

I.

1 V	**4** V	**7** F	**10** F
2 F	**5** F	**8** V	
3 F	**6** F	**9** V	

II.

1 **a.** $\frac{3}{5}$ **c.** $\frac{11}{20}$

b. $\frac{2}{5}$ **d.** $\frac{11}{15}$

2 **a.** $\frac{13}{80}$ **b.** $\frac{32}{45}$

3 **a.** 0,625 **c.** 0,375

b. 0,6

4 **a.** $\frac{2}{15}$ **b.** $\frac{7}{25}$

5 **a.** y **b.**

X	Probabilidad $P(X)$	Probabilidad acumulada $P(X \leq x)$
15	0,15	0,15
20	0,18	0,33
30	0,25	0,58
45	0,42	1

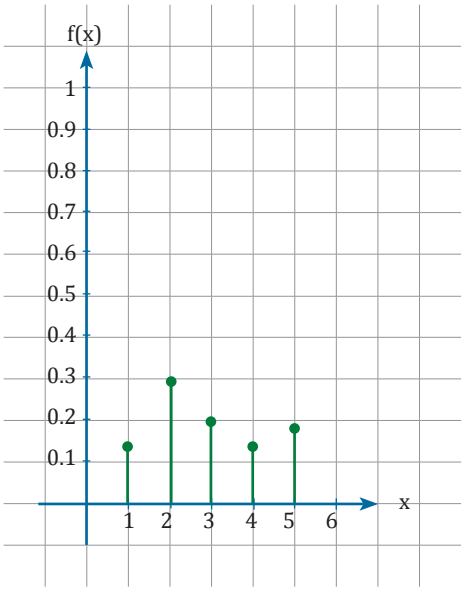
c. 0,15 **f.** 0,58

d. 1 **g.** 0,85

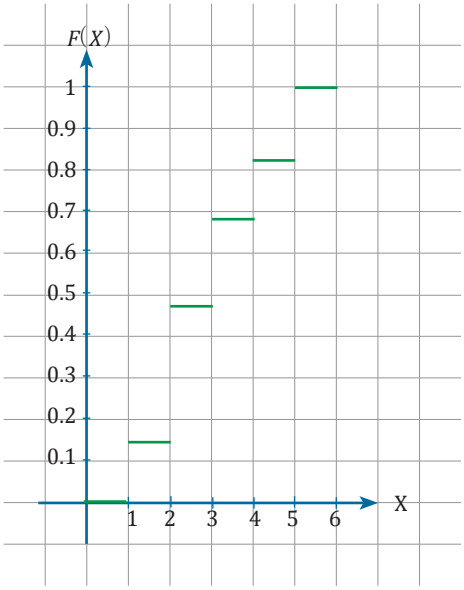
e. 0,33

6 **a.** 0,14

b.



c.



d. 2,86

e. 1,85

f. 1,36

7 **a.** y **b.**

X	Probabilidad $P(X)$	Probabilidad acumulada $P(X \leq x)$
0	0,3276	0,32768
1	0,4096	0,73728
2	0,2048	0,94208
3	0,0512	0,99328
4	0,0064	0,99968
5	0,00032	1

c. 0,2048

d. 0,99328

e. $E[X] = 1$

f. $\sqrt{V[X]} = 0{,}8$

8 **a.** 0,0824

b. 0,0002

c. 0,6705

9 **a.** $\frac{18}{30}$

b. $\frac{8}{33}$

10 **a.** $0{,}103 = 10{,}3\ \%$

b $0{,}455 = 45{,}5\ \%$

11 **a.** 2,4 %

b. 84,4 %

c. 84,4 %

III.

1 1,53 % aprox.

2 **a.** 75 %

b. 43 %

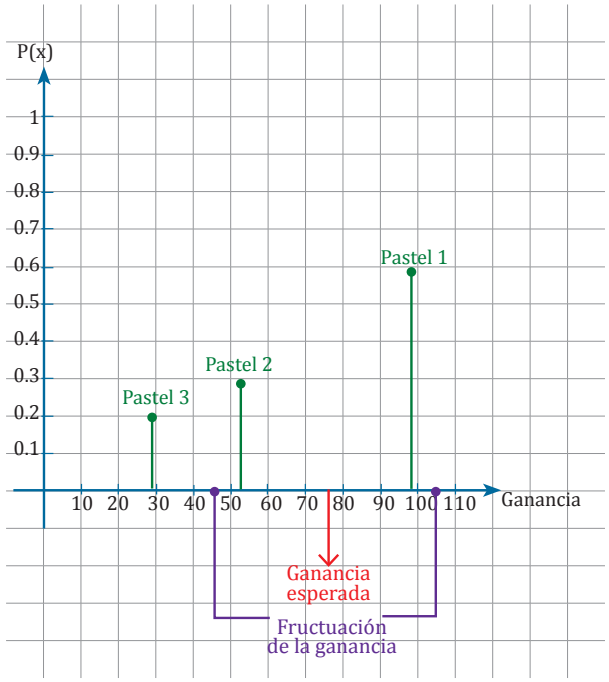
3 **a.** $\frac{67}{97}$

b. $\frac{25}{53}$

4 **a.** $ 73,52 por pastel en promedio aprox., es decir, $ 73

b. Como la desviación estándar es igual 27,49, entonces la ganancia promedio debería fluctuar entre los 46,03 y los 101,01, es decir, entre $ 46 y $ 101 en promedio por pastel.

c.



5 **a.** 21,44 %
b. 2,1
c. 2,6
d. 1,6

6 **a.** $k = 0{,}2092;\ p = 0{,}4942$
b. 0,8368
c. 0,5575
d. 0,0623

7 **a.** 2,73 %
b. 14,4 %
c. 36,4 %
d. 0,04 %

IV.

1 d.	**11** b.	**21** d.	**31** c.
2 d.	**12** c.	**22** d.	**32** a.
3 b.	**13** d.	**23** a.	**33** b.
4 c.	**14** b.	**24** e.	**34** c.
5 d.	**15** d.	**25** c.	**35** e.
6 a.	**16** a.	**26** c.	**36** d.
7 d.	**17** d.	**27** e.	**37** b.
8 a.	**18** d.	**28** b.	**38** d.
9 c.	**19** b.	**29** a.	**39** b.
10 e.	**20** b.	**30** b.	**40** b.

Evaluación de síntesis 4

Página 399

I.

1 $10 + 55\,i$

2 El reflejo del complejo con respecto al eje x.

3 Complejos.

4 $\left(\frac{5}{6}, -\frac{37}{12}\right)$

5 Negativa.

6 El doble.

7 $y = -x$

8 $-\frac{1}{m}$

9 Valor promedio que se espera tenga la variable.

10 $\frac{4}{243}$

II.

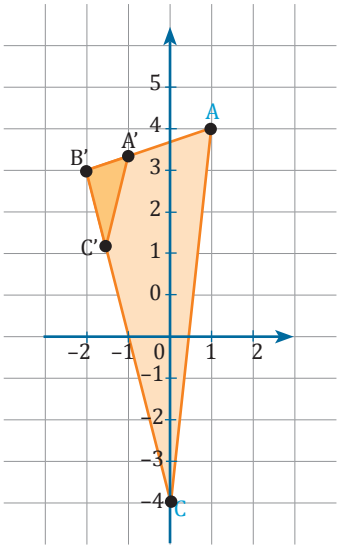
1 **a.** $12 + 10\,i$
b. $-\frac{9}{2} + i$

2 $z = \frac{4}{25} - \frac{72}{25}i$

3 **a.** $x = 5, x = -1$
b. $x = 3, x = 2$

4 **a.** No hay corte con el eje x, el corte con el eje y es $(0{,}12)$.
b. $V = \left(\frac{5}{4}, \frac{71}{8}\right)$

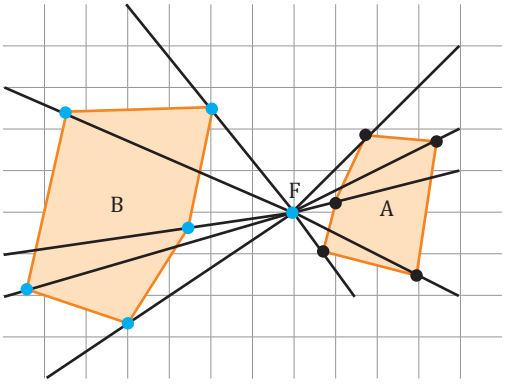
5 **a.**



b. 4,63 u

c. 0,72 u^2

6 Razón: -2, centro de homotecia: F



7 **a.** $2x - 3y + 11 = 0$ **b.** $x - 2y + 8 = 0$

8 Sistema indeterminado, rectas coincidentes.

9 **a.**

$$f(x) = \begin{cases} \frac{8}{35} \text{ n° } 1 \\ \frac{11}{35} \text{ n° } 2 \\ \frac{6}{35} \text{ n° } 3 \\ \frac{2}{7} \text{ n° } 4 \end{cases}$$

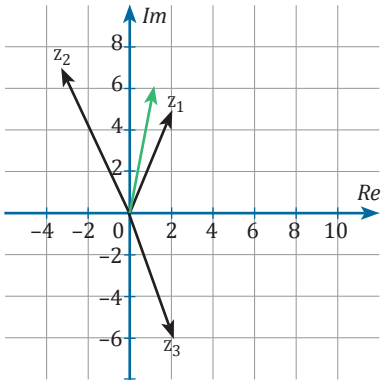
b. $E(x) = 2{,}51$. Se debe esperar obtener una ficha marcada con el número 2 o 3.

10 **a.** 0,17, es decir, un 17 % aprox.

b. 0,9997, es decir, un 99,97 % aprox.

III.

1 **a.** $1 + 6i$

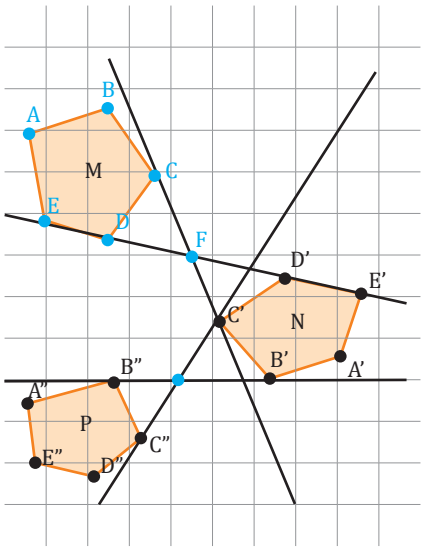


b. $-\frac{23}{58} - \frac{73}{58}i$

2 Si, la función es: $G(p) = -\frac{1}{25}p^2 + 8p$.

3 7 cm

4 **a.** Centros de homotecia: F y G. Razón de homotecia: $-0{,}75$ en ambos casos.



b. 1,54 m, 1,52 m, 1,52 m, 1,28 m y 1,70 m

5 **a.** $P(a) = -630\,000 \cdot a + 4\,730\,000$, donde P es el precio y a, los años de uso del vehículo.

b. \$ 950 000.

6 **a.** $\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} \cdot \left(\frac{3}{5}\right)^k \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{p-k}$

b. 1,3 % aprox.

IV.

1 a. **4** c **7** b **10** a

2 c. **5** b **8** d

3 b **6** e **9** d

Evaluación de síntesis 5

Página 403

I.

1 F. Sea la opuesta de la inversa multiplicativa de la pendiente de la otra.

2 V

3 F. Son los números reales.

4 V

5 V

6 F. Hay parábolas que no intersectan el eje horizontal.

7 V

8 F. Basta conocer la diferencia entre las coordenadas x y luego elevarla al cuadrado y sumarla con el cuadrado de la diferencia entre las coordenadas$y$, para finalmente extraer raíz cuadrada.

9 V

10 V

II.

1 **a.** 3

b. $f(2) = 0{,}3; f(5) = 0{,}1; f(7) = 0{,}4$ y $f(8) = 0{,}2$

c. $$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 2 \\ 0{,}3 & 2 \leq X < 5 \\ 0{,}4 & 5 \leq X < 7 \\ 0{,}8 & 7 \leq X < 8 \\ 1 & 8 \leq X \end{cases}$$

2 **a.** $(0{,}4\,;\,0{,}3)$

b. $2x + y - 1{,}1 = 0$, porque su pendiente es negativa, ya que su valor es -2.

c. La pendiente de $5x - 6y - 0{,}2 = 0$ es $\frac{5}{6}$. Pero, $\frac{5}{6} \cdot -2 = -\frac{5}{3} \neq -1$, por lo tanto no son perpendiculares.

d. La ocurrencia de B influye en la aparición de A, pues $p(B/A) \approx 0{,}53$ es mayor que, $p(A/B) = 0{,}4$.

3 **a.** $(-11{,}0)$ y $\left(\frac{3}{2},0\right)$

b. $(0, -33)$

c. Porque el coeficiente de x^2 es 2, es decir, positivo. Esto quiere decir, que la función cuadrática a la cual la parábola representa, tiene un mínimo y que está representado en el vértice de ella.

d. $-\frac{19}{4} - \frac{97}{8}i$

e. $13{,}02$

4 **a.** $\frac{7}{4}$

b. $y = -x + 6$

c. Ambas rectas tienen el mismo valor de la pendiente: -5. Son paralelas, porque tienen la misma pendiente.

III.

1 **a.** $1{,}215 \cdot 10^{-3}$

b. $-2\,160$. Real

2 **a.** $f(X) = 0{,}05X$. Son las probabilidades de los valores de la variable aleatoria X.

b. La que corresponde $X = 2{,}8$. Ya que la suma de las probabilidades de los otros valores de la variable aleatoria es $0{,}86$. De aquí que la probabilidad del valor que falta sea $0{,}14$ y es representada por el extremo superior de la varilla que falta. Haciendo $f(X) = 0{,}14$, o bien, mirando directamente, preimagen en la gráfica se obtiene 2,8.

c.

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X < 0{,}5 \\ 0{,}025 & 0{,}5 \leq X < 1 \\ 0{,}075 & 1 \leq X < 1{,}5 \\ 0{,}15 & 1{,}5 \leq X < 1{,}8 \\ 0{,}24 & 1{,}8 \leq X < 2 \\ 0{,}34 & 2 \leq X < 2{,}2 \\ 0{,}45 & 2{,}2 \leq X < 2{,}4 \\ 0{,}57 & 2{,}4 \leq X < 2{,}6 \\ 0{,}70 & 2{,}6 \leq X < 2{,}8 \\ 0{,}84 & 2{,}8 \leq X < 3{,}2 \\ 1 & 3{,}2 \leq X \end{cases}$$

d. 2,309

e. $\frac{8}{5}$

3 **a.** $\overline{OA} = \overline{OD} = 3{,}61$; $\overline{OB} = 4{,}24$; $\overline{OC} = 4$ y $\overline{OE} = 5{,}66$

b. $x + y - 1 = 0$

c. $f(1) = f(4) = \frac{82}{361}$; $f(2) = \frac{82}{424} = \frac{41}{212}$; $f(3) = \frac{82}{400} = \frac{41}{200}$ y $f(5) = \frac{82}{566} = \frac{41}{283}$

IV.

1 **c.** **2** **d.** **3** **b.** **4** **c.** **5** **e.** **6** **a.** **7** **a.** **8** **e.** **9** **b.** **10** **d.**

Índice temático

Adición de números complejos 23, 24

Ángulo de un complejo con el eje Real 43

Aplicaciones de la homotecia 194 - 196

Ceros de la función 107

Coeficiente de posición de una recta 267 - 271

Conjugado de un complejo 39 - 41

Cuadrante en un plano cartesiano 165 - 167

Distancia entre dos puntos 169 - 173

Distribución Binomial 353 - 363

División de números complejos 30 - 32

Ecuación de la recta dado dos puntos 248 - 252

Ecuación general de una recta 257

Ecuación principal de una recta 256

Ecuación punto – pendiente 248

Ecuaciones cuadráticas 81 - 96

Esperanza o valor esperado de una variable aleatoria 343 - 345

Forma canónica o binomial de un número complejo 20

Forma de par ordenado de un número complejo 20

Forma gráfica de un número complejo 20

Función cuadrática 99-117

Función de distribución 341 - 342

Función de probabilidad 339 - 340

Homotecia 178 - 186

Módulo de un complejo 37, 38

Multiplicación de números complejos 23, 24

Número complejo 19 - 21

Número imaginario 14 - 17

Pendiente de una recta 263 - 271

Plano cartesiano 164 - 167

Plano complejo 19, 20

Potencia de un complejo 45

Probabilidad condicionada 331 - 334

Propiedades de las operaciones en $\mathbb{C}$ 33, 34

Punto medio 166 - 167

Raíz de un complejo 47 - 48

Razón de homotecia 181

Solución de un sistema de ecuaciones lineales 276 - 281

Sustracción de números complejos 23, 24

Unidad imaginaria 14

Varianza 345 - 348

Glosario

Abscisa: Coordenada horizontal en un plano cartesiano rectangular que se designa mediante la letra x.

Bisectriz: Es la recta que pasa por el vértice del ángulo y lo divide en dos partes iguales.

Cateto: Un cateto es cualquiera de los dos lados menores de un triángulo rectángulo –los que conforman el ángulo recto.

Centro de gravedad: Es el punto de intersección de las tres transversales de gravedad de un triángulo.

Circuncentro: Es el punto de corte de las tres mediatrices de un triángulo. Las mediatrices o simetrales de un triángulo son las rectas perpendiculares trazadas por los puntos medios de sus lados.

Coeficiente de posición: Indica el valor de la ordenada del punto donde la recta corta al eje y.

Coeficiente de variación: Este estadígrafo indica la variabilidad de la muestra, expresada en porcentaje. Compara la desviación estándar con respecto al promedio de la muestra.

Combinaciones de k elementos de un total de n: Se usan para determinar el número de grupos de k elementos que pueden formarse con n elementos. Se anota como $\binom{n}{k}$

Concavidad de una parábola: Es la orientación de una parábola, es decir, si sus ramas o brazos se orientan hacia abajo o hacia arriba. Esta distinta orientación está definida por el valor (el signo) que tenga el término cuadrático, es decir, el coeficiente que acompaña a la incógnita que está al cuadrado.

Conjugado de un complejo: El conjugado de un complejo es otro complejo que difiere del dado sólo en el signo de su parte imaginaria.

Conjunto de los Números Complejos: Conjunto en el cuál se encuentran todos los números reales, los imaginarios y los complejos.

Coordenada: Es la ubicación de un punto del plano según su posición con respecto al origen y se determina conociendo la abscisa (x) y la ordenada (y) de este punto.

Cuadrante: Es cada una de las partes iguales en que los ejes coordenados dividen al plano.

Desviación Estándar: Es la raíz cuadrada de la varianza, con esto se obtiene un estadígrafo de dispersión expresado en la misma unidad de medida de la variable.

Distribución binomial: Las variables aleatorias pueden modeladas según distribuciones de probabilidades. Una de ellas es la distribución binomial que está modelada por la potencia de un binomio, donde su exponente es un número natural.

Dominio de una función: (conjunto de definición o conjunto de partida) Es el conjunto de todos los posibles valores de ingreso que la función acepta.

Ecuación cuadrática: Es aquella ecuación en la que al menos una de las incógnitas involucradas está elevada al cuadrado, siendo la mayor potencia de ella.

Eje de simetría: Es una recta paralela al eje y que pasa por el vértice de una parábola.

Elemento inverso: Elemento de un conjunto que produce el elemento identidad cuando se combina con otro elemento dado.

Elemento neutro: Es un elemento que tiene un efecto neutro al ser utilizado en una operación.

Espacio muestral: Es el conjunto de todos los posibles resultados individuales de un experimento aleatorio.

Esperanza matemática (valor esperado de una variable aleatoria): Es la suma de los productos del valor de la variable por su correspondiente probabilidad.

Experimento aleatorio: Un experimento aleatorio es aquel del que no podemos predecir su resultado, es decir, que depende del azar.

Factorial de un número n, $(n!)$**:** Es la multiplicación de los números naturales desde 1 a n.

Figuras semejantes: Dos figuras son semejantes cuando son iguales o sólo difieren en su tamaño.

Función de distribución: Función que relaciona cada elemento del espacio muestral con la probabilidad acumulada hasta el valor dado.

Función de probabilidades: Es aquella función que asocia a cada elemento del espacio muestral (x) de una variable aleatoria (X) la probabilidad que éste tenga.

Función lineal: Se define una función lineal como aquella función del tipo $f(x) = ax + b$, donde a y b son números reales.

Hipotenusa: Es el lado de mayor longitud de un triángulo rectángulo, y el lado opuesto al ángulo recto.

Homotecia: Es la transformación de una figura en otra donde, a partir de un punto fijo (llamado centro de homotecia), todas las distancias desde este punto a cualquier otro punto de la figura se multiplican por un mismo factor (llamado razón de homotecia)

Imagen de una función: Son los elementos del conjunto de llegada.

Incentro: Es el punto en el que se intersecan las tres bisectrices de los ángulos internos de un triángulo.

Marca de Clase: Es el punto medio de un intervalo en el que están agrupados los datos.

Media aritmética (también llamada promedio o simplemente media): Es el valor característico de una serie de datos cuantitativos que parte del principio de la esperanza matemática o valor esperado, se obtiene a partir de la suma de todos sus valores dividida entre el número de sumandos.

Mediana: Es el segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo.

Módulo de un complejo: Es igual a la raíz de la suma de los cuadrados de la parte real e imaginaria del complejo z.

Movimiento parabólico: Es el movimiento realizado por un objeto cuya trayectoria describe una parábola.

Número complejo: Es todo número de la forma $a + b\,i$, donde a y b son números reales e i es la unidad imaginaria $(i^2 = -1)$

Número imaginario: Cualquier número de la forma $\sqrt{-b} = \sqrt{b}\,i$, con $b > 0$, y se llama número imaginario

Ordenada: Coordenada vertical en un plano cartesiano rectangular que se designa mediante la letra y.

Ortocentro: Es el punto donde se cortan las tres alturas de un triángulo.

Parábola: Es la representación gráfica en el plano cartesiano de una función cuadrática.

Pendiente de una recta: Indica el grado de inclinación de la recta con respecto al eje x.

Plano cartesiano: Plano que contiene un sistema de referencia que está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal (x) y otra vertical (y) que se cortan en un punto que recibe el nombre de origen. Tiene como finalidad describir la posición de puntos, los cuales se representan por sus coordenadas o pares ordenados.

Pre-imagen de una función: Son los elementos del conjunto de partida o dominio.

Promedio ponderado: Es un promedio donde a cada valor se le asigna un peso o importancia determinada.

Punto de fuga: Punto en el cual las líneas paralelas parecen converger al alejarse en la distancia.

Puntos colineales: Tres o más puntos que caen en la misma línea.

Recorrido de una función: Es el conjunto formado por las imágenes de una función.

Rectas concurrentes: Tres o más rectas son concurrentes si se encuentran en un punto.

Rectas secantes: Dos rectas son secantes cuando se cortan en un punto.

Rotación: La rotación es un movimiento angular de cada uno de los puntos de una figura a partir de un punto que es el centro de giro. Para este movimiento es necesario dar un ángulo y el punto de centro de giro.

Simetría: Es cuando una figura se vuelve exactamente igual que otra al reflejarla o girarla.

Solución de un sistema de ecuaciones: Son aquellos valores de x e y que satisfacen a ambas ecuaciones y, por tanto, los valores de x e y que pertenecen a ambas rectas, o sea, la única posibilidad es que sea el punto de intersección de ellas.

Sucesión: Una sucesión es un conjunto de cosas (normalmente números) una detrás de otra, en un cierto orden.

Sucesos aleatorios: es cada uno de los subconjuntos del espacio muestral E

Sucesos dependientes: Dos sucesos son dependientes si la ocurrencia del primer suceso influye en la ocurrencia del segundo suceso.

Teorema de Pitágoras: Establece que en un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa (*el lado de mayor longitud del triángulo rectángulo*) es igual a la suma de los cuadrados de los catetos (*los dos lados menores del triángulo, los que conforman el ángulo recto*).

Teorema de Thales: Establece que "Si por un triángulo se traza una línea paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes"

Transversal de gravedad: Es el segmento que une el punto medio de un lado con vértice del lado opuesto.

Traslación: La traslación es un movimiento en el plano de tal forma que a cada punto de la figura le corresponde un vector de traslación, (una distancia, una dirección y un sentido de la traslación)

Unidad imaginaria: Llamamos unidad imaginaria a i que es igual a $\sqrt{-1}$

Variable aleatoria: Es una variable estadística cuyos valores se obtienen de mediciones en algún tipo de experimento aleatorio.

Varianza de un conjunto de datos: Corresponde al promedio de los cuadrados de las diferencias entre la media aritmética y cada uno de los valores observados (en datos no agrupados) o de cada marca de clase (en datos agrupados)

Varianza de una variable aleatoria: Es el promedio ponderado de los cuadrados de la diferencia entre los valores de los elementos del espacio muestral y la esperanza matemática de la variable. Este valor da una estimación de la homogeneidad de los valores de la variable aleatoria, en relación a cuán distantes están ellos de la esperanza matemática.

Vector: Representación geométrica de una magnitud que necesita orientación espacial, punto de aplicación, dirección y sentido para quedar definida.

Bibliografía

- Baldor, A. (1997). *Álgebra* (15ª ed). México: Compañía Cultural Editorial y Distribuidora de Textos Americanos, S.A.
- Kindle, J. H. (2007). *Teoría y Problemas de Geometría Analítica Plana y del Espacio* (1ª ed Rev). México D.F. Mc Graw- Hill Interamericana.
- Lacourly, N. (2011). *Introducción a la Estadística* (1ª ed). Colección: Herramientas para la formación de profesores de matemáticas. (Nº2). Santiago: J.C. Sáez Editor
- Lipschutz, S., Lipson M. (2001). *Probabilidad* (2ª ed). Serie de Compendios Schaum. Bogotá: Mc Graw Hill Interamericana.
- Lladser, M. (2012). *Variables Aleatorias y Simulación Estocástica* (1ª ed). Colección: Herramientas para la formación de profesores de matemáticas (Nº10). Santiago: J.C. Sáez Editor.
- Mercado,C.(1983).*Curso de Matemática Elemental I: Algebra.* (11ª ed). Santiago: Universitaria.
- Mercado, C. (1984 a). *Curso de Matemática Elemental II* (9ª ed). Santiago: Universitaria.
- Mercado C. (1984 b). *Curso de Matemática Elemental: Geometría. Tomo III y IV* (5ª ed). Santiago: Universitaria.
- Meyer, P. L. (1998). *Probabilidad y Aplicaciones Estadísticas* (1ª ed). México. D.F.: Pearson Educación Addison Wesley Longman de México S.A. de C.V.
- Rich, B. (1990). *Álgebra Elemental Moderna* (1ª ed). Serie de Compendios Schaum. México D.F.: McGraw Hill Interamericana.
- Romagnoli, P. P. (2011). *Probabilidades Doctas con discos, árboles, bolitas y urnas* (1ª ed). Colección: Herramientas para la formación de profesores de matemáticas (Nº5). Santiago: J.C. Sáez Editor.
- Spiegel, M. R. (2007). *Álgebra superior* (Serie Schaum), (3ª ed). México D.F.: Mac Graw Hill.
- Spiegel, M. R., Stephens L. J. (2009). *Estadística* (4ª ed). Serie de Compendios Schaum. Mexico D.F.:Mc Graw Hill Educación

© Matemática 3º Medio
2018 Ediciones Cal y Canto ® Reimpresión
N° de Inscripción: 223.589
ISBN: 978 956 339 171 8

Autores **Olga Saiz Maregatti**
Profesora de Matemática. Pontificia Universidad Católica de Chile.
Viktor Blumenthal Gottlieb
Licenciado en Ciencias, mención Matemática. Pontificia Universidad Católica de Chile.
Colaborador **Roberto Jaque Galfán**

Director Editorial Jorge Muñoz Rau
Editora a cargo Myriam Baeza Reyes
Corrector de pruebas y estilo Vladimir Ferro González
Diseño María Jesús Moreno Guldman
Diagramación Digital Cristina Sepúlveda Aravena - Bernardita Jorquera Bustamante
Fotografías 123RF Stock Photos
Jefe de Producción Cecilia Muñoz Rau
Asistente de Producción Lorena Briceño González

2017 Ediciones Cal y Canto ® Reedición
N° de Inscripción: 223.589
ISBN: 978 956 339 171 8

2016 Ediciones Cal y Canto ® Reedición
N° de Inscripción: 223.589
ISBN: 978 956 339 171 8

2015 Ediciones Cal y Canto ® Reedición
N° de Inscripción: 223.589
ISBN: 978 956 339 171 8

2014 Ediciones Cal y Canto ® Reimpresión
N° de Inscripción: 223.589
ISBN: 978 956 339 060 5

2013 Ediciones Cal y Canto ®
N° de Inscripción: 223.589
ISBN: 978 956 339 060 5

Basado en **© Matemática 3º Medio**
2012 Ediciones Cal y Canto ®
N° de Inscripción: 200.152
ISBN: 978 956 339 003 2

El presente libro no puede ser reproducido ni en todo ni en parte, ni archivado, ni transmitido por ningún medio mecánico, electrónico, de grabación, CD-Rom, fotocopia, microfilmación u otra forma, sin la autorización escrita del editor.

Impreso en RR Donnelley.
Se terminó de imprimir xxxxx ejemplares en el mes de noviembre de 2016.