

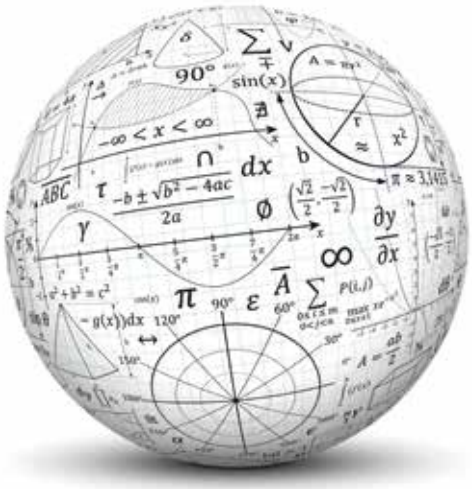
Texto del estudiante

Matemática 1º Medio













Bastián Galasso Díaz
Lesly Maldonado Rodríguez
Vivian Marambio Fuentes

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

Edición especial para el Ministerio de Educación

Prohibida su comercialización

SANTILLANA

Texto del estudiante

Matemática

1° Medio



AUTORES

Lesly Maldonado Rodríguez

Licenciada en Educación Matemática y Computación
Licenciada en Educación
Profesora de Matemática
Universidad de Santiago de Chile
Magíster en Educación con Mención en Informática Educativa
Universidad de Chile

Vivian Marambio Fuentes

Licenciada en Matemática
Licenciada en Educación
Profesora de Matemática
Pontificia Universidad Católica de Chile
Magíster en Didáctica de la Matemática
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Bastián Galasso Díaz

Licenciado en Matemática
Magíster en Matemática
Pontificia Universidad Católica de Chile

El **Texto del estudiante Matemática 1° Medio** es una obra colectiva, creada y diseñada por el Departamento de Investigaciones Educativas de Editorial Santillana, bajo la dirección editorial de:

RODOLFO HIDALGO CAPRILE

Subdirección editorial:	Marisol Flores Prado
Coordinación Área Matemática:	Cristian Gúmera Valenzuela
Edición:	Patricio Loyola Martínez
Autoría:	Lesly Maldonado Rodríguez
	Vivian Marambio Fuentes
	Bastián Galasso Díaz
Corrección de estilo:	Carolina Ardiles Bonavía
	Rodrigo Silva Améstica
Consultoría pedagógica:	Mirtha Seguel Riquelme
Solucionario:	Claudia Peña Candia
	Marjorie Ruiz Basterrica
Documentación:	Cristian Bustos Chavarría
Subdirección de diseño:	María Verónica Román Soto
Diseño y diagramación:	Daniel Monetta Moscoso
Cubierta:	Miguel Bendito López
Fotografía:	Archivo editorial
	Shutterstock
Ilustraciones:	Archivo editorial
	Antonio Ahumada Mora
Producción:	Rosana Padilla Cencever

Certificado PEFC

Este papel proviene de bosques manejados en forma sustentable y fuentes controladas

PEFC™

PEFC/29-31-75

www.pefc.org

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del derecho de autor, bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución en ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo público.

La editorial ha hecho todo lo posible por conseguir los permisos correspondientes para las obras con derecho de autor que aparecen en el presente texto. Cualquier error u omisión será rectificado en futuras impresiones a medida que la información esté disponible.

© 2016, by Santillana del Pacífico S. A. de Ediciones.
Avda. Andrés Bello 2299, piso 10, Providencia, Santiago (Chile).
PRINTED IN CHILE. Impreso en Chile por RR Donnelley Chile
ISBN: 978-956-15-3038-6 – Inscripción nº 273.530
Se terminó de imprimir esta 1ª edición de 247.400 ejemplares, en el mes de enero del año 2017.
www.santillana.cl infochile@santillana.com

Santillana® es una marca registrada de Grupo Santillana de Ediciones, S. L. Todos los derechos reservados.

Presentación

Te damos la bienvenida a este nuevo año escolar. El texto Matemática 1° Medio te invita a comprender que la matemática es parte del mundo que te rodea, y asimismo permite que te des cuenta de la importancia y relevancia que tiene en diferentes situaciones cotidianas.

A través de sus páginas te enfrentarás a diversas situaciones en las que podrás desarrollar actitudes y habilidades para explorar, aprender y construir conceptos matemáticos a partir de los siguientes ejes: Números, Álgebra y funciones, Geometría y Probabilidad y estadística.

Este año, en el eje Números, profundizarás tus conocimientos sobre las operaciones con números racionales de forma simbólica y comprenderás las potencias de base racional y exponente entero aplicando las propiedades y relacionándolo con el crecimiento y decrecimiento exponencial, además de resolver diversas situaciones problemas de la vida diaria y otras asignaturas.

En el eje Álgebra y funciones, desarrollarás los productos notables aplicándolos a situaciones concretas. Resolverás sistemas de ecuaciones lineales utilizando diferentes métodos, y usarás un *software* educativo. También graficarás relaciones lineales en dos variables de la forma $f(x, y) = ax + by$, construyendo tablas de valores, variando parámetros en las ecuaciones; y lo aplicarás en la resolución de problemas.

En el eje de Geometría, estudiarás el área y perímetro de sectores y segmentos circulares, y desarrollarás la fórmula para el área y volumen del cono, desplegando la red asociada a dicho cono; también comprenderás el concepto de "homotecia", relacionándolo con instrumentos ópticos, perspectiva, entre otros, y lo representarás de manera vectorial, además de utilizar un *software* para profundizar estos procedimientos. A su vez, aplicarás el teorema de Tales en la resolución de problemas.

En el eje Probabilidad y estadística, registrarás y compararás distribuciones de dos características distintas empleando una tabla de doble entrada y una nube de puntos. Igualmente desarrollarás las reglas de las probabilidades en el contexto de resolución de problemas. Comprenderás el concepto de azar experimentando con distintas representaciones gráficas.

Todo lo anterior, a través de actividades en las que podrás razonar, reflexionar, analizar y compartir tus conocimientos con tus compañeros y compañeras.



Conoce tu texto

El texto **Matemática 1° Medio** se organiza en cuatro unidades y en cada una encontrarás:

Inicio de unidad

Título de la unidad

El título alude al eje temático que articula los contenidos propuestos en la unidad.



Punto de partida

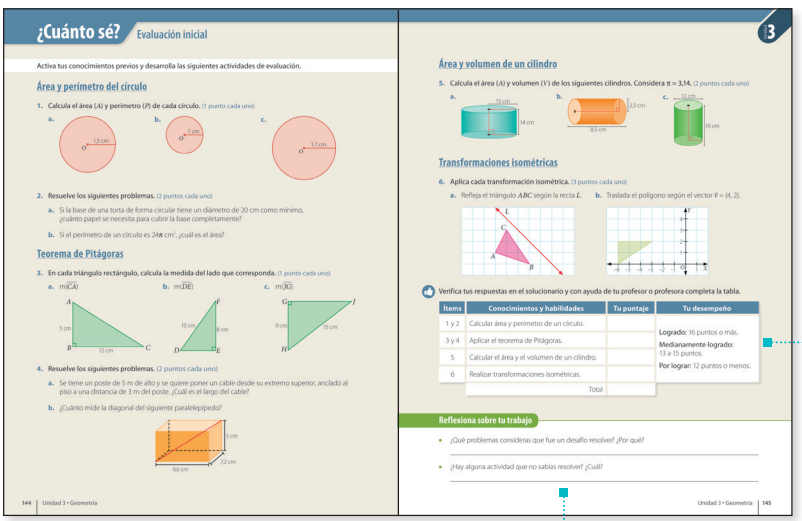
Iniciarás tu trabajo, en el que podrás expresar tus motivaciones y plantear tus metas respecto de los aprendizajes de la unidad.

Al iniciar la unidad, reconocerás la relación que hay entre los conocimientos matemáticos y tu entorno, las actividades que desarrollarás y la actitud con la que debes enfrentarlas.

Evaluación inicial

¿Cuánto sé?

Actividades para que actives tus conocimientos previos y que te servirán en el desarrollo de la unidad.

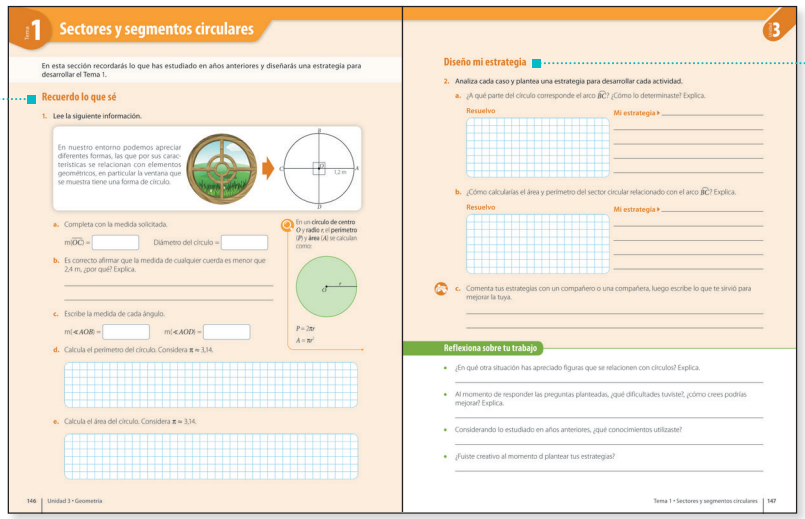


Podrás reconocer tu desempeño en cada actividad de evaluación.

Reflexiono

Aquí podrás dejar registro de tu trabajo y la actitud al enfrentar este primer acercamiento a la unidad.

Inicio de tema


Tema 1 Sectores y segmentos circulares

En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 1.

Recuerdo lo que sé

1. Lee la siguiente información.

En nuestro entorno podemos apreciar diferentes formas, las que por sus características se relacionan con elementos geométricos, en particular la ventana que se muestra tiene una forma de círculo.

a. Completa con la medida solicitada.

b. Es correcto afirmar que la medida de cualquier cuerda es menor que 2,4 m, ¿por qué? Explica.

c. Escribe la medida de cada ángulo.

d. Calcula el perímetro del círculo. Considera π ≈ 3,14.

e. Calcula el área del círculo. Considera π ≈ 3,14.

En un círculo de centro O y radio r el perímetro (P) y área (A) se calculan como:

$P = 2\pi r$

$A = \pi r^2$

3

Diseño mi estrategia

2. Analiza cada caso y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

a. ¿A qué parte del círculo corresponde el arco $\overset{\frown}{BC}$? ¿Cómo lo determinaste? Explica.

Resuelvo

Mi estrategia

b. ¿Cómo calcularías el área y perímetro del sector circular relacionado con el arco $\overset{\frown}{BC}$? Explica.

Resuelvo

Mi estrategia

c. Comenta tus estrategias con un compañero o una compañera, luego escribe lo que te sirvió para mejorar la tuya.

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿En qué otra situación has apreciado figuras que se relacionen con círculos? Explica.
- Al momento de responder las preguntas planteadas, ¿qué dificultades tuviste?, ¿cómo crees podrías mejorar? Explica.
- Considerando lo estudiado en años anteriores, ¿qué conocimientos utilizaste?
- ¿Fuiste creativo al momento d plantear tus estrategias?

146 | Unidad 3 • Geometría

Tema 1 • Sectores y segmentos circulares | 147

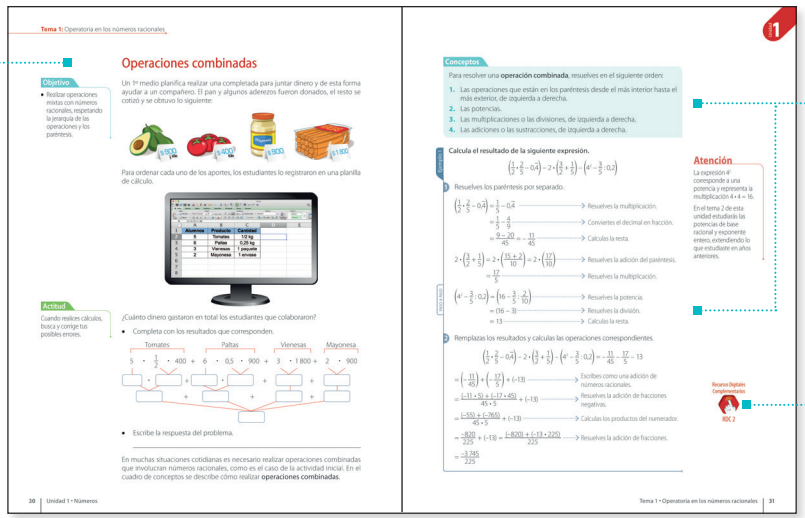
Recuerdo lo que sé

A partir de una situación vinculada con el hilo conductor de la unidad, desarrollarás actividades que te permitirán utilizar conocimientos de años anteriores.

Diseño mi estrategia

Actividades relacionadas con la situación del inicio de unidad, que te permitirán establecer estrategias de resolución para el desarrollo de los temas que componen la unidad.

Páginas de contenido


Tema 1: Operatoria en los números racionales

Operaciones combinadas

Objetivo

- Realizar operaciones mixtas con números racionales, respetando la jerarquía de las operaciones y los paréntesis.

Un 1º medio planifica realizar una completada para juntar dinero y de esta forma ayudar a un compañero. El pan y algunos aderezos fueron donados, el resto se cotizó y se obtuvo lo siguiente:

Para ordenar cada uno de los aportes, los estudiantes lo registraron en una planilla de cálculo.

Actitud

Cuando realices cálculos, busca y corrige tus posibles errores.

¿Cuánto dinero gastaron en total los estudiantes que colaboraron?

- Completa con los resultados que corresponden.

- Escribe la respuesta del problema.

En muchas situaciones cotidianas es necesario realizar operaciones combinadas que involucran números racionales, como es el caso de la actividad inicial. En el cuadro de conceptos se describe cómo realizar **operaciones combinadas**.

30 | Unidad 1 • Números

1

Conceptos

Para resolver una **operación combinada**, resuelves en el siguiente orden:

1. Las operaciones que están en los paréntesis desde el más interior hasta el más exterior, de izquierda a derecha.
2. Las potencias.
3. Las multiplicaciones o las divisiones, de izquierda a derecha.
4. Las adiciones o las sustracciones, de izquierda a derecha.

Calcula el resultado de la siguiente expresión.

Resuelves los paréntesis por separado.

Remplazas los resultados y calculas las operaciones correspondientes.

Atención

La expresión 4^2 corresponde a una potencia y representa la multiplicación $4 \cdot 4 = 16$.

En el tema 2 de esta unidad estudiarás las potencias de base racional y exponente entero, extendiendo lo que estudiaste en años anteriores.

Recursos Digitales Complementarios

RDC 2

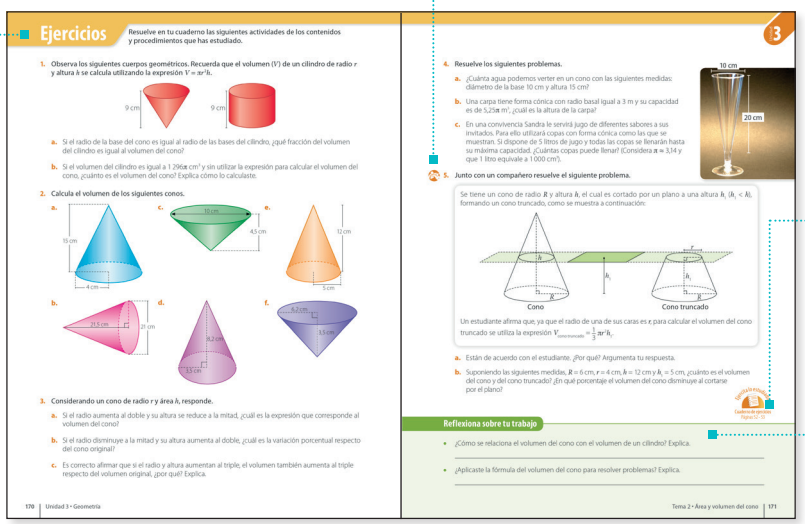
Tema 1 • Operatoria en los números racionales | 31

Aquí encontrarás la **formalización de los contenidos trabajados** y variados ejemplos desarrollados paso a paso.

Este ícono te indica que hay un recurso digital para complementar el desarrollo de tus conocimientos y habilidades.

Situación exploratoria relacionada con el hilo conductor de la unidad.

Este ícono indicará una actividad que se desarrolla de manera colaborativa.


Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Observa los siguientes cuerpos geométricos. Recuerda que el volumen (V) de un cilindro de radio r y altura h se calcula utilizando la expresión $V = \pi r^2 h$.

a. Si el radio de la base del cono es igual al radio de las bases del cilindro, ¿qué fracción del volumen del cilindro es igual al volumen del cono?

b. Si el volumen del cilindro es igual a 1 296π cm³ y sin utilizar la expresión para calcular el volumen del cono, ¿cuánto es el volumen del cono? Explica cómo lo calculaste.

2. Calcula el volumen de los siguientes conos.

3. Considerando un cono de radio r y área h, responde.

a. Si el radio aumenta al doble y su altura se reduce a la mitad, ¿cuál es la expresión que corresponde al volumen del cono?

b. Si el radio disminuye a la mitad y su altura aumenta al doble, ¿cuál es la variación porcentual respecto del cono original?

c. Es correcto afirmar que si el radio y altura aumentan al triple, el volumen también aumenta al triple respecto del volumen original, ¿por qué? Explica.

170 | Unidad 3 • Geometría

3

4. Resuelve los siguientes problemas.

a. ¿Cuánta agua podemos verter en un cono con las siguientes medidas: diámetro de la base 10 cm y altura 15 cm?

b. Una carpa tiene forma cónica con radio basal igual a 3 m y su capacidad es de 5,25π m³, ¿cuál es la altura de la carpa?

c. En una convivencia Sandra le servirá jugo de diferentes sabores a sus invitados. Para ello utilizará copas con forma cónica como las que se muestran. Si dispone de 5 litros de jugo y todas las copas se llenarán hasta su máxima capacidad, ¿cuántas copas puede llenar? (Considera π ≈ 3,14 y que 1 litro equivale a 1 000 cm³).

5. Junto con un compañero resuelve el siguiente problema.

Se tiene un cono de radio R y altura h, el cual es cortado por un plano a una altura h_1 ($h_1 < h$), formando un cono truncado, como se muestra a continuación:

Cono

Cono truncado

Un estudiante afirma que, ya que el radio de una de sus caras es r, para calcular el volumen del cono truncado se utiliza la expresión $V_{\text{cono truncado}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1$.

a. Están de acuerdo con el estudiante. ¿Por qué? Argumenta tu respuesta.

b. Suponiendo las siguientes medidas, $R = 6$ cm, $r = 4$ cm, $h = 12$ cm y $h_1 = 5$ cm, ¿cuánto es el volumen del cono y del cono truncado? ¿En qué porcentaje el volumen del cono disminuye al cortarse por el plano?

Cuaderno de ejercicios Páginas 52-55

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Cómo se relaciona el volumen del cono con el volumen de un cilindro? Explica.
- ¿Aplicaste la fórmula del volumen del cono para resolver problemas? Explica.

Tema 2 • Área y volumen del cono | 171

Ejercicios

Actividades con variados tipos de ejercicios para que practiques lo estudiado. Entre ellas podrás encontrar conexiones con otras asignaturas, creación de problemas, actividades grupales, que fomentan el trabajo colaborativo, entre otras.

Cuaderno

Este ícono te indicará las páginas del Cuaderno de ejercicios con las que podrás seguir ejercitando lo que has estudiado.

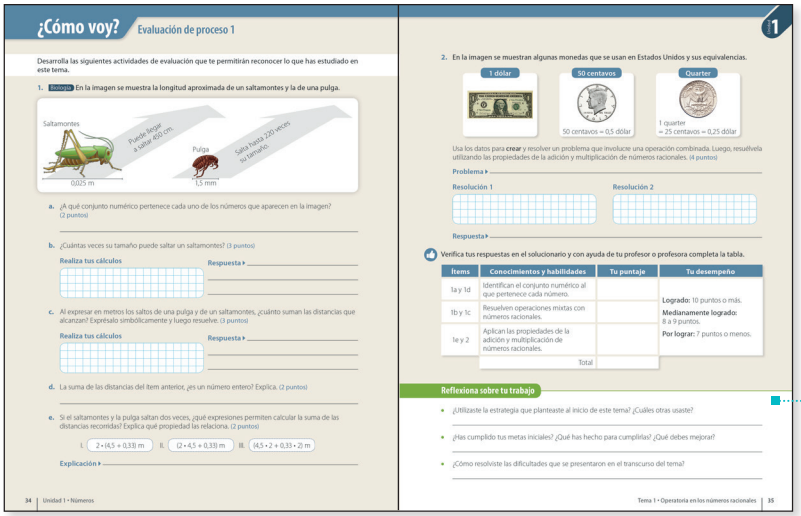
Reflexiono

Autoevaluación con la que podrás registrar el progreso de tus aprendizajes y tus actitudes durante el desarrollo de la unidad.

Evaluación de proceso

¿Cómo voy?

A partir de una situación realizarás actividades para que identifiques lo que has aprendido en cada tema.



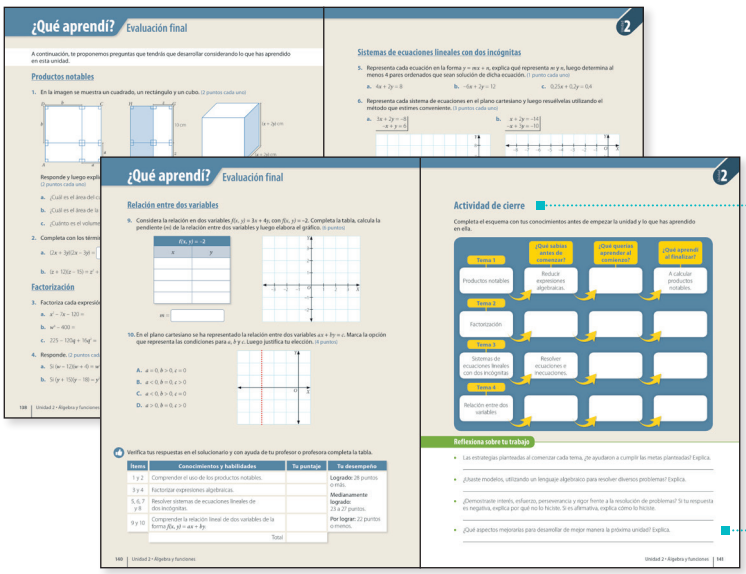
Reflexiono

Aquí registrarás el nivel del logro de tus metas, la evaluación de tus estrategias y la actitud que has tenido al desarrollar el tema.

Evaluación final

¿Qué aprendí?

Actividades con variadas actividades de evaluación para que sepas lo que aprendiste en la unidad.



Actividad de cierre

Podrás registrar lo que sabías antes de comenzar, lo que querías aprender al comienzo y lo que aprendiste al finalizar la unidad.

Reflexiono

Aquí registrarás el logro de tus metas, de tus aprendizajes y las actitudes que desarrollaste a lo largo de la unidad.

Cápsulas e íconos

Objetivos

Se describe el objetivo que se trabajará en las páginas que tratan el contenido.

Habilidad

Se destaca el desarrollo de una habilidad en un determinado contenido.

Actitud

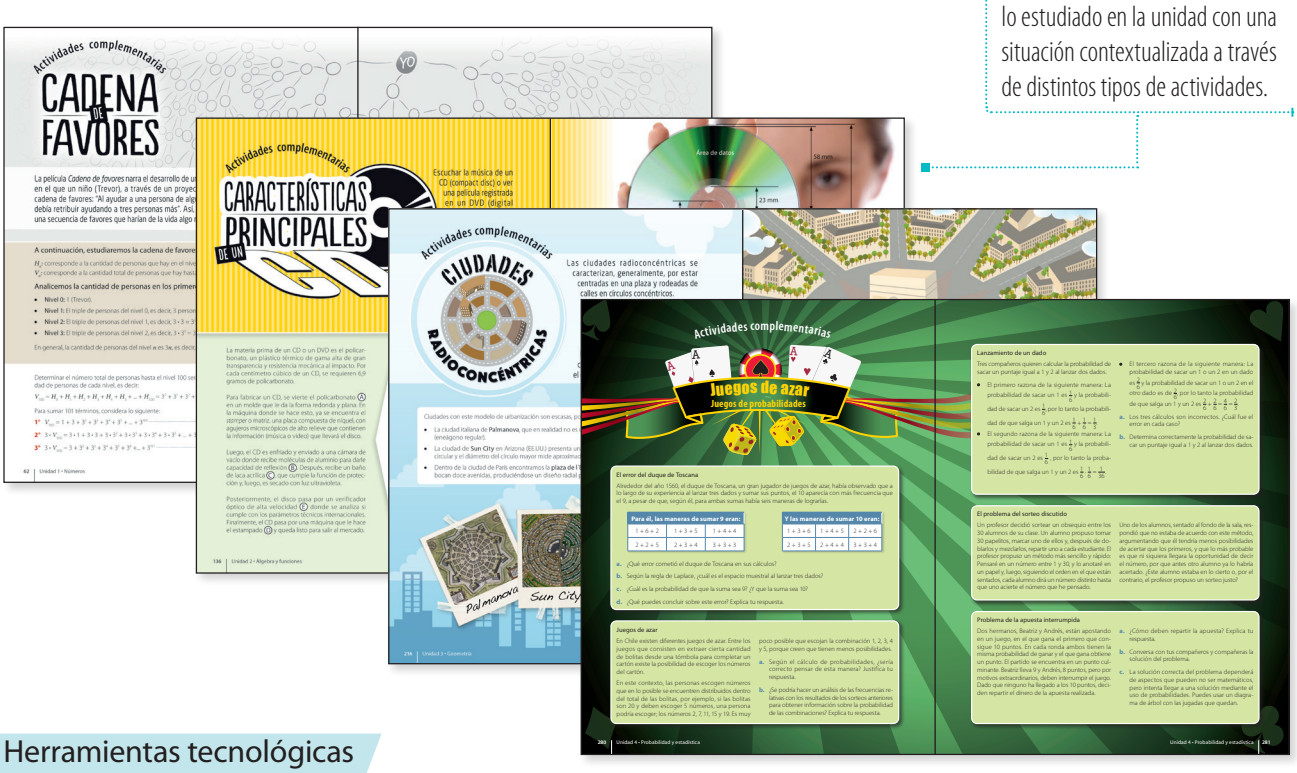
Se declara la actitud que se desarrollará.

Atención

Información que complementa y profundiza los contenidos abordados a lo largo de la unidad.

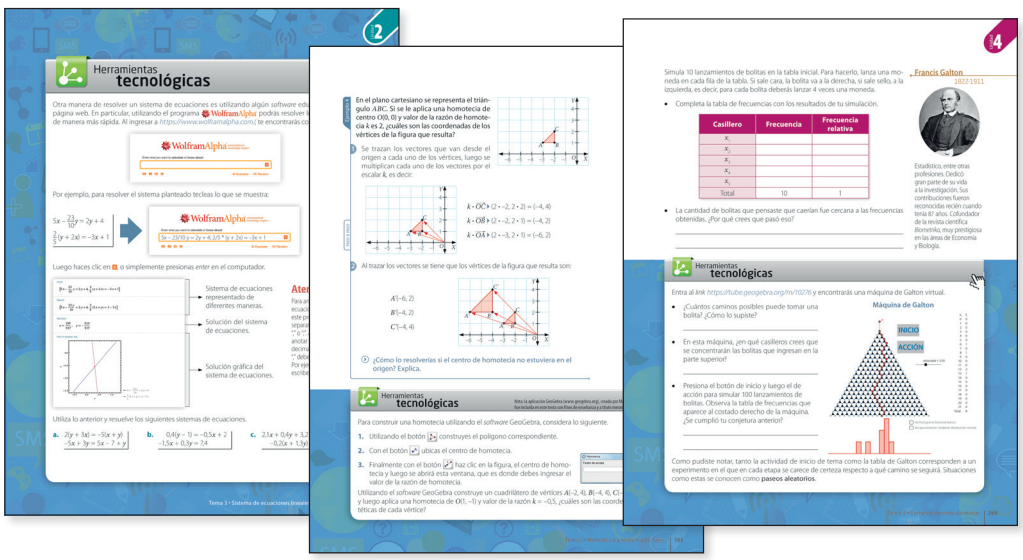
Actividades complementarias

Actividades en las que vincularás lo estudiado en la unidad con una situación contextualizada a través de distintos tipos de actividades.



Herramientas tecnológicas

A medida que avances en el tema encontrarás diferentes instancias en las que podrás resolver los temas tratados utilizando alguna herramienta tecnológica o *software* educativo.



Conexión con

Se vincula el contenido trabajado con otra área del conocimiento.

Invitado especial

Pequeña reseña de algún personaje que haya aportado al área Matemática.

Visita la Web

Se muestra un *link* donde encontrarás información relacionada con los contenidos trabajados.

Índice



Unidad 1 • Números 10

¿Cuánto sé? Evaluación inicial 12

Tema 1 **Operatoria en los números racionales** 14

- Números racionales 16
- Adición y sustracción de números racionales 18
- Multiplicación y división de números racionales 22
- Propiedades de la adición y multiplicación de números racionales 26
- Operaciones combinadas 30

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 1 34

Tema 2 **Potencias** 36

- Potencias de base y exponente entero 38
- Potencias de base racional y exponente entero 44
- Multiplicación y división de potencias de base racional 50
- Crecimiento y decrecimiento exponencial 56

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 2 60

- Actividades complementarias 62

¿Qué aprendí? Evaluación final 64



Unidad 2 • Álgebra y funciones 68

¿Cuánto sé? Evaluación inicial 70

Tema 1 **Productos notables** 72

- Cuadrado y cubo de un binomio 74
- Suma por su diferencia 78
- Producto de binomios con un término en común 79

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 1 82

Tema 2 **Factorización** 84

- Factorización por un factor en común 86
- Factorización mediante productos notables: binomios 90
- Factorización mediante productos notables: trinomios 94

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 2 98

Tema 3 **Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas** 100

- Ecuación lineal de dos incógnitas 102
- Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas 106
- Método de resolución: gráfico 108
- Método de resolución: igualación 112
- Método de resolución: sustitución 114
- Método de resolución: reducción 115
- Método de resolución: Cramer 116

Herramientas tecnológicas 117

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 3 120

Tema 4 **Relación entre dos variables** 122

- Relaciones lineales de la forma $f(x, y) = ax + by$ 124
- Variación de parámetros 130

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 4 134

- Actividades complementarias 136

¿Qué aprendí? Evaluación final 138



Unidad 3 • Geometría 142

¿Cuánto sé? Evaluación inicial 144

Tema 1 **Sectores y segmentos circulares** 146

- Elementos de la circunferencia y del círculo 148
- Perímetro de un sector y segmento circular 152
- Área de un sector y segmento circular 156

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 1 160

Tema 2 **Área y volumen del cono** 162

- Área de un cono 164
- Volumen de un cono 168

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 2 172

Tema 3 **Homotecia y teorema de Tales** 174

- Homotecia 176
- Homotecia de forma vectorial 182
- Teorema de Tales 188
- División proporcional de segmentos 194

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 3 198

Tema 4 **Semejanza** 200

- Semejanza de figuras 202
- Criterios de semejanza 206
- Teoremas de Euclides 210

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 4 214

- Actividades complementarias 216

¿Qué aprendí? Evaluación final 218



Unidad 4 • Probabilidad y estadística 222

¿Cuánto sé? Evaluación inicial 224

Tema 1 **Comparación de muestras** 226

- Relación entre dos variables cuantitativas 228
- Relación entre dos variables cualitativas 234
- Comparación de dos poblaciones 238

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 1 242

Tema 2 **Propiedades de la probabilidad** 244

- Unión e intersección de eventos 246
- Reglas aditivas de la probabilidad 252
- Reglas multiplicativas de la probabilidad 258

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 2 264

Tema 3 **Comportamiento aleatorio** 266

- Paseos aleatorios y frecuencias relativas 268

Herramientas tecnológicas 269

- Paseos aleatorios y probabilidad 274

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 3 278

- Actividades complementarias 280

¿Qué aprendí? Evaluación final 282

Solucionario 286

Glosario 312

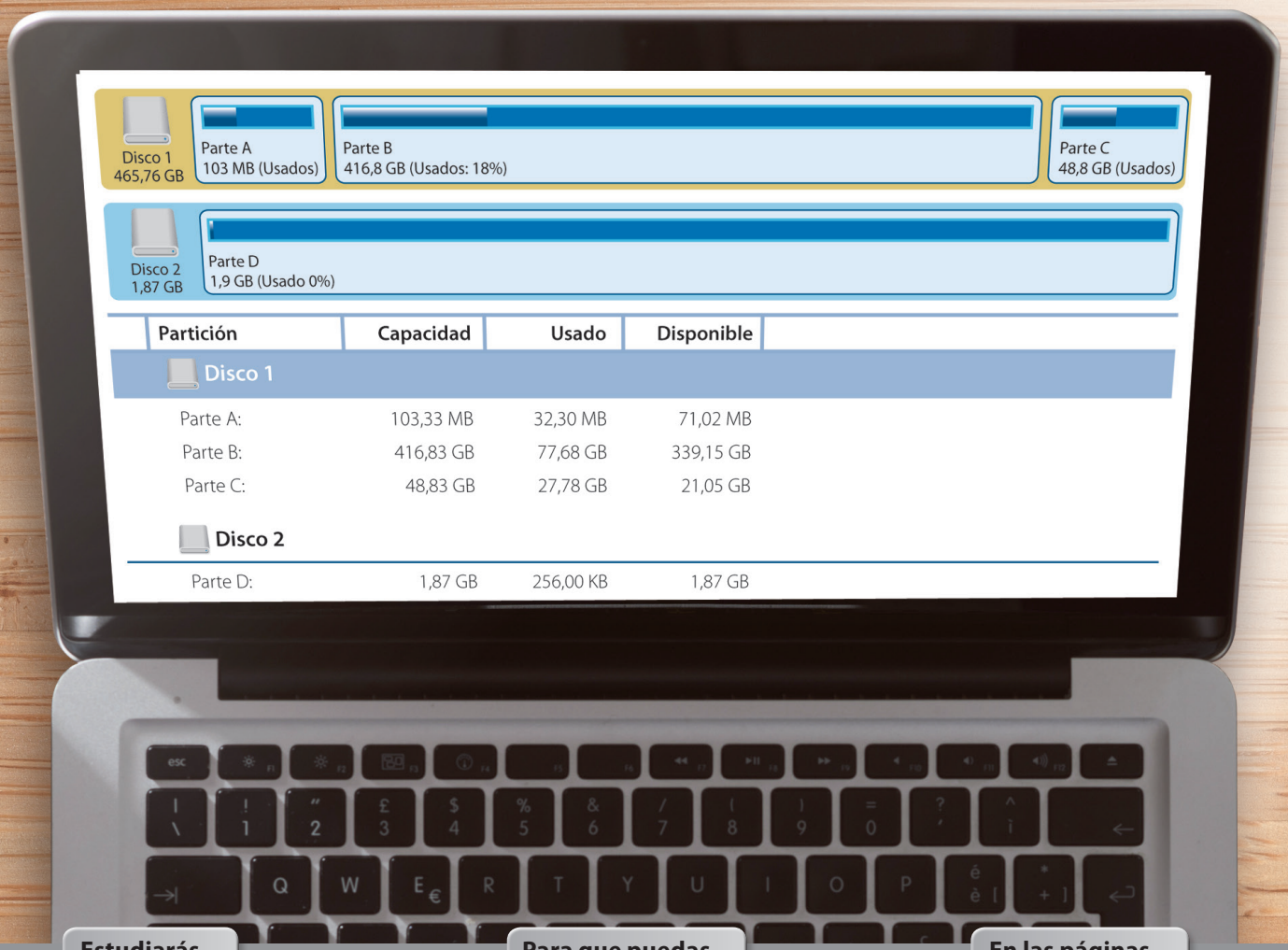
Índice temático 314

Bibliografía y webgrafía 318

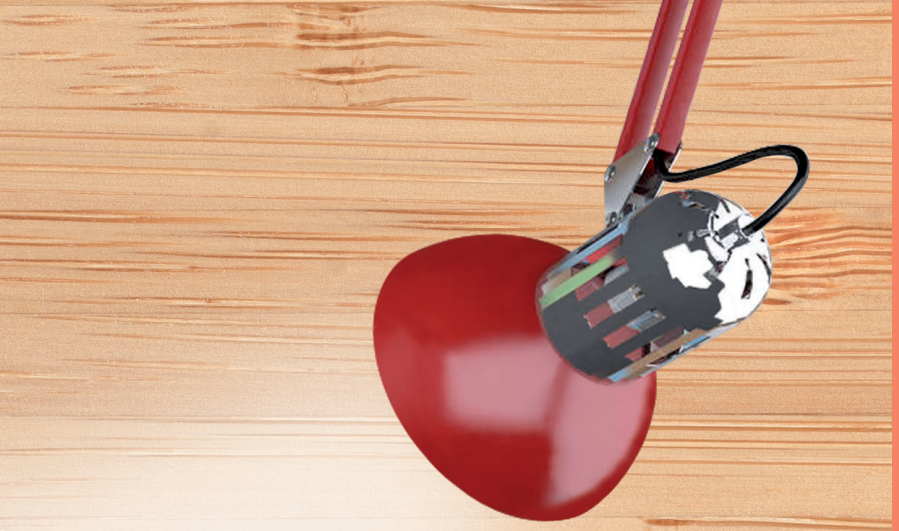
Unidad 1

Números

Los **números** están presentes en la tecnología, por ejemplo, para presentar información, al momento de calcular la memoria disponible de un computador, al determinar equivalencias entre unidades para medir la capacidad de un disco duro o en las planillas de cálculo, para representar coordenadas de GPS, entre otras.



Estudiarás...	Para que puedas...	En las páginas...
Tema 1 Operatoria en los números racionales	Resolver problemas y ejercicios de manera simbólica.	14 a la 35
Tema 2 Potencias	Comprender las potencias con base racional y exponente entero.	36 a la 61







Punto de partida

Te invitamos a observar la imagen para responder las siguientes preguntas que te ayudarán a desarrollar los aprendizajes en esta unidad.

1. ¿Cómo crees que se relacionan los contenidos de esta unidad con la **tecnología**?

2. ¿Notaste que hay información numérica que se relaciona con la tecnología? Explica.

3. Reúnete con un compañero o una compañera y comenten si hay algún otro tema de vuestro interés que se relacione con los contenidos que estudiarán.

4. Respecto de los nuevos aprendizajes de esta unidad, ¿qué meta te propones cumplir al finalizar esta unidad? ¿Cómo piensas cumplirla?

Actitud

Te invitamos a trabajar esta unidad de manera activa, perseverante frente a los desafíos que se te presenten y trabajando en equipo con tus compañeros.

¡Que tengas éxito en el cumplimiento de tus metas!

¿Cuánto sé? Evaluación inicial

Activa tus conocimientos previos y desarrolla las siguientes actividades de evaluación.

Multiplicación y división de números enteros

1. Calcula el resultado en cada caso. (1 punto cada uno)

a. $9 : (-3) =$ ☐ **b.** $-2 \cdot (-6) =$ ☐ **c.** $-8 : 8 =$ ☐

2. Resuelve los siguientes problemas. (2 puntos cada uno)

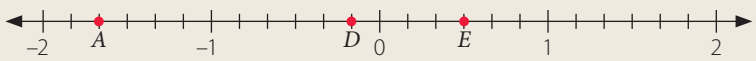
a. Un día de julio en Santiago, la temperatura a las 7:30 horas fue de –4 °C, y tres horas más tarde subió 8 °C. Si la temperatura máxima fue el triple de la registrada a las 10:30 horas, ¿cuál fue la temperatura máxima del día?

b. En el interior de una cámara frigorífica la temperatura puede descender 4 °C cada hora. Si la temperatura inicial de la cámara es de 1 °C, ¿qué temperatura habrá dentro de 3 horas?

c. Un buzo descendió hasta una profundidad de 30 m en 5 etapas. Si en cada una se sumergió la misma cantidad de metros, ¿cuántos metros descendió en cada etapa?

Fracciones y números decimales

3. Escribe la fracción y el número decimal marcados con un ● en la recta numérica. (1 punto cada uno)



a. A ▸ Fracción ☐ Decimal ☐ **b.** D ▸ Fracción ☐ Decimal ☐ **c.** E ▸ Fracción ☐ Decimal ☐

4. Resuelve cada operación. (1 punto cada uno)

a. $\frac{7}{9} \cdot \left(-\frac{16}{6}\right) =$ ☐ **b.** $4\frac{2}{8} + 5\frac{1}{6} =$ ☐ **c.** $7{,}\overline{8} - 2{,}\overline{8} =$ ☐

5. Resuelve. (1 punto cada uno)

a. Se quiere repartir 5,5 kg de harina en bolsas de $\frac{1}{2}$ kg. ¿Cuántas bolsas se llenan?

b. El producto de dos números es 15. Si uno de sus factores es 2,5, ¿cuál es el otro?

c. El cociente entre dos números es –7, si el dividendo es $\frac{7}{2}$, ¿cuál es el divisor?

6. Analiza la siguiente situación y luego responde. (2 puntos cada uno)

En una base meteorológica se registraron las siguientes temperaturas:

Día	Lunes	Martes	Miércoles	Jueves	Viernes	Sábado	Domingo
Temperatura (°C)	0,1	−0,1	0,2	−0,4	−0,2	−0,3	−0,3

a. Calcula la diferencia entre la mayor y la menor temperatura registrada.

b. Alexis afirma que el promedio entre las temperaturas registradas esa semana es igual a −0,2 °C, en cambio Daniela dice que el promedio de las temperaturas es 0,1 °C mayor que la temperatura dicha por Alexis. ¿Quién se encuentra en lo correcto? Explica.

Potencias y raíces

7. Calcula las siguientes potencias y raíces. (1 punto cada uno)

a. $5^2 =$ ☐ **b.** $\sqrt{25} =$ ☐ **c.** $8^2 =$ ☐ **d.** $\sqrt{64} =$ ☐

8. Escribe V si la afirmación es verdadera o F si es falsa. Justifica las falsas. (2 puntos cada uno)

a. ◯ En la igualdad $\sqrt{a} = 9$, el valor de a es 18.

b. ◯ Resolver $3^5 \cdot 3^4$ es equivalente a resolver $3^{5 \cdot 4}$.

c. ◯ El valor de una potencia de base 3 y exponente 3 es 27.

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1 y 2	Resolver operaciones en el conjunto de los números enteros.		**Logrado:** 6 puntos o más. **Medianamente logrado:** 4 a 5 puntos. **Por lograr:** 3 puntos o menos.
3, 4, 5 y 6	Resolver operaciones considerando fracciones y números decimales.		
7 y 8	Calcular potencias y raíces cuadradas de números naturales.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Mantuviste una actitud positiva al resolver los desafíos complejos? Explica.

_____

- ¿Qué estrategia utilizarías para resolver la actividad de mayor dificultad?

_____

Tema 1

Operatoria en los números racionales

En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 1.

Recuerdo lo que sé

1. Lee la siguiente información.

Los números decimales se utilizan en diferentes situaciones. Por ejemplo, una de ellas es representar la capacidad de memoria en un computador.

Nombre del dispositivo	Tamaño	Espacio libre	Estado
☑ WinXP (C:)	195,3 GB	174,6 GB	Listo
☑ Negocios (D:)	97,7 GB	76,3 GB	Listo
☑ Personal (E:)	97,7 GB	64,1 GB	Listo
☑ ➡ Respaldo (F:)	75,1 GB	21,7 GB	Fase 1

a. Completa la tabla usando los números destacados con azul.

Número decimal	Clasificación	Fracción

Un **número decimal racional** ($\mathbb{Q}$) se puede clasificar como:

- Finito
- Infinito periódico
- Infinito semiperiódico

b. ¿Cuál es la fracción que representa a 195,3 GB? ¿Hay otra fracción que lo represente? Explica.

Realiza tus cálculos

Explicación ▸ _____

c. La fracción $\frac{1\,953}{10}$, ¿con qué número decimal de la tabla la relacionas? Explica.

Realiza tus cálculos

Explicación ▸ _____

d. Remarca en cada caso la igualdad correcta. Luego, **crea** un problema a partir de la situación inicial.

195,3 + 97,7 + 97,7 + 75,1 = 455,8

195,3 + 97,7 + 97,7 + 75,1 = 465,8

Problema ▸ _____

Recursos Digitales Complementarios



RDC 1

Diseño mi estrategia

2. Analiza cada caso y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

a. Para determinar la tercera parte del total de Tamaño, Julio dice lo siguiente: "Se debe dividir cada uno de los Gigabytes que se muestran por un tercio y luego sumar las cantidades obtenidas". ¿Es correcto lo propuesto por Julio? Explica.

Respuesta ▸ _____ **Mi estrategia ▸** _____

b. Si el tamaño de ☑ WinXP (C:) se designa por x y el espacio de libre de ☑ WinXP (C:) se designa por y, remarca la expresión que corresponde a determinar el espacio utilizado de ☑ WinXP (C:). Explica tu elección.

$x + y$ $x - y$ $x \cdot y$ $x : y$

Explicación ▸ _____

3. Comparte tus estrategias con las de tus compañeros o compañeras, luego escribe cómo mejorarías la tuya.

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿En qué otro ámbito o situaciones crees que se utilizan operaciones con fracciones y números decimales, tanto positivos como negativos?
- ¿Qué dificultades tuviste para responder las preguntas anteriores? ¿Cómo podrías resolverlas?
- ¿Qué conocimientos de años anteriores o de tu experiencia utilizaste?
- ¿Fuiste perseverante en la búsqueda de nuevas estrategias para resolver las actividades? Explica.

Números racionales

Objetivo

- Conocer el conjunto de los números racionales.



De los *pendrives* que se muestran en la imagen, si compraras el de color rojo y utilizaras la quinta parte de su capacidad para guardar archivos de música.

- Escribe la fracción y el número decimal que representa la capacidad de música que utilizarías.

Fracción ▸ ☐ Número decimal ▸ ☐

La fracción y el número decimal que representa la capacidad utilizada en guardar estos archivos, son números racionales.

Atención

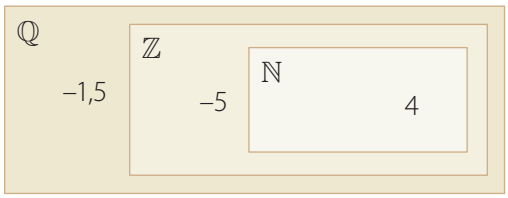
Todo número natural o entero puede ser representado como un número racional:

Ejemplos: $5 = \frac{5}{1}$

$-3 = -\frac{3}{1}$

Si un número pertenece a algún conjunto numérico se anota $\in$, en caso contrario se anota $\notin$. Gráficamente esto se podría representar como:

$-1{,}5 \in \mathbb{Q}$	$-1{,}5 \notin \mathbb{Z}$	$-1{,}5 \notin \mathbb{N}$
$-5 \in \mathbb{Q}$	$-5 \in \mathbb{Z}$	$-5 \notin \mathbb{N}$
$4 \in \mathbb{Q}$	$4 \in \mathbb{Z}$	$4 \in \mathbb{N}$



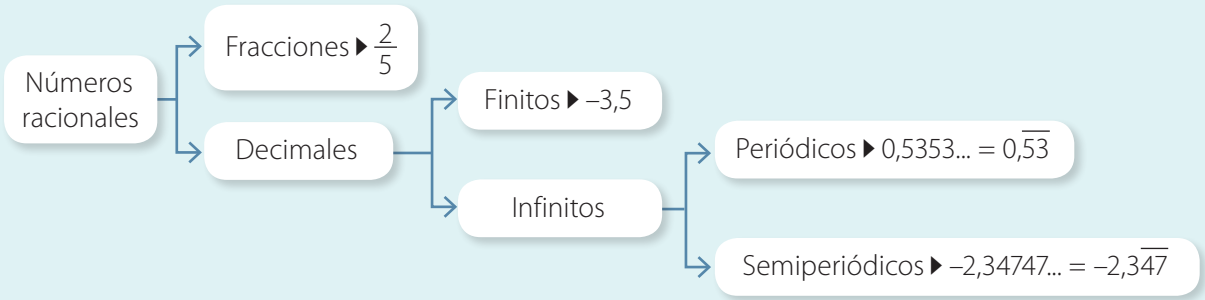
- A continuación, reconocerás algunos conjuntos numéricos estudiados en años anteriores y formalizarás de manera simbólica el conjunto de los números racionales ($\mathbb{Q}$).

Conceptos

- Los **números naturales** ($\mathbb{N}$) se representan por $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Los **números enteros** ($\mathbb{Z}$) se representan por $\mathbb{Z} = \{\ldots -2, -1, 0, 1, 2 \ldots\}$.
- Los **números racionales** ($\mathbb{Q}$) se representan por:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} \text{ tal que } a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

- El siguiente diagrama te ayudará a comprender el conjunto de los números racionales.



Simbólicamente se tiene que: $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, es decir, todo número natural es un número entero y todo número entero puede ser representado como un número racional.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Anota ∈ si el número pertenece al conjunto numérico, en caso contrario anota ∉ (no pertenece).

a. $2{,}5 \bigcirc \mathbb{Z}$

b. $-\frac{2}{7} \bigcirc \mathbb{Z}$

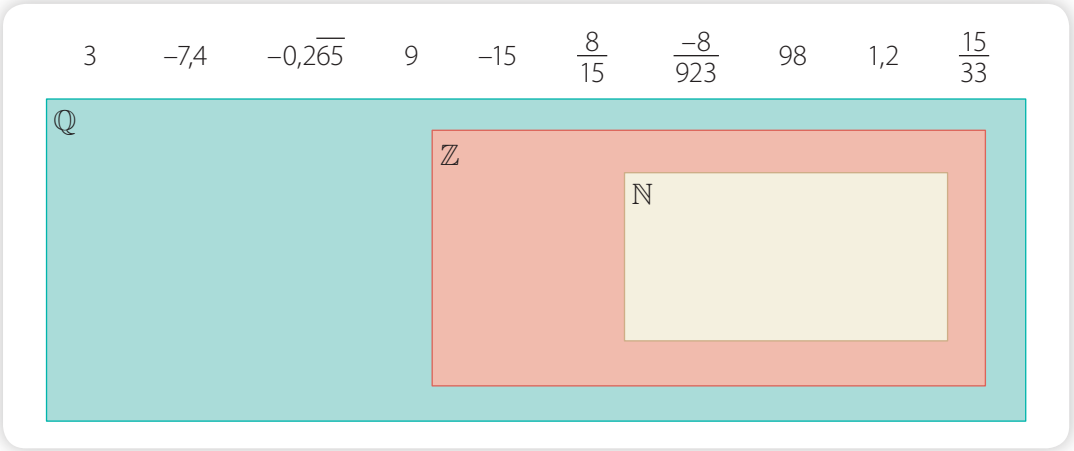
c. $125 \bigcirc \mathbb{N}$

d. $4{,}2 \bigcirc \mathbb{Q}$

e. $-4 \bigcirc \mathbb{N}$

f. $-2{,}\overline{5} \bigcirc \mathbb{Q}$

2. Observa el siguiente diagrama. Luego, ubica en el conjunto numérico correspondiente.



3. Analiza la siguiente situación. Luego, responde las preguntas y compara tus procedimientos con los de tus compañeros.

Las focas y los elefantes marinos son mamíferos que pasan la mayor parte del tiempo en los océanos. La foca común llega a medir 1,9 m; la foca de Largha, $\frac{9}{5}$ m; la foca de Baikal, 1,4 m, y la foca anillada, 1,6 m.

a. Entre estas especies, ¿cuál es la foca de menor longitud? ¿Concuerdas con tus compañeros? Explica.

b. ¿Cuál es la fracción que representa la medida de la foca común?

4. Álgebra **Determina, en cada caso, a qué conjuntos numéricos pertenece la solución de la ecuación $ax + b = c$, donde las variables a, b y c representan números naturales.**

a. $b < c$ y $(b - c)$ es múltiplo de a.

b. $b > c$ y $(b - c)$ es múltiplo de a.

c. $b < c$ y $(b - c)$ no es múltiplo de a.

d. $b > c$ y $(b - c)$ no es múltiplo de a.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 6 - 7

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿En qué otra situación cotidiana utilizas los números racionales? Explica.

- ¿Qué estrategias ocupaste para clasificar números según el conjunto numérico al que pertenecen?

Adición y sustracción de números racionales

Objetivos

- Resolver adiciones y sustracciones de números racionales de manera simbólica.
- Resolver problemas que involucren adiciones y sustracciones de números racionales.

Un grupo de montañistas se propone escalar el monte Everest. Debido a las dificultades climáticas deciden usar como recurso una *tablet* para buscar la mejor ruta y así conseguir su objetivo.

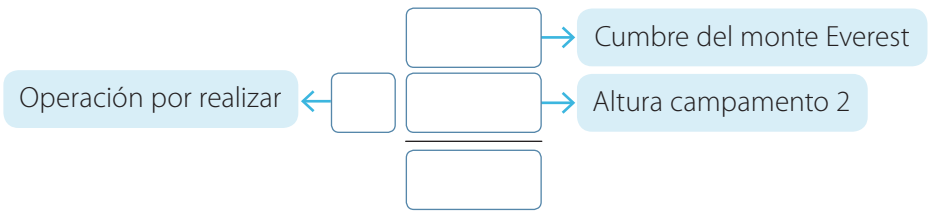


Actitud

Algunos montañistas chilenos han escalado el monte Everest; sin duda perseveraron en lo que se habían propuesto hasta lograr su objetivo. Sé perseverante al momento de resolver un problema y cumple los objetivos que te propongas.

¿A qué distancia del campamento 2 está la cumbre del monte Everest?

- Relaciona la información anterior y completa según corresponda.



- Responde la pregunta del problema. ▶ _____
- En esta actividad pudiste realizar una operación entre números racionales para responder la pregunta planteada. Ahora generalizarás la **adición y sustracción de números racionales de manera simbólica**.

Conceptos

Para resolver una **adición** o **sustracción de números racionales**, considera lo siguiente:

- Si están representados como **números decimales**, los ordenas de manera vertical, con la condición de que la coma decimal quede alineada, y resuelves.
- Si están representados como **fracciones**, simbolicamente resuelves:

Adición: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot d}$

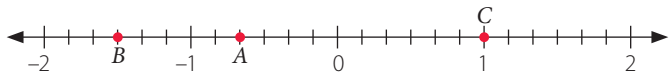
Sustracción: $\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d-b\cdot c}{b\cdot d}$

Donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, $d \neq 0$.

- En el caso que los números sean enteros, utilizas los procedimientos que ya has estudiado.

Ejemplo 1

La recta numérica está graduada en partes iguales.



¿Cuál es el resultado de la diferencia entre A y B aumentada en C?

Para responder la pregunta, puedes realizar lo siguiente:

PASO A PASO

1. $A = -\frac{4}{6}, B = -\frac{9}{6}, C = 1,$ ⟶ Determinas el número racional que representa cada letra.
2. $A - B + C = -\frac{4}{6} - \left(\frac{-9}{6}\right) + 1$ ⟶ Remplazas en la expresión.
3. $-\frac{4}{6} - \left(\frac{-9}{6}\right) + \frac{6}{6} = \frac{-4 + 9 + 6}{6} = \frac{11}{6}$ ⟶ Resuelves.

Respuesta: El resultado de $A - B + C$ es $\frac{11}{6} = 1,8\overline{3} = 1\frac{5}{6}$.

Atención

Recuerda que hay una relación entre lo escrito en lenguaje natural con ciertas operaciones matemáticas.

Lenguaje natural	Operación
Aumentado, sumado	+
Disminuido, restado, diferencia	−

Ejemplo 2

Considera que $x = \frac{5}{7}$ y $z = 3,\overline{2}$. ¿Cuál es el resultado de la adición entre x y z?

Para responder la pregunta, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. $x + y = \frac{5}{7} + 3,\overline{2}$ ⟶ Remplazas en la expresión.
2. $x + y = \frac{5}{7} + \frac{29}{9}$ ⟶ Representas como una fracción: $3,\overline{2} = \frac{32 - 3}{9} = \frac{29}{9}$.
3. $x + y = \frac{248}{63}$ ⟶ Sumas las fracciones: $\frac{5}{7} + \frac{29}{9} = \frac{5 \cdot 9 + 29 \cdot 7}{7 \cdot 9} = \frac{248}{63}$.

Respuesta: El resultado de $x + z$ es $\frac{248}{63}$.

Habilidad

Cuando eliges una estrategia estás desarrollando la habilidad de **resolver problemas**.

Ejemplo 3

Resuelve el siguiente problema.

De un *pendrive* de 16 Gb se utilizan 2,5 Gb en música y $1\frac{1}{4}$ Gb en documentos. ¿Cuánta memoria queda disponible?

Analiza los siguientes pasos que te ayudarán a resolver el problema.

PASO A PASO

1. A la capacidad del *pendrive* le restas la memoria utilizada: $16 - 2,5 - 1\frac{1}{4}$.
2. Puedes representar $1\frac{1}{4}$ con el número decimal 1,25 y luego resuelves:

$$16 - 2,5 - 1\frac{1}{4} = 13,5 - 1,25 = 12,25$$

Respuesta: Quedan disponibles 12,25 Gb.

Atención

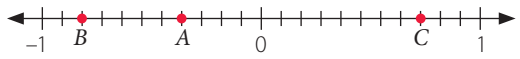
Si en el ejemplo 2 representas como un número decimal la fracción $\frac{5}{7}$, ¿el resultado sería el mismo?

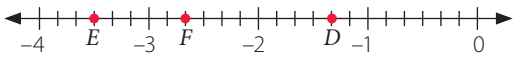
En una adición o una sustracción de números racionales, ¿podrías obtener como resultado un número entero? Comenta con un compañero o una compañera.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Cada recta numérica está graduada en partes iguales.





Calcula el valor según corresponda.

a. $A + B + C$

b. $D + E + F$

c. $A - B - C$

d. $D - E - F$

e. $A + D - E$

f. $B - D + C$

2. Analiza la siguiente información y responde.

Entre 4 grupos de un colegio recolectaron 200 kg de papel para reciclarlo. El primer grupo recogió $60\frac{1}{4}$ kg; el segundo, $13\frac{1}{5}$ kg, y el tercero, 45,93 kg.

a. Si lo recolectado por el cuarto grupo se anota como x, ¿qué expresión representa la relación entre todas la cantidades involucradas?

b. ¿Cuántos kilogramos de papel recolectó el cuarto grupo?

c. ¿Qué grupo recolectó más kilogramos de papel? ¿Cuál menos? ¿Cuántos kilogramos de diferencia hay entre estos grupos?

d. ¿Cuántos kilogramos más de papel recolectó el primer grupo que el segundo?

3. Determina los valores de A, B, C, D, E, F, G y H según corresponda.

a.

0,4	+	A	=	$\frac{9}{10}$
−		−		−
B	+	C	=	$\frac{3}{15}$
=		=		=
$\frac{3}{5}$	+	0,1	=	D

b.

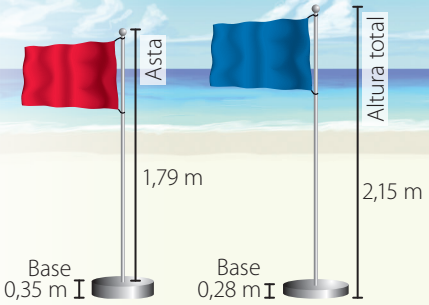
$-0,\overline{3}$	+	E	=	$\frac{13}{60}$
+		−		−
F	+	0,725	=	H
=		=		=
$-\frac{1}{3}$	+	G	=	$-\frac{61}{120}$

4. A partir del ítem anterior, responde.

a. ¿Cuál es el valor de $A + B - C + D$?

b. ¿Cuál es el valor de $E - G - F + H$?

5. A partir de la imagen, responde las siguientes preguntas.



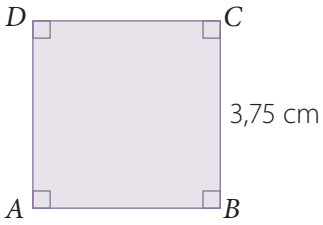
a. ¿Cuál es la altura del asta de la bandera azul?

b. ¿Cuál es la altura total de la bandera roja?

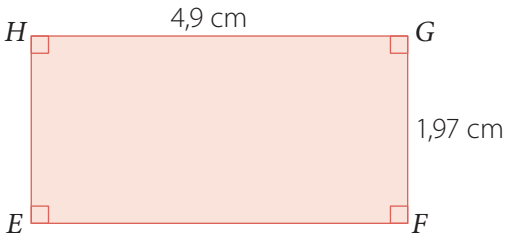
c. ¿Cuál es la diferencia positiva de las medidas de las astas de las bandera?

6. Geometría El perímetro de un polígono corresponde a la suma de la medida de sus lados. Considerando lo anterior, calcula el perímetro (P) de los siguientes polígonos.

a. $ABCD$ cuadrado.

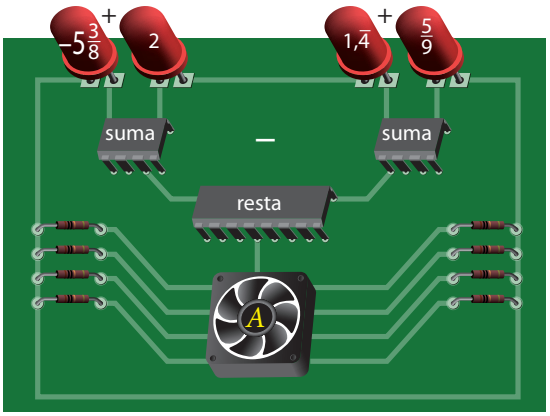


b. $EFGH$ rectángulo.

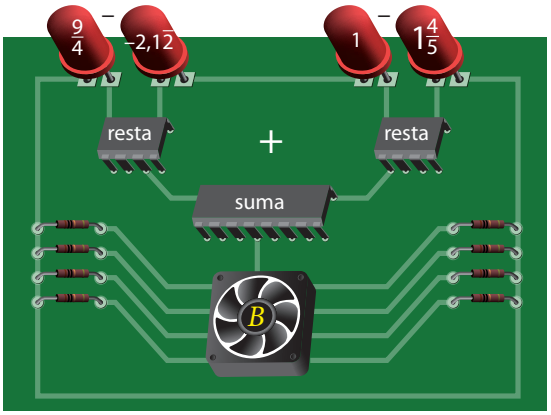


7. Elige uno de los circuitos, y pídele a un compañero o una compañera que resuelva el otro. Luego, comparen sus respuestas y expliquen cómo lo resolvieron.

a.



b.



Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 8 - 9

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué estrategia utilizaste al resolver adiciones o sustracciones de números racionales que involucraban su forma decimal y fraccionaria al mismo tiempo?

- ¿Fuiste perseverante al resolver problemas? ¿Cómo demostraste esa actitud?

Multiplicación y división de números racionales

Objetivos

- Resolver multiplicaciones y divisiones de números racionales de manera simbólica.
- Resolver problemas que involucren la multiplicación y la división de números racionales.

En diversas situaciones, el uso de calculadora te ayudará a comprobar ciertos cálculos que involucren números racionales.

En este caso, Sandra utiliza su calculadora para ayudar a Cristian a determinar la cantidad de metros de hilo que está usando para elevar su volantín.



Atención

En algunas calculadoras el punto corresponde a la coma decimal.

Para calcularlo, Sandra sabe que 1 yarda equivale a 0,9144 m, por lo que presiona las siguientes teclas.



- ¿Es correcto lo anterior? ¿Por qué? Explica.

Actitud

Es importante que, cuando te enfrentes a una situación problema, compruebes siempre tus resultados y corrijas los posibles errores que cometas en su resolución.

- Encierra el resultado que te permite responder la pregunta.



- Para resolver algunos problemas de la vida real es necesario aplicar la **multiplicación o la división de números racionales**. A continuación, se generalizarán estas **operaciones de manera simbólica**.

Conceptos

Para **multiplicar números racionales** ten en cuenta lo siguiente:

- Si son **números decimales**, los multiplicas de manera habitual, considerando que la posición de la coma decimal se desplaza, de derecha a izquierda, tantos lugares como cifras decimales tenga cada número decimal.
- Si están representados como **fracciones**, simbólicamente resuelves.

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$, donde $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, $d \neq 0$.

Ejemplo 1

Considera que $X = -\frac{8}{3}$, $Y = 2{,}1\overline{3}$, ¿cuál es el producto entre X e Y?

Para responder la pregunta puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. $X \cdot Y = -\frac{8}{3} \cdot 2{,}1\overline{3}$ ⟶ Remplazas en la expresión.
2. $X \cdot Y = -\frac{8}{3} \cdot \frac{32}{15}$ ⟶ Representas como una fracción: $2{,}1\overline{3} = \frac{213 - 21}{90} = \frac{192}{90} = \frac{32}{15}$
3. $X \cdot Y = -\frac{256}{45}$ ⟶ Resuelves: $-\frac{8}{3} \cdot \frac{32}{15} = -\frac{8 \cdot 32}{3 \cdot 15} = -\frac{256}{45}$

Respuesta: El resultado de $X \cdot Y$ es $-\frac{256}{45}$, o sea, el número decimal $-5{,}6\overline{8}$.

Atención

Recuerda que hay una relación entre lo escrito en lenguaje natural con ciertas operaciones matemáticas.

Lenguaje natural	Operación
Multiplicado, producto	$\cdot$
Dividido, cociente	:

Conceptos

En el conjunto de los números racionales se tiene lo siguiente:

- El **inverso multiplicativo** de un número $a \in \mathbb{Q}$, $a \neq 0$, se representa por $\frac{1}{a}$, y cumple que $a \cdot \frac{1}{a} = 1$.
- Para calcular el **cociente entre dos números racionales**, es posible resolver una multiplicación en la que el dividendo se multiplica por el inverso multiplicativo del divisor.

Simbólicamente: $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}$ $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$, con $b \neq 0$, $c \neq 0$, $d \neq 0$.

Visita la Web

Para saber más sobre multiplicación de números racionales, visita el siguiente sitio web:

http://www.vitutor.com/di/r/a_12.html

Ejemplo 2

Considera que $A = \frac{2}{5}$, $B = 1{,}\overline{2}$. ¿Cuál es el cociente de la división $A : B$?

Para responder a la pregunta, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. $\frac{A}{B} = \frac{\frac{2}{5}}{1{,}\overline{2}}$ ⟶ Remplazas en la expresión.
2. $\frac{A}{B} = \frac{2}{5} : \frac{11}{9}$ ⟶ Representas como una fracción: $1{,}\overline{2} = \frac{12 - 1}{9} = \frac{11}{9}$.
3. $\frac{A}{B} = \frac{2}{5} \cdot \frac{9}{11}$ ⟶ El inverso multiplicativo de $\frac{11}{9}$ es $\frac{9}{11}$.
4. $\frac{A}{B} = \frac{18}{55}$ ⟶ Resuelves $\frac{2}{5} \cdot \frac{9}{11} = \frac{18}{55}$.

Respuesta: El resultado de $\frac{A}{B}$ es $\frac{18}{55}$, que corresponde al número decimal $0{,}3\overline{27}$.

Atención

Si utilizas solo números decimales en los ejercicios 1 y 2, ¿qué procedimiento emplearías?

La multiplicación o la división de dos números racionales, ¿puede dar como resultado un número entero? Comenta con un compañero o una compañera.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Resuelve cada operación según corresponda.

a. Si $X = -\frac{6}{5}$, $Y = 2{,}5$, calcula $X \cdot Y$.

b. Si $Z = 2{,}\overline{5}$, $W = \frac{7}{6}$, calcula $\frac{W}{Z}$.

c. Si $C = 1\frac{7}{9}$, $D = 2\frac{1}{7}$, calcula $C \cdot D$.

d. Si $M = -0{,}1\overline{4}$, $L = 3\frac{1}{5}$, calcula $\frac{M}{L}$.

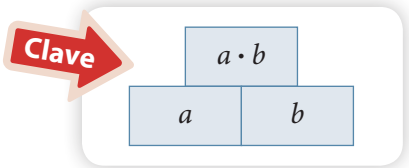
2. Completa cada término según corresponda.

a. $\frac{2}{9}$ → : 3 → ☐ → · 3 → ☐ → : (–5) → ☐ → · (–5) → ☐

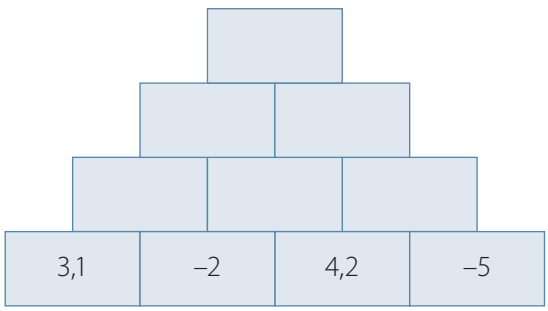
b. –0,5 → · 1,2 → ☐ → $: \frac{6}{5}$ → ☐ → : –0,2 → ☐ → $\cdot \frac{1}{8}$ → ☐

c. $2{,}\overline{3}$ → $: -\frac{7}{3}$ → ☐ → $\cdot 3\frac{1}{5}$ → ☐ → : 0,1 → ☐ → · –10 → ☐

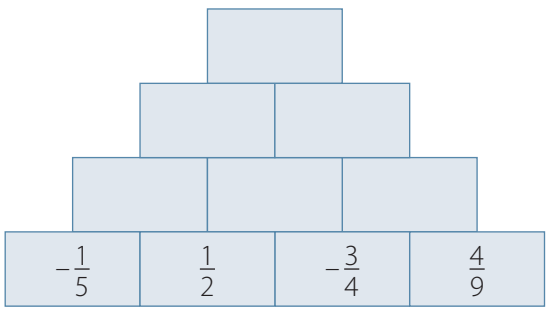
3. Completa cada representación según la clave entregada.



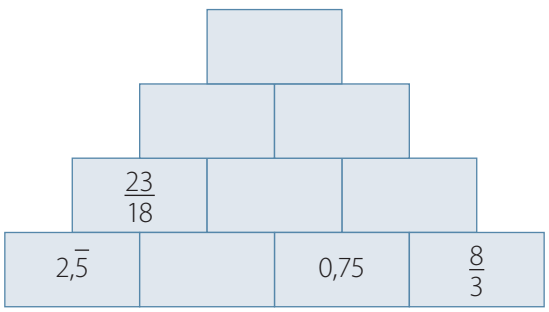
a.



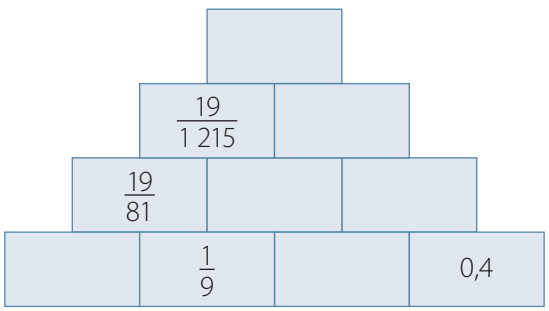
b.



c.



d.



4. Representa cada expresión del lenguaje natural en una expresión numérica y luego calcula su valor.

a. El producto entre la suma de tres y cuatro con la diferencia de siete y nueve.

b. La suma del producto entre cinco y menos cuatro y el cociente entre dos y ocho.

c. La resta del cociente entre menos diez y cinco con el producto entre cuatro y veinte.

d. El cociente entre el inverso aditivo de diez con el inverso multiplicativo de cuatro.

5. Resuelve los siguientes problemas.

a. Jesús y Magdalena tienen un bidón con $6\frac{1}{2}$ L de agua y además vasos de 0,25 L. Jesús afirma que puede llenar 30 vasos, en cambio Magdalena dice que son cuatro vasos menos. ¿Quién está en lo correcto? Explica tu respuesta.

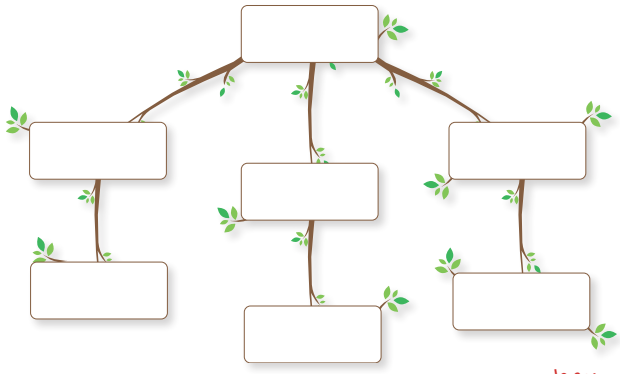
b. Sara y Fernando viajaron a un parque nacional a participar en labores de limpieza, pues les gusta colaborar con la conservación de la naturaleza. Gastaron $\frac{2}{21}$ del dinero que llevaban en la compra de un protector solar y $\frac{3}{11}$ en pasajes de autobús.

- Si tenían $ 75 000, aproximadamente ¿cuánto dinero gastaron en cada rubro?
- Sara usó $\frac{70}{123}$ del dinero sobrante para comprar 2 almuerzos, aproximadamente, ¿cuánto dinero costó cada almuerzo?

6. Observa los siguientes números racionales.

$\frac{7}{4}$; $-0,\overline{3}$; 0,75; $\frac{3}{10}$; $\frac{14}{20}$; 0,75; $\frac{7}{10}$

Ubícalos en cada recuadro de manera que el producto de cada rama sea igual a $-\frac{7}{40}$.



Ejercita lo estudiado

Cuaderno de ejercicios

Páginas 10 - 11

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica cómo se resuelve una multiplicación y una división entre números racionales.

- Al revisar el solucionario de tu texto, ¿cometiste algún error en los ejercicios?, ¿qué realizarías para no volver a cometerlo? Explica.

Propiedades de la adición y multiplicación de números racionales

Objetivo

- Reducir expresiones numéricas aplicando las propiedades de las operaciones en el conjunto de los números racionales.

Para comprobar la velocidad de banda ancha de su *notebook*, Elena realiza un test de velocidad de descarga y velocidad de carga.



Luego de cotizar en diferentes empresas, una le propone aumentar al doble ambas velocidades. Si luego de aumentar al doble se suman ambas velocidades, ¿cuál es su resultado?

- Completa con las cantidades según corresponda.

$$2 \cdot \left(\square_{\text{Velocidad de descarga}} + \square_{\text{Velocidad de carga}} \right) = 2 \cdot \square + 2 \cdot \square$$

$$= \square + \square$$

- Responde a la pregunta planteada. ▸ _____
- Si primero se hubiese sumado la cantidad entre paréntesis y luego se aumenta al doble, ¿el resultado es el mismo? Explica.

_____

_____

Conceptos

En el conjunto $\mathbb{Q}$, para la **adición** y **multiplicación** se cumplen las siguientes **propiedades**:

- **Clausura:** Si $a, b \in \mathbb{Q}$ entonces $(a + b) \in \mathbb{Q}$ y $(a \cdot b) \in \mathbb{Q}$.
- **Conmutativa:** Si $a, b \in \mathbb{Q}$ entonces $a + b = b + a$ y $a \cdot b = b \cdot a$.
- **Asociativa:** Si $a, b, c \in \mathbb{Q}$ entonces $a + (b + c) = (a + b) + c$ y $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$.
- **Elemento neutro:** Para todo $a \in \mathbb{Q}$ existe un único elemento neutro, tal que:

Neutro aditivo	Neutro multiplicativo
$a + 0 = 0 + a = a$	$a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$

- **Elemento inverso:** Para todo $a \in \mathbb{Q}$ existe:

Inverso aditivo	Inverso multiplicativo
$-a \in \mathbb{Q}$ tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0$	$\frac{1}{a} \in \mathbb{Q}$ $(a \neq 0)$ tal que $a \cdot \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \cdot a = 1$

- **Distributiva:** Si $a, b, c \in \mathbb{Q}$ entonces $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$.

Ejemplo 1

Aplica las propiedades de la adición y calcula el resultado: $0{,}3 - 9{,}1 + 0{,}\overline{56}$.

Para resolver la operación, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. $0{,}3 + (-9{,}1) + 0{,}\overline{56}$ → Representas como una adición de números racionales.
2. $\frac{3}{10} + \left(-\frac{91}{10}\right) + \frac{56}{99}$ → Representas los números decimales como fracciones.
3. $\left(\frac{3}{10} + \frac{56}{99}\right) + \left(-\frac{91}{10}\right)$ → Aplicas la propiedad asociativa.
4. $\frac{857}{990} + \left(-\frac{91}{10}\right)$ → Resuelves la adición entre fracciones.
5. $\frac{-8\,152}{990}$ → Obtienes el resultado.

Ejemplo 2

Aplica las propiedades de la multiplicación y calcula el resultado: $0{,}5 \cdot 1{,}2 + 9{,}1 \cdot 0{,}5$.

Para resolver la operación, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. $0{,}5 \cdot 1{,}2 + 0{,}5 \cdot 9{,}1$ → Aplicas la propiedad conmutativa para ordenar los factores.
2. $0{,}5 \cdot (1{,}2 + 9{,}1)$ → Aplicas la propiedad distributiva.
3. $0{,}5 \cdot 10{,}3$ → Calculas el producto.
4. $5{,}15$ → Obtienes el resultado.

Ejemplo 3

¿Existe el elemento neutro para la sustracción?

Para determinar el neutro de la sustracción debe existir un único número n que al restarlo con un número cualquiera a resulte el mismo número a.

PASO A PASO

1. De lo anterior se deduce que se debe cumplir que $a - n = n - a = a$.
2. De las ecuaciones anteriores, se tiene que:

$$a - n = a \Rightarrow n = 0 \qquad n - a = a \Rightarrow n = 2a$$

3. Ya que el elemento neutro debe ser único, y en este caso se ha demostrado que no. Para la **sustracción no existe un elemento neutro**.

¿En qué conjunto(s) numérico(s) no existe el elemento inverso o el elemento neutro para la adición? ¿Y qué ocurre con el elemento inverso o el elemento neutro para la multiplicación? Comenta con un compañero o una compañera.

Atención

La propiedad conmutativa de la adición (o de la multiplicación) dice que el orden de los sumandos (o de los factores) no altera el resultado.

Mientras que la propiedad asociativa muestra que no importa el orden de agrupación, ya que su resultado no se altera.

Habilidad

Al fundamentar conjeturas usando lenguaje matemático están desarrollando la habilidad de **argumentar** y **comunicar**.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Completa con = (igual) o ≠ (distinto) según corresponda.

a. $\frac{4}{7}+\left(\frac{3}{5}+\frac{1}{10}\right)$ ◯ $\left(\frac{4}{7}+\frac{3}{5}\right)+\frac{1}{10}$

b. $\frac{2}{7}+\left(-\frac{5}{8}+0,\overline{7}\right)$ ◯ $\left(\frac{2}{7}\cdot\left(-\frac{5}{8}\right)\right)\cdot 0,\overline{7}$

c. $0,4+(-0,4)$ ◯ $(-0,4)+0,4$

d. $\frac{4}{5}\cdot 1,75$ ◯ $1,75\cdot\frac{4}{5}$

e. $3,5\cdot(-2)-1,1\cdot 2$ ◯ $(3,5-1,1)\cdot 2$

f. $\frac{3}{7}\cdot\left(3,2+\frac{1}{2}\right)$ ◯ $\frac{3}{7}\cdot 3,2+\frac{3}{7}\cdot\frac{1}{2}$

2. Completa con el nombre de la propiedad que se utilizó en cada paso de la resolución.

a. $1,2\cdot\frac{4}{9}+1,2\cdot\frac{5}{9}$

$= 1,2\cdot\left(\frac{4}{9}+\frac{5}{9}\right)$ ▸ _____

$= 1,2\cdot 1$ ▸ _____

$= 1\cdot 1,2$ ▸ _____

$= 1,2$ ▸ _____

b. $\frac{8}{10}+\frac{2}{10}+\frac{1}{10}$

$=\left(\frac{8}{10}+\frac{2}{10}\right)+\frac{1}{10}$ ▸ _____

$= 1+\frac{1}{10}$

$=\frac{1}{10}+1$ ▸ _____

$=\frac{11}{10}$

3. Responde.

a. Al sumar dos números naturales, ¿su resultado es un número natural?

b. Si se restan dos fracciones, ¿su resultado es una fracción?

c. Si sumas o restas dos números racionales, ¿su resultado es un número racional?

d. Al multiplicar dos números naturales, ¿su resultado es un número natural? ¿Qué se obtiene si se dividen dos números naturales?

e. Si se multiplican o dividen dos fracciones, ¿su resultado es siempre un número entero?

f. Si se multiplican o dividen dos números racionales, ¿su resultado es un número racional?

4. Escribe V si la afirmación es verdadera o F si es falsa. Justifica las falsas.

a. ◯ Si $a\in\mathbb{N}$ y $b\in\mathbb{Q}$, entonces siempre ocurre que $a+b\in\mathbb{N}$.

b. ◯ Si $a\in\mathbb{Z}$ y $b\in\mathbb{Q}$, entonces siempre ocurre que $a\cdot b\in\mathbb{Z}$.

c. ◯ Si $a=0$ y $b\in\mathbb{Q}$, entonces siempre ocurre que $a+b=0$.

d. ◯ Si $a\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{Z}$ y $c\in\mathbb{Q}$, entonces siempre ocurre que $a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$.

5. **Lee la siguiente información, sigue el ejemplo y luego para cada par de números racionales intercala tres números decimales.**

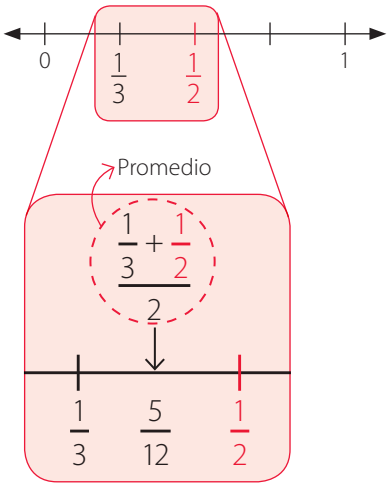
Siempre es posible ubicar un número racional entre dos números racionales distintos, por muy "cerca" que estén.

Por ejemplo, al ubicar una fracción entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, puedes calcular el promedio, es decir:

$$\frac{\frac{1}{3}+\frac{1}{2}}{2}=\frac{\frac{5}{6}}{2}=\frac{5}{12}$$

Luego esta fracción puedes ubicarla en la mitad de $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$, como se muestra en la recta numérica.

Gracias a la **densidad de los números racionales** siempre puedes encontrar otro número racional entre dos números racionales distintos por muy cercanos que se encuentren.



a. $-\frac{3}{5}$, $-0{,}4$ **b.** $\frac{5}{12}$, $\frac{9}{12}$ **c.** $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$ **d.** $-0{,}\overline{73}$, $-\frac{6}{15}$ **e.** $-\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{7}$ **f.** $0{,}99$, $\frac{100}{99}$

6. **Comenta con un compañero o una compañera lo siguiente: la propiedad descrita en el ítem anterior, ¿se puede aplicar a los números naturales? ¿Y a los números enteros? Argumenten sus ideas.**

7. Álgebra **Demuestra la propiedad de la clausura para la multiplicación de números racionales. Para esto utiliza la demostración de la clausura de la adición de números racionales, que se presenta como ejemplo.**

Si a y b son números racionales distintos de cero, tales que $a+b=c$, hay que demostrar que c es un número racional. Por definición de un número racional, $a=\frac{x}{y}$ y $b=\frac{z}{w}$, con x, y, w, z números enteros distintos de cero. Su adición es:

$$\frac{x}{y}+\frac{z}{w}=\frac{xw+zy}{yw}=c$$

Hay que demostrar que c es un número racional. Como la adición y la multiplicación de números enteros da como resultado un número entero, entonces $xw+zy$ es un número entero, además yw es un número entero distinto de cero. Por lo tanto, c es un número racional por ser el cociente de números enteros.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 12 - 13

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica con tus palabras las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva.

- ¿Cómo planificaste tu trabajo en las actividades que has desarrollado? Explica.

Operaciones combinadas

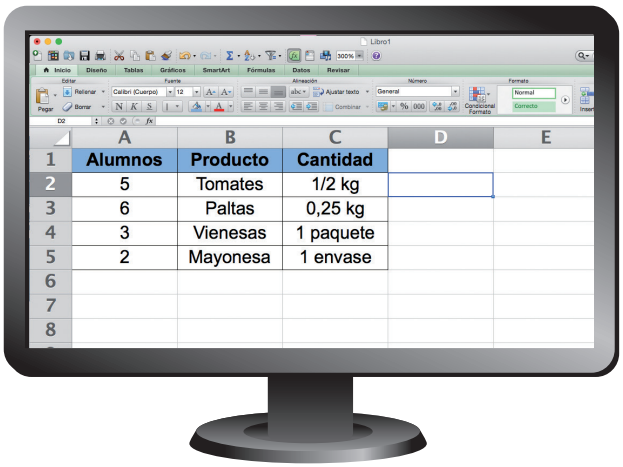
Objetivo

- Realizar operaciones mixtas con números racionales, respetando la jerarquía de las operaciones y los paréntesis.

Un 1º medio planifica realizar una completada para juntar dinero y de esta forma ayudar a un compañero. El pan y algunos aderezos fueron donados, el resto se cotizó y se obtuvo lo siguiente:



Para ordenar cada uno de los aportes, los estudiantes lo registraron en una planilla de cálculo.



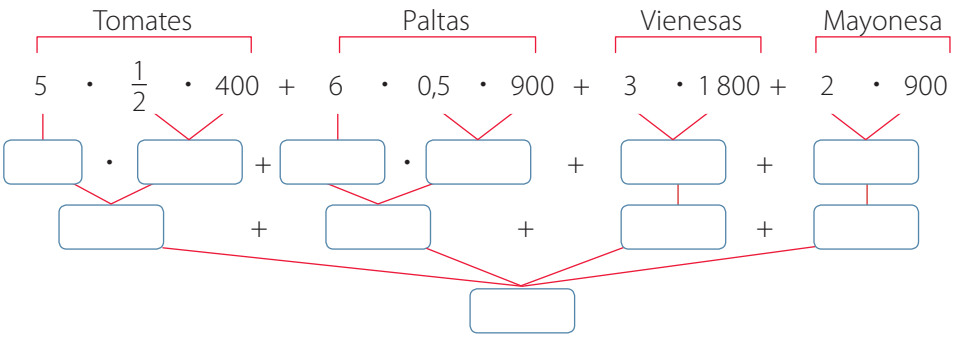
	A	B	C	D	E
1	**Alumnos**	**Producto**	**Cantidad**		
2	5	Tomates	1/2 kg		
3	6	Paltas	0,25 kg		
4	3	Vienesas	1 paquete		
5	2	Mayonesa	1 envase		
6					
7					
8					

Actitud

Cuando realices cálculos, busca y corrige tus posibles errores.

¿Cuánto dinero gastaron en total los estudiantes que colaboraron?

- Completa con los resultados que corresponden.



- Escribe la respuesta del problema.

En muchas situaciones cotidianas es necesario realizar operaciones combinadas que involucran números racionales, como es el caso de la actividad inicial. En el cuadro de conceptos se describe cómo realizar **operaciones combinadas**.

Conceptos

Para resolver una **operación combinada**, resuelves en el siguiente orden:

1. Las operaciones que están en los paréntesis desde el más interior hasta el más exterior, de izquierda a derecha.
2. Las potencias.
3. Las multiplicaciones o las divisiones, de izquierda a derecha.
4. Las adiciones o las sustracciones.

Ejemplo 1

Calcula el resultado de la siguiente expresión.

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}-0,\overline{4}\right)-2\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right)-\left(4^2-\frac{3}{5}:0,2\right)$$

1 Resuelves los paréntesis por separado.

$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}-0,\overline{4}\right)=\frac{1}{5}-0,\overline{4}$ → Resuelves la multiplicación.

$=\frac{1}{5}-\frac{4}{9}$ → Conviertes el decimal en fracción.

$=\frac{9-20}{45}=-\frac{11}{45}$ → Calculas la resta.

$2\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right)=2\cdot\left(\frac{15+2}{10}\right)=2\cdot\left(\frac{17}{10}\right)$ → Resuelves la adición del paréntesis.

$=\frac{17}{5}$ → Resuelves la multiplicación.

PASO A PASO

$\left(4^2-\frac{3}{5}:0,2\right)=\left(16-\frac{3}{5}:\frac{2}{10}\right)$ → Resuelves la potencia.

$=(16-3)$ → Resuelves la división.

$=13$ → Calculas la resta.

2 Remplazas los resultados y calculas las operaciones correspondientes.

$$\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}-0,\overline{4}\right)-2\cdot\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{5}\right)-\left(4^2-\frac{3}{5}:0,2\right)=-\frac{11}{45}-\frac{17}{5}-13$$

$=\left(-\frac{11}{45}\right)+\left(-\frac{17}{5}\right)+(-13)$ → Escribes como una adición de números racionales.

$=\frac{(-11\cdot 5)+(-17\cdot 45)}{45\cdot 5}+(-13)$ → Resuelves la adición de fracciones negativas.

$=\frac{(-55)+(-765)}{45\cdot 5}+(-13)$ → Calculas los productos del numerador.

$=\frac{-820}{225}+(-13)=\frac{(-820)+(-13\cdot 225)}{225}$ → Resuelves la adición de fracciones.

$=\frac{-3\,745}{225}$

Atención

La expresión 4^2 corresponde a una potencia y representa la multiplicación $4\cdot 4=16$.

En el tema 2 de esta unidad estudiarás las potencias de base racional y exponente entero, extendiendo lo que estudiaste en años anteriores.

Recursos Digitales Complementarios



RDC 2

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Realiza las operaciones. Expresa tu resultado como una fracción irreductible.

a. $\frac{1}{3} - \left[\frac{1}{5} \cdot \left(\left[\frac{1}{3} - \frac{5}{2}\right] + 0{,}3\right)\right]$

b. $\left[\left(10\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) + \frac{154}{17}\right] \cdot \frac{1}{2}$

c. $\dfrac{2^2 + \frac{2}{3}}{\frac{5}{7} - \frac{169}{28}}$

d. $\dfrac{3 - 1\frac{2}{3}}{\frac{3}{5} - \frac{1}{10}}$

e. $\left[\left(\frac{-7}{15} + 0{,}\overline{9} + \frac{1}{5}\right) : \left(7^2 - \frac{1}{2}\right)\right] + \frac{251}{195}$

f. $\left[\frac{11}{7} : \left(\frac{1}{7} - \frac{5}{2}\right) + [-7]\right] : \frac{3}{4}$

g. $\dfrac{0{,}025 : (5 + 0{,}\overline{9})}{\frac{11}{20} - \frac{131}{240}}$

h. $\left[\dfrac{\left(2 + \frac{2}{3}\right) \cdot \frac{5}{5}}{\frac{5}{7} - \frac{6}{28}}\right]$

2. Completa la tabla según corresponda.

a	b	c	$(a - b \cdot [c + a])$	$([a - b] \cdot [c + a])$
0,15	$\frac{5}{7}$	0,1		
$\frac{4}{3}$	$-1{,}\overline{5}$	0,001		
$0{,}\overline{14}$	$1\frac{3}{4}$	$-\frac{4}{5}$		

3. Álgebra Escribe numéricamente las siguientes expresiones y calcula el resultado.

a. Resta el cuadrado del número 5 al doble de la suma de $\frac{3}{7}$ y $\frac{9}{10}$.

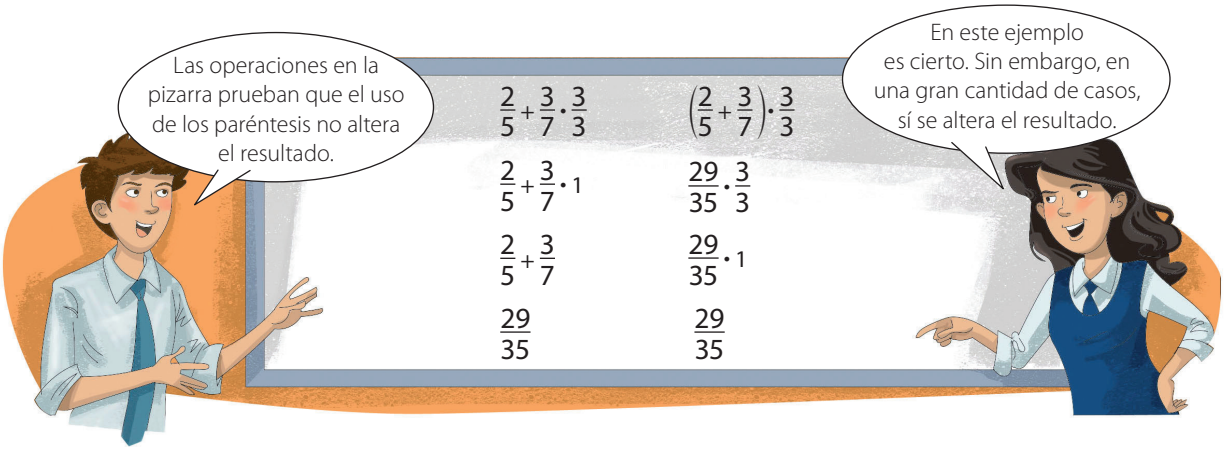
b. Divide el cuadrado de la diferencia entre 17 y 5 por el triple de la suma de 5 y 3.

c. Tres veces la suma de 0,7 y 2,3 se disminuye por el cuádruple de la diferencia de 8,7 y 5,2.

d. El producto entre el número 8 y la suma de sus primeros dos sucesores se aumenta en el triple de la diferencia de 115,7 y 7,7.

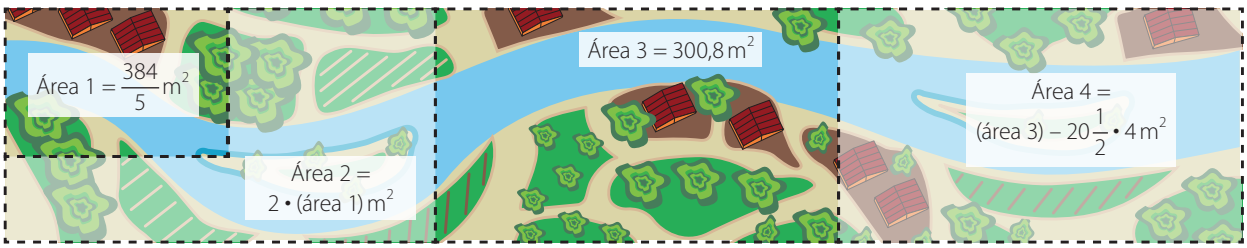
e. El doble de un quinto disminuido en el triple de cuatro novenos.

4. La profesora de Matemática pidió a Alejandro y a Claudia que expliquen la razón del uso de paréntesis para resolver operaciones combinadas.



¿Quién está en lo correcto? ¿Por qué? Da un ejemplo que apoye su respuesta.

5. Estudiantes de 1º medio limpiaron los alrededores de un río. El área total por limpiar fue dividida en 4 más pequeñas para distribuir el trabajo en grupos.



a. Calcula el área total que limpiaron los estudiantes.

b. Determina, con una calculadora, qué fracción del área total limpió cada equipo y súmalas. ¿Cuál fue el resultado? ¿Por qué crees que se obtuvo ese resultado?

c. Elabora junto con tres compañeros un diagrama que muestre las principales áreas verdes de su colegio. Determinen cuáles se pueden limpiar para sembrar plantas o árboles. Comenten por qué es necesario que lleven a cabo este tipo de acciones.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 14 - 15

Reflexiona sobre tu trabajo

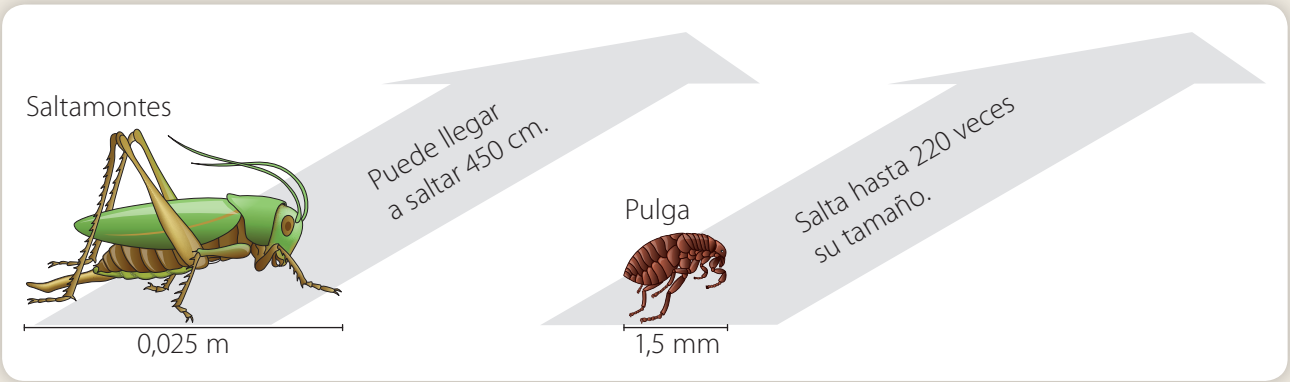
- ¿Cuál es la mayor dificultad que tuviste al realizar operaciones combinadas?

- Cuando efectuaste operaciones combinadas, ¿buscaste errores en tus cálculos? ¿Los corregiste? ¿Cuál fue tu mayor error?

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 1

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

1. Biología En la imagen se muestra la longitud aproximada de un saltamontes y la de una pulga.



a. ¿A qué conjunto numérico pertenece cada uno de los números que aparecen en la imagen? (2 puntos)

b. ¿Cuántas veces su tamaño puede saltar un saltamontes? (3 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸

c. Al expresar en metros los saltos de una pulga y de un saltamontes, ¿cuánto suman las distancias que alcanzan? Exprésalo simbólicamente y luego resuelve. (3 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸

d. La suma de las distancias del ítem anterior, ¿es un número entero? Explica. (2 puntos)

e. Si el saltamontes y la pulga saltan dos veces, ¿qué expresiones permiten calcular la suma de las distancias recorridas? Explica qué propiedad las relaciona. (2 puntos)

I. $2 \cdot (4{,}5 + 0{,}33)$ m II. $(2 \cdot 4{,}5 + 0{,}33)$ m III. $(4{,}5 \cdot 2 + 0{,}33 \cdot 2)$ m

Explicación ▸

2. En la imagen se muestran algunas monedas que se usan en Estados Unidos y sus equivalencias.

1 dólar



50 centavos



50 centavos = 0,5 dólar

Quarter



1 quarter
= 25 centavos = 0,25 dólar

Usa los datos para **crear** y resolver un problema que involucre una operación combinada. Luego, resuélvela utilizando las propiedades de la adición y multiplicación de números racionales. (4 puntos)

Problema ▸

Resolución 1

Resolución 2

Respuesta ▸

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1a y 1d	Identifican el conjunto numérico al que pertenece cada número.		**Logrado:** 10 puntos o más. **Medianamente logrado:** 8 a 9 puntos. **Por lograr:** 7 puntos o menos.
1b y 1c	Resuelven operaciones mixtas con números racionales.		
1e y 2	Aplican las propiedades de la adición y multiplicación de números racionales.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Utilizaste la estrategia que planteaste al inicio de este tema? ¿Cuáles otras usaste?

- ¿Has cumplido tus metas iniciales? ¿Qué has hecho para cumplirlas? ¿Qué debes mejorar?

- ¿Cómo resolviste las dificultades que se presentaron en el transcurso del tema?

Tema 2

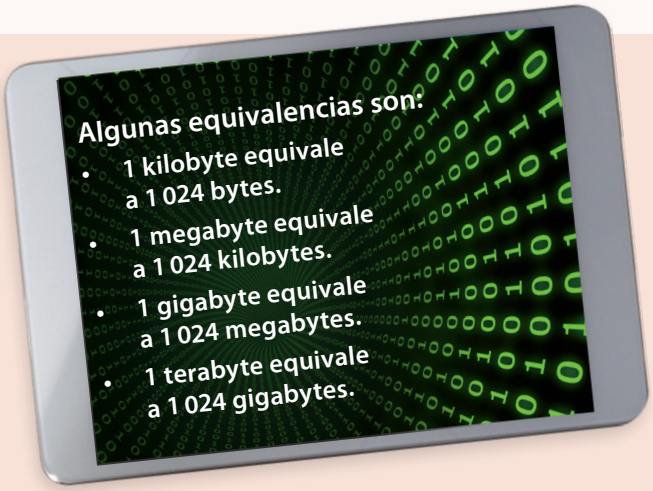
Potencias

En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 2.

Recuerdo lo que sé

Lee la siguiente información.

Un bit es el acrónimo de *binary digit* (dígito binario). Un bit es un dígito del sistema de numeración binario, o sea, un 1 o un 0. Considerando como referencia que 1 byte corresponde a 8 bits.



1. Completa las siguientes equivalencias.

a. 1 megabyte equivale a _____ bytes.

b. 1 gigabyte equivale a _____ bytes.

c. 1 terabyte equivale a _____ bytes.

2. Completa con el exponente de la potencia de 2 de cada una de las equivalencias anteriores.

a. 1 megabyte equivale a $2^{\square}$ bytes.

b. 1 gigabyte equivale a $2^{\square}$ bytes.

c. 1 terabyte equivale a $2^{\square}$ bytes.

Las **potencias** con exponente natural se pueden interpretar como una multiplicación iterada.

Por ejemplo: $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^4$

3. Escribe la descomposición aditiva de cada equivalencia.

a. 1 kilobyte equivale a _____ bytes.

b. 1 megabyte equivale a _____ bytes.

c. 1 gigabyte equivale a _____ bytes.

d. 1 terabyte equivale a _____ bytes.

La descomposición aditiva de un número corresponde a la suma de sus valores posicionales.

Por ejemplo:

$452 = 4 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$

4. ¿Cuál es el resultado de $2^{40} : 2^{20}$? ¿Qué significa, en el contexto anterior, el valor obtenido?

_____

_____

Diseño mi estrategia

5. Analiza cada caso y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

Si un *pendrive* tiene una capacidad de 16 gigabytes y un CD tiene una de 700 megabytes, ¿cuántas veces más información puede almacenar el *pendrive* que el CD?

Respuesta ▸ _____ **Mi estrategia ▸** _____

6. A partir del problema anterior, responde las siguientes preguntas.

a. ¿Qué operación te permitió responder la pregunta anterior?

b. ¿Utilizaste potencias para resolverlo? ¿Por qué?

c. ¿Es posible escribir el resultado de la operación como una potencia? En el caso de que sea posible, explica cómo hacerlo.

7. Comenta con un compañero o compañera la estrategia que utilizaste para resolver la actividad 5 y anota lo que te serviría para mejorar tu estrategia.

Reflexiona sobre tu trabajo

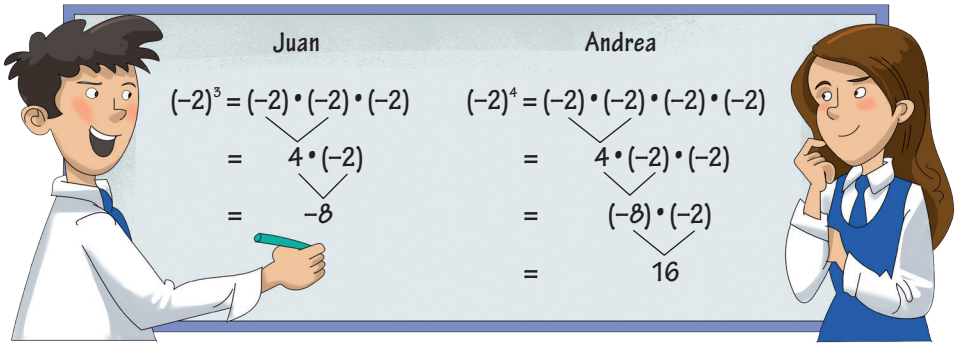
- ¿En qué otro ámbito crees que se utilicen las potencias? ¿Por qué razón crees que se usan?
- ¿Qué dificultades tuviste en las actividades anteriores? ¿Cómo podrías resolverlas?
- ¿Qué conocimientos previos utilizaste?

Potencias de base y exponente entero

Objetivos

- Comprender las potencias cuya base y exponente son números enteros.
- Comprender el significado del exponente 0 y de los exponentes enteros negativos.

Juan y Andrea resuelven ejercicios de potencias.



Su profesor lo revisa y les dice que ambos cálculos están correctos:

- Comprueba los cálculos usando la calculadora.
- ¿Qué relación observas entre cada potencia y su resultado? Explica.

Completa la siguiente tabla y luego responde.

Actitud

Cuando trabajes en equipo, recuerda respetar y valorar las opiniones de los demás.

Potencia	Multiplicación iterada	Resultado	¿Exponente par o impar?	Signo del resultado
$(-2)^5$				
$(-2)^6$				
$(-3)^4$				
$(-3)^5$				
$(-1)^7$				
$(-1)^8$				

- ¿Qué signo tiene el resultado de una potencia cuya base es un número negativo? ¿Depende del exponente? Comenta con un compañero o una compañera.

Habilidad

Cuando elaboras esquemas o tablas para dar respuesta a distintas situaciones estás desarrollando la habilidad de **representar**.

Al igual que las potencias que tienen como base un número natural, las potencias que tienen como base un número entero negativo y exponente natural se pueden considerar como una multiplicación iterada.

Conceptos

- Una **potencia** cuya base es un **número entero negativo** dará como resultado un número positivo si el exponente es par, y dará como resultado un número negativo si el exponente es impar.
- Al representar simbólicamente esta relación, se tiene que: Si $a \in \mathbb{Z}^-$ y $n \in \mathbb{N}$, se cumple que:
  - Si n es par, entonces $a^n > 0$.
  - Si n es impar, entonces $a^n < 0$.

Atención

Recuerda la **regla de los signos para la multiplicación** de números enteros.

$+ \cdot + = +$ $\quad + \cdot - = -$

$- \cdot - = +$ $\quad - \cdot + = -$

Ejemplo 1

¿El resultado de -5^4 es igual que el de $(-5)^4$?

Para responder a la pregunta, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. Calculas por separado ambas potencias.

$$-5^4 = -(5^4) = -(5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5) = -(25 \cdot 5 \cdot 5) = -(125 \cdot 5) = -625$$

$$(-5)^4 = (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) \cdot (-5) = 25 \cdot (-5) \cdot (-5) = -125 \cdot (-5) = 625$$

2. En el desarrollo de la potencia del lado izquierdo se observa que el signo de la potencia en todo el desarrollo es negativo.

3. En el lado derecho se observa que el signo de la potencia influye en cada una de las multiplicaciones.

Respuesta: El resultado de -5^4 es distinto al de $(-5)^4$.

Conceptos

Cuando el **exponente de una potencia es 0**, su resultado es 1 siempre que la base de la potencia no sea 0.

Simbólicamente: Si $a \in \mathbb{Z} - \{0\}$ entonces $a^0 = 1$.

Atención

$\mathbb{Z} - \{0\}$ significa que se considera el conjunto de los números enteros pero menos el cero.

Ejemplo 2

Verifica con un ejemplo que $a^0 = 1$ para $a \neq 0$.

Se utilizará $a = 3$, entonces se tiene que la división $3 : 3 = 1$, que se escribe como $3^1 : 3^1$ usando potencias.

Luego al aplicar la regla de la división de potencias de igual base se tiene:

$$1 = 3^1 : 3^1 = 3^{1-1} = 3^0$$

Por lo tanto $3^0 = 1$, es decir, se verifica la propiedad.

En vez de usar la base 3 si se utiliza una base negativa o cualquier otra base distinta de cero, ¿cómo desarrollarías el ejemplo? Comenta con un compañero o una compañera.

Hasta ahora has calculado potencias con exponente positivo, pero ¿qué sucede si el exponente es un número negativo? Por ejemplo, calculemos el valor de 2^{-3}.

Observa lo siguiente:

$$2^{-3} = 2^{0-3} = \frac{2^0}{2^3} = \frac{1}{2^3}$$

Entonces, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$

- ¿Se utilizó alguna propiedad de potencia? Explica.

Conceptos

Si el **exponente de una potencia de base natural** es un número entero negativo, su valor será igual al del inverso multiplicativo de la potencia cuyo exponente es positivo.

Simbólicamente: Si $n \in \mathbb{N}$ y $a \in \mathbb{N}$, entonces $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Esta propiedad también se cumple si la base de la potencia es un número entero distinto de cero.

Ejemplo 3

Calcula el cociente entre 3^7 y 3^9 y escríbelo como potencia.

Para resolver el problema, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. Escribes el valor de cada potencia.

Valor de 3^7.

$3^7 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 2\,187$

Valor de 3^9.

$3^9 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 19\,683$.

2. Calculas el cociente empleando la regla de la división de potencias de igual base y usando sus valores.

Usando potencias	Usando valores
$2\,187 : 19\,683 = 3^7 : 3^9$ $= 3^{7-9} = 3^{-2}$	$2\,187 : 19\,683 = \frac{2\,187}{19\,683} = \frac{1}{9} = \frac{1}{3^2}$

3. Igualas los dos resultados y obtienes que $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$.

Por lo tanto, $3^7 : 3^9 = 2\,187 : 19\,683 = 3^{-2}$.

- ¿Es correcto afirmar que siempre se cumple que $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$?
- ¿Cuál es la importancia del conjunto numérico al que pertenecen a y n?

Ejemplo 4

Calcula el valor de $(-2)^{-4}$ y de $(-3)^{-3}$.

- $(-2)^{-4} = \frac{1}{(-2)^4}$ → Aplicas la regla de una potencia de exponente negativo.

  $= \frac{1}{(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)}$ → Desarrollas la potencia.

  $= \frac{1}{4 \cdot 4} = \frac{1}{16}$ → Multiplicas, en el denominador, los números enteros de a pares siguiendo la regla de los signos.

  $= \frac{1}{2^4}$ → Escribes el denominador como potencia.

- $(-3)^{-3} = \frac{1}{(-3)^3}$ → Aplicas la regla de una potencia de exponente negativo.

  $= \frac{1}{(-3) \cdot (-3) \cdot (-3)}$ → Desarrollas la potencia.

  $= \frac{1}{9 \cdot (-3)} = \frac{1}{-27}$ → Multiplicas, en el denominador, los números enteros de a pares siguiendo la regla de los signos.

  $= -\frac{1}{27}$

  $= -\frac{1}{3^3}$ → Escribes el denominador como una potencia.

Por lo tanto, $(-2)^{-4} = \frac{1}{2^4}$ y $(-3)^{-3} = -\frac{1}{3^3}$.

¿Cómo se puede expresar una fracción cuyo denominador es una potencia de exponente negativo? Comenta con un compañero o una compañera.

Ejemplo 5

Usa las propiedades de las potencias de base entera para simplificar la expresión algebraica y escribirla como potencia. Considera que $a, b, c \in \mathbb{Z}$ y $a \neq 0$, $b \neq 0$ y $c \neq 0$.

$$\frac{a^2 \cdot b^2 \cdot b^3 \cdot c^4}{c \cdot a^2 \cdot b^5 \cdot c^3}$$

Para simplificar la expresión, puedes seguir estos pasos:

$\frac{a^2 \cdot b^{2+3} \cdot c^4}{a^2 \cdot b^5 \cdot c^{1+3}} = \frac{a^2 \cdot b^5 \cdot c^4}{a^2 \cdot b^5 \cdot c^4}$ → Aplicas la propiedad de multiplicación de potencias de igual base.

$= \frac{a^2}{a^2} \cdot \frac{b^5}{b^5} \cdot \frac{c^4}{c^4}$ → Escribes como producto de fracciones.

$= a^{2-2} \cdot b^{5-5} \cdot c^{4-4}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias.

$= a^0 \cdot b^0 \cdot c^0$ → Aplicas la propiedad de las potencias con exponente cero.

$= 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$

¿Cómo explicarías usando argumentos matemáticos que el valor de una potencia de exponente 0 es 1? Explica con tus palabras.

Atención

Cuando el exponente de una potencia no se anota, se asume que es 1, es decir, $a = a^1$.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Escribe positivo o negativo, dependiendo del valor de cada potencia.

a. $(-6)^7$ **c.** $(-5)^4$ **e.** 18^5

b. 8^3 **d.** -6^7 **f.** 2^3

2. Representa los siguientes productos como potencias.

a. $(-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) \cdot (-6)$ **d.** $(-8) \cdot (-8) \cdot (-8)$

b. $-(4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4)$ **e.** $-(8 \cdot 8 \cdot 8)$

c. $(-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4) \cdot (-4)$ **f.** $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

3. Escribe cada potencia como un producto de factores iguales.

a. -3^6 **c.** 8^4 **e.** -7^3

b. $(-11)^2$ **d.** 2^3 **f.** $-(15)^2$

4. Realiza las siguientes operaciones aplicando las propiedades de las potencias.

a. $\dfrac{(-3)^3 \cdot (-5)^2}{225}$ **b.** $\dfrac{(-5^{-2}) \cdot (5^4) \cdot (125)^{-1}}{25 \cdot 5^{-2}}$ **c.** $\dfrac{(3^2) \cdot (3^4) \cdot (-27)^{-1}}{81 \cdot 243^{-1}}$

5. Calcula el valor de las siguientes potencias.

a. 5^4 **c.** 1^{12} **e.** $(-3)^5$

b. -4^4 **d.** 10^4 **f.** -12^2

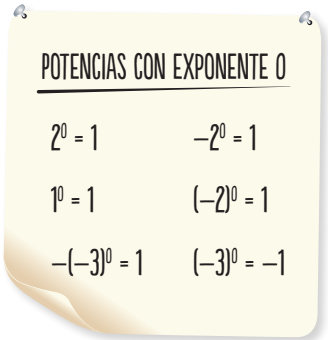
6. Explica si cada igualdad es correcta o no. Corrige las incorrectas.

a. $-7^5 = 16\,807$ **c.** $8^4 = \dfrac{1}{8^{-4}}$ **e.** $-7^2 + (-2)^3 = -57$

b. $-5^{-4} = -\dfrac{1}{5^4}$ **d.** $2^{-3} = \dfrac{1}{9}$ **f.** $\dfrac{1}{2^{-3}} = 6$

7. Lee y responde.

La profesora de Matemática pidió a sus estudiantes, como tarea, que anotaran en un cartel 6 potencias con exponente 0 y sus respectivos resultados. Andrés elaboró el cartel que se muestra. ¿Cuáles de las igualdades son incorrectas? Explica.



8. Resuelve los siguientes problemas.

a. Don Pedro instaló un tanque cúbico en su casa para almacenar agua. Si la arista del tanque es de 8 dm, ¿qué potencia representa al volumen de ese tanque?

b. Carlos y David jugaron 5 partidas de ajedrez, de las que David ganó 3. Carlos le preguntó a su amigo qué quería como premio. David, que es aficionado a la Matemática y le gustan mucho las frutas, le pidió que le llevara naranjas:

– Sí, está bien. ¿Cuántas quieres? —preguntó Carlos.

– Quiero que me traigas 1 por la primera casilla del tablero de ajedrez, 2 por la segunda, 4 por la tercera y así sucesivamente; es decir, en cada casilla el doble de la anterior, hasta la casilla 32.

– Está bien, mañana las traigo —dijo Carlos sin imaginarse lo que le habían pedido.

- Escribe como potencia la cantidad de naranjas que debería llevar Carlos.
- Usa una calculadora científica para determinar esa cantidad de naranjas.

c. Observa la siguiente situación.



- Para colaborar con su amigo y su amiga, Gloria debe decir quién tiene la razón. ¿A quién debe escoger? ¿Qué explicación les podría dar? Comenta con un compañero o una compañera.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Página 16

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué significan el exponente 0 y los exponentes enteros negativos en una potencia?

_____

_____

- Cuando trabajaste con tus compañeros, ¿respetaste y valoraste sus opiniones? ¿Qué actitud mostraste?

_____

_____

Potencias de base racional y exponente entero

Objetivos

- Comprender las potencias cuya base es un número racional y el exponente un número entero.
- Reconocer el significado del exponente 0 y de los exponentes enteros negativos.

El **triángulo de Sierpinski** es una estructura que se genera por un proceso recursivo a partir de un triángulo del cual se extraen triángulos de menor tamaño. La secuencia de la construcción es la siguiente:

1° La figura original es un triángulo (Figura 0).

2° La figura siguiente se genera dibujando triángulos con vértices en los puntos medios de los lados y extrayendo el triángulo central.

3° Se repite este proceso en cada triángulo no extraído.

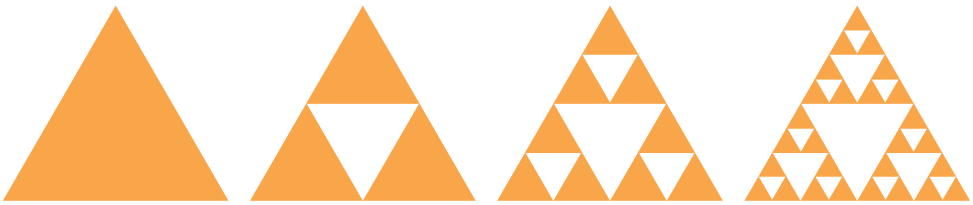


Figura 0 Figura 1 Figura 2 Figura 3

Actitud

Cuando trabajes en grupo, es muy importante que lleves a cabo las actividades aun cuando no te supervisen.

Trabaja y comenta las siguientes preguntas con tus compañeros, considerando que el triángulo usado anteriormente es equilátero.

- Si la medida de los lados del triángulo inicial es 1 cm, ¿cuánto miden los lados de los triángulos más pequeños de las figuras 1, 2 y 3?

- Escriban los resultados anteriores usando potencias.

- ¿Cuántos triángulos sin extraer tienen las figuras 1, 2 y 3? Usen potencias para escribir cada resultado.

- ¿Cuántos triángulos de color tendrá la figura 4? Usen potencias para escribir el resultado.

Habilidad

El uso de expresiones matemáticas para describir situaciones y generalizarlas se relaciona con la habilidad de **modelar**.

- En la actividad anterior pudiste notar que las medidas de los lados de los triángulos se podían escribir como multiplicación iterada. Este resultado motiva el uso de **potencias con base racional** (que puede ser fraccionaria o decimal).

Conceptos

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, la **potencia** de base $\frac{a}{b}$ y exponente n, con $n \in \mathbb{N}$, se define como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \underbrace{\frac{a}{b} \cdot \frac{a}{b} \cdot \ldots \cdot \frac{a}{b}}_{n \text{ - veces}}$$

Como un número racional se puede representar como el cociente de dos números enteros, en el caso de una **potencia de base racional**, se tiene que:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Ejemplo 1

Calcula el valor de las potencias $0{,}5^3$, $\left(-\frac{4}{3}\right)^3$, $\left(-\frac{5}{2}\right)^4$.

- $0{,}5^3 = 0{,}5 \cdot 0{,}5 \cdot 0{,}5$ ⟶ Desarrollas la potencia.
  $= 0{,}25 \cdot 0{,}5$ ⟶ Multiplicas sucesivamente los números decimales.
  $= 0{,}125$

  Otra manera de calcular el valor de la potencia es expresando los números decimales en su forma fraccionaria:

$$0{,}5^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$$

- $\left(-\frac{4}{3}\right)^3 = \frac{-4}{3} \cdot \frac{-4}{3} \cdot \frac{-4}{3}$ ⟶ Desarrollas la potencia.
  $= \frac{16}{9} \cdot \frac{-4}{3}$ ⟶ Aplicas la propiedad del producto de fracciones respetando la regla de los signos.
  $= \frac{-64}{27}$
- $\left(-\frac{5}{2}\right)^4 = \left(\frac{-5}{2}\right) \cdot \left(\frac{-5}{2}\right) \cdot \left(\frac{-5}{2}\right) \cdot \left(\frac{-5}{2}\right)$ ⟶ Desarrollas la potencia.
  $= \frac{25}{4} \cdot \frac{25}{4}$ ⟶ Aplicas la propiedad del producto de fracciones respetando la regla de los signos.
  $= \frac{625}{16}$

¿Qué propiedad de las potencias de base entera negativa se podría haber aplicado en las últimas dos potencias del ejemplo 1?

En el **triángulo de Sierpinski**, ¿qué medidas se podrían escribir como potencias de base fraccionaria y exponente natural? Comenta con un compañero o una compañera.

Waclaw Sierpinski
1882 -1969



Fue un matemático polaco que, entre sus aportes, estudió la teoría de la curva que describe un camino cerrado que contiene todos los puntos interiores de un cuadrado.

Atención

Recuerda que:

$$-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b}$$

con a, b números enteros distintos de cero.

Conceptos

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ y $n \in \mathbb{N}$, entonces: $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^{n}$.

Ejemplo 2

¿Cuál es el valor de $0,\overline{3}^{-3}$? Justifica tu respuesta aplicando propiedades de potencias de base entera y exponente entero.

Usando directamente la propiedad, se tiene: $0,\overline{3}^{-3} = \left(\frac{3}{9}\right)^{-3} = \left(\frac{9}{3}\right)^{3} = 3^3 = 27$.

Aplicando las propiedades de las potencias de base entera:

$0,\overline{3}^{-3} = \left(\frac{3}{9}\right)^{-3}$ ⟶ Expresas el número decimal periódico en fracción.

$= \frac{3^{-3}}{9^{-3}}$ ⟶ Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= 3^{-3} : 9^{-3}$ ⟶ Escribes como una división.

$= \frac{1}{3^3} : \frac{1}{9^3}$ ⟶ Aplicas la propiedad de la potencia con exponente negativo y base entera.

$= \frac{9^3}{3^3}$ ⟶ Calculas la división de fracciones.

$= \left(\frac{9}{3}\right)^{3}$ ⟶ Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= 3^3 = 27$

Respuesta: El valor de $0,\overline{3}^{-3}$ es 27.

Atención

Recuerda que para expresar un número decimal periódico en su forma fraccionaria, en el denominador se deben poner tantos nueves como cifras tenga el período, y en el numerador, el número con el período, sin considerar la coma decimal, menos el número formado por la parte entera. Luego, si es el caso, simplificas.

Por ejemplo:

$$0,\overline{3} = \frac{3-0}{9} = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

$$1,\overline{21} = \frac{121-1}{99} = \frac{120}{99} = \frac{40}{33}$$

Para representar números decimales como una fracción, ¿qué otro procedimiento utilizarías?

Conceptos

Una **potencia de base un número racional distinto de cero con exponente 0** es igual a 1.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces $\left(\frac{a}{b}\right)^{0} = 1$.

Ejemplo 3

¿Cuál es el valor de $\left(-\frac{2}{7}\right)^{0}$? Justifica tu respuesta aplicando propiedades de potencias que tienen como base entera y exponente un número entero.

Usando directamente la propiedad, se tiene que: $\left(-\frac{2}{7}\right)^{0} = 1$.

Otra manera es usar las propiedades de las potencias de base entera:

$\left(-\frac{2}{7}\right)^{0} = \frac{(-2)^0}{7^0}$ ⟶ Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= \frac{1}{1} = 1$ ⟶ Aplicas la propiedad de la potencia de exponente 0 y base entera.

Respuesta: El valor de $\left(-\frac{2}{7}\right)^{0}$ es 1.

Conceptos

La propiedad de la **potencia de una potencia** establece que:

Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$ y $n, m \in \mathbb{Z}$, entonces:

$$\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n \cdot m}$$

Ejemplo 4

Explica por qué $(0,\overline{2}^{-3})^2 = 0,\overline{2}^{-6}$ y luego calcula su valor.

La propiedad se obtiene al multiplicar en forma reiterada cada potencia:

$(0,\overline{2}^{-3})^2 = 0,\overline{2}^{-3} \cdot 0,\overline{2}^{-3}$ → Desarrollas el exponente cuadrado.

$= \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right)^3$ → Aplicas la propiedad de la potencia de exponente negativo.

$= \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right)$ → Desarrollas cada cubo.

$= \left(\frac{1}{0,\overline{2}}\right)^6$ → Escribes el producto como potencia.

$= 0,\overline{2}^{-6}$ → Aplicas la propiedad de la potencia de exponente negativo.

Para calcular el valor podemos, seguir estos pasos:

$(0,\overline{2}^{-3})^2 = 0,\overline{2}^{-3 \cdot 2} = 0,\overline{2}^{-6}$ → Aplicas la propiedad de la potencia de una potencia.

$= \left(\frac{2}{9}\right)^{-6}$ → Expresas el número decimal como una fracción.

$= \left(\frac{9}{2}\right)^6$ → Aplicas la propiedad de la potencia con exponente negativo.

$= \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2} \cdot \frac{9}{2}$ → Desarrollas la potencia.

$= \frac{531\,441}{64}$ → Calculas el valor de la potencia.

- ¿Por qué crees que, para calcular el valor, se expresó el número decimal periódico en su forma fraccionaria? Explica.
- ¿Siempre se cumple que $[(a^n)^m]^k = a^{n \cdot m \cdot k}$?, ¿qué condiciones deben cumplir a, m, n y k? Justifica tu respuesta y da un ejemplo.

Atención

Generalmente: $(a^n)^m \neq a^{n^m}$

Por ejemplo,

$(2^3)^2 \neq 2^{3^2}$

$2^6 \neq 2^9$

¿En qué casos crees que se cumple la igualdad?

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Escribe cada potencia con exponente positivo.

a. $\left(\frac{3}{2}\right)^{-2}$ **b.** $\left(-0,4\overline{3}\right)^{-8}$ **c.** $\left(-\frac{10}{9}\right)^{-1}$

2. Calcula el valor de cada potencia.

a. $\left(\frac{2}{5}\right)^{0}$ **c.** $\left(-\frac{3}{8}\right)^{4}$ **e.** $0,03^{2}$

b. $\left(\frac{-1}{6}\right)^{3}$ **d.** $0,4^{2}$ **f.** $(-0,2)^{2}$

3. Remplaza en cada expresión $a = 3$, $b = 2$, $c = -2$, calcula y simplifica cada vez que sea necesario.

a. $\left(\frac{a}{b}\right)^{3} \cdot \left(\frac{9}{4}\right)^{c}$ **b.** $\frac{1}{b} + \left[\left(\frac{14}{a}\right)^{-c}\right]^{-1}$ **c.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{b} - \left(\frac{3}{7}\right)^{c} + \frac{1}{a}$

4. Completa para que se cumpla cada igualdad.

a. $\left(-\frac{1}{3}\right)^{\square} : \left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} = \left(-\frac{1}{3}\right)^{5}$ **b.** $\left[(0,125)^{2}\right]^{\square} = 8^{8}$ **c.** $\left(-\frac{7}{4}\right)^{-3} = \left(-\frac{4}{7}\right)^{\square}$

5. Observa el siguiente desarrollo de propiedades de las potencias presentado por dos alumnos de 1º medio.

Alejandro

Presenta el siguiente desarrollo: $\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(-\frac{2}{3}\right)^{-3}$

Beatriz

Presenta el siguiente desarrollo: $\left(\frac{2}{3}\right)^{3} = \left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$

¿Quién tiene la razón? Justifica tu respuesta.

6. Comprueba que se cumplen las siguientes igualdades.

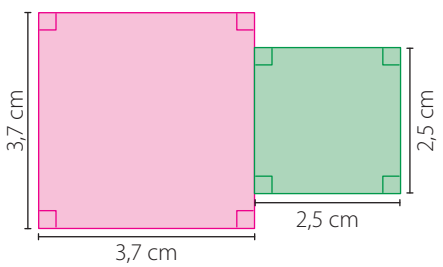
a. $\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{0}\right]^{3} = 1$ **b.** $\left[\left(\frac{3}{4}\right)^{2}\right]^{3} = \left[\left(\frac{3}{4}\right)^{3}\right]^{2}$

7. Opera de forma separada en ambos lados de la desigualdad para demostrar que la potenciación no es distributiva respecto de la adición y la sustracción.

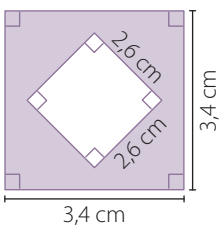
a. $\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\right)^{2} \neq \left(\frac{1}{3}\right)^{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^{2}$ **b.** $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{4}\right)^{2} \neq \left(\frac{3}{4}\right)^{2} - \left(\frac{1}{4}\right)^{2}$

8. Geometría Calcula el área de la región sombreada en cada caso.

a.



b.



9. **Resuelve el siguiente problema.**

La profesora copió la siguiente información en la pizarra: El virus del sida mide aproximadamente $1{,}1 \cdot 10^{-5}$ cm y el de la influenza, $1 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^5$ cm aproximadamente. Ella pidió a sus estudiantes que determinen cuál de los dos virus tiene mayor tamaño. Si todos la resolvieron correctamente, ¿cuál fue la respuesta?

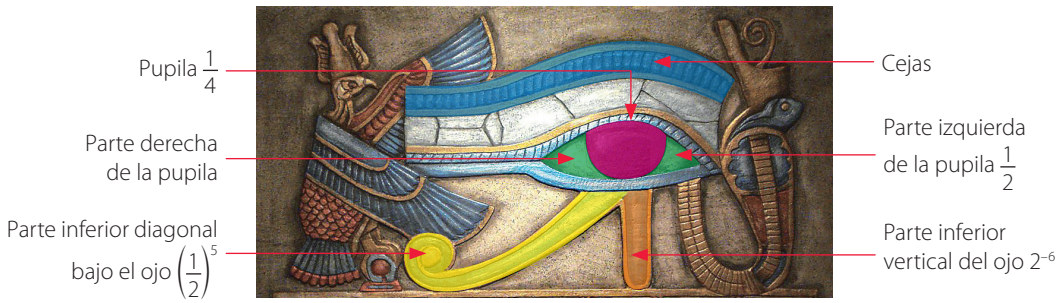
10. **Junto con un compañero o una compañera realicen la siguiente actividad. Consideren el triángulo equilátero de Sierpinski de la página 44.**

a. Si el perímetro de la figura inicial es a, ¿cuánto mide el perímetro de cada uno de los triángulos blancos de las figuras 0, 1 y 2?

b. ¿Cuánto mide el perímetro de cada uno de los triángulos blancos de la figura n?

11. Ciencias Sociales **Analiza la siguiente información y luego responde.**

Cuenta la historia que en una batalla egipcia el ojo de Horus fue seccionado en distintas partes, las cuales fueron denominadas "fracciones del ojo de Horus", como se muestra a continuación:



a. La fracción de la parte derecha de la pupila se relaciona con elevar a la cuarta la fracción de la parte izquierda de la pupila, ¿cuál es dicha fracción?

b. Si la ceja corresponde al valor de la potencia 2^{-3}, ¿a cuánto corresponde dicho valor?

c. ¿Cuál es la fracción de la parte inferior vertical bajo el ojo?

d. ¿Cuál de todas las fracciones es la menor? ¿A qué parte del ojo de Horus corresponde?

e. Si todas las fracciones del ojo de Horus se relacionan con la expresión $\left(\frac{1}{2}\right)^{-n}$, ¿qué valores podría tener n? Explica.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Página 17

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica con tus palabras lo que entiendes por potencia con base racional y exponente entero.

- ¿Trabajaste de manera ordenada y responsable con tus compañeros? ¿Cómo mejorarías el trabajo grupal?

Multiplicación y división de potencias de base racional

Objetivos

- Aplicar las propiedades de la multiplicación y la división de potencias.
- Resolver problemas de la vida diaria usando potencias de base racional.

Paula contrató los servicios de un jardinero para construir un jardín en un terreno con forma cuadrada que tiene 3,5 m de lado. El jardinero hizo un jardín que ocupaba $\frac{1}{10}$ de la mitad del terreno de Paula. Por el trabajo cobró $ 4 500 por metro cuadrado de jardín construído. ¿Cuánto gastó Paula? ¿Cuántos terrenos con forma cuadrada de 0,2 m de lado se pueden construir en el jardín?

- Explica por qué la siguiente expresión permite responder la primera pregunta.

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3{,}5)^2 \cdot 4\,500$$

- ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a la anterior? Remárcala.

$\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 7^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4\,500$ $\qquad$ $\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot 4\,500$

- Explica por qué la siguiente expresión permite responder la segunda pregunta.

$$\left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3{,}5)^2\right) : (0{,}2)^2$$

- ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente a la anterior? Remárcala.

$\left[\frac{1}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot (3{,}5)^2\right] : \left(\frac{1}{5}\right)^2$ $\qquad$ $\left[\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{2} \cdot 7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right] : \left(\frac{1}{5}\right)^2$

- Resuelve y explica cada operación usando propiedades de las potencias de base entera y responde las preguntas del problema.

- En multiplicaciones y divisiones de potencias se pueden usar propiedades para simplificar su cálculo. Estas propiedades se emplean cuando la base o el exponente es el mismo.

Conceptos

Para **multiplicar potencias de igual base racional** y con **exponente entero**, se conserva la base y se suman los exponentes.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces esta propiedad se expresa como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}, \text{ donde } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 1

Muestra con un ejemplo la aplicación de la propiedad de la multiplicación de potencias de igual base racional.

Un ejemplo puede ser la multiplicación $\left(-\frac{9}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right)^5$.

$\left(-\frac{9}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{9}{4}\right)^5 = \frac{(-9)^3}{4^3} \cdot \frac{(-9)^5}{4^5}$ ⟶ Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= \frac{(-9)^3 \cdot (-9)^5}{4^3 \cdot 4^5}$ ⟶ Multiplicas fracciones.

$= \frac{(-9)^{3+5}}{4^{3+5}}$ ⟶ Aplicas la propiedad de la multiplicación de potencias.

$= \left(\frac{-9}{4}\right)^{3+5}$ ⟶ Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

Por lo que queda mostrada la propiedad con un ejemplo.

Atención

Cada número racional se puede expresar como la división de dos números enteros, con el denominador distinto de cero; de esta manera, las propiedades propuestas para las potencias de base un número entero se relacionan con las propiedades de base un número racional.

Conceptos

Para **multiplicar potencias de igual exponente** se conserva el exponente y se multiplican las bases.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b}$ y $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, se tiene:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}\right)^n, \text{ donde } n \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 2

Muestra con un ejemplo la aplicación de la propiedad de la multiplicación de potencias de igual exponente.

Un ejemplo puede ser la multiplicación $\left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3$.

$\left(-\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5}$ ⟶ Escribes las potencias como multiplicación iterada.

$= \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{3}{4}\right) \cdot \frac{2}{5}$ ⟶ Aplicas la conmutatividad para reordenar los factores.

$= \left(-\frac{6}{20}\right) \cdot \left(-\frac{6}{20}\right) \cdot \left(-\frac{6}{20}\right) = \left(-\frac{6}{20}\right)^3$ ⟶ Multiplicas cada par de factores y representa como una potencia.

Por lo que queda mostrada la propiedad con un ejemplo.

Las propiedades que has estudiado para la multiplicación de potencias se extienden para la división de potencias de igual base o de igual exponente.

Conceptos

Para **dividir potencias de igual base racional** distinta de 0 y de **exponente entero** se conserva la base, y al exponente del dividendo se le resta el exponente del divisor.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, esta propiedad se expresa como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}, \text{ donde } m, n \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 3

Muestra con un ejemplo la aplicación de la propiedad de la división de potencias de igual base racional.

Un ejemplo puede ser la división $\left(-\frac{5}{2}\right)^3 : \left(-\frac{5}{2}\right)^5$.

$\left(-\frac{5}{2}\right)^3 : \left(-\frac{5}{2}\right)^5 = \frac{(-5)^3}{2^3} : \frac{(-5)^5}{2^5}$ ⟶ Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= \frac{(-5)^3}{2^3} \cdot \frac{2^5}{(-5)^5}$ ⟶ Representas la división de fracciones como una multiplicación.

$= \frac{(-5)^3 \cdot 2^5}{2^3 \cdot (-5)^5}$ ⟶ Multiplicas fracciones.

$= \frac{(-5)^{3-5}}{2^{3-5}}$ ⟶ Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual base.

$= \left(\frac{-5}{2}\right)^{3-5}$ ⟶ Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

Por lo tanto, $\left(-\frac{5}{2}\right)^3 : \left(-\frac{5}{2}\right)^5 = \left(\frac{-5}{2}\right)^{3-5}$.

En este ejemplo se aplicaron propiedades de potencias de base entera. ¿Cómo se podría mostrar la propiedad solo usando la interpretación de potencias como multiplicación iterada? Explícale a un compañero o compañera.

Actitud

Recuerda tener una actitud respetuosa cuando trabajes con tus compañeros.

Conceptos

Para **dividir potencias de igual exponente entero** se conserva el exponente y se dividen los números racionales de las bases.

Simbólicamente: Si $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, entonces esta propiedad se expresa como:

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n : \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} : \frac{c}{d}\right)^n, \text{ donde } n \in \mathbb{Z}.$$

Ejemplo 4

Muestra con un ejemplo la aplicación de la propiedad de la división de potencias de igual exponente y base racional.

Un ejemplo puede ser la división $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{4}{7}\right)^3$.

$\left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \frac{4^3}{7^3}$ → Aplicas la propiedad de la división de potencias de igual exponente.

$= \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{7^3}{4^3}$ → Representas la división de fracciones como una multiplicación.

$= \left(-\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{7}{4}\right)^3$ → Escribes el segundo factor como potencia de base racional.

$= \left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{7}{4}\right)^3$ → Aplicas la propiedad de la multiplicación de potencias de igual exponente.

$= \left(-\frac{2}{3} : \frac{4}{7}\right)^3$ → Escribes el producto como cociente.

$= \left(-\frac{14}{12}\right)^3$ → Calculas la división de fracciones.

Por lo tanto, $\left(-\frac{2}{3}\right)^3 : \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \left(-\frac{14}{12}\right)^3$.

Atención

Las propiedades de la multiplicación y división de potencias de igual exponente con base racional también son aplicables cuando la base es un número entero distinto de cero o un número natural.

Ejemplo 5

Aplica las propiedades de las potencias para simplificar la expresión.

$$\left[\left(\frac{4}{5}\right)^7 : \left(\frac{4}{5}\right)^{10}\right] \cdot \left[\left(-\frac{2}{20}\right)^3 : \left(\frac{5}{2}\right)^3\right]$$

PASO A PASO

1. En el primer paréntesis resuelves una división de potencias de igual base.

$\left(\frac{4}{5}\right)^7 : \left(\frac{4}{5}\right)^{10} = \left(\frac{4}{5}\right)^{7-10} = \left(\frac{4}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3$

2. En el segundo paréntesis resuelves una división de potencias de igual exponente.

$\left(-\frac{2}{20}\right)^3 : \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \left(-\frac{2}{20} : \frac{5}{2}\right)^3 = \left(-\frac{2}{20} \cdot \frac{2}{5}\right)^3 = \left(-\frac{4}{100}\right)^3$

3. Resuelve la multiplicación.

$\left(\frac{5}{4}\right)^3 \cdot \left(-\frac{4}{100}\right)^3 = \left[\frac{5}{4} \cdot \left(-\frac{4}{100}\right)\right]^3 = \left[-\frac{20}{400}\right]^3 = \left[-\frac{1}{20}\right]^3 = -\frac{1}{8\,000}$

Por lo tanto, $\left[\left(\frac{4}{5}\right)^7 : \left(\frac{4}{5}\right)^{10}\right] \cdot \left[\left(-\frac{2}{20}\right)^3 : \left(\frac{5}{2}\right)^3\right] = -\frac{1}{8\,000}$.

¿Crees que conocer las propiedades de las potencias te ayudará al calculo de su valor? Explica.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Calcula las siguientes multiplicaciones de potencias.

a. $\left(\frac{3}{4}\right)^5 \cdot (1,\overline{3})^5 \cdot \left(\frac{3}{7}\right)^2$

b. $\left[\left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^2 \cdot 4^8$

c. $\left[1{,}25^2 \cdot \left(\frac{5}{4}\right)^3\right]^2$

d. $\left(-\frac{10}{8}\right)^6 \cdot \left(-\frac{2}{5}\right)^4 \cdot 0{,}4^2$

2. Calcula las siguientes operaciones combinadas de potencias.

a. $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2$

b. $\left(\frac{3}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3 : 0{,}75^6$

c. $\left(\frac{4}{3}\right)^3 : \left(-\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3$

d. $0,\overline{6}^4 \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^3\right]^3 : \left(-\frac{32}{243}\right)^2$

3. Completa los recuadros de manera que las igualdades sean verdaderas.

a. $\left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^{\square} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^{2+3} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^{\square} = \frac{\square}{\square}$

b. $\left(\frac{-1}{\square}\right)^{\square} : \left(\frac{\square}{2}\right)^{-4} = \left(\frac{\square}{\square}\right)^{\square - \square} = \left(\frac{-1}{2}\right)^9 = \frac{\square}{\square}$

4. Comenta con un compañero o una compañera por qué el desarrollo de este ejercicio es incorrecto. Describan el error que se cometió y corríjanlo.

$$2^0 + 2^1 + 2^2 = 2^{0+1+2} = 2^3$$

5. Demuestra cada igualdad utilizando las propiedades estudiadas.

a. $\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$, $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$

b. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$, $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, $n \in \mathbb{Z}$

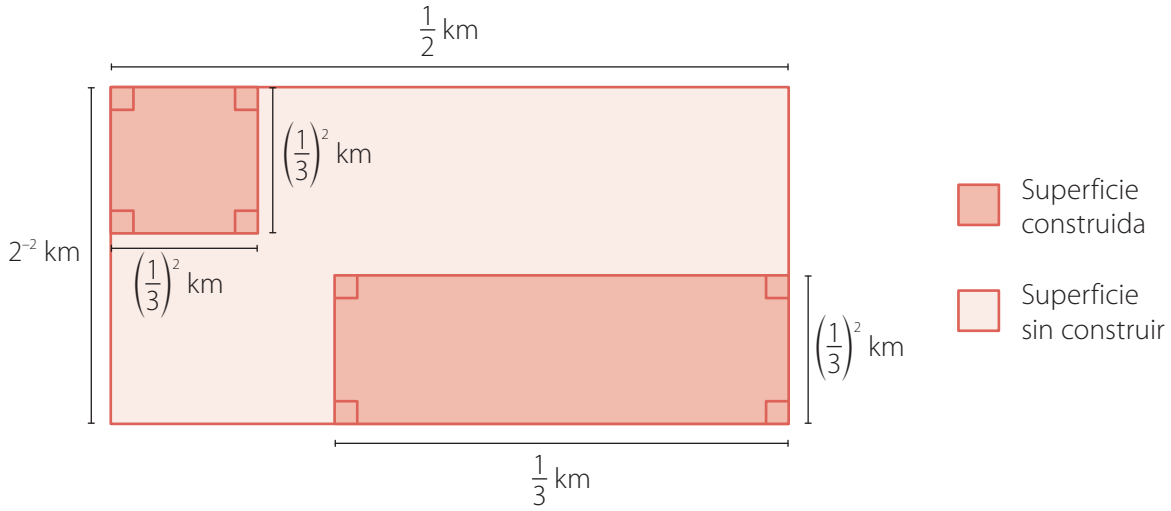
6. Tecnología La directividad (D) de una antena es su capacidad de concentrar las señales y depende del tipo de señal que se transmita. La directividad de una antena de un canal de televisión UHF se calcula con la expresión

$$D = \frac{18}{5} \cdot \frac{1}{L^2}$$

donde la letra L representa una magnitud llamada longitud de onda, que en el caso de las señales UHF está entre $\frac{3}{10}$ m y $\frac{3}{5}$ m. ¿Cuál es la directividad de una antena que emite una señal de $L = \frac{9}{20}$ m?

7. Resuelve los siguientes problemas:

a. Don José quiere comprar un terreno en el que el área sin construir sea mayor que el área construida, ya que piensa sembrar. Abajo se muestra el esquema de una propiedad. ¿Cumple el terreno la condición solicitada por don José? Escribe las operaciones necesarias para justificar tu respuesta.



b. En una división de fracciones, el dividendo es $\left(\frac{1}{4}\right)^{-3}$ y el divisor $\left(\frac{1}{2^2}\right)^{-1}$. ¿Cuánto es la mitad del cociente?

c. Danilo le dijo a Rosa que al dividir potencias de igual base racional y con exponente entero se conserva la base y se dividen los exponentes, en vez de restarlos. Para demostrar su afirmación, elaboró lo siguiente.

$$\left(\frac{5}{7}\right)^4 : \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \left(\frac{5}{7}\right)^{4:2} = \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{25}{49} \text{ pues } \left(\frac{5}{7}\right)^4 : \left(\frac{5}{7}\right)^2 = \frac{5^4}{7^4} : \frac{5^2}{7^2} = \frac{625}{2\,401} : \frac{25}{49} = \frac{25}{49}$$

- Explica por qué, en el caso ilustrado en la tarjeta, la afirmación de Danilo sí se cumple. Escribe un ejemplo que contradiga lo que él asegura.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 18 - 19

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica cómo se relacionan las potencias de base entera con las potencias de base racional. Da un ejemplo.

- ¿Cómo demostraste respeto a tus compañeros en el trabajo en equipo? Explica.

Crecimiento y decrecimiento exponencial

Realiza la siguiente actividad con un compañero o una compañera.

Objetivo

- Modelar procesos de crecimiento y decrecimiento exponencial en diversos contextos.

Emilia abre una cuenta de ahorro en un banco con $ 60 000. Todos los meses el banco le da un interés del 1 % de lo que hay en la cuenta. Esto quiere decir que la cantidad que está en la cuenta se multiplica cada mes por 1,01.

- Completa la tabla. Si es necesario, utiliza una calculadora.

Mes	Dinero ($)
1	60 000
2	$60\,000 \cdot 1{,}01 =$
3	$(60\,000 \cdot 1{,}01) \cdot 1{,}01 = 60\,000 \cdot 1{,}01^2 =$
4	$(60\,000 \cdot 1{,}01^2) \cdot 1{,}01 = 60\,000 \cdot 1{,}01^3 =$
5	
6	

- ¿Por qué cada mes se debe multiplicar por 1,01? Expliquen.

_____

- ¿Qué expresión matemática permitiría determinar los ahorros de Emilia en el mes 11? ¿y en un mes n?

_____

- Grafiquen en un procesador de texto (por ejemplo, Word, Openoffice, Libreoffice, entre otros) los ahorros de Emilia. Para esto, sigan estos pasos.

  1° Abran el programa y con el *mouse* seleccionen **Insertar**, luego **Gráfico**. En Gráfico seleccionen **Tipo de gráfico**… y elijan un **gráfico de líneas**; después seleccionen el primer subtipo de gráfico y aparecerá un ejemplo.

  2° Remplacen la columna de categorías por los valores de "Mes" y la serie 1, por los valores de "Dinero ($)".

  3° Observen que en la primera fila se pueden poner los nombres de las variables, es decir, "Mes" y "Dinero ($)".

  4° Dependiendo del *software*, es posible cambiar algunas características del gráfico. Indaguen en las opciones que da el programa para hacer modificaciones al gráfico. Por ejemplo, pueden agregar lo siguiente:

  - En Título de gráfico: "Ahorro de Emilia".
  - En Eje de categorías: "Mes".
  - En Eje de valores: "Dinero".

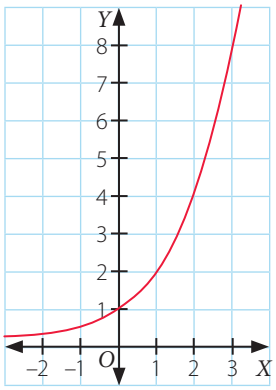
- Describan el gráfico que construyeron.

_____

_____

Atención

Un ejemplo de crecimiento exponencial relacionado con la potencia 2^x es el siguiente gráfico.



Habilidad

Cuando usas potencias para describir el crecimiento o el decrecimiento exponencial de alguna situación estás desarrollando la habilidad de **modelar**.

Conceptos

Cuando se modela una situación de **crecimiento exponencial**, la base de la potencia es **mayor que 1**. Por otra parte, cuando la base de la potencia es **menor que 1** y **mayor que cero**, se está modelando un **decrecimiento exponencial**.

Ejemplo 1

La cantidad de masa del elemento radiactivo cesio 137 en un tiempo t (en años) disminuye, aproximadamente, como se muestra en la tabla:

Tiempo	1	2	3	4	5
Cálculo de la masa	10	$10 \cdot 0{,}9773$	$10 \cdot 0{,}9773^2$	$10 \cdot 0{,}9773^3$	$10 \cdot 0{,}9773^4$
Masa (g)	10	9,773	9,551	9,334	9,122

¿Qué cantidad de cesio 137 hay inicialmente?

En la primera columna de la tabla se puede observar la cantidad inicial de cesio 137, que corresponde a 10 g.

¿Qué cantidad de cesio 137 habrá en 80 años?

Para determinar la cantidad de cesio 137 en un año t determinado se debe calcular la expresión $10 \cdot 0{,}9773^t$.

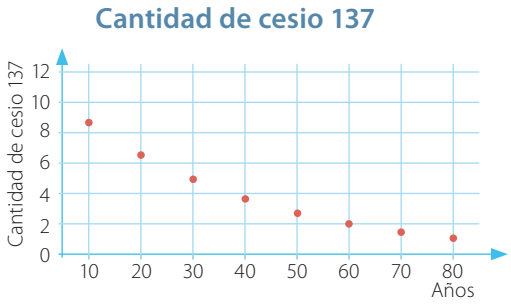
Cuando $t = 80$, se tiene:

$$10 \cdot 0{,}9773^{80}$$

Usando una calculadora científica como la de la imagen, se obtiene que la cantidad de cesio 137 en 80 años es de 1,5931 g, aproximadamente.

Grafica algunos valores del decrecimiento de la masa del cesio 137.

Siguiendo los pasos de la actividad inicial, se puede obtener un gráfico como el siguiente:

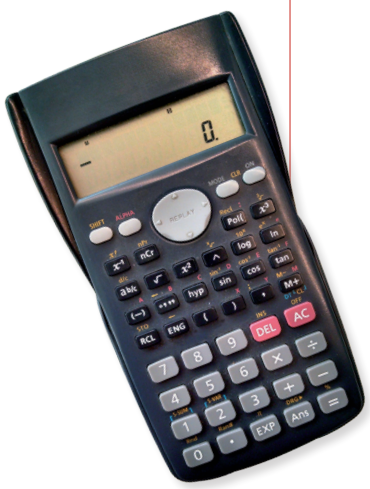


¿En qué se diferencian y asemejan los gráficos de la actividad inicial y el gráfico del ejemplo 1? Comenta con un compañero o una compañera.

Atención

Para realizar el cálculo de la potencia con la calculadora de la imagen se debe teclear lo siguiente:

10 × 0.9771 ^ 80



Conexión con Ciencia

El cesio 137 es una sustancia radiactiva que se utiliza generalmente en la industria y en la medicina.

Recursos Digitales Complementarios

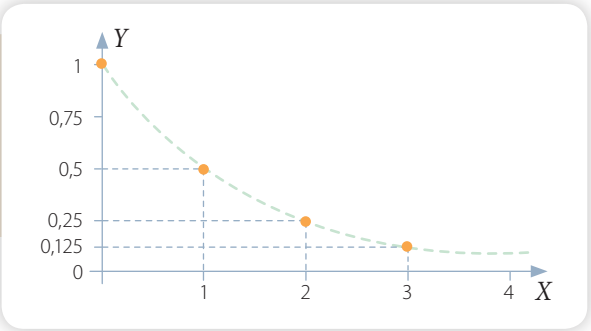
RDC 3

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. En el transcurso de sus investigaciones un biólogo trazó una curva, la que se asimila a la de un decrecimiento exponencial.

- Si $x = 0$, entonces $y = 1$
- Si $x = 1$, entonces $y = 0{,}5$
- Si $x = 2$, entonces $y = 0{,}25$
- Si $x = 3$, entonces $y = 0{,}125$



Si $x = 0{,}5$, ¿cuál es el valor de y?
¿Y cuál si $x = 4$?

2. Resuelve los siguientes problemas.

a. En una competencia entre cuatro personas, acordaron repartirse como premio $ 240 000, de manera que el primer lugar se lleva el triple del premio del segundo lugar, lo que se extiende al tercer y cuarto lugar. ¿Cuáles son los premios correspondientes a cada uno?

b. Un alfarero recibe, el día lunes, el encargo de hacer 400 vasijas para el viernes, para lo cual habla con sus ayudantes. Pero el martes se retiran enfermos dos de ellos y cada día fabrican dos terceras partes de vasijas del día anterior. Si el último día fabrican 32 vasijas, ¿lograrán terminar la tarea a tiempo?

c. En una población de 10 000 conejos se detectó una epidemia que los está exterminando a razón de $10\,000 \cdot 2^{-t}$, en la que t es el tiempo expresado en días. Después de 3 días, ¿cuántos conejos quedan?

d. Una persona aplaude una vez y, luego, 1 minuto después, vuelve a aplaudir. Espera 3 minutos y aplaude nuevamente; luego lo hace después de 9 min, de 27 min, de 81 min, y así sucesivamente. Esto es, se triplica el intervalo de minutos entre los aplausos sucesivos. Si siguiera haciendo esto durante 6 horas, ¿cuántas veces aplaudiría?

e. Juan decide ahorrar $ 1 000 cada mes en una alcancía. Diego, al ver lo que hacía Juan, decide imitarlo, pero cada mes ahorrará un 10 % más de lo que ahorró el mes anterior. Calcula la cantidad final ahorrada por Juan y Diego después de 5 meses.

f. María observa que en su casa el consumo de energía eléctrica aumenta cada mes en $\frac{1}{5}$ respecto del mes anterior. Si hace tres meses pagaba $ 15 000, ¿cuánto pagó este mes?

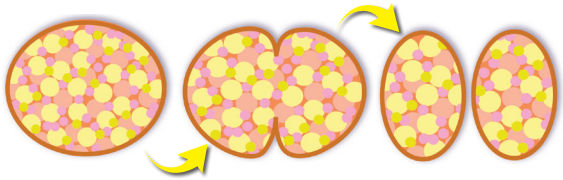
3. Ciencias **Una población de bacterias A decrece a la mitad cada semana, mientras que una población B crece en un tercio cada semana. Inicialmente, la población A es de 1 000 bacterias y la población B, de 243.**

a. ¿Cuántas bacterias tiene cada población luego de transcurridos tres semanas?

b. ¿Cuál es el total de las dos poblaciones al cabo de las tres semanas?

4. **Luis es muy responsable con su higiene personal porque sabe que las bacterias se reproducen muy rápido. Él leyó la siguiente información en una revista de salud:**

Las bacterias se reproducen por bipartición: de 1 se forman 2, de 2 se forman 4, de 4 se forman 8, y así cada vez se duplica la cantidad de bacterias.



a. Expresa, como una multiplicación de potencias de igual base, la cantidad de bacterias si inicialmente hay 2 y se reproducen 5 veces.

b. Expresa, como una multiplicación de potencias de igual base, la cantidad de bacterias si inicialmente hay 4 y se reproducen 6 veces.

5. Tecnología **Para una campaña en defensa de los delfines Francisca decidió iniciar una cadena de correos electrónicos. Ella envió a 5 amigos un mensaje en el que daba a conocer la situación de los cetáceos y pedía que cada receptor enviara ese correo a 5 personas más. Para calcular el alcance de la cadena, Francisca elaboró la siguiente tabla:**

Cadena de correos electrónicos						
Etapa 1	Etapa 2	Etapa 3	Etapa 4	Etapa 5	Etapa 6	Etapa 7
5^0	5^1	5^2	5^3			
1	5	25	125			

Para elaborar esta tabla, Francisca consideró como etapa 1 el mensaje que ella escribió; como etapa 2, los 5 textos que después se mandaron; como etapa 3, los correos de sus amigos a otras 5 personas, y así sucesivamente.

a. Completa la tabla anterior hasta la etapa 7 de la cadena.

b. Escribe una potencia que represente cuántos mensajes se han enviado en la etapa 30.

c. Utiliza una calculadora científica para determinar cuántos correos se han enviado en total hasta la etapa 7.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 20 - 21

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Cómo le explicarías a tus compañeros lo que es el crecimiento exponencial?

- Cuando trabajaste en grupo, ¿asumiste responsabilidades? ¿Cuáles? ¿Por qué?

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 2

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

1. Lee la situación y responde las preguntas.

> Un chef decidió enseñar a cocinar a los habitantes de una ciudad. Como no era posible enseñar a todos los habitantes a la vez, comenzó con 10 (semana 0), cada uno de los cuales se comprometió a instruir a otras 2 personas durante la semana siguiente (o sea, en una semana existen 20 nuevos cocineros que junto con los 10 iniciales hacen un total de 30). Además, cada uno de esos 30 habitantes enseña a otros 2 durante la semana siguiente, y así sucesivamente.

Para responder las preguntas, considera el supuesto de que se les instruye siempre a personas distintas y que ninguno de los habitantes ha fallado en su compromiso.

a. ¿Cuántos nuevos cocineros existen en cada una de las primeras 5 semanas? Explica cómo lo calculaste. (2 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ _____

b. Escribe el término general de la secuencia de los nuevos cocineros en cada semana (iniciando la secuencia en la semana 1). ¿Se puede escribir como potencia? Justifica tu respuesta. (2 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ _____

c. Escribe el término general de la secuencia del total de cocineros al final de n semanas. (2 puntos)

_____

2. Las siguientes adiciones de fracciones tienen infinitos términos, pero su resultado es un número finito. Determina el resultado de cada una. Sugerencia: representa las fracciones como números decimales. (2 puntos cada uno)

a. $\left(\frac{1}{10}\right)^0 + \left(\frac{1}{10}\right)^1 + \left(\frac{1}{10}\right)^2 + \left(\frac{1}{10}\right)^3 + \ldots$

b. $(3^{-2})^{-1} \cdot 10^{-1} + (3^{-2})^{-1} \cdot 10^{-2} + (3^{-2})^{-1} \cdot 10^{-3} + \ldots$

3. Observa la tabla de algunos de los prefijos del Sistema Internacional de Unidades (SI):

Prefijo	nano	micro	mili	centi	deci	deca	hecto	kilo	mega	giga	tera
Símbolo	n	μ	m	c	d	da	h	k	M	G	T
Factor	10^{-9}	10^{-6}	10^{-3}	10^{-2}	10^{-1}	10^{1}	10^{2}	10^{3}	10^{6}	10^{9}	10^{12}

Para utilizar los prefijos, basta juntarlos con el nombre de la unidad, por ejemplo, nanosegundo (ns), micrometro (μm), decalitro (daL), megawatt (MW), entre otras.

a. ¿Cuál es el valor, en segundos, de 5 nanosegundos (ns)? ¿Y de 0,34 gigasegundos (Gs)? (3 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ _____

b. El virus de la gripe mide aproximadamente 0,00000003 m. ¿Es correcto afirmar que el virus de la gripe mide aproximadamente 30 μm? Justifica tu respuesta. (3 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ _____

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
2	Reconocer la potencia de una potencia como multiplicación iterada y el significado de exponentes que pertenecen a $\mathbb{Z}^- \cup \{0\}$.		**Logrado:** 10 puntos o más. **Medianamente logrado:** 8 a 9 puntos. **Por lograr:** 7 puntos o menos.
3	Aplicar las propiedades de las potencias.		
1	Modelar procesos de crecimiento y decrecimiento.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Utilizaste la estrategia que planteaste al inicio de este tema? ¿Cuáles otras usaste?

_____

- ¿Has cumplido tus metas iniciales? ¿Qué has hecho para ello? ¿Qué debes mejorar?

_____

- Las dificultades que tuviste al inicio, ¿las resolviste en el transcurso del tema? ¿Cuáles otras te surgieron?

_____

Actividades complementarias

CADENA DE FAVORES



La película *Cadena de favores* narra el desarrollo de un trabajo escolar en el que un niño (Trevor), a través de un proyecto, genera una cadena de favores: "Al ayudar a una persona de alguna forma, esta debía retribuir ayudando a tres personas más". Así, se establecería una secuencia de favores que harían de la vida algo mejor.

A continuación, estudiaremos la cadena de favores. La notación que usaremos:

H_n: corresponde a la cantidad de personas que hay en el nivel n.
V_n: corresponde a la cantidad total de personas que hay hasta el nivel n.

Analicemos la cantidad de personas en los primeros tres niveles de la cadena.

- **Nivel 0:** 1 (Trevor).
- **Nivel 1:** El triple de personas del nivel 0, es decir, 3 personas.
- **Nivel 2:** El triple de personas del nivel 1, es decir, $3 \cdot 3 = 3^2$, que corresponde a 9 personas.
- **Nivel 3:** El triple de personas del nivel 2, es decir, $3 \cdot 3^2 = 3^3$, que corresponde a 27 personas.

En general, la cantidad de personas del nivel n es $3n$, es decir, $H_n = 3^n$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Determinar el número total de personas hasta el nivel 100 será algo más complicado. Hay que sumar la cantidad de personas de cada nivel, es decir:

$$V_{100} = H_0 + H_1 + H_2 + H_3 + H_4 + H_5 + \ldots + H_{100} = 3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \ldots + 3^{100}$$

Para sumar 101 términos, considera lo siguiente:

1° $V_{100} = 1 + 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + \ldots + 3^{100}$ ⟶ (ecuación 1)

2° $3 \cdot V_{100} = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 + 3 \cdot 3^3 + 3 \cdot 3^4 + 3 \cdot 3^5 + \ldots + 3 \cdot 3^{100}$ ⟶ Multiplicamos por 3

3° $3 \cdot V_{100} = 3 + 3^2 + 3^3 + 3^4 + 3^5 + 3^6 + \ldots + 3^{101}$ ⟶ (ecuación 2)



Ahora, si restamos la ecuación 2 con la ecuación 1, nos queda:

1° $3 \cdot V_{100} - V_{100} = 3 + 3^2 + 3^3 + \ldots + 3^{101} - (1 + 3 + 3^2 + \ldots + 3^{100}) = 3^{101} - 1$ ⟶ ecuación 2 – ecuación 1

2° $(3 - 1) \cdot V_{100} = 3^{101} - 1$ ⟶ Su factor común es V_{100}

3° $V_{100} = \dfrac{3^{101} - 1}{2}$ ⟶ Despejamos V_{100}

De forma análoga, es posible obtener la expresión general para el nivel n, $V_n = \dfrac{3^{n+1} - 1}{2}$, $n \in \mathbb{N}_0$.

En consecuencia, si funcionara la cadena de favores de Trevor solamente hasta 10 niveles, lograría que la vida fuera algo mejor para $V_{10} = \dfrac{3^{11} - 1}{2} = 88\,573$ personas, incluido Trevor.

Responde

1. **Determina las fórmulas para H_n y V_n en el caso de que cada uno deba retribuir a cuatro personas. Compara con tus compañeros y explica cómo lo obtuviste.**

2. **Aplica lo aprendido con la cadena de favores para analizar el crecimiento de una población de bacterias.**

Un cultivo de bacterias se reproduce de la siguiente forma:

- Al inicio del cultivo hay 5 bacterias.
- 1 hora después hay 25 nuevas bacterias.
- 2 horas después hay 125 nuevas bacterias, y cada hora aumenta el quíntuple.

a. ¿Cuántas nuevas bacterias hay después de un día?, ¿después de 2 días?, ¿y después de 10 días?

b. Deduce una fórmula para el crecimiento del cultivo de bacterias para n horas (con $n \in \mathbb{N}$).

¿Qué aprendí? Evaluación final

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en esta unidad.

Operatoria en los números racionales

1. Determina a qué conjunto numérico pertenecen los siguientes números: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ o $\mathbb{Q}$. Recuerda que un número puede pertenecer a más de un conjunto numérico. (0,5 puntos cada uno)

a. $-0{,}5$

b. $0{,}\overline{3}$

c. $\frac{11}{13}$

d. -100

e. $-\frac{21}{25}$

f. $0{,}9\overline{881}$

2. Realiza las siguientes operaciones y simplifica si es posible. (1 punto cada uno)

a. $3{,}04 : \frac{1}{5} + \frac{2}{3} \cdot 2{,}75$

b. $\frac{1}{2} + 1{,}\overline{2} - 1{,}05$

c. $3{,}1 \cdot 0{,}4 + 1{,}7 : \frac{6}{5}$

3. Escribe qué propiedades de la adición se cumplen en cada caso y, luego, compruébalas. (1 punto cada uno)

a. $\frac{5}{3} - \frac{2}{5} = \left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{5}{3}$

b. $\left[\left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{7}{4}\right] + \frac{1}{2} = \left(-\frac{5}{3}\right) + \left(\frac{7}{4} + \frac{1}{2}\right)$

4. Completa la tabla según corresponda. Sigue el ejemplo de la primera fila. (1 punto cada uno)

Expresión numérica	Lenguaje natural
$6 \cdot 5 + (-7) : (-2)$	La suma entre el producto de seis y cinco con el cociente entre menos siete y menos dos.
$\left(5 + \frac{1}{3}\right) - (-2) \cdot 7$	
	Un cuarto menos la resta entre diez y menos seis.
$7 : (-8) - \left(-6 + \frac{2}{5}\right)$	

5. Indica las condiciones que deben cumplir los números enteros a, b y c, para que la ecuación $ax + b = c$, $a \neq 0$, cumpla lo pedido en cada caso. (2 puntos cada uno)

a. La solución sea un número entero negativo.

b. La solución sea un número racional positivo.

6. Resuelve el siguiente problema. (2 puntos)

El submarinismo o buceo es el acto en el cual una persona permanece bajo el agua. Si una persona se sumerge a 25,5 m bajo el nivel del mar y luego desciende $4\frac{1}{3}$ m más, ¿a cuántos metros bajo el nivel del mar se encuentra?

Potencias

7. Usa las propiedades de las potencias para reducir la siguiente expresión: $\dfrac{\left(\frac{2}{3}\right)^5 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} : \left(\frac{81}{16}\right)^{-2}}{\left(\frac{3}{2}\right) \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot \left[\left(\frac{2}{3}\right)^2\right]^2 : \left(\frac{8}{27}\right)^3}$. (1 punto)

8. Completa usando algunas de las cuatro operaciones de modo que el resultado de cada una de las expresiones numéricas sea igual a 1. (1 punto cada uno)

a. $4^3 \square 2^3 \square 2^3$

b. $\left(\frac{4}{5}\right)^2 \square \left(\frac{25}{16}\right)^{-1}$

c. $(-6)^2 \square (-6)^4 \square \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$

d. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \square \left(\frac{1}{6}\right)^{-4} \square 4^4 \square (-5{,}23)^0$

9. Desarrolla cada potencia y calcula su valor. (1 punto cada uno)

a. $\left(\frac{4^{-4}}{7}\right)^2$

b. $\left[\left(-0{,}02\right)^{-1}\right]^2$

c. $\left[\left(\frac{6}{5}\right)^3\right]^2$

10. Determina si cada afirmación es verdadera o falsa. Si es verdadera, explícala usando argumentos matemáticos; y si es falsa, muestra un ejemplo que no la cumpla. (1 punto cada uno)

a. La propiedad $\frac{a^m}{b^n} = a^{m+n}$, con $a, b \neq 0$, y $a, b, n, m \in \mathbb{Z}$ siempre es verdadera.

b. La propiedad $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$, con $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} - \{0\}$, y $n \in \mathbb{Z}$ es siempre verdadera.

11. Los lados del cuadrado $ABCD$ miden 4 cm. Los puntos medios P, Q, R, S de los lados se han unido formando un segundo cuadrado. (1 punto cada uno)

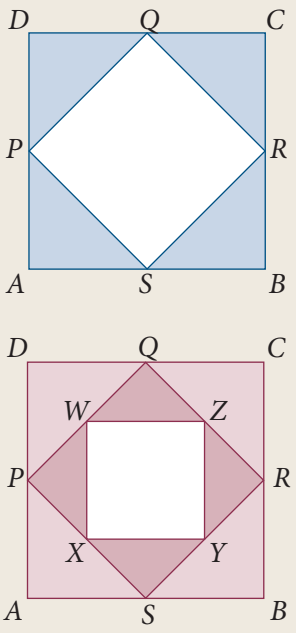
a. Calcula el área de $PSRQ$. Usa el teorema de Pitágoras y recuerda que $(\sqrt{2})^2 = 2$.

Al unir los puntos medios W, X, Y, Z de los lados del cuadrado $PSRQ$ se forma otro cuadrado.

b. Muestra que las áreas de los cuadrados $ABCD$, $PSRQ$ y $WXYZ$ pueden ser escritas de la forma:

$16\ \text{cm}^2,\ 16 \cdot \frac{1}{2}\ \text{cm}^2,\ 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\ \text{cm}^2$

c. Si el proceso de formar cuadrados más pequeños continúa con las mismas características anteriores, ¿cuál es el área del sexto y décimo cuadrado formado?



¿Qué aprendí? Evaluación final

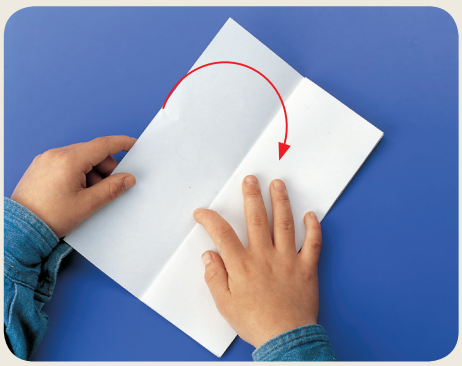
12. En una laguna de 4 m de profundidad la intensidad de la luz (I) que entra al agua disminuye cada metro el equivalente a $\frac{3}{5}$ de la intensidad anterior. (0,5 puntos cada uno)

a. ¿En qué porcentaje ha disminuido la intensidad a los 4 m?

b. Escribe una expresión, con potencias, para determinar la intensidad de la luz según la profundidad p.

c. En otra laguna, la intensidad de la luz (I) baja cada metro a la mitad del valor anterior. Determina qué parte de la intensidad original hay a los 6 m de profundidad y exprésalo como potencia.

13. Es muy difícil doblar un papel más de 7 veces, haciéndolo siempre en sentido contrario al paso anterior y duplicando su espesor. Supongamos que esto fuera posible y que el espesor del papel es de $\frac{13}{256}$ mm. (0,5 puntos cada uno)



a. ¿Cuál es la potencia que representa el espesor de una hoja doblada 9 veces?

b. ¿Cuántas veces será necesario doblar la hoja para que supere 1 cm de espesor?

c. Formula una expresión para el espesor luego de n dobleces (con $n \in \mathbb{N}$).

14. Lee y responde. (1 punto cada uno)

Andrea y Cristian juegan de la siguiente manera: trazan un segmento de recta de 50 cm; Andrea borra la mitad; Cristian borra la mitad del segmento sin borrar; y así sucesivamente. El juego termina cuando el segmento alcanza una longitud inferior a 1 cm. Vence el jugador que ha hecho la última jugada.

a. ¿Quién es el vencedor de este juego? Justifica tu respuesta.

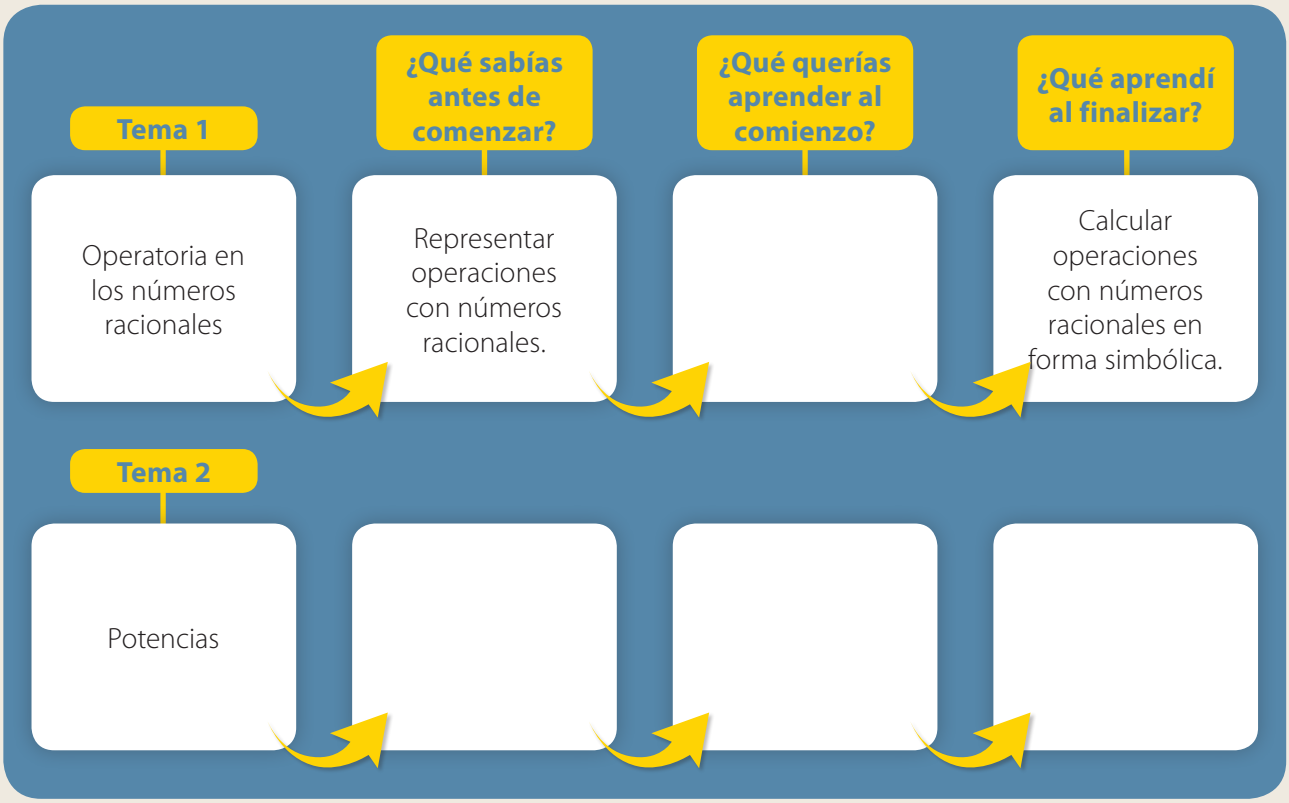
b. Muestra que, después de la quinta jugada, la longitud del segmento es $50 \cdot 2^{-5}$ cm.

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1, 2, 3, 4, 5 y 6	Calcular operaciones con números racionales en forma simbólica.		**Logrado:** 21 puntos o más. **Medianamente logrado:** 18 a 20 puntos. **Por lograr:** 17 puntos o menos.
7, 8, 9, 10, 11, 12, 13 y 14	Realizar operaciones con potencias de base racional y exponente entero. Relacionar el crecimiento o decrecimiento exponencial con potencias de base racional y exponente entero. Resolver problemas de la vida diaria o de otras asignaturas con potencias de base racional y exponente entero.		
	Total		

Actividad de cierre

Completa el siguiente esquema. Para ello, responde las preguntas planteadas.



Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Usaste las estrategias que planteaste al comienzo de la unidad o de cada tema? ¿te permitieron cumplir con las metas planteadas?

- ¿Pudiste modelar situaciones reales usando números racionales o potencias? Explica.

- ¿Demostraste interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas? Si tu respuesta es negativa, explica por qué no lo hiciste. Si fue afirmativa, explica cómo lo hiciste.

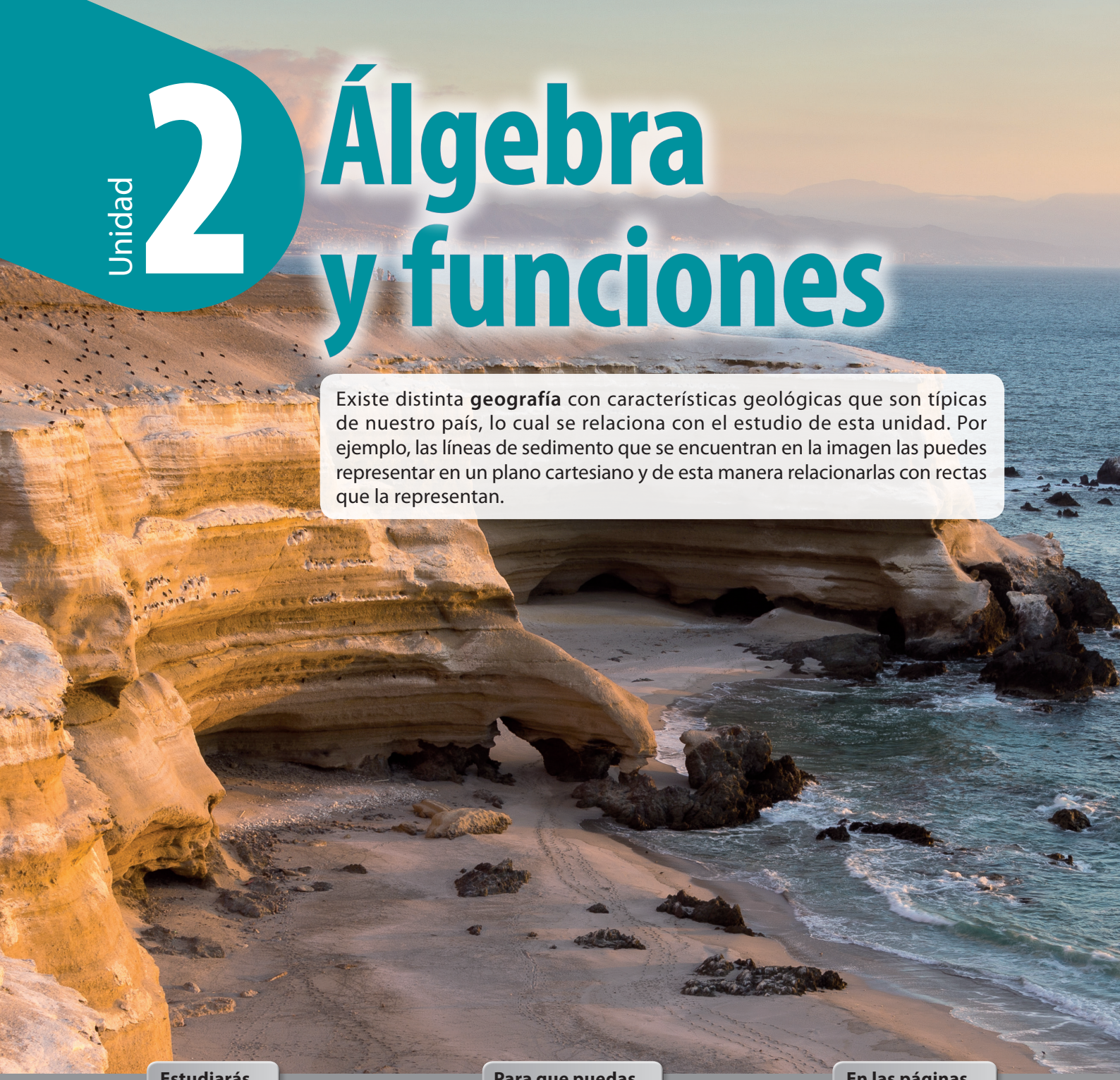
- Explica cómo fue tu trabajo en equipo. ¿Fuiste responsable y proactivo?, ¿ayudaste a tus compañeros?

- ¿Qué aspectos sobre la perseverancia y el trabajo en equipo crees que debes mejorar?

Unidad 2

Álgebra y funciones

Existe distinta **geografía** con características geológicas que son típicas de nuestro país, lo cual se relaciona con el estudio de esta unidad. Por ejemplo, las líneas de sedimento que se encuentran en la imagen las puedes representar en un plano cartesiano y de esta manera relacionarlas con rectas que la representan.



Estudiarás...	Para que puedas...	En las páginas...
Tema 1 Productos notables	Desarrollar los productos notables de manera concreta, pictórica y simbólica.	72 a la 83
Tema 2 Factorización	Factorizar expresiones algebraicas.	84 a la 99
Tema 3 Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas	Resolver sistemas de ecuaciones lineales relacionándolos con situaciones cotidianas.	100 a la 121
Tema 4 Relación lineal entre dos variables	Graficar relaciones lineales en dos variables de la forma $f(x, y) = ax + by$.	122 a la 135



Algunas rocas tienen forma de cubo y se puede calcular su volumen asociado.

Las casas son parte del medio que nos rodea y tienen características según su ubicación.

Punto de partida

Te invitamos a observar la imagen para responder las siguientes preguntas que te ayudarán a desarrollar los aprendizajes en esta unidad.

1. ¿Con qué zona de nuestro país relacionas la imagen? Escríbela.

2. De los temas propuestos, ¿cuál es de tu interés?

3. ¿Qué otro tema de tu interés se relaciona con los que estudiarás en esta unidad? ¿Qué te motiva a estudiarlo? Coméntalo con tu compañero o compañera.

4. ¿Qué meta te propones cumplir al finalizar esta unidad? Explica cómo la cumplirás.

Actitud

Te invitamos a participar de manera activa y creativa en el desarrollo de esta unidad, escuchando respetuosamente los comentarios y aportes de tus compañeros y compañeras.

¡¡Mucho éxito!!

¿Cuánto sé? Evaluación inicial

Activa tus conocimientos previos y desarrolla las siguientes actividades de evaluación.

Expresiones algebraicas

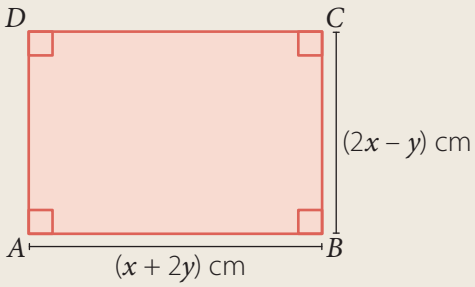
1. Reduce cada expresión algebraica. (2 puntos cada uno)

a. $a + b - 3a + b =$ ☐

b. $2(z - x) + z(x - 2) =$ ☐

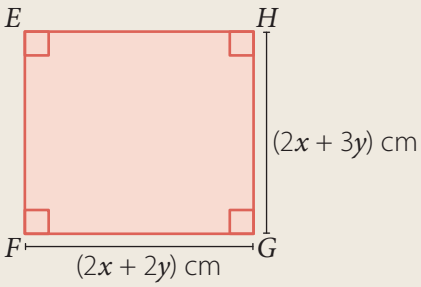
2. Calcula el área (A) en cada caso. (3 puntos cada uno)

a.



$A =$ ☐

b.



$A =$ ☐

Ecuaciones

3. Resuelve las siguientes ecuaciones. (1 punto cada uno)

a. $0{,}5x - 2{,}4 = 1{,}6$

b. $\frac{3}{5}z + 1{,}2 = z$

c. $0{,}\overline{5}x - 0{,}2\overline{1} = 0{,}\overline{2}x$

d. $\frac{1}{4}(4y - 2{,}1) = \frac{3}{4}y$

e. $1{,}\overline{2}(y - 9) = 0{,}\overline{2}y$

f. $1\frac{2}{5}(z - 0{,}\overline{3}) = 1\frac{2}{5}(0{,}\overline{3} - z)$

4. Resuelve los siguientes problemas. (2 puntos cada uno)

a. En un triángulo equilátero cada uno de sus lados mide $0{,}5x$ cm. Si su perímetro es de 9 cm, ¿cuál es el valor de x?

b. La edad de Inés, en años, es la quinta parte de la de su abuelo, y la suma de sus edades es de 84 años. ¿Qué edad tiene cada uno?

Inecuaciones

5. Determina el conjunto solución de cada inecuación, considera $x \in \mathbb{Q}$. (2 puntos cada uno)

a. $-0{,}5x + 1{,}4 < 2{,}5$

b. $\frac{3}{5}(x - 1{,}2) > \frac{12}{25}$

c. $2{,}\overline{2} - 3{,}\overline{2}x > 2\frac{1}{9}$

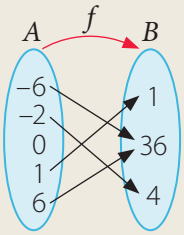
6. Si es la inecuación $x \in \mathbb{N}$, ¿cuántas soluciones tiene? Explica. (3 puntos)

$$0{,}2\left(x+\frac{3}{5}\right) < \frac{1}{10}\left(0{,}5+\frac{3}{5}\right)$$

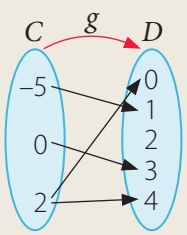
Funciones

7. Identifica si los siguientes diagramas representan una función. Explica. (1 punto)

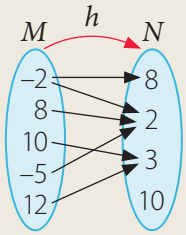
a.



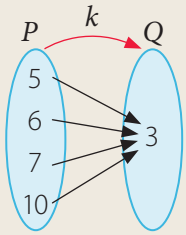
b.



c.



d.



8. Completa cada tabla a partir de las funciones dadas. (3 puntos cada uno)

a. $f: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, tal que $f(x) = 3x$

x	−2,5	0	3,5
$f(x)$			

b. $g: \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, tal que $g(x) = 0{,}1 - 0{,}2x$

x	−4,5	0	5,3
$g(x)$			

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1 y 2	Aplicar la operatoria de expresiones algebraicas.		**Logrado:** 23 puntos o más. **Medianamente logrado:** 20 a 22 puntos. **Por lograr:** 19 puntos o menos.
3 y 4	Resolver ecuaciones con coeficientes racionales.		
5 y 6	Resolver inecuaciones con coeficientes racionales.		
7 y 8	Comprender el concepto de función.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- De las actividades propuestas, ¿hay alguna que te resultó más difícil desarrollar? ¿Cuál o cuáles? Explica.

- ¿Qué deberías mejorar respecto de las actividades en las que obtuviste menor puntaje?

Tema 1

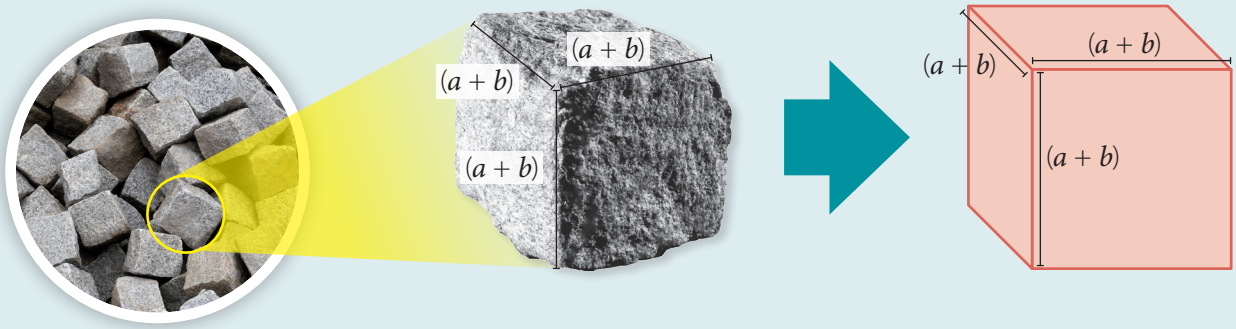
Productos notables

En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 1.

Recuerdo lo que sé

1. Interpreta la siguiente información y responde.

Te has dado cuenta que existen situaciones de la vida real que se relacionan con cuerpos geométricos, en particular una piedra como se muestra a continuación.



a. Considerando que la medida de una de sus aristas es $(a + b)$ cm, completa la siguiente tabla y luego responde.

a	b	$(a + b)^2$	$a^2 + 2ab + b^2$	$(a + b)^3$	$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
3	2				
1	5				

b. Explica la relación entre los valores obtenidos anteriormente.

c. La expresión algebraica, $a^2 + ab + b^2 + ab$, ¿la puedes reducir? ¿Con qué expresión de la tabla la relacionas? Explica.

Explicación ▸

Para **reducir** expresiones algebraicas se asocian los términos semejantes, es decir, se suman o se restan sus coeficientes numéricos y se conserva el factor literal.

Para **multiplicar** un polinomio por un polinomio puedes aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación y luego reducir términos semejantes.

Diseño mi estrategia

2. Analiza cada caso y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

a. ¿Puedes afirmar que la expresión algebraica que representa el desarrollo de $(a + b)^2$ es $a^2 + 2ab + b^2$? Justifica tu afirmación.

Mi resolución

Explicación ▸ _____

b. ¿Cómo resolverías la multiplicación $(a + b) \cdot (a^2 + 2ab + b^2)$?
¿Es lo mismo que resolver $(a + b) \cdot (a + b) \cdot (a + b)$? ¿Qué estrategia utilizaste en cada caso? Explica.

Mi resolución

Mi estrategia ▸ _____

c. Comenta tus estrategias con tus compañeros, luego escribe lo que te sirvió para mejorar la tuya.

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿En qué otra situación crees que se utilicen productos entre expresiones algebraicas? Nombra una.
- ¿Qué dificultades tuviste para responder las preguntas anteriores? ¿Cómo podrías resolverlas?
- Considerando lo estudiado en años anteriores, ¿qué conocimientos utilizaste?
- ¿Abordaste de manera creativa la búsqueda de soluciones a las actividades planteadas? Explica.

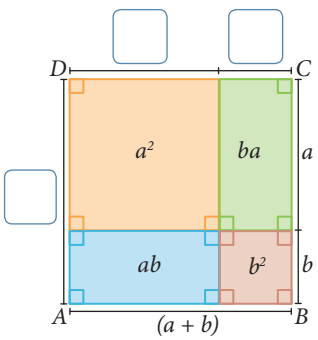
Cuadrado y cubo de un binomio

Objetivos

- Calcular el cuadrado de un binomio.
- Calcular el cubo de un binomio.

El área de un cuadrado de lado igual a x se calcula utilizando la expresión x^2. En la figura se muestra un cuadrado cuyo lado mide $(a + b)$.

- Anota las medidas que faltan en el cuadrado $ABCD$ y luego completa el cálculo del área.



$$(a + b)^2 = (a + b) \cdot (a + b)$$

Propiedad distributiva.

$$= a \cdot (a + b) + b \cdot (a + b)$$

Multiplicas.

$$= a^2 + \square + ba + \square$$

Propiedad conmutativa.

$$= a^2 + ab + ab + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Área cuadrado $ABCD$.

- Lo que resolviste anteriormente corresponde al cuadrado de un binomio y en este caso coincide con el área del cuadrado $ABCD$.

Habilidad

Al fundamentar conjeturas usando lenguaje algebraico estás usando la habilidad de **argumentar y comunicar**.

Conceptos

El **cuadrado de un binomio** es igual al cuadrado del primer término, más (o menos si el binomio es una diferencia) el doble del producto del primer por el segundo término, más el cuadrado del segundo término:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \qquad (a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Recursos Digitales Complementarios

RDC 4

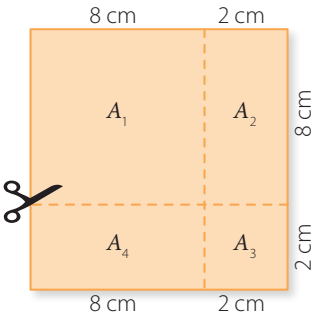
Ejemplo 1 ¿Qué expresión resulta al resolver $(3x - 2y)^2$?

Cuadrado del primer término. Doble del producto de los términos. Cuadrado del segundo término.

PASO A PASO

1. $(3x - 2y)^2 = (3x)^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (2y) + (2y)^2$ → Aplicas la definición.
2. $= 9x^2 - 2 \cdot (3x) \cdot (2y) + 4y^2$ → Aplicas propiedades de las potencias.
3. $= 9x^2 - 12xy + 4y^2$ → Resuelves el doble producto de los términos.

Respuesta: Finalmente, se obtiene que: $(3x - 2y)^2$ es $9x^2 - 12xy + 4y^2$.



Utiliza un trozo de papel cuadrado de 10 cm, recórtalo como se muestra en la imagen. Calcula el área del cuadrado y cada una de las áreas que lo componen, ¿qué relación tiene lo anterior con los productos notables? Justifica tu afirmación.

Ejemplo 2

En la siguiente igualdad, ¿qué número debe ir en cada recuadro?

$$(5x + 2y)^2 = 25x^2 + \square + \square$$

PASO A PASO

1. En el lado izquierdo de la igualdad el primer término es $5x$ y el segundo término, $2y$.
2. El número que debe ir en el primer recuadro será: "el doble del producto del primer por el segundo término", es decir, $2 \cdot 5x \cdot 2y = 20xy$. El número que debe ir en el segundo recuadro será: "el cuadrado del segundo término", es decir, $(2y)^2 = 4y^2$.
3. Finalmente, se obtiene que: $(5x + 2y)^2 = 25x^2 + \boxed{20xy} + \boxed{4y^2}$

Conceptos

El **cubo de un binomio** corresponde a la multiplicación de un binomio por sí mismo tres veces, y se representa como: $(a + b)(a + b)(a + b) = (a + b)^3$. Se tienen los siguientes casos:

$$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

Ejemplo 3

¿Qué expresión resulta al resolver $(4x - 5)^3$?

PASO A PASO

1. $(4x)^3 - 3 \cdot (4x)^2 \cdot 5 + 3 \cdot (4x) \cdot 5^2 - 5^3$ ⟶ Utilizas el desarrollo del cubo de un binomio.
2. $64x^3 - 3 \cdot 16x^2 \cdot 5 + 3 \cdot 4x \cdot 25 - 125$ ⟶ Calculas el valor de las potencias.
3. $64x^3 - 240x^2 + 300x - 125$ ⟶ Calculas los productos.

Respuesta: La expresión que resulta es: $64x^3 - 240x^2 + 300x - 125$.

Ejemplo 4

Si la roca tiene forma de cubo, ¿cuál es su volumen?

PASO A PASO

1. La arista mide $(5y + 2x)$ cm.
2. El volumen se calcula con la expresión $(5y + 2x)^3$ cm^3.



$(5y + 2x)$ cm

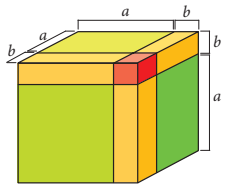
3. $(5y + 2x)^3$ cm^3 $= (125y^3 + 150y^2x + 60yx^2 + 8x^3)$ cm^3.

Respuesta: El volumen es $(125y^3 + 150y^2x + 60yx^2 + 8x^3)$ cm^3.

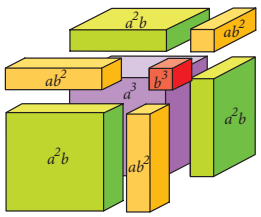
¿Cómo calcularías el resultado de $(a + b)^4$? Explica.

Atención

Puedes representar gráficamente un producto notable a partir de un cubo de arista $(a + b)$.



Al descomponerlo en cubos y prismas más pequeños, se obtienen los siguientes cuerpos con sus respectivos volúmenes:



Al sumar los volúmenes de cada cuerpo se obtiene el volumen del cubo original.

$a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

$= (a + b)^3$

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Completa cada tabla y luego responde.

a.

a	b	$(a+b)^2$	a^2+b^2	$a^2+2ab+b^2$	$(a-b)^2$	a^2-b^2	$a^2-2ab+b^2$
3	2						
1	0						

¿La expresión $(a+b)^2$ es siempre igual a la expresión a^2+b^2, y la expresión $(a-b)^2$ es siempre igual a la expresión a^2-b^2? Explica.

b.

x	y	$(x+y)^3$	x^3+y^3	$(x-y)^3$	x^3-y^3
2	−4				
1	0				

¿La expresión $(x+y)^3$ es siempre igual a la expresión x^3+y^3, y la expresión $(x-y)^3$ es siempre igual a la expresión x^3-y^3? Explica.

2. Calcula el cuadrado o cubo de un binomio.

a. $(4+1)^2$ **b.** $(2-y)^2$ **c.** $(3x+2y^2)^3$ **d.** $(4z^2-5w^3)^3$

3. Completa cada recuadro.

a. $\left(\square+3\right)^2 = a^2+6a+\square$

b. $(3a^2-2b)^2 = \square - 12a^2b + \square$

c. $\left(2a+\square\right)^3 = 8a^3+\square+54ab^2+27b^3$

d. $(5x^2-2y^3)^3 = 125x^6-\square+60x^2y^6+\square$

4. Analiza la siguiente información y luego utilízala en cada trinomio.

La **completación de cuadrado** es una técnica que permite representar un trinomio como una expresión que contenga un cuadrado de binomio. En el trinomio de la forma x^2+bx+c, realizas lo siguiente:

$x^2-bx+c \blacktriangleright x^2-bx+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$

$x^2-bx+c \blacktriangleright \left(x-\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{b}{2}\right)^2+c$

Consideras el valor de b y lo divides por 2, y esta expresión la elevas al cuadrado, luego la sumas y restas a la expresión original.

Por ejemplo:

$x^2-6x+15 \blacktriangleright x^2-6x+\left(\frac{6}{2}\right)^2-\left(\frac{6}{2}\right)^2+15$

Cuadrado de binomio

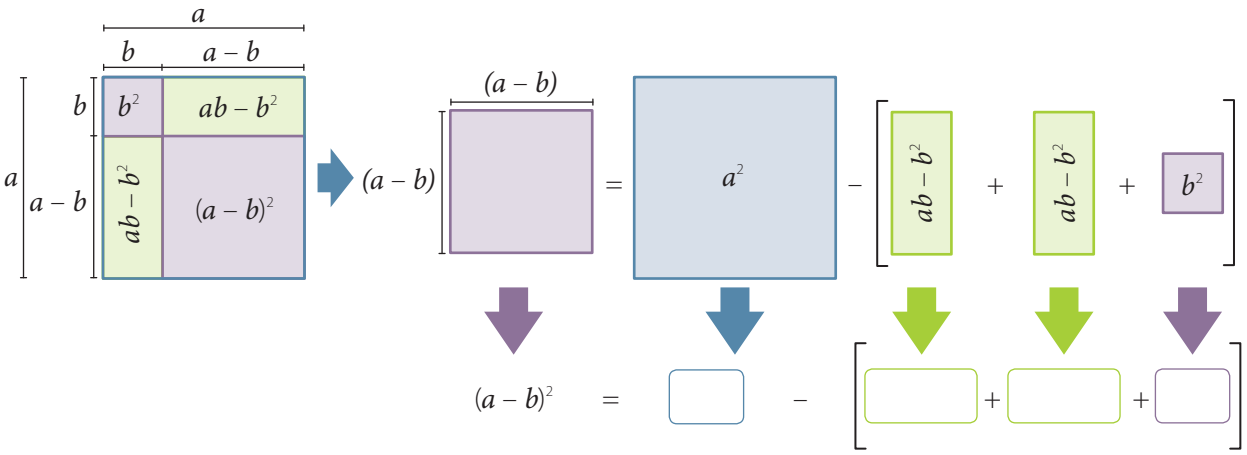
$x^2-6x+3^2-3^2+15 \blacktriangleright (x-3)^2+6$

Por lo tanto, $x^2-6x+15=(x-3)^2+6$.

a. $x^2-10x+32$ **b.** $y^2-14y-1$ **c.** z^2+2z+2 **d.** w^2-w-5

5. Completa la siguiente representación geométrica.

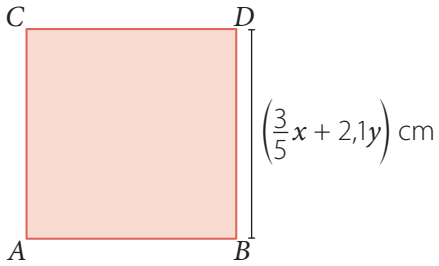
El área del cuadrado de lado $(a - b)$ se obtiene a partir de lo siguiente:



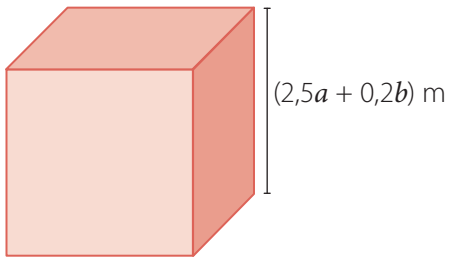
Por lo tanto, el área del cuadrado de lado $(a - b)$ es: _____.

6. Geometría Calcula el área del cuadrado y el volumen del cubo.

a.



b.



7. Economía El capital C a un porcentaje x en 2 años se convierte en $C(1 + x)^2$.

a. Desarrolla el binomio $(1 + x)^2$ y calcula el producto de $C(1 + x)^2$.

b. Si el capital es de $ 10 000 000 y el porcentaje es 21 % anual, ¿cuánto capital se obtiene luego de 2 años?

8. Resuelve los siguientes problemas.

a. Calcula el valor de $a + b$, teniendo en cuenta que $a^2 + b^2 = 58$ y $a \cdot b = 21$.

b. Julio afirma que el resultado de $(a + b + c)^2$ es igual a $a^2 + b^2 + c^2$, mientras que Josefa afirma que $(a + b + c)^2$ es $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$. ¿Quién está en lo correcto? Explica.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 26 - 27

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué actividades consideraste un desafío de resolver? Explica.

_____

- Explica con tus palabras lo que entiendes por cuadrado y cubo de un binomio.

_____

Suma por su diferencia

Objetivos

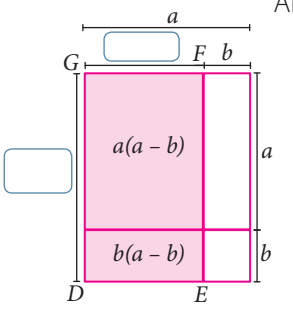
- Aplicar la suma por su diferencia.
- Aplicar el producto de binomio con un término en común.

Actitud

Aborda de manera creativa la búsqueda de soluciones a problemas.

La representación geométrica de una suma por diferencia, $(a + b) \cdot (a - b)$, corresponde al área de un rectángulo de lados $(a + b)$ y $(a - b)$.

- Anota las medidas que faltan en el rectángulo $DEFG$ y luego completa.



Área $DEFG$ = m($\overline{GD}$) · m($\overline{DE}$)

$= (a + b) \cdot (a - b)$ ⟶ Remplazas.

$= a(a - b) + b \cdot (a - b)$ ⟶ Propiedad distributiva.

$= \square - ab + ba - \square$ ⟶ Multiplicas.

$= a^2 - ab + ab - b^2$ ⟶ $ba = ab$.

$= a^2 - b^2$ ⟶ Reduces términos semejantes.

- Lo que resolviste anteriormente corresponde a una suma por diferencia y en este caso es el área del rectángulo $DEFG$.

Conceptos

La **suma por diferencia** corresponde al cuadrado del primer término menos el cuadrado del segundo término, es decir:

$$(a + b) \cdot (a - b) = a^2 - b^2$$

Ejemplo 1

¿Qué expresión resulta al resolver $(2x^2 - 5)(2x^2 + 5)$?

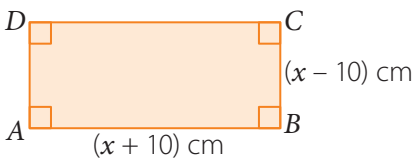
Cuadrado del primer término — Cuadrado del segundo término

$$(2x^2 - 5)(2x^2 + 5) = (2x^2)^2 - (5)^2 = 4x^4 - 25$$

Respuesta: Se obtiene la expresión $4x^4 - 25$.

Ejemplo 2

¿Cuál es el área (A) del rectángulo $ABCD$?



$A = (x + 10)(x - 10) = (x)^2 - (10)^2 = x^2 - 100$

Respuesta: El área del rectángulo $ABCD$ es $(x^2 - 100)$ cm^2.

¿Cómo calcularías el resultado de $(a + b - 1)(a + 1 + b)$? Explica.

Producto de binomios con un término en común

Conceptos

El **producto de dos binomios con un término común** $(x + a)(x + b)$ es igual al cuadrado del término común (x^2), más el producto de la suma de los dos términos no comunes por el término común $(a + b)x$, más el producto de los términos no comunes (ab).

$$(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + (a + b)x + ab$$

Ejemplo 3

¿Cuál es el resultado de $(x + 4)(x + 9)$?

$(x + 4)(x + 9) = (x)^2 + (4 + 9)x + 4 \cdot 9$ ⟶ Aplicas el producto notable.

$= x^2 + 13x + 36$ ⟶ Calculas.

Respuesta: Se obtiene la expresión $x^2 + 13x + 36$.

Ejemplo 4

¿Cuál es el resultado de $(y^3 - 5)(y^3 + 8)$?

$(y^3 - 5)(y^3 + 8) = (y^3)^2 + (-5 + 8)y + (-5) \cdot 8$ ⟶ Aplicas el producto notable.

$= y^6 + 3y - 40$ ⟶ Calculas la potencia y aplicas las propiedades.

Respuesta: El resultado de $(y^3 - 5)(y^3 + 8)$ es $y^6 + 3y - 40$.

Ejemplo 5

PASO A PASO

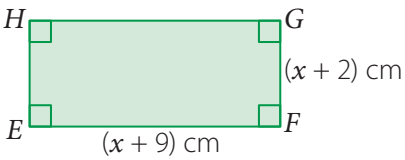
Calcula el producto $17 \cdot 13$, aplicando el producto $(x + a)(x + b)$.

1. $17 \cdot 13 = (10 + 7)(10 + 3)$ ⟶ Se expresa 17 como $(10 + 7)$ y 13 como $(10 + 3)$.
2. $= 10^2 + 10 \cdot (7 + 3) + 7 \cdot 3$ ⟶ Se aplica el producto $(x + a)(x + b)$.
3. $= 221$

Respuesta: El resultado de $17 \cdot 13$ aplicando el producto $(x + a)(x + b)$ es 221.

Ejemplo 6

¿Cuál es el área del rectángulo $EFGH$?

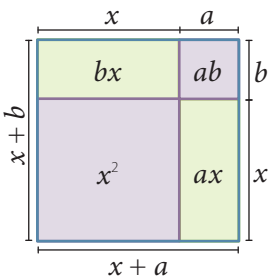


$(x + 9)(x + 2) = (x)^2 + (9 + 2)x + 9 \cdot 2 = x^2 + 11x + 18$

Respuesta: El área del rectángulo $EFGH$ es $(x^2 + 11x + 18)$ cm^2.

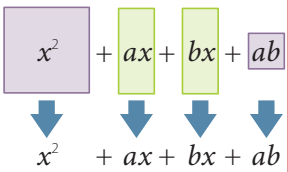
Atención

Se puede interpretar el producto de dos binomios con un término en común considerando el área (A) de un rectángulo de lados $(x + a)$ y $(x + b)$, como se muestra a continuación:



$A = (x + a) \cdot (x + b)$

Al descomponerlo en un cuadrado y tres rectángulos se obtiene:



Es decir: $(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + xa + xb + ab$

O en forma equivalente: $(x + a) \cdot (x + b) = x^2 + x(a + b) + ab$

Visita la Web

Para saber más sobre productos notables, visita el siguiente sitio web:

http://www.profesorenlinea.cl/matematica/AlgebraProductosnotables.htm

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Utiliza la suma por diferencia y calcula cada producto.

a. $(x + 9)(x - 9)$

b. $\left(x + \frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right)$

c. $(x + 11)(x - 11)$

d. $(z^3 - 3{,}1)(z^3 + 3{,}1)$

e. $\left(a^n - 1\frac{1}{5}\right)\left(a^n + 1\frac{1}{5}\right)$

f. $(x^{2p-3} - 5z^3)(x^{2p-3} + 5z^3)$

2. Utiliza el producto de dos binomios con un término en común y calcula cada producto.

a. $150 \cdot 210$

b. $\left(a + \frac{3}{5}\right)\left(a + \frac{7}{9}\right)$

c. $\left(y^2 - \frac{1}{10}\right)\left(y^2 + \frac{5}{8}\right)$

d. $(w^2 - 3)(w^2 - 9)$

e. $(b^n + 3a)(b^n + 2a)$

f. $(y^{3(p+3)} - 10z^3)(y^{3(p+3)} + z^2)$

3. Completa cada recuadro según corresponda.

a. $(5 + y)(12 + y) = 60 + \square + y^2$

b. $(12 - z)(12 + z) = \square - z^2$

c. $(\square + 15)(\square - 15) = b^4 - 225$

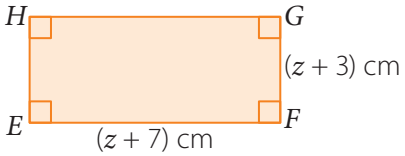
d. $(\square + 15)(\square - 12) = 16b^{10} + \square - 180$

e. $(\square + 2x)(\square - 2x) = 225 - \square$

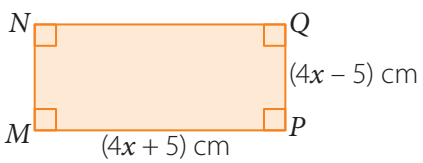
f. $(3x^2 + 8)(3x^2 + \square) = \square + 51x^2 + \square$

4. Geometría Calcula el área de cada rectángulo.

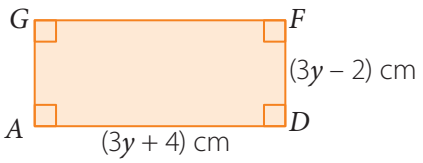
a.



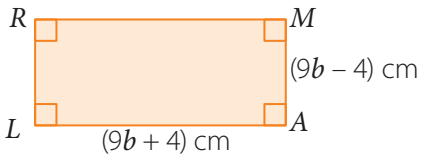
b.



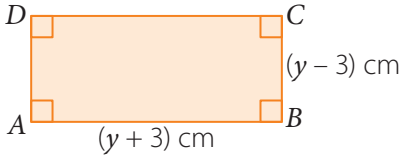
c.



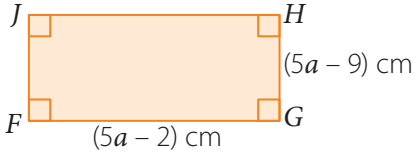
d.



e.

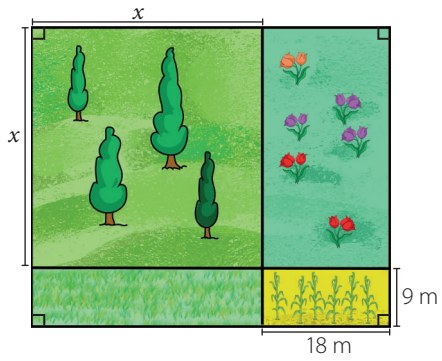


f.

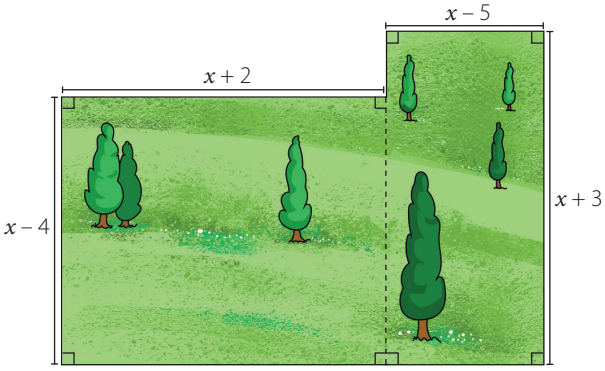


5. Escribe una expresión algebraica para determinar el área de todo el terreno según corresponda.

a.



b.



6. Encierra el error cometido en cada caso y luego corrígelo.

a. $(y + 9a)(y - 9a) = y^2 + 9a^2$

b. $(a + 12)(a - 8) = a^2 + 4a - 4$

c. $(b - 5)(b + 5) = b^2 + 5b - 15$

d. $(c - 13)(c + 1) = c^2 - 14c + 13$

e. $(a^{2n} + 1)(a^{2n} - 3) = a^{4n} - 2a^{2n} - 2$

f. $(x^3 - 5)(x^3 + 5) = x^5 - 25$

g. $(10 - a^x)(10 + a^x) = 20 - 2a^x$

h. $(a^{2n+1} - 3)(a^{2n+1} - 4) = a^{2n+1} - 7a^{2n-1} - 12$

7. Junto con un compañero resuelvan los siguientes productos y luego argumenten su resolución.

a. $(a + b - 9)(a - 9 + b)$

b. $(x + y - 3)(x - 5 + y)$

c. $(a^2 + y^2 - 12)(-15 + y^2 + a^2)$

d. $(2a^3 - b^3 + 5)(8 - b^3 + 2a^3)$

e. $(y^{2n} + z^n - 2)(y^{2n} - 1 + z^n)$

f. $(b^{2n+3} + a^{3n} - 4)\,(b^{2n+3} - 5 + a^{3n})$

8. Resuelve los siguientes problemas.

a. Jorge tiene un jardín de forma rectangular de $(5a - 7)$ m de ancho y $(5a + 7)$ m de largo. ¿Cuál es el área del jardín? ¿A cuántos metros cuadrados equivale si $a = 2$?

b. Elizabeth mide el piso de la sala de clases que tiene forma rectangular, cuyo ancho mide $(2b - 3)$ m y el largo mide $(2b + 10)$ m. ¿Cuál será el área del piso de la sala de clases de Elizabeth?

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 28 - 29

Reflexiona sobre tu trabajo

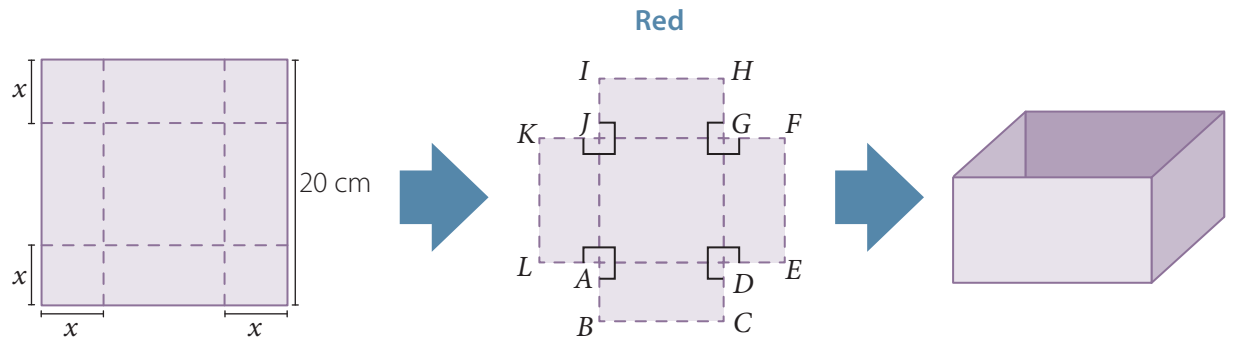
- ¿Calculaste la suma por diferencia y el producto de binomios con un término en común?

- ¿Abordaste de manera creativa la solución a las distintas actividades propuestas? Explica.

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 1

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

1. Se construyó una caja de base cuadrada a partir de un cuadrado de 20 cm de lado, recortando cuadrados de lado x en las esquinas, como se muestra a continuación.



a. ¿Cuál es la medida de la arista en su base? Escríbela. (1 punto)

_____

b. Remarca el producto notable que se relaciona con el área de la base de la caja y luego calcúlalo. (2 puntos)

$(20 - x)^2$ $(20 - 2x)^2$

$(20 + x)^2$ $(20 + 2x)^2$

c. ¿Cuál es el área total de la red de la caja? Explica cómo lo calculaste. (2 puntos)

Realiza tus cálculos

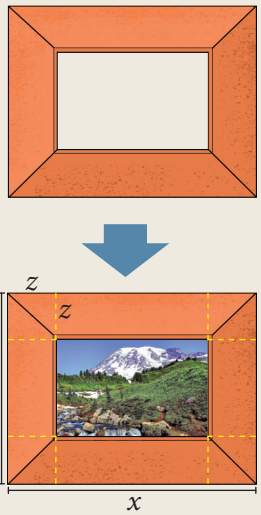
Respuesta ▸ _____

_____

_____

d. Si luego de finalizar lo anterior se construye una nueva caja pero con forma de cubo y el área de una de sus caras es $(50 - y)^2$ cm^2, ¿qué expresión representa cada una de sus aristas? ¿Cuál será el volumen de esta caja? (2 puntos)

2. Una fotografía con forma rectangular se pondrá en un cuadro como el que se muestra a continuación: (4 puntos)



a. ¿Es correcto afirmar que los lados de la fotografía miden $(x - z)$ cm y $(y - z)$ cm? Explica.

_____

b. ¿Cuántos cm^2 tiene la fotografía?

3. Detecta el error cometido en la resolución del siguiente ejercicio y luego corrígelo. (3 puntos)

$$(3x^2 + 5y^3)(3x^2 - 5y^3) \xrightarrow{\text{Distribuyes}} 3x^2 \cdot (3x^2 - 5y^3) + 5y^3 \cdot (3x^2 - 5y^3) \xrightarrow{\text{Multiplicas}} 9x^4 - 15x^2y^3 + 15y^3x^2 - 25y^9 \xrightarrow{\text{Reduces términos semejantes}} 9x^4 - 25y^9$$

Error _____

_____

_____

_____

Corrección

Verifica tus respuestas en el solucionario y con la ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1	Resolver problemas utilizando cuadrado de un binomio y cubo de un binomio.		**Logrado:** 23 puntos o más. **Medianamente logrado:** 20 a 22 puntos. **Por lograr:** 19 puntos o menos.
2 y 3	Resolver problemas utilizando suma por diferencia y binomio con un término en común.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica una estrategia que hayas utilizado para resolver alguno de los problemas planteados.

_____

- ¿Cumpliste las metas que te propusiste al iniciar el tema?

_____

Tema 2

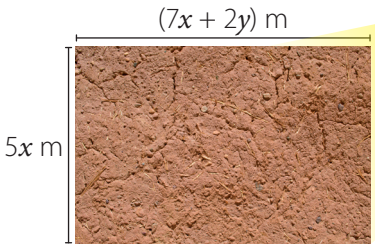
Factorización

En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 2.

Recuerdo lo que sé

1. Lee la siguiente información.

Diferentes expresiones algebraicas te permiten representar variadas situaciones. Por ejemplo, en el muro se han registrado algunas medidas.





a. Remarca la expresión que representa el perímetro de la pared, luego explica si tiene algún factor que se repita en uno de sus términos.

$(12x + 2y)$ m | $(24x + 4y)$ m

$14xy$ m | $(24x + 2y)$ m

Explicación ▸ _____

b. Emilia dice que el área de la pared es $5x(7x + 2y)$ m^2, en cambio Luis dice que es $(35x^2 + 10yx)$ m^2, ¿quién crees que está en lo correcto? Explica.

_____

_____

c. Completa la siguiente tabla y luego responde.

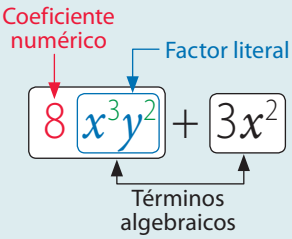
Expresión algebraica	Coeficientes numéricos	Factores literales
$24x + 4y$		
$35x^2 + 10xy$		

- ¿Cuántos términos algebraicos tiene cada expresión algebraica? ¿Se puede clasificar cada expresión como un binomio? Explica.

_____

_____

Una **expresión algebraica** es aquella en la que se combinan letras, números y operaciones, y está formada por **términos algebraicos**.



Diseño mi estrategia

2. Analiza cada situación y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

a. Respecto del muro propuesto en **1.** Si $y = 5$, es correcto afirmar que la expresión que representa el perímetro será $4(3x + 5)$ m. ¿Es correcta esta expresión? ¿Podrías plantear una estrategia para responder este tipo de problemas? Escríbela.

Respuesta ▸ _____ **Mi estrategia ▸** _____

b. Al valorizar con $x = 10$, en la expresión algebraica que representa el área del muro, ¿cuál de las siguientes expresiones resultaría? Remárcala y luego explica por qué la seleccionaste.

$(35 + y)10$ m^2 $(7 + 2y)50$ m^2 **Explicación ▸** _____

$(70 + 2y)5$ m^2 $(35 + y)100$ m^2

3. Comenta tus estrategias con tus compañeros, luego escribe lo que te sirvió para mejorar la tuya.

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿En qué otra situación crees que se utilice la factorización? Explica.

- ¿Qué dificultades tuviste para responder las preguntas anteriores? ¿Cómo podrías resolverlas?

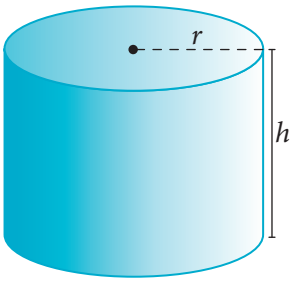
Factorización por un factor en común

Objetivo

- Comprender la factorización de una expresión algebraica por un factor común.

El área total (A_T) de un cilindro de radio r y altura h corresponde a:

$A_T = 2\pi rh + 2\pi r^2$



- Un estudiante afirma lo siguiente:

> Solo el coeficiente numérico se repite en cada uno de los sumandos de la expresión algebraica, por lo que el área total también se puede expresar como: $A_T = 2\pi(rh + r^2)$.

¿Estás de acuerdo con la afirmación anterior? ¿Por qué? Explica.

Habilidad

Al describir situaciones matemáticas utilizando lenguaje matemático estás desarrollando la habilidad de **argumentar** y **comunicar**.

- En este caso, el factor común corresponde a un monomio y el coeficiente numérico de este monomio será el máximo común divisor entre los coeficientes numéricos de los términos que forman la expresión, mientras que el factor literal corresponderá a la o las potencias en común con el menor exponente de cada término.

Conceptos

Factorizar una expresión consiste en escribirla como una multiplicación de expresiones algebraicas.

El **factor común monomio** es el producto del máximo común divisor de los coeficientes de todos los términos por los factores literales comunes de todos los términos con sus respectivos exponentes.

Atención

Un **término algebraico** corresponde a cada uno de los términos que componen una expresión algebraica.

Según la cantidad de términos que tenga una expresión algebraica, esta se puede clasificar en:

- **Monomio:** un término.
- **Binomio:** dos términos.
- **Trinomio:** tres términos.
- **Polinomio:** cuatro o más términos.

Ejemplo 1

¿Como factorizarías la expresión $7zyx^4 - 8x^5y$?

PASO A PASO

1. Los coeficientes numéricos son 7 y –8, y su máximo común divisor es 1.
2. Los factores literales son zyx^4 y x^5y, y estos tienen en común y y x.
3. En el caso de y, ya que tienen igual exponente, el factor común es y, mientras que en el caso de x su menor exponente es 4, por lo que el factor común será x^4.

Respuesta: Una factorización para la expresión $7zyx^4 - 8x^5y$ será $x^4y(7z - 8x)$.

Ejemplo 2

La expresión algebraica que representa el área del rectángulo $PALM$ es $(6x^2 + 9yx)$ cm^2, ¿qué expresión representará la medida del lado $\overline{LM}$?



PASO A PASO

1. Como el área del rectángulo $PALM$ se puede expresar como el producto de la medida de los lados $\overline{AL}$ y $\overline{LM}$, se tiene que: $AL \cdot LM = (6x^2 + 9yx)$ cm^2. Además, puedes observar que la medida del lado $\overline{AL}$ es $3x$ cm.

2. Al resolver la expresión $3x \cdot LM = 6x^2 + 9yx$, y factorizar la expresión $6x^2 + 9yx$ se obtiene: $3x(2x + 3y)$. Finalmente, se tiene lo siguiente:

$$AL \cdot LM = 6x^2 + 9yx$$
$$3x \cdot LM = 3x(2x + 3y)$$

Respuesta: La expresión que representa la medida del lado $\overline{LM}$ es: $(2x + 3y)$ cm.

Conceptos

En algunas expresiones algebraicas existen factores comunes que no son monomios sino polinomios, por lo que se puede factorizar utilizando como **factor común un polinomio**.

Ejemplo 3

¿Cómo se factoriza la expresión $m(m + n) - n^2(m + n)$?

Un factor común corresponde al binomio $(m + n)$.

Respuesta: Una factorización de $m(m + n) - n^2(m + n)$ es $(m - n^2) \cdot (m + n)$.

Conceptos

En algunos casos, en el polinomio que se busca factorizar no hay un factor común para todos sus términos, pero al agruparlos sí se puede determinar una **expresión común para cada agrupación**.

Ejemplo 4

¿Cuál es la factorización de $am + bm + an + bn$?

PASO A PASO

1. $am + bm + an + bn = (am + bm) + (an + bn)$ ⟶ Asocias los términos.
2. $= m(a + b) + n(a + b)$ ⟶ Factorizas cada paréntesis por factor común.
3. $= (m + n)(a + b)$ ⟶ Factorizas utilizando como factor común un polinomio.

Respuesta: Por lo tanto, $am + bm + an + bn = (m + n)(a + b)$.

¿Qué propiedad de la multiplicación se aplicó en el ejemplo anterior?

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Si la expresión algebraica puedes factorizarla remarca en Sí, en caso contrario remarca en No. Explica tu elección.

a. $9x + 3$

Sí No

b. $10a + b$

Sí No

c. $7ab + b$

Sí No

d. $15(x + y) + 4(y + x)$

Sí No

e. $8(w + z^2) - 10(w + z)$

Sí No

f. $5(a + b) - y\,(a - b)$

Sí No

g. $4a + 2b - 5a^2 + 7b^2$

Sí No

h. $3x - 5yx + 3y - 5y^2$

Sí No

i. $7a - 3b - 4a^4 + b^3$

Sí No

2. Determina el factor común en cada caso.

a. $5p + 10q$

b. $10(x^3 + x^2) + x^2 + x^3$

c. $7(a - b) - b + a$

d. $7b - 8b^3 + 10b^2$

e. $a(b + c^2) + x(c^2 + b)$

f. $10bc + 2b^2c^2 - 4b^3c^3$

g. $7xyz + 8zxy^2 - 9yxz^3$

h. $-x^2z^3w^2 - z^2xw^3 - wx^3$

i. $-4a^2b^2c^3 - 8a^3b^3c^4 - 12a^4b^4c^4$

3. Factoriza cada expresión algebraica.

a. $8xy - 10yx + 2x^2y^2 + 3x^2y^2$

b. $pq - cd + pq - 2cd + qp$

c. $1 - b + 2a(1 - b)$

d. $3a - b^2 + 2b^2x - 6ax$

e. $w(x - 3y) + z(3y - x)$

f. $2w^3x^2z^4 + 4w^2z^3 - 6w^2z^2x^3$

g. $3ax - 2by - 2bx - 6a + 3ay + 4b$

h. $(a + 3)(a + 1) - 4(a + 1)(a - 2)$

i. $12x^3y^5 - 30x^2y^2 + 42x^3y^4 - 6x^3y^3$

4. Física El impulso (I) se calcula mediante la expresión:

$$I = mv_f - mv_i$$

Donde m corresponde a la masa del objeto, v_i corresponde a la rapidez inicial del objeto y v_f corresponde a la rapidez final del objeto.

a. ¿Cuál es el factor común de la expresión?

b. Factoriza la expresión que corresponde al impulso.

c. Si $m = 0{,}5$ g, $v_i = 0$ [m/s] y $v_f = 15$ [m/s], ¿cuál es el valor de I?

5. Biología En los vasos sanguíneos el flujo de sangre es más rápido cuando se dirige hacia el centro del vaso y más lento cuando se dirige hacia el exterior. La rapidez del fluido sanguíneo está dada por la expresión:

$$V = \frac{P}{4lK}R^2 - \frac{P}{4lK}r^2$$

Donde R es el radio del vaso sanguíneo, r es la distancia que recorre la sangre y P, l, K son constantes físicas relacionadas con la presión.

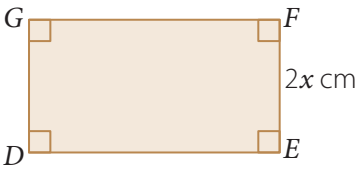
a. ¿Cuál es el factor común?

b. La expresión que se muestra es equivalente a $V = P\left(\frac{R^2}{4lK} - \frac{r^2}{4lK}\right)$, ¿puede seguir factorizándose? Justifica tu afirmación.

6. Geometría Calcula la medida de cada lado en los polígonos que se muestran.

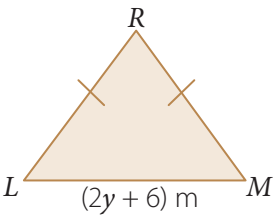
a. El área (A) del rectángulo $DEFG$ es:

$A = (10x^2 + 8x)$ cm^2



b. El perímetro (P) del triángulo isósceles LMR es:

$P = (6y + 26)$ m



7. Resuelve el siguiente problema.

Se construirá un muro con forma rectangular y se utilizarán solo ladrillos como los que se muestran. Si para construirlo se pondrán 50 ladrillos de largo y de ancho 25 ladrillos, sin considerar las capas de cemento entre cada ladrillo, ¿cuál es la expresión factorizada que corresponde al área que cubre el muro?



Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Página 30

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Podrías explicar con tus palabras qué significa factorizar una expresión algebraica? Explica.

- ¿Qué actividades consideras que fueron un desafío resolver? ¿Utilizaste alguna estrategia? Explica.

Factorización mediante productos notables: binomios

Objetivo

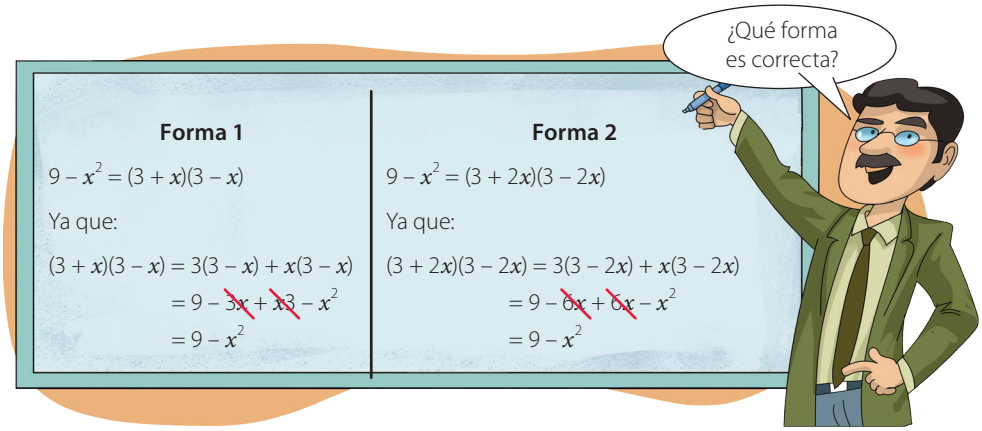
- Comprender la factorización de un binomio utilizando la suma por diferencia, la suma de cubos y la diferencia de cubos.

Habilidad

Al identificar ideas propias y respuestas en lenguaje matemático estás desarrollando la habilidad de **resolver problemas**.

Atención

Ya que $a^2 = b$, se tiene que $\sqrt{b} = a$. Por ejemplo, como $9^2 = 81$, entonces $\sqrt{81} = 9$.



- Remarca la(s) igualdad(es) correcta(s).

$3^2 = 9$ | $(x)^2 = x^2$ | $(x)^2 = 2x$

- ¿Cuál sería tu respuesta a lo que plantea el profesor? Explica.

_____

_____

- En el producto notable de la suma por la diferencia se estableció que $(a + b)(a - b) = a^2 - b^2$. Esto significa que la diferencia de dos cuadrados se puede expresar como el producto de dos factores, es decir, se puede factorizar.

Conceptos

La **diferencia de cuadrados ($a^2 - b^2$)** es igual al producto de la suma por la diferencia de los términos involucrados, es decir:

$$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$$

Ejemplo 1

¿Cómo se factoriza la expresión $81 - 4x^4$?

PASO A PASO

1. La expresión algebraica tiene dos términos, por lo que corresponde a un binomio. Además es una diferencia de cuadrados.

2. Ya que $81 = 9^2$ y además $4x^4 = (2x^2)^2$, se tiene la siguiente igualdad:

$$81 - 4x^4 = 9^2 - (2x^2)^2 = (9 + 2x^2)(9 - 2x^2)$$

Respuesta: Se obtiene que $81 - 4x^4 = (9 + 2x^2)(9 - 2x^2)$.

Ejemplo 2

Factoriza la expresión $16a^2b^6 - 9x^2y^4$.

Como $16a^2b^3 = (4ab^3)^2$ y $9x^2y^4 = (3xy^2)^2$

Luego, se tiene la siguiente igualdad: $16a^2b^6 - 9x^2y^4 = (4ab^3 + 3xy^2)(4ab^3 - 3xy^2)$.

¿Crees que se puede factorizar $x^2 + 1$? Explica.

Conceptos

La **suma** y la **diferencia de cubos** se pueden factorizar como el producto de un binomio y de un trinomio de la siguiente manera:

Suma de cubos	Diferencia de cubos
$x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$	$x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$

Ejemplo 3

¿Cómo factorizarías $64 + b^3$?

PASO A PASO

1. $64 + b^3 = (4)^3 + (b)^3$ → Expresas cada término al cubo.
2. $= (4 + b)(4^2 - 4 \cdot b + b^2)$ → Factorizas la suma de cubos.
3. $= (4 + b)(16 - 4b + b^2)$ → Calculas las potencias y productos.

Respuesta: Al factorizar $64 + b^3$, se obtiene $(4 + b)(16 - 4b + b^2)$.

Ejemplo 4

Factoriza el binomio $512a^{12} - 8b^{15}$.

PASO A PASO

1. $512a^{12} - 8b^{15} = (8a^4)^3 - (2b^5)^3$ → Expresas cada término al cubo.
2. $= (8a^4 - 2b^5)((8a^4)^2 + 8a^4 \cdot 2b^5 + (2b^5)^2)$ → Factorizas la diferencia de cubos.
3. $= (8a^4 - 2b^5)(64a^8 + 16a^4b^5 + 4b^{10})$ → Calculas.

Respuesta: La factorización es $(8a^4 - 2b^5)(64a^8 + 16a^4b^5 + 4b^{10})$.

Ejemplo 5

Para que se cumpla la igualdad, ¿qué término falta?

$$27a^3 - b^3 = (3a - b)(9a^2 + \square + b^2)$$

Se tiene que $27a^3 = (3a)^3$ y $b^3 = (b)^3$. El término que debe ir en el recuadro corresponde al producto entre $3a$ y b, es decir, $3ab$.

Atención

Utilizando propiedades de potencia se tiene:

$$b^6 = (b^3)^2$$

Además, se cumple que:

$$\sqrt{b^6} = \sqrt{(b^3)^2} = |b^3|$$

Srinivāsa Rāmānujan

1887 -1920



Una vez, en un taxi de Londres, a Hardy le llamó la atención su número: 1 729. Cuando llegó a visitar a Rāmānujan en el hospital, Hardy le manifestó que tal número era aburrido, obteniendo una respuesta inmediata de Rāmānujan: es un número muy interesante, ya que es el número más pequeño que se puede expresar como suma de dos cubos de dos formas diferentes. Matemáticamente, si 1 729 es igual a 13 por 133 y 19 por 91, ¿cómo se puede expresar 1 729 por suma de cubos?

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Completa con el término que falta para que se cumpla la igualdad.

a. $(\square)^2 = 9w^2$

b. $(\square)^2 = \frac{1}{36}p^8$

c. $(\square)^2 = 4q^2p^8$

d. $(\square)^2 = 169q^6r^2s^4$

e. $(\square)^2 = 121a^4w^2$

f. $(\square)^2 = 16w^{10}x^4y^8$

2. Identifica el tipo de factorización que se puede realizar en cada binomio. Para ello encierra la clasificación correspondiente.

a. $8p^3 + q^3$

Suma de cubos.
Diferencia de cubos.
Diferencia de cuadrados.

b. $x^4 - y^4$

Suma de cubos.
Diferencia de cubos.
Diferencia de cuadrados.

c. $225a^2 - 1$

Suma de cubos.
Diferencia de cubos.
Diferencia de cuadrados.

d. $z^9 + q^{12}$

Suma de cubos.
Diferencia de cubos.
Diferencia de cuadrados.

e. $100b^8 - 1$

Suma de cubos.
Diferencia de cubos.
Diferencia de cuadrados.

f. $125r^9 - 1$

Suma de cubos.
Diferencia de cubos.
Diferencia de cuadrados.

3. Factoriza cada binomio.

a. $1 - 8w^3$

b. $4w^2 - 9$

c. $1 + q^9$

d. $81w^4z^6 - 121q^4$

e. $w^4n^6 - 4z^8$

f. $343m^3 + 64$

g. $27x^3 + 8y^6x^9$

h. $125m^6 - 512a^3$

i. $1\,000b^6 - 729a^9b^{12}$

4. Dada la factorización, determina el binomio que lo genera.

a. $(3m - 10n)(9m^2 + 30mn + 100n^2)$

b. $(9x + 8)(9x - 8)$

c. $(13z + 11w)(169z^2 - 143zw + 121w^2)$

d. $(7b^4 + 1)(49b^8 - 7b^4 + 1)$

e. $(5a^3 - 4b)(25a^6 + 20a^3b + 16b^2)$

f. $(15x^3 - 4y^2)(15x^3 + 4y^2)$

5. Encierra el error cometido en cada factorización y luego corrígelo.

a. $1 - 512m^3 = (1 - 8m)(1 - 8m - 64m^2)$

b. $4a^2 - 9b^4 = (2a - 3b)(2a + 3b)$

c. $y^3 + 1\,728 = (y + 12)(y^2 + 243 + 144)$

d. $16c^4 - 4 = (4c^2 - 4)(4c^2 + 4)$

e. $64 - 125n^6 = (5n^2 - 4)(25n^4 + 20n^2 + 16)$

f. $216m^3 + 1\,331 = (6m - 11)(36m^2 + 66m + 121)$

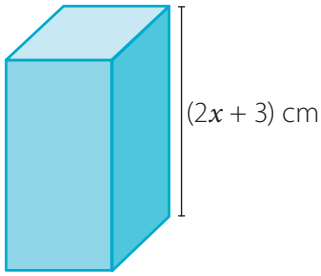
6. Resuelve los siguientes problemas.

a. Una arquitecta diseñó ventanas rectangulares con un área de $(16x^2 - 81)$ cm^2. Una de las dimensiones de cada ventana es del tipo $(ax + b)$ cm, donde a y b son números enteros. Determina el valor de $a^2 + b^2$.

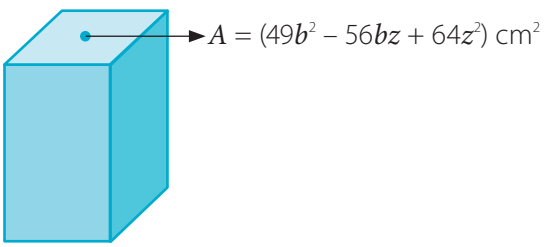
b. Luego de realizar diferentes mediciones, Alejandro determinó que la expresión que corresponde al área de su jardín que tiene forma rectangular está dada por $(729 - 64z^2)$ m^2. ¿Cuáles son las posibles medidas de sus lados?

7. Geometría **Calcula lo pedido en cada paralelepípedo recto.**

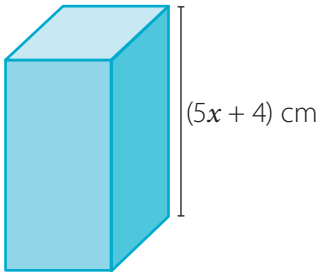
a. Si el volumen es $(8x^3 + 27)$ cm^3, ¿qué expresión corresponde al área de su base?



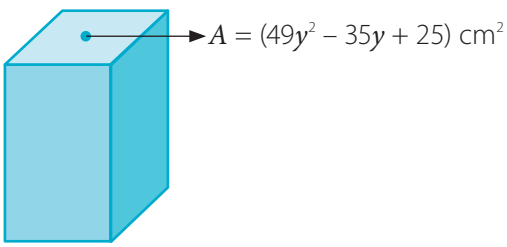
b. Si el volumen es $(343b^3 + 512z^3)$ cm^3, ¿qué expresión corresponde a la altura?



c. Si el volumen es $(125x^3 + 64)$ cm^3, ¿qué expresión corresponde al área de su base?



d. Si el volumen es $(343y^3 + 125)$ cm^3, ¿qué expresión corresponde a la altura?



Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Página 31

Reflexiona sobre tu trabajo

- Al resolver las actividades propuestas, ¿qué factorizaciones utilizaste? Explica.

_____

- ¿Qué actividad te fue de mayor dificultad? Explica.

_____

- Para comprender de mejor manera lo estudiado, ¿qué fortaleza mejorarías? Explica.

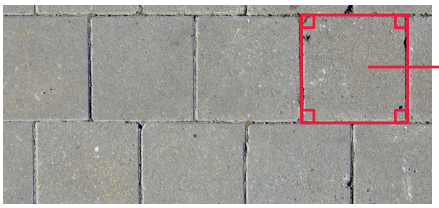
_____

Factorización mediante productos notables: trinomios

Objetivo

- Comprender la factorización de un trinomio utilizando los productos notables.

En algunas calles, pasos peatonales o plazas se han utilizado rocas cuya forma se asimila a la de un cubo. En particular, el adoquín que se remarca tiene dicha forma. En la imagen la expresión algebraica propuesta representa el área de una de sus caras.



¿Qué expresión algebraica representa la medida de cada lado?

- Remarca el nombre del producto notable con el que relacionas el área (A) mostrada en la imagen anterior.

Cuadrado de binomio. | Suma de cubos. | Cubo de un binomio.

- Completa con = o ≠ según corresponda y luego argumenta tu elección.

$(a + b)^2$ ◯ $2a + 2ab + 2b$ $\qquad$ $(p + q)^2$ ◯ $p^2 + 2pq + q^2$

- Responde la pregunta planteada.

Conceptos

Factorizar un trinomio es el proceso inverso a encontrar el desarrollo del cuadrado de la suma o diferencia de dos términos. La factorización de un trinomio utilizando el cuadrado de un binomio es:

$x^2 + 2ax + a^2 = (x + a)^2$ $\qquad$ $x^2 - 2ax + a^2 = (x - a)^2$

Ejemplo 1

En la expresión $9x^2 - 6xy + y^2$, ¿cuál es su factorización?

Respecto del primer término, tenemos que $(3x)^2 = 9x^2$; en el caso del tercer término, tenemos que $(y)^2 = y^2$, y luego en el caso del segundo término, tenemos que $2 \cdot 3x \cdot y = 6xy$, por lo que tendríamos la siguiente factorización:

$$9x^2 - 6xy + y^2 = (3x - y)^2$$

Ejemplo 2

¿Qué término se debe agregar al binomio $4x^2 + y^4$ para factorizarlo?

PASO A PASO

1. En ambos términos tienes que: $4x^2 = (2x)^2$, $y^4 = (y^2)^2$.
2. El otro término corresponde al doble producto de lo considerado anteriormente, es decir: $2 \cdot 2x \cdot y^2 = 4xy^2$.

Respuesta: Al sumar $4xy^2$ al binomio se tiene el trinomio $4x^2 + 4xy^2 + y^4$ y su factorización es $(2x + y^2)^2$.

¿Existe otro término para que cumpla con lo solicitado? Explica.

Conceptos

El trinomio de la forma $x^{2n} + bx^n + a$, con $n \in \mathbb{N}$, se puede **factorizar** como $(x^n + p)(x^n + q)$, si existen valores p y q tal que $p + q = b$ y $p \cdot q = a$:

$$x^{2n} + bx^n + a = (x^n + p)(x^n + q) \text{ con } p + q = b \text{ y } p \cdot q = a.$$

Ejemplo 3

¿Cuál es la factorización de $y^2 + 8y - 20$?

PASO A PASO

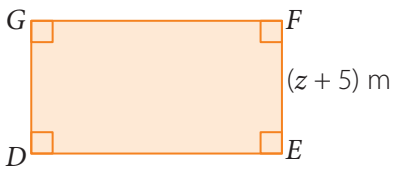
1. Respecto del primer término, se tiene, $(y)^2 = y^2$.
2. Determinas dos números p y q, con la condición de que $p + q = 8$ y $p \cdot q = -20$.
3. Los números son 10 y –2, ya que $10 + (-2) = 8$ y $10 \cdot (-2) = -20$.

Respuesta: La factorización de $y^2 + 8y - 20$ es $(y + 10)(y - 2)$.

¿Qué propiedad permitiría justificar que la factorización $(y - 2)(y + 10)$ también es correcta?

Ejemplo 4

El área del rectángulo $DEFG$ es $(z^2 + 12z + 35)$ m^2. ¿Qué expresión representa la medida del lado $\overline{FG}$?



En el contexto del problema se tiene la igualdad:

$$(z^2 + 12z + 35) = (z + a)(z + 5)$$

La expresión $(z + a)$ corresponde a la medida del otro lado, el valor de a debe ser 7, ya que es el único número que cumple la igualdad. Por lo tanto, la medida del otro lado es $(z + 7)$ m.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Identifica si cada trinomio se puede factorizar utilizando productos notables o no. Para ello encierra Sí o No, según corresponda. Justifica tu elección.

a. $z^2 + 5z + 9$

Sí No

b. $y^2 + 10y + 25$

Sí No

c. $a^2 + 5a + 25$

Sí No

d. $x^2 - 18x + 81$

Sí No

e. $w^2 - 11w + 121$

Sí No

f. $b^2 + 12b + 36$

Sí No

g. $4p^4 - 8p^2 + 16$

Sí No

h. $16q^4 - 20q^2 + 25$

Sí No

i. $9m^4 - 24m^2 + 16$

Sí No

2. Determina el término que debe ir en cada recuadro para que se pueda factorizar y luego factorízalo.

a. $x^2 + 12x + \square$

b. $81 - \square + z^2$

c. $\square + 6pz + 9z^2$

d. $25z^2 + \square + 16x^2$

e. $a^4 + 2a^2b^2 + \square$

f. $w^6 + \frac{2w^3}{5} + \square$

3. Responde.

a. Si $(x - 9)(x + 5) = x^2 + sx + m$, ¿cuál es el valor numérico de $s + m$?

b. Si $(y + 6)(y - 7) = y^2 + py + q$, ¿cuál es el valor numérico de $p \cdot q$?

c. Si $(a - 7)^2 = a^2 + ba + c$, ¿cuál es el valor numérico de $b^2 - c^2$?

d. Si $(2z + 5)^2 = az^2 + bz + c$, ¿cuál es el valor numérico de $a + b + c$?

4. Determina los números p y q que cumplen la suma y el producto en cada caso. Observa el ejemplo destacado.

$p + q$	$p \cdot q$	p	q
–5	6	–3	–2
6	8		
–3	–10		
3	–18		
4	4		

$p + q$	$p \cdot q$	p	q
5	–24		
–6	–40		
–11	28		
1	–380		
2	–120		

5. Factoriza cada trinomio.

a. $y^2 - 8y + 16$

b. $p^2 + 6pq + 9q^2$

c. $z^2 + 3z - 28$

d. $x^2 + \frac{7}{10}x + \frac{1}{10}$

e. $q^2 + q - 132$

f. $1 - 6w + 9w^2$

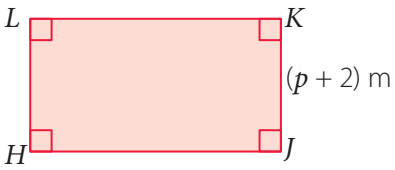
g. $-9a^2 - 3a + 2$

h. $4b^2 + b + \frac{1}{16}$

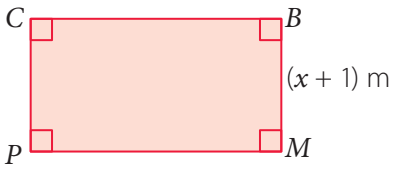
i. $k^2 - 24k + 140$

6. Geometría Calcula lo solicitado en cada caso.

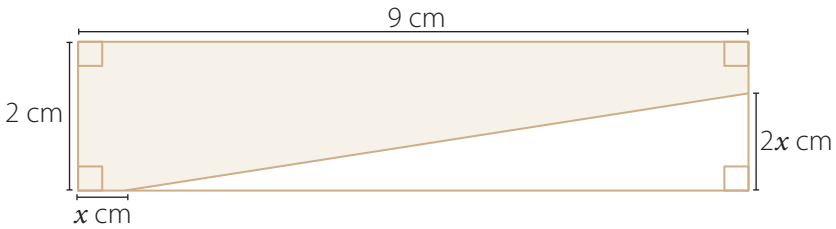
a. El área del rectángulo es $(p^2 + 11p + 18)$ m^2, ¿cuánto mide el lado $\overline{KL}$?



b. El área del rectángulo es $(x^2 + 4x + 3)$ m^2, ¿cuánto es el perímetro?



7. Analiza el siguiente rectángulo y luego responde.



a. Determina una expresión factorizada para calcular el área de la parte pintada.

b. Si $x \neq 0$, anota un posible valor para x. Existe alguna restricción para x, ¿cuál? Explica.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 32 - 33

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Identificaste tus fortalezas y debilidades al momento de resolver las actividades? ¿Cuáles son?

- ¿Qué actividad consideras que te resultó más fácil resolver? ¿Cómo lo replicarías en las otras actividades? ¿Por qué? Explica.

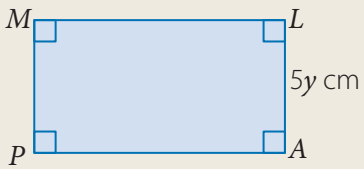
- De los trinomios que factorizaste, ¿cómo resolviste el que te tomó mayor tiempo en resolver?

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 2

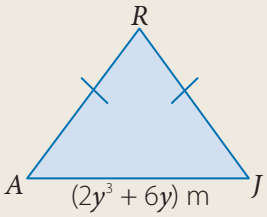
Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

1. Calcula la expresión que corresponde a la medida de cada lado en los polígonos que se muestran. (2 puntos cada uno)

a. El área (A) del rectángulo $PALM$ es: $A = (10y^5 + 40y)$ cm^2

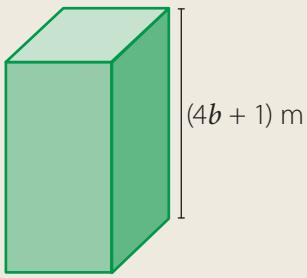


b. El perímetro (P) del triángulo isósceles AJR es: $P = (6y^3 + 14y)$ m

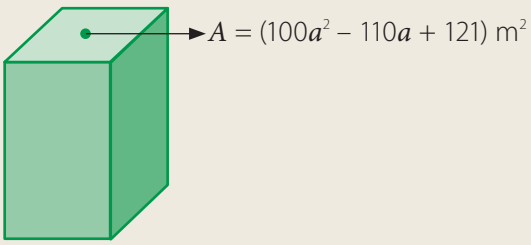


2. Calcula lo pedido en cada paralelepípedo recto. (2 puntos cada uno)

a. Si el volumen es $(64b^3 + 1)$ m^3, ¿qué expresión corresponde al área de su base?



b. Si el volumen es $(1\,000a^3 + 1\,331)$ m^3, ¿qué expresión corresponde a la altura?



Marca la opción correcta en los ítems 3 al 7. (1 punto cada uno)

3. ¿Cuál es la factorización del trinomio $x^2 - 8px - 48p^2$?

A. $(x + 4p)(x - 12p)$

B. $(xp + 4)(xp - 12)$

C. $(x + 4)(xp - 12p)$

D. $(xp + 4p)(p - 12p)$

4. Para que se cumpla la igualdad $(x + \square)(x + 3) = x^2 - 6x - 27$, ¿qué número debe ir en el recuadro?

A. 9 **B.** −6 **C.** 24 **D.** −9

5. Si $(x - 7)(x + 1) = x^2 + nx + m$, ¿cuál es el valor de $m^2 + n^2$?

A. 13 **B.** 85 **C.** 169 **D.** −85

6. ¿Qué factorización es **correcta**?

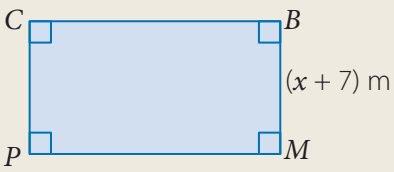
A. $x^2 + 3x + 9 = (x + 3)^2$

B. $y^2 - 16y - 64 = (y + 8)^2$

C. $a^2 - 5a + 25 = (a - 5)^2$

D. $b^2 - 6b + 9 = (b - 3)^2$

7. El área del rectángulo es $(x^2 + 16x + 63)$ m^2, ¿cuánto mide el lado $\overline{PM}$?



A. $(x - 9)$ m

B. $(x - 6)$ m

C. $(x + 9)$ m

D. $(x + 6)$ m

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1	Comprender la factorización de expresiones algebraicas por un factor en común.		**Logrado:** 8 puntos o más. **Medianamente logrado:** 6 a 7 puntos. **Por lograr:** 5 puntos o menos.
2	Comprender la factorización de expresiones algebraicas en un binomio.		
3, 4, 5, 6 y 7	Comprender la factorización de expresiones algebraicas en un trinomio.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Utilizaste las estrategias propuestas al inicio de la unidad? Explica.

_____

- ¿Cómo resolviste las dificultades que se presentaron en el transcurso del tema? Explica.

_____

Tema 3

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 3.

Recuerdo lo que sé

1. Interpreta la siguiente información y responde.

El oro que se extrae de la tierra es un mineral metálico y de un característico color amarillo cuando está refinado. Para el uso en joyería, el oro se mezcla con otros metales, principalmente cobre y plata, formando una aleación. Este procedimiento le proporciona cualidades mecánicas que el oro puro no presenta, como dureza, resistencia y color.

Normalmente, se ignora que el oro aleado puede presentar diferentes colores. Por cada 1 kg de aleación, además de 0,75 kg de oro puro, se tienen diferentes aleaciones de oro.

a. Si se quiere tener oro amarillo, se mezclan 0,125 kg de plata fina y el resto de cobre. Considerando como x la cantidad que representa el cobre, remarca la ecuación que representa la situación y luego justifica tu elección y resuélvela.

$0{,}125 + x = 0{,}75 + 1$

$0{,}125 + x + 0{,}75 = 1$

Una **ecuación lineal con coeficientes racionales** es aquella en la que están involucrados números racionales, ya sean fracciones o números naturales, enteros, decimales. Estas ecuaciones son de la forma:

$ax + b = c$, con $a, b, c \in \mathbb{Q}$ y $a \neq 0$.

Realiza tus cálculos

Explicación ▸ _____

_____

_____

_____

b. Suponiendo que la siguiente inecuación modela la cantidad x de bronce que se necesita para confeccionar un collar.

$x + 0{,}25 < 1$

¿Cuál será el conjunto solución de la inecuación?

Una **inecuación lineal con coeficientes racionales** es una desigualdad que tiene una incógnita y sus coeficientes son números racionales.

Estas inecuaciones son de la forma:

$ax + b > c$; $ax + b < c$, con $a, b, c \in \mathbb{Q}$ y $a \neq 0$.

Diseño mi estrategia

2. Analiza cada situación y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

Para responder las siguientes preguntas considera que, por cada 1 kg de aleación, además de 0,75 kg de oro puro, se tienen diferentes aleaciones de oro.

a. Si se quiere tener oro rosa se mezclan 0,2 kg de cobre y el resto es plata fina. Considerando como y la cantidad que representa la plata fina, ¿cuál es la ecuación que corresponde a la situación anterior? ¿Cuántos kg de plata fina se necesitan? Explica tu estrategia para responder las preguntas.

Mi estrategia ▸ _____ **Respuesta ▸** _____

b. Si se quiere tener oro gris, se necesitan x kg de níquel e y kg de cobre, ¿qué ecuación representa lo anterior? ¿Qué estrategia podrías plantear para responder este tipo de preguntas? Explica.

Ecuación ▸

Explicación ▸ _____

3. Comenta tus estrategias con un compañero o compañera. Luego escribe lo que te sirvió para mejorar la tuya.

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿En qué otra situación has utilizado una ecuación? Explica.

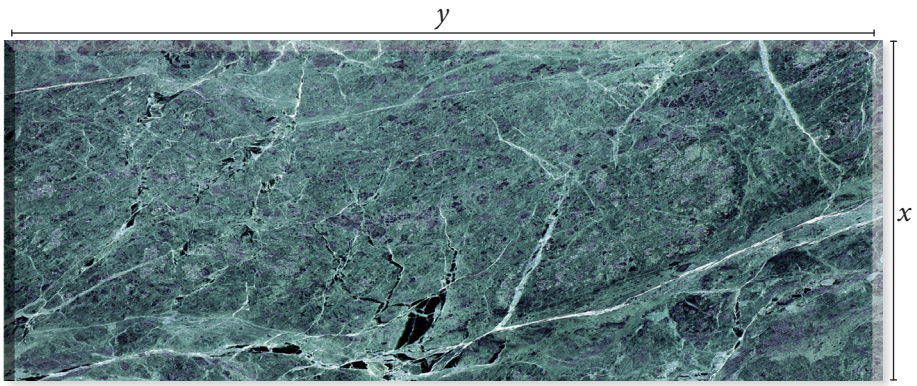
- ¿Qué dificultades tuviste para responder las preguntas anteriores? ¿Cómo podrías resolverlas?

Ecuación lineal de dos incógnitas

Objetivo

- Comprender el concepto de ecuación lineal de dos incógnitas.
- Representar la solución de una ecuación lineal de dos incógnitas.

En una construcción se utilizará un trozo de mármol que tiene forma rectangular, como se muestra a continuación.



Si solo se tiene como condición que el perímetro sea igual a 270 cm, ¿qué posibles medidas puede tener cada uno de sus lados?

- Remarca la expresión que representa al perímetro del trozo de mármol.

$x + y = 270$ $\quad$ $2x + y = 270$ $\quad$ $2x + 2y = 270$

Habilidad

Al utilizar un lenguaje funcional para resolver problemas y representar fenómenos estás utilizando la habilidad de **modelar**.

- ¿Qué posibles medidas puede tener cada lado? Explica y escribe algunas.

Explicación ▸ _____ **Medidas**

_____

_____

_____

- Para determinar una expresión para el perímetro del trozo de mármol se ha utilizado una ecuación lineal en dos variables.

Conceptos

- Una **ecuación lineal de dos incógnitas** (x e y) tiene la forma $ax + by = c$, donde a, b y c son números racionales ($a \neq 0$, $b \neq 0$). Estas ecuaciones se pueden escribir como: $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, al representarla en el plano cartesiano la gráfica interseca al eje X en el punto $\left(\frac{c}{a}, 0\right)$ y al eje Y en el punto $\left(0, \frac{c}{b}\right)$. Además $-\frac{a}{b}$ corresponde a la pendiente de la recta y $\frac{c}{b}$ es el coeficiente de posición de la recta.
- Estas ecuaciones tienen **infinitas** soluciones.
- Es posible representarla utilizando una **función afín** ($f: A \rightarrow B$), tal que $f(x) = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.

Ejemplo 1

Si la ecuación $2x + 3y = 5$ se quisiera expresar en la forma $y = mx + n$, ¿cuál sería la ecuación que la representaría?

PASO A PASO

1. Para determinar la ecuación de la forma solicitada, se "despejará" y de la ecuación.
2. $2x + 3y - 2x = 5 - 2x$ ⟶ Restas $2x$ en ambos lados de la ecuación.

   $\frac{3y}{3} = -\frac{2x}{3} + \frac{5}{3}$ ⟶ Multiplicas por $\frac{1}{3}$.

   $y = -\frac{2x}{3} + \frac{5}{3}$ ⟶ Simplificas.
3. La ecuación es $y = -\frac{2x}{3} + \frac{5}{3}$.

Actitud

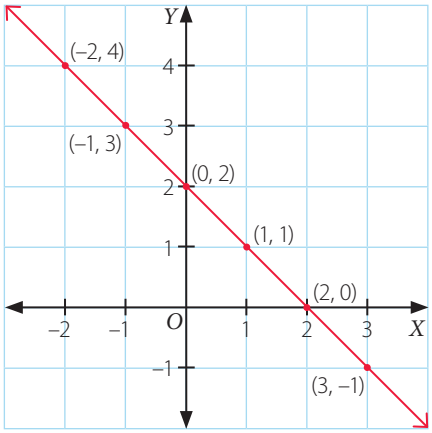
Aborda de manera flexible y creativa la solución a problemas.

Ejemplo 2

Representa en una tabla algunas soluciones que satisfacen la ecuación $x + y = 2$, luego ubica los pares ordenados (x, y) en el plano cartesiano.

La ecuación $x + y = 2$, se puede escribir como $y = -x + 2$.

x	$y = -x + 2$	(x, y)
–2	$-(-2) + 2 = 4$	(–2, 4)
–1	$-(-1) + 2 = 3$	(–1, 3)
0	$-(0) + 2 = 2$	(0, 2)
1	$-(1) + 2 = 1$	(1, 1)
2	$-(2) + 2 = 0$	(2, 0)
3	$-(3) + 2 = -1$	(3, –1)



Ejemplo 3

¿Qué ecuación se representó en el plano cartesiano?

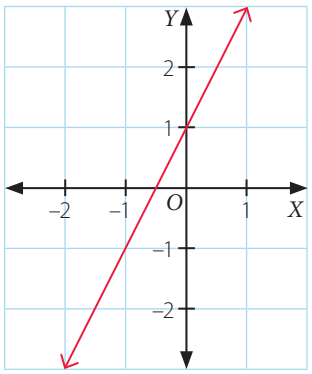
La recta interseca al eje Y en el punto (0, 1), es decir, se tiene que:

$$y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b} \quad \blacktriangleright \quad y = -\frac{a}{b}x + 1$$

Además la recta pasa por el punto (–1, –1), al reemplazar se obtiene:

$$-1 = \frac{a}{b} + 1 \quad \blacktriangleright \quad -2 = \frac{a}{b}, \text{ es decir } -\frac{a}{b} = 2$$

La pendiente de la recta es 2 y su coeficiente de posición es 1, luego la ecuación es: $y = 2x + 1$, es decir $2x - y = -1$.



La ecuación $y - 2x = 1$ corresponde a la misma recta representada en el ejercicio anterior, ¿por qué? Explica.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Representa cada ecuación lineal con dos incógnitas en la forma $y = mx + n$.

a. $3x + y = 5$

b. $-2x - y = 7$

c. $-4x - 2y = 6$

d. $-3x - 9y = 0$

e. $x - \frac{2}{4}y = 8$

f. $1{,}2x + 0{,}5y = 1{,}2$

2. Completa cada tabla según corresponda.

a. $4x - 5y = 6$

x	y	(x, y)
–2		
	–1	
	0	
1		
	3	
4,2		

b. $2x + 3y = 1$

x	y	(x, y)
	–1	
	–2	
	0	
3		
7		
	3,5	

c. $7x + 8y = 0$

x	y	(x, y)
0		
	–2	
0,5		
	–9,5	
10		
	1	

3. Determina 5 pares ordenados que cumplan cada ecuación propuesta.

a. $2x + y = 6$

b. $x + y = 7$

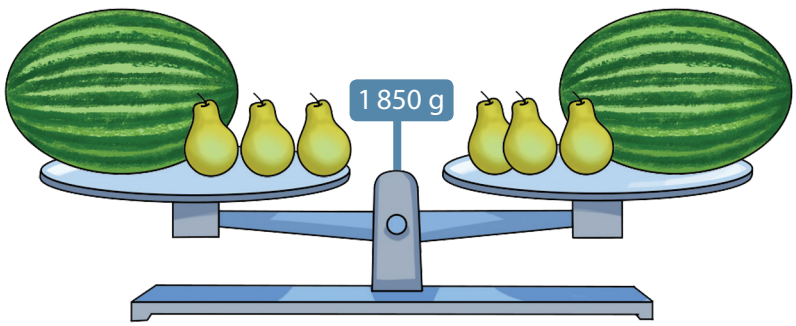
c. $7x - y = 11$

d. $-\frac{x}{3} + \frac{2}{4}y = 8$

e. $0{,}5x - y = 7$

f. $-0{,}4x - \frac{1}{9}y = 0$

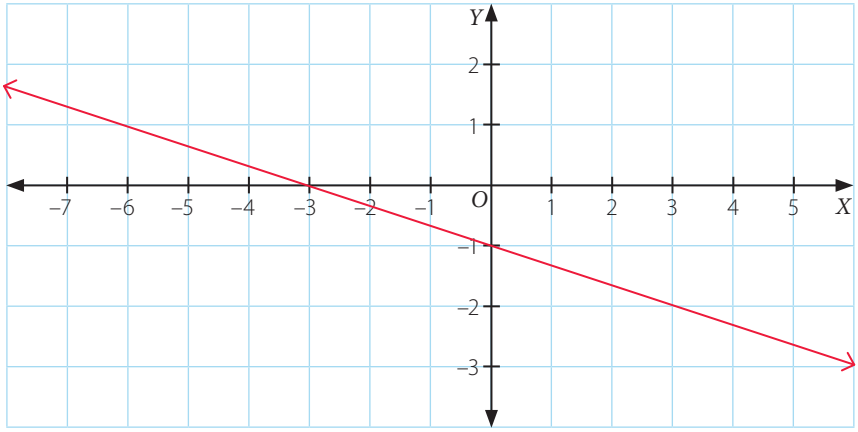
4. La balanza se encuentra equilibrada y en ella se han puesto peras de igual masa (x) y sandías de igual masa (y).



a. ¿Qué ecuación representa la situación anterior?

b. Suponiendo que la masa de 1 pera es de 125 g, ¿cuál es la masa de 1 sandía?

5. En el plano cartesiano se ha representado una recta.



a. ¿En qué puntos la recta corta al eje X e Y?

b. Determina la ecuación de la forma $ax + by = c$, además de la ecuación de la forma $y = mx + n$.

c. ¿Cuántas soluciones tiene la ecuación? Determina al menos 4 pares ordenados de puntos que pertenezcan a la recta.

6. Plantea una ecuación para cada situación y luego determina 4 posibles soluciones.

a. La suma de dos números es 50. ¿Cuáles son los números?

b. Un número más el doble de otro es 8. ¿Cuáles son los números?

c. Un número excede a otro en 15 unidades. ¿Cuáles son los números?

d. El perímetro de un rectángulo es 60 m. ¿Cuánto miden sus lados?

e. Dos ángulos son suplementarios. ¿Cuánto mide cada ángulo?

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Página 34

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué dificultad tuviste al representar una ecuación lineal con dos incógnitas? ¿La superaste? Explica.

_____

_____

- Al plantear las ecuaciones lineales de dos incógnitas, ¿qué fortaleza tuviste? ¿Cómo la potenciarías? Explica.

_____

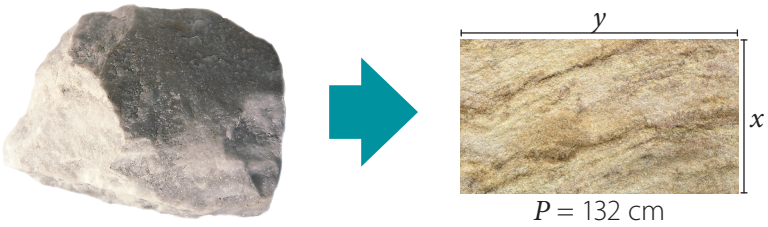
_____

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Objetivos

- Comprender sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.
- Resolver de manera gráfica sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Un grupo de artesanos tienen un trozo de mármol. Para trabajarlo de mejor manera, moldearán una parte para obtener un trozo, de forma rectangular y con la condición de que la medida de su largo (y) sea el doble de la medida de su ancho (x).



¿Cuáles son las medidas del largo (y) y el ancho (x)?

- ¿Es correcto afirmar que para responder a la pregunta planteada se deben resolver simultáneamente las restricciones que se muestran? Explica.

$$\begin{cases} 2x + 2y = 132 & \longrightarrow \text{Perímetro rectángulo.} \\ 2x - y = 0 & \longrightarrow \text{El largo mide el doble del ancho.} \end{cases}$$

- Completa la siguiente tabla con valores para cada ecuación.

❶ $2x + 2y = 132 \blacktriangleright y = -x + 66$ ❷ $2x - y = 0 \blacktriangleright y = 2x$

x	y	(x, y)
22		
	0	
4		

x	y	(x, y)
	0	
12		
	44	

- ¿Qué valores se repiten? Responde a la pregunta planteada.

Conceptos

Un **sistema de ecuaciones lineales** con dos incógnitas tiene la forma:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Donde a, b, c, d, e y f son números racionales y x e y son las incógnitas.

Una **solución** al sistema corresponde a un valor para cada incógnita, de modo que al remplazarlas en las ecuaciones se satisfacen ambas igualdades.

Ejemplo 1

Catalina y Cristian preparan bombones de chocolate para vender. Para comprar todos los ingredientes disponen de $ 45 000. La materia prima necesaria para completar una caja grande les cuesta $ 500 y para una caja pequeña, $ 300. Si ambos quieren completar 100 cajas en total, ¿cuál es el sistema de ecuaciones que modela la situación descrita?

PASO A PASO

1. Defines las incógnitas.

   x: cantidad de cajas grandes. y: cantidad de cajas pequeñas.

2. Defines las ecuaciones.

   La materia prima para una caja grande (x) les cuesta $ 500, y para una caja pequeña (y) les cuesta $ 300. Además para comprar todos los ingredientes disponen de $ 45 000. Lo anterior se modela por la ecuación:
   $500x + 300y = 45\,000$.

   Además, en total quieren completar 100 cajas, es decir, la ecuación que lo modela es: $x + y = 100$

3. Planteas el sistema de ecuación:

$$\begin{aligned} 500x + 300y &= 45\,000 \\ x + y &= 100 \end{aligned}$$

Ejemplo 2

¿Cómo representarías gráficamente el sistema de ecuaciones?

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ 2y - x &= 3 \end{aligned}$$

PASO A PASO

1. Se registrarán en una tabla algunos valores para luego ubicarlos en el plano cartesiano.

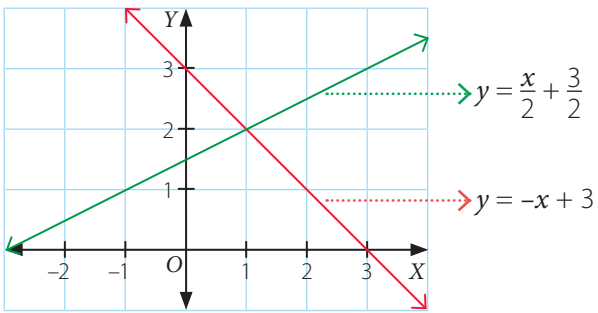
$x + y = 3 \blacktriangleright y = -x + 3$

x	y	(x, y)
0	3	(0, 3)
1	2	(1, 2)

$2y - x = 3 \blacktriangleright y = \frac{x}{2} + \frac{3}{2}$

x	y	(x, y)
–1	1	(–1, 1)
1	2	(1, 2)

2. En el plano cartesiano, se obtiene que:



Observando el gráfico se puede afirmar que su solución es $x = 1$, $y = 2$, ¿Por qué? Explica.

Atención

Para graficar una recta en el plano cartesiano, como mínimo necesitas 2 puntos.

Recursos Digitales Complementarios

RDC 5

Método de resolución: gráfico

Conceptos

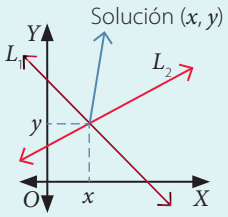
Para resolver **gráficamente** un sistema de ecuaciones lineales, se representan en el plano cartesiano las rectas correspondientes a cada ecuación. La solución del sistema, cuando existe y es única, será al punto de intersección de ambas rectas.

Al graficar el sistema de ecuaciones: $\begin{array}{l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}$.

Con a, b, c, d, e y f números racionales distintos de cero, se tienen 3 posibles casos:

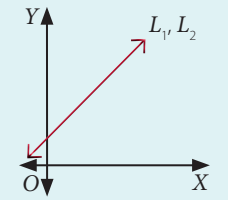
Caso 1. El sistema es **compatible**, es decir, tiene **una única solución** y es cuando las dos rectas son secantes. Además, se cumple que:

$$\frac{a}{d} \neq \frac{b}{e}$$



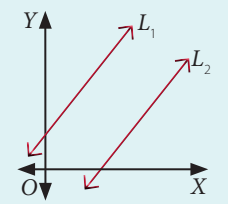
Caso 2. El sistema es **compatible indeterminado**, es decir, tiene **infinitas soluciones** y es cuando las dos rectas son coincidentes. Además, se cumple que:

$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f}$$



Caso 3. El sistema es **incompatible**, es decir, **no tiene solución**, y es cuando las dos rectas son paralelas no coincidentes. Además, se cumple que:

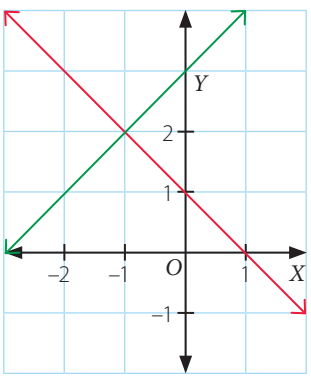
$$\frac{a}{d} = \frac{b}{e} \neq \frac{c}{f}$$



Ejemplo 3

¿Cuál es el punto de intersección entre las rectas L_1 y L_2?

Las rectas se intersecan en el punto (–1, 2), por lo tanto el sistema tiene solución única y es compatible.



Ejemplo 4

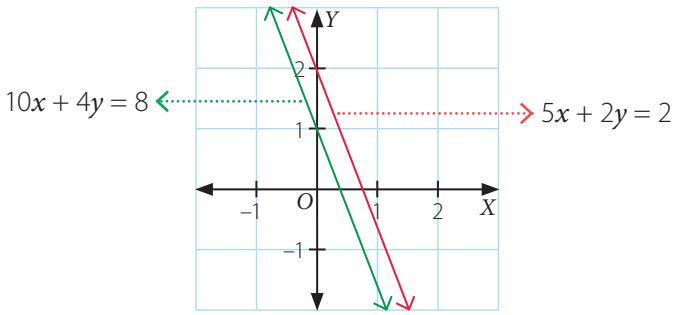
¿Cuál es la clasificación del sistema de ecuaciones? ¿Cuál es la gráfica que lo representa?

$$\begin{aligned} 5x + 2y &= 2 \\ 10x + 4y &= 8 \end{aligned}$$

PASO A PASO

1. Al calcular el cociente correspondiente, se tiene: $\frac{5}{10} = 0{,}5$; $\frac{2}{4} = 0{,}5$; $\frac{2}{8} = 0{,}25$, es decir, el sistema es incompatible.

2. Su gráfico representa a dos rectas paralelas no coincidentes.



Ejemplo 5

¿Cuál es el valor de k para que el sistema de ecuaciones tenga infinitas soluciones? ¿Cuál es su representación gráfica?

$$\begin{aligned} kx + 3y &= 1 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

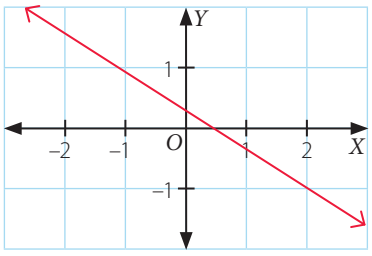
Para que el sistema tenga infinitas soluciones, se debe cumplir lo siguiente:

$$\frac{k}{2} = \frac{3}{3} = \frac{1}{1}$$

Luego $\frac{k}{2} = 1$, de donde se obtiene $k = 2$. El sistema de ecuaciones es

$$\begin{aligned} 2x + 3y &= 1 \\ 2x + 3y &= 1 \end{aligned}$$

Su representación gráfica corresponde a dos rectas coincidentes.



Si el sistema anterior es compatible, ¿cuál debe ser el valor de k?

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Representa gráficamente cada sistema de ecuaciones.

a. $\begin{aligned} 7x + 4y &= 1 \\ x + 2y &= 5 \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} x + 2y &= 1 \\ x &= 5 \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} 3x &= 4y + 1 \\ y &= 5 - x \end{aligned}$

d. $\begin{aligned} 2x + 3 &= 4y \\ x + 2y &= 5y \end{aligned}$

e. $\begin{aligned} 3(x + 3) &= 2(y + 5) \\ y + 5 - x &= 2x + 3y \end{aligned}$

f. $\begin{aligned} -3x - 4y &= -17 \\ -x + y &= -1 \end{aligned}$

2. Resuelve de manera gráfica cada sistema de ecuaciones.

a. $\begin{aligned} 3x + 2y &= 1 \\ 2x + 3y &= -1 \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} x + 5 &= 1 \\ y + 4 &= -1 \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} x &= -2y + 3 \\ 2 &= 3y - x \end{aligned}$

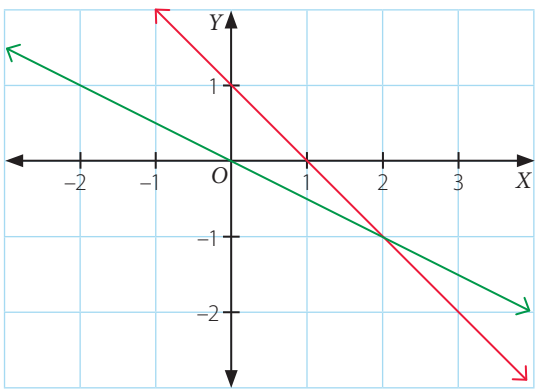
d. $\begin{aligned} x &= -2y \\ 0 &= y - x \end{aligned}$

e. $\begin{aligned} 2(y - 1) &= x \\ 2x - 4y &= 2 + x \end{aligned}$

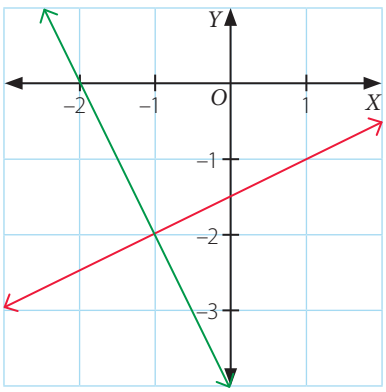
f. $\begin{aligned} 5(x + 1) &= 5(y + 1) \\ x + 5 + x &= y + 2 \end{aligned}$

3. Escribe el sistema de ecuaciones que se representó en cada caso.

a.



b.



4. Determina la restricción sobre k para que cada sistema de ecuaciones sea compatible.

a. $\begin{aligned} kx + 4y &= 1 \\ x + 2y &= 0 \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} 2x + ky &= 1 \\ 3x + 5y &= 2 \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} 4x + 2y &= -7 \\ 3x + ky &= 12 \end{aligned}$

d. $\begin{aligned} x + 2y &= 14 \\ kx + y &= -7 \end{aligned}$

5. Plantea un sistema de ecuaciones para cada problema.

a. La edad de un padre (x) y su hija (y) suman 77 años, y dentro de dos años la edad del padre será el doble de la de su hija. ¿Cuál es la edad del padre y su hija?

b. La diferencia de dos números es 85 y uno de ellos es 20 unidades más que el doble del otro. ¿Cuáles son los números?

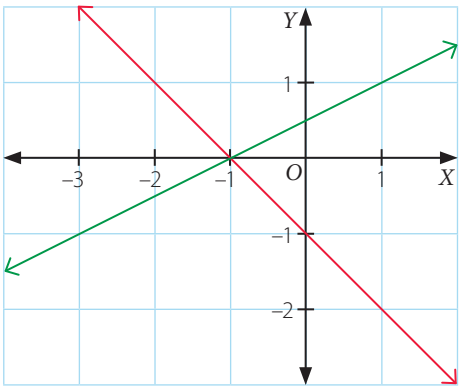
c. La suma de los ángulos de un paralelogramo es 360°. Si la diferencia de los ángulos consecutivos es 20°, determina el valor de cada ángulo.

d. Las edades de Andrés (x) y Luisa (y) suman 61 años. La edad de Luisa es 11 años más que la de Andrés. ¿Cuáles son las edades de cada uno?

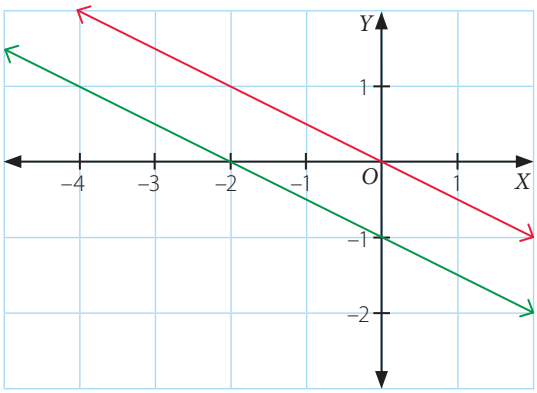
e. Julián (x) y Sebastián (y) tienen ahorrados $ 250 000 entre los dos. Si Julián ha ahorrado $ 70 000 más que Sebastián, ¿cuánto ha ahorrado cada uno?

6. Clasifica cada sistema de ecuaciones según las soluciones que tenga. Luego escribe el sistema de ecuaciones que lo representa.

a.



b.



Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Página 35

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Cómo resolviste de manera gráfica los sistemas de ecuaciones? Explica.

_____

_____

- Al plantear un sistema de ecuaciones para resolver un problema, ¿en qué te fijaste? ¿Cómo lo potenciarías? Justifica tu respuesta.

_____

_____

Método de resolución: igualación

Objetivo

- Utilizar los métodos de resolución de igualación, sustitución, reducción y Cramer para resolver problemas.

En economía se denomina punto de equilibrio a aquel donde coinciden las ecuaciones de las rectas de las ecuaciones de oferta y demanda.

Ecuación de la demanda. ▸ $2y - x = 8$

Ecuación de la oferta. ▸ $6y - 5x = 12$

¿Cuál es el punto de equilibrio?

- "Despeja" y en ambas ecuaciones y luego escríbelas.

Demanda

Oferta

- Iguala ambas ecuaciones y luego resuelve.

- Comprueba la solución obtenida y luego responde la pregunta planteada.

Respuesta ▸ _____

_____

_____

- Para resolver sistemas de ecuaciones existen diferentes métodos. A continuación, se formaliza el método de igualación.

Conceptos

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas por el **método de igualación**, considera:

1° "Despejas" la misma incógnita en las dos ecuaciones.

2° Igualas las expresiones obtenidas en el primer paso y "despejas" la incógnita restante.

3° Determinas el valor de la otra incógnita remplazando en alguna de las ecuaciones "despejadas" el valor de la incógnita calculada anteriormente.

4° Verificas las soluciones.

Ejemplo 1

Resuelve utilizando el método de igualación el sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned} 3x - 5y &= 3 \\ 5x - 3y &= 7 \end{aligned}$$

Luego represéntala gráficamente identificando el punto de intersección.

PASO A PASO

1. De ambas ecuaciones, "despejas" y.

❶ $3x - 5y = 3 \blacktriangleright y = \frac{3}{5}x - \frac{3}{5}$ ❷ $5x - 3y = 7 \blacktriangleright y = \frac{5}{3}x - \frac{7}{3}$

2. Al igualar y resolver las ecuaciones ❶ y ❷ obtienes:

$$\frac{3}{5}x - \frac{3}{5} = \frac{5}{3}x - \frac{7}{3} \quad / \cdot 15 \blacktriangleright 9x - 9 = 25x - 35 \blacktriangleright x = \frac{13}{8}$$

3. Para calcular el valor de y remplazas $x = \frac{13}{8}$ en la ecuación ❶ o ❷, y luego resuelves.

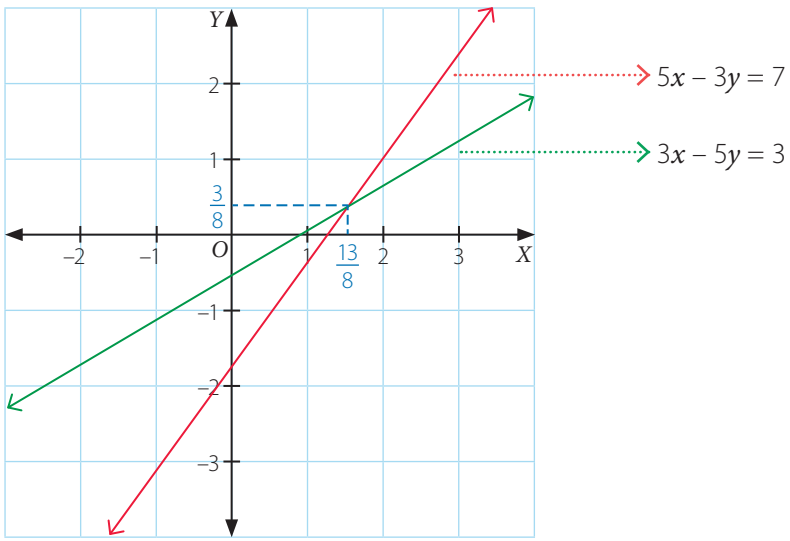
$$y = \frac{3}{5}\left(\frac{13}{8}\right) - \frac{3}{5} \blacktriangleright y = \frac{39}{40} - \frac{3}{5} \blacktriangleright y = \frac{3}{8}$$

4. Compruebas las soluciones remplazando las soluciones en las ecuaciones iniciales.

En $3x - 5y = 3$ se tiene: $3\left(\frac{13}{8}\right) - 5\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{39}{8} - \frac{15}{8} = \frac{24}{8} = 3$, se mantiene la igualdad.

En $5x - 3y = 7$ se tiene: $5\left(\frac{13}{8}\right) - 3\left(\frac{3}{8}\right) = \frac{65}{8} - \frac{9}{8} = \frac{56}{8} = 7$, se mantiene la igualdad.

Respuesta: La solución al sistema de ecuaciones es $x = \frac{13}{8}$, $y = \frac{3}{8}$. Su representación gráfica es



Atención

Para **resolver una ecuación con coeficientes fraccionarios** puedes calcular el mínimo común múltiplo (mcm) entre los denominadores y multiplicar cada término de la ecuación por dicho número para dejar los coeficientes enteros y resuelves. Luego, si es el caso, simplificas hasta obtener una fracción irreducible.

Método de resolución: sustitución

Conceptos

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas por el **método de sustitución**, considera:

1° "Despejas" una de las incógnitas en cualquiera de las ecuaciones dadas.

2° Remplazas la expresión obtenida en la otra ecuación del sistema y resuelves.

3° Remplazas la solución de la ecuación en una de las ecuaciones del sistema y resuelves para la incógnita restante.

4° Verificas las soluciones.

Ejemplo 2

¿Cuál es la medida de dos ángulos complementarios si la medida del ángulo mayor excede la medida del ángulo menor en 40°?

1 Plantearás la ecuación que modela la situación del problema y luego resolverás utilizando el método de sustitución.

Defines las incógnitas:

x: Medida del ángulo mayor. y: Medida del ángulo menor.

El sistema de ecuaciones es:

❶ $x + y = 90°$ ⟶ La suma de dos ángulos complementarios es de 90°.

❷ $x = y + 40°$ ⟶ La medida del ángulo mayor excede la medida del ángulo menor en 40°.

PASO A PASO

2 Al plantear el sistema de ecuaciones, la incógnita x está "despejada" en la ecuación ❷, por lo tanto remplazas esta incógnita en la ecuación ❶.

$x + y = 90° \blacktriangleright (y + 40°) + y = 90° \blacktriangleright 2y + 40° = 90° \blacktriangleright y = 25°$

3 Remplazas $y = 25°$ en la ecuación ❷, de donde obtienes, $x = 25° + 40° = 65°$.

4 Compruebas las soluciones remplazando las soluciones en las ecuaciones iniciales.

En $x + y = 90°$, tienes $65° + 25° = 90°$.

En $x = y + 40°$, tienes $65° = 25° + 40°$.

Respuesta: La solución al sistema de ecuaciones es $x = 65°$, $y = 25°$, es decir, la medida de los ángulos es de 65° y 25°, respectivamente.

Habilidad

Cuando usas lenguaje funcional para resolver problemas estás utilizando la habilidad de **modelar**.

Método de resolución: reducción

Conceptos

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas por el **método de reducción**, considera:

1° Multiplicas una o ambas ecuaciones del sistema por números tales que para una de las incógnitas obtienes coeficientes numéricos que son inversos aditivos o son iguales.

2° Sumas o restas ambas ecuaciones, de manera que quede una ecuación con una incógnita.

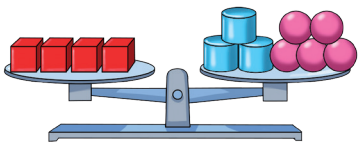
3° Resuelves la ecuación con una incógnita que resulta del paso anterior.

4° Remplazas la solución de la ecuación en una de las ecuaciones del sistema y resuelves la ecuación obtenida para la incógnita restante. Luego verificas las soluciones.

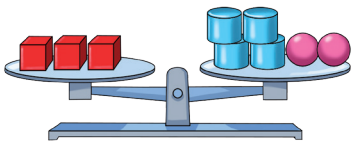
Ejemplo 3

Las balanzas se encuentran formadas por cubos de igual masa, cilindros de igual masa y esferas de igual masa.

Balanza 1



Balanza 2



Si se sabe que la masa de cada esfera es igual a 1 kg, ¿cuál es la masa de los otros cuerpos geométricos?

PASO A PASO

1 Para plantear el sistema de ecuaciones, defines las incógnitas.

a: Masa en kg del  . b: Masa en kg del  .

2 Planteas las ecuaciones para cada balanza.

Balanza 1 $4a = 3b + 5 \blacktriangleright 4a - 3b = 5$

Balanza 2 $3a = 4b + 2 \blacktriangleright 3a - 4b = 2$

El sistema es $\begin{array}{l} 4a - 3b = 5 \\ 3a - 4b = 2 \end{array}$

3 Resuelves el sistema multiplicando la primera ecuación por 3 y la segunda por –4.

$\begin{array}{l} 4a - 3b = 5 \quad / \cdot 3 \\ 3a - 4b = 2 \quad / \cdot -4 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{r} 12a - 9b = 15 \\ -12a + 16b = -8 \end{array}$ Sumas ambas ecuaciones. $7b = 7 \blacktriangleright b = 1$

4 Al remplazar $b = 1$ en la ecuación que representa la balanza 1, obtienes:

$4a = 3b + 5 \blacktriangleright 4a = 3(1) + 5 \blacktriangleright 4a = 8 \blacktriangleright a = 2.$

5 Al comprobar las soluciones, tienes que la solución al sistema de ecuaciones es $a = 2$, $b = 1$.

Respuesta: La masa del  es 2 kg y la del  es 1 kg.

Actitud

Aborda de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas.

Método de resolución: Cramer

Conceptos

Para resolver un sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas de la forma:

$$\begin{array}{|l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}$$ Donde a, b, c, d, e y f son números racionales y x e y son incógnitas.

Utilizando el **método de Cramer** se calcula el determinante (Δ) del sistema y el que se relaciona con cada incógnita. Luego se calcula la solución del sistema.

Determinante del sistema	Determinante de la incógnita x	Determinante de la incógnita y
$\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix} = ae - bd$	$\Delta_x = \begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix} = ce - bf$	$\Delta_y = \begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix} = af - cd$

La solución del problema se obtiene calculando: $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta}$.

Para obtener el valor de las incógnitas x e y es necesario que $\Delta \neq 0$.

Ejemplo 4

Resuelve utilizando el método de Cramer el sistema de ecuaciones.

$$\begin{array}{|l} 2x - 7y = 2(y + 4) \\ 2(y - 4x) = 3(x + 5) \end{array}$$

PASO A PASO

1. Se expresarán las ecuaciones en la forma $\begin{array}{|l} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{array}$ y luego se resolverá utilizando el método de Cramer.

$2x - 7y = 2(y + 4) \blacktriangleright 2x - 7y = 2y + 8 \blacktriangleright 2x - 9y = 8$

$2(y - 4x) = 3(x + 5) \blacktriangleright 2y - 8x = 3x + 15 \blacktriangleright -11x + 2y = 15$

$$\Rightarrow \begin{array}{|l} 2x - 9y = 8 \\ -11x + 2y = 15 \end{array}$$

2. Los determinantes a calcular son:

Determinante del sistema: $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -9 \\ -11 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - (-11) \cdot (-9) = -95.$

Determinante para x: $\Delta_x = \begin{vmatrix} 8 & -9 \\ 15 & 2 \end{vmatrix} = 8 \cdot 2 - (15) \cdot (-9) = 151.$

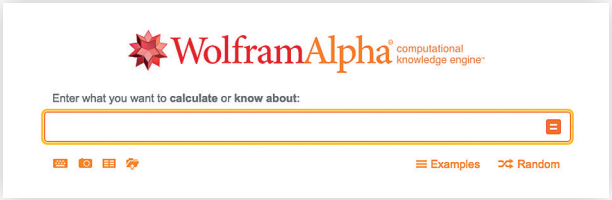
Determinante para y: $\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 8 \\ -11 & 15 \end{vmatrix} = 2 \cdot 15 - (-11) \cdot 8 = 118.$

3. Utilizando el método de Cramer, se tiene $x = \dfrac{\Delta_x}{\Delta} = -\dfrac{151}{95}$, $y = \dfrac{\Delta_y}{\Delta} = -\dfrac{118}{95}$.

4. Luego de comprobar las soluciones, se tiene que la solución al sistema de ecuaciones es $x = -\dfrac{151}{95}$, $y = -\dfrac{118}{95}$.

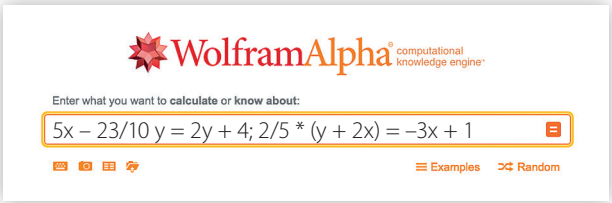
Herramientas tecnológicas

Otra manera de resolver un sistema de ecuaciones es utilizando algún *software* educativo o página web. En particular, utilizando el programa WolframAlpha podrás resolver los sistemas de manera más rápida. Al ingresar a *https://www.wolframalpha.com/*, te encontrarás con lo siguiente:

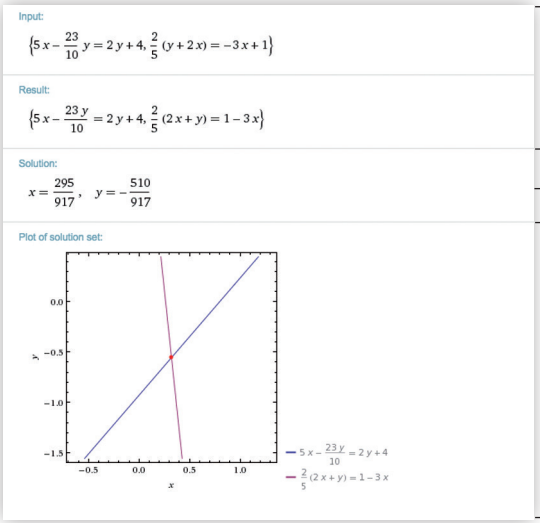


Por ejemplo, para resolver el sistema planteado tecleas lo que se muestra:

$$\begin{cases} 5x - \frac{23}{10}y = 2y + 4 \\ \frac{2}{5}(y + 2x) = -3x + 1 \end{cases}$$



Luego haces clic en , o simplemente presionas *enter* en el computador.



Sistema de ecuaciones representado de diferentes maneras.

Solución del sistema de ecuaciones.

Solución gráfica del sistema de ecuaciones.

Atención

Para anotar las ecuaciones utilizando este programa, puedes separarlas utilizando "," o ";". Además, para anotar los números decimales en lugar de "," debes anotar ".". Por ejemplo, para 1,1 escribes 1.1.

Utiliza lo anterior y resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones.

a. $\begin{cases} 2(y + 3x) = -5(x + y) \\ -5x + 3y = 5x - 7 + y \end{cases}$

b. $\begin{cases} 0{,}4(y - 1) = -0{,}5x + 2 \\ -1{,}5x + 0{,}3y = 7{,}4 \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2{,}1x + 0{,}4y + 3{,}2 = -0{,}1x + 2{,}3y \\ -0{,}2(x + 1{,}3y) = 5(x + y) - 2{,}8 \end{cases}$

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Resuelve cada sistema de ecuaciones utilizando el método que estimes conveniente.

a. $\begin{aligned} 5x - 4y &= -2 \\ -2x + 2y &= 5 \end{aligned}$

b. $\begin{aligned} x - 2y &= 1 - x \\ x - 7 &= 5 + 2y \end{aligned}$

c. $\begin{aligned} 2{,}5x &= 4{,}1y + 0{,}1 \\ -2{,}3y &= 1 - x \end{aligned}$

d. $\begin{aligned} \frac{1}{4}(x + 3) &= 4y \\ 3x + 2y &= 5(y + 1) \end{aligned}$

e. $\begin{aligned} 2x - 3 &= \frac{2}{3}(y + 5) \\ 4y + 5 - 2x &= x + 3y \end{aligned}$

f. $\begin{aligned} y &= 3(x - 1) + 5 \\ x &= y + 3(x - 4) \end{aligned}$

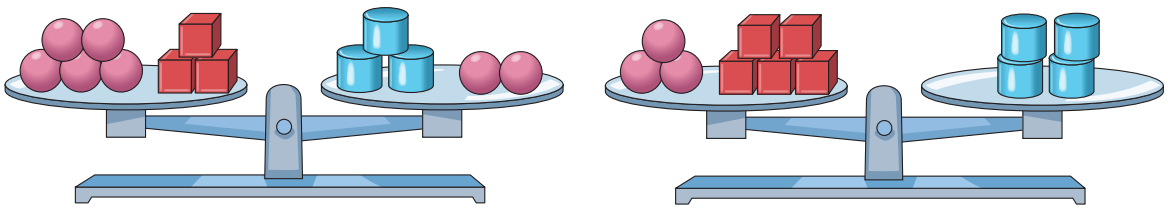
g. $\begin{aligned} 2(x + 4y) &= -1 \\ -5x + 3y &= 5 \end{aligned}$

h. $\begin{aligned} \frac{2}{5}(x - 1) &= y \\ 7x + y &= y - 1 \end{aligned}$

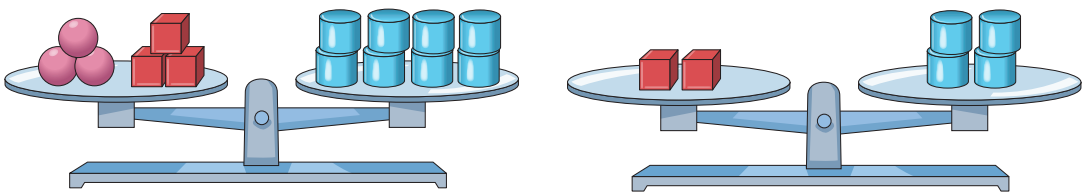
i. $\begin{aligned} 4x - 2y + 5 &= -3(y + x) \\ -x + 4y - 7x &= 5(y + 2) \end{aligned}$

2. Las balanzas se encuentran formadas por cubos de igual masa, cilindros de igual masa y esferas de igual masa. Plantea el sistema de ecuaciones que corresponde a cada situación y luego resuelve.

a. Si cada esfera tiene una masa de 1 kg, ¿cuánto es la masa de cada cubo y cilindro?



b. Si cada esfera tiene una masa de 0,5 kg, ¿cuánto es la masa de cada cubo y cilindro?



3. Determina los valores de A y B para que el par ordenado sea solución del sistema de ecuaciones lineales.

a. (–2, –1)

$\begin{aligned} Ax + By &= -8 \\ 3Ax - 5By &= 8 \end{aligned}$

b. (3, 2)

$\begin{aligned} Ax + By &= 24 \\ -Ax + 7By &= 30 \end{aligned}$

c. (–6, 3)

$\begin{aligned} 5Ax + 2By &= -66 \\ 2Ax + 5By &= 24 \end{aligned}$

d. (–1, –2)

$\begin{aligned} 3Ax + 5By &= -8 \\ 7Ax - 4By &= 1 \end{aligned}$

e. (3, 1)

$\begin{aligned} 3Ax - 2By &= 7 \\ 2Ax + 5By &= 11 \end{aligned}$

f. (2, 1)

$\begin{aligned} 2Ax - By &= 3 \\ Ax + 2By &= 4 \end{aligned}$

4. Ciencias La rapidez v de un automóvil de carrera en función del tiempo t, se determina con la expresión: $v(t) = v_0 + at$, donde v_0 es la rapidez inicial y a es la aceleración. Si la rapidez se mide en m/s, el tiempo en s y se cumple con las condiciones: $v(5) = 20$ y $v(9) = 28$, ¿cuál será la rapidez inicial y la aceleración con la que se desplaza ese automóvil?

5. Resuelve los siguientes problemas.

a. La diferencia de dos números es 126 y uno de ellos es 14 unidades menos que el triple del otro. ¿Cuáles son los números?

b. El perímetro de un triángulo isósceles es de 97 cm. La medida de cada uno de los lados iguales excede en 11 cm la medida del lado diferente. ¿Cuáles son las medidas de los lados?

c. Las edades de Gaspar y Paula suman 68. La edad de Gaspar excede en 5 años el doble de la edad de Paula. Señala las edades de ambos.

d. Entre Manuel y Alberto han ganado $ 126 000 en un casino de juegos. Manuel ganó $ 25 000 más que Alberto. ¿Cuánto dinero ganó cada uno?

e. En un condominio hay 104 apartamentos repartidos en dos edificios. Si en el primer edificio hay 8 apartamentos más que en el segundo, ¿cuántos apartamentos hay en cada edificio?

6. Junto con un compañero escriban dos problemas que tengan sentido y que puedan resolver con el siguiente sistema de ecuaciones. Luego, resuélvanlo utilizando dos métodos diferentes.

$$\begin{aligned} x + y &= 8 \\ 10y + x &= 35 \end{aligned}$$

7. Ubica en el plano cartesiano los puntos $A(-1, 0)$, $B(2, 3)$, $C(-2, 2)$ y $D(3, 1)$, traza las rectas $\overleftrightarrow{AB}$ y $\overleftrightarrow{CD}$ y luego responde.

a. ¿Cuál es el sistema de ecuaciones que representa la situación?

b. ¿Cuáles son las coordenadas del punto de intersección?

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 36 - 39

Reflexiona sobre tu trabajo

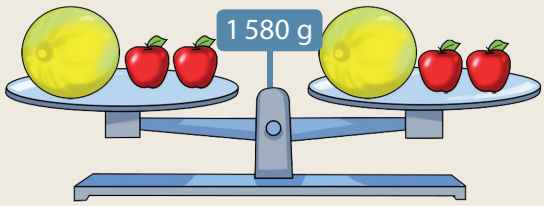
- De los métodos de resolución estudiados, ¿prefieres uno por sobre otro? ¿Por qué? Explica.

- Al modelar problemas utilizando sistemas de ecuaciones, ¿qué método prefieres utilizar para resolverlos? ¿Por qué? Explica.

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 3

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

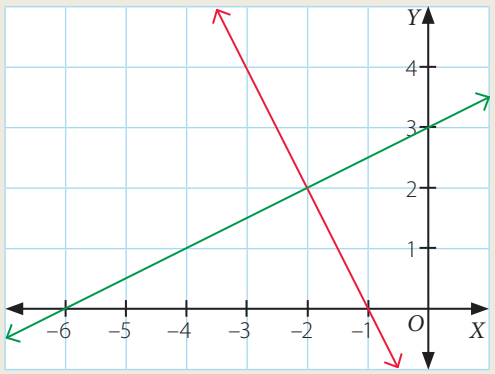
1. La balanza se encuentra equilibrada y en ella se han puesto manzanas de igual masa (x) y melones de igual masa (y). (3 puntos cada uno)



a. Escribe la ecuación en la forma $ax + by = c$ y en la forma $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$, que representa la situación anterior.

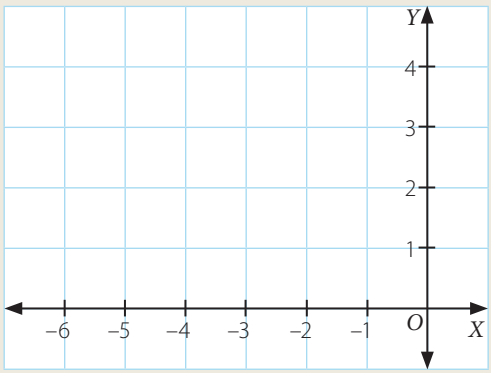
b. Suponiendo que la masa de 1 manzana es de 180 g, ¿cuál es la masa de 1 melón?

2. Escribe el sistema de ecuaciones representado en el plano. (3 puntos)



3. Representa el sistema de ecuaciones en el plano cartesiano. (3 puntos)

$$\begin{aligned} x + y &= 1 \\ -x + y &= 5 \end{aligned}$$



4. Resuelve cada sistema de ecuaciones utilizando el método que estimes conveniente. (2 puntos cada uno)

a. $\begin{array}{r} 4x - y = -2{,}1 \\ -x + 2y = \ \ 0{,}5 \end{array}$

b. $\begin{array}{r} 2x = 0{,}1y + 1 \\ -2y = 3 - 2x \end{array}$

5. Resuelve el siguiente problema. (2 puntos)

Para producir leche semidescremada, se mezclan dos tipos de leche: una con 20 % de grasa y otra con 70 % de grasa. ¿Cuántos litros de cada tipo de leche se necesitan para producir 200 L de leche con 40 % de grasa?

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1	Resuelven y representan ecuaciones lineales de la forma $ax + by = c$ en ecuaciones de la forma $y = \frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$.		**Logrado:** 11 puntos o más. **Medianamente logrado:** 9 a 10 puntos. **Por lograr:** 8 puntos o menos.
2 y 3	Representan sistemas de ecuaciones lineales de distintas maneras.		
4 y 5	Resuelven sistemas de ecuaciones lineales.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Has cumplido las metas que te propusiste al iniciar este tema? Explica.

- ¿Cómo resolverías las posibles dificultades que tuviste al resolver un sistema de ecuaciones? Explica.

Tema 4 Relación entre dos variables

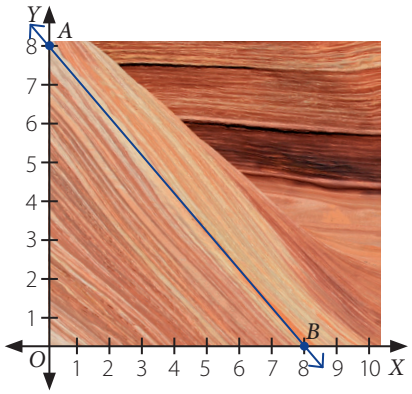
En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 4.

Recuerdo lo que sé

1. Interpreta la siguiente información y luego responde.

Existen formaciones geológicas que tienen características que se pueden estudiar considerando una parte que la represente. En particular, la imagen que se muestra corresponde a una formación de roca arenisca en "North Coyote Buttes" en Arizona, (Estados Unidos).

En el plano cartesiano se representa con una recta $\overleftrightarrow{AB}$ parte de la roca arenisca, la que se relaciona con una línea recta.



a. Escribe las coordenadas de los puntos en los cuales la recta corta a cada eje.

Eje X ▸ ____ Eje Y ▸ ____

b. Escribe la pendiente (m) y el coeficiente de posición (n) de la recta. Luego explica con qué representación del plano la relacionas.

$m =$ ▸ ____ $n =$ ▸ ____

c. Remarca la función que se relaciona con parte de la roca arenisca. Luego explica tu elección y el tipo de función que es.

$g: C \to D: g(x) = x - 8$ $h: E \to F: h(x) = -x + 8$

Una **función** f de un conjunto A en un conjunto B ($f: A \to B$) es una relación que asocia a cada elemento x de A un único elemento y de B.

Conjunto de partida ↑ $f: A \to B$ → Conjunto de llegada

$x \to y = f(x)$

↓ Preimagen ↓ Imagen

Una **función lineal** tiene la forma:

$$f(x) = mx,\ m \neq 0$$

Una **función afín** tiene la forma:

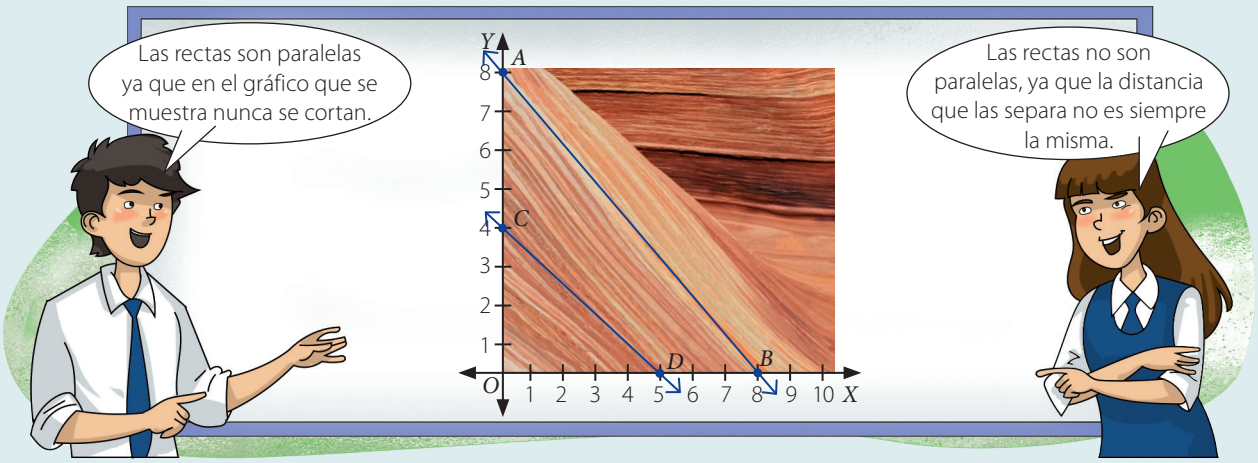
$$f(x) = mx + n,\ m \neq 0,\ n \neq 0$$

m es la pendiente y n es el coeficiente de posición.

Diseño mi estrategia

2. Analiza la siguiente situación y plantea una estrategia para desarrollar la actividad.

a. Para determinar si se cumple que la recta $\overleftrightarrow{AB}$ es paralela a la recta $\overleftrightarrow{CD}$, Emilio y Constanza afirman lo siguiente:



¿Con quién estás de acuerdo? Idea y explica tu estrategia para determinar si dichas rectas son o no paralelas.

Respuesta ▸ _____

_____

Mi estrategia ▸ _____

_____

b. Comenta tus estrategias con un compañero. Luego escribe lo que te sirvió para mejorar la tuya.

_____

_____

_____

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿En qué otra situación crees que se utilicen las funciones lineal y afín? Explica.

  _____

- ¿Qué dificultades tuviste para responder las preguntas anteriores? ¿Cómo podrías resolverlas?

  _____

- ¿Respetaste los aportes de tus compañeros para desarrollar estas actividades? Explica.

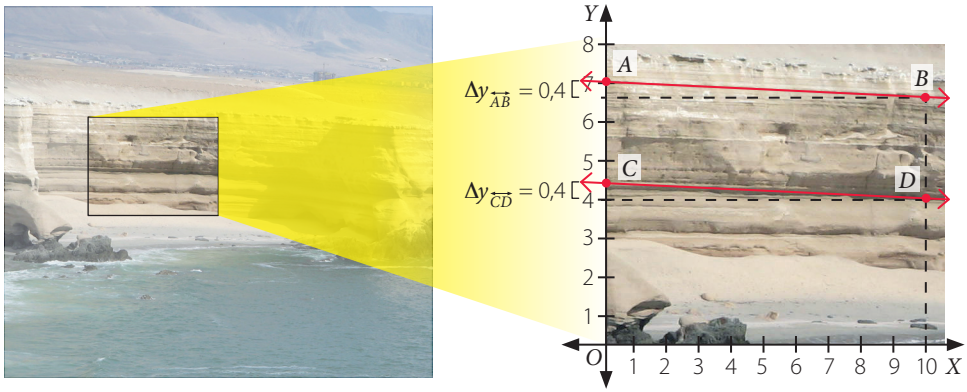
  _____

Relaciones lineales de la forma $f(x, y) = ax + by$

Objetivos

- Comprender una relación lineal de dos variables.
- Resolver problemas que se modelan con una relación lineal de dos variables.

Antofagasta es una de las regiones que forman parte de nuestro país. En ella se pueden apreciar variadas formas geográficas que se destacan por sus llamativas características. En particular el farellón costero de Antofagasta, del que se ha considerado una parte y se ha representado en un plano cartesiano.



Conexión con Geografía

En algunas partes del norte de Chile, la cordillera de la Costa cae en forma abrupta al mar, formando acantilados, lo que da origen al farellón costero.

- Para calcular la pendiente de cada recta, completa con las cantidades que correspondan.

$$m_{\overrightarrow{AB}} = \frac{\Delta y_{\overrightarrow{AB}}}{10} = \square \qquad m_{\overrightarrow{CD}} = \frac{\Delta y_{\overrightarrow{CD}}}{10} = \square$$

- Remarca la ecuación que representa a la recta $\overrightarrow{AB}$.

$y = -0{,}04x - 7$ | $y = -0{,}04x + 7$ | $y = 0{,}04x - 7$ | $y = 0{,}04x + 7$

- Determina la ecuación de la recta $\overrightarrow{CD}$ y luego explica cómo la determinaste.

Explicación ▸ _____

Atención

La pendiente de una recta $\overrightarrow{AB}$ corresponde a la razón entre la variación vertical ($\Delta y_{\overrightarrow{AB}}$) y la variación horizontal ($\Delta x_{\overrightarrow{AB}}$), es decir, $m_{\overrightarrow{AB}} = \frac{\Delta y_{\overrightarrow{AB}}}{\Delta x_{\overrightarrow{AB}}}$.

Conceptos

Una **relación lineal de dos variables** se puede representar con una expresión de la forma:

$$f(x, y) = ax + by, \text{ con } a, b \in \mathbb{Q}$$

Si $c = f(x, y)$, esta expresión se relaciona con una **ecuación lineal en dos incógnitas** de la forma:

$$ax + by = c, \text{ con } c \in \mathbb{Q}$$

Ejemplo 1

Si $f(x, y) = \frac{3}{5}x - 0{,}2y$, y además $f(x, y) = 5$, ¿se cumple que $f(5, 20)$ es igual a 5?

Al valorizar la expresión, se tiene:

$$\begin{aligned} f(5, 20) &= \frac{3}{5} \cdot 5 - 0{,}2 \cdot 20 \\ &= \frac{15}{5} - 4 \\ &= -1 \end{aligned}$$

Respuesta: No se cumple que $f(5, 20)$ es igual a 5.

Ejemplo 2

Se tiene la relación entre dos variables representada por la expresión.

$$f(x, y) = 0{,}9x + 5y$$

Construye una tabla de valores para x e y.

Se registrarán en una tabla distintos valores para x e y.

x	y	$f(x, y) = 0{,}9x + 5y$
–2	4	$0{,}9 \cdot (-2) + 5 \cdot 4 = 18{,}2$
5	–2,1	$0{,}9 \cdot 5 + 5 \cdot (-2{,}1) = -6$
0	0	$0{,}9 \cdot 0 + 5 \cdot 0 = 0$
1	1	$0{,}9 \cdot 1 + 5 \cdot 1 = 5{,}9$

x	y	$f(x, y) = 0{,}9x + 5y$
–2	–3	$0{,}9 \cdot (-2) + 5 \cdot (-3) = -16{,}8$
0	–0,4	$0{,}9 \cdot 0 + 5 \cdot (-0{,}4) = -2$
10	5,2	$0{,}9 \cdot 10 + 5 \cdot 5{,}2 = 35$
3	4,1	$0{,}9 \cdot 3 + 5 \cdot 4{,}1 = 23{,}2$

Ejemplo 3

Considerando $f(x, y) = 2x + 5y$, tal que $f(x, y) = 5$, ¿qué expresión de la forma $y = mx + n$ representa esta relación?

Se sabe que $f(x, y) = 2x + 5y$, y además $f(x, y) = 5$, se tiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} 2x + 5y &= 5 \\ 5y &= -2x + 5 \\ y &= -\frac{2}{5}x + 1 \end{aligned}$$

Respuesta: La expresión es $y = -\frac{2}{5}x + 1$.

Ejemplo 4

En la expresión $f(x, y) = 5x + 3y$ y considerando que $f(x, y) = 9$, ¿cuál es la pendiente y coeficiente de posición de la recta que representa dicha relación entre x e y?

De lo anterior se tiene la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned} 5x + 3y &= 9 \\ 3y &= -5x + 9 \\ y &= -\frac{5}{3}x + 3 \end{aligned}$$

Respuesta: La pendiente de la recta es $-\frac{5}{3}$ y el coeficiente de posición es 3.

Atención

En una ecuación de la forma:

$$ax + by = c$$

con $a, b, c \in \mathbb{Q} - \{0\}$, el cociente $-\frac{a}{b}$ se relaciona con la pendiente de la recta.

Habilidad

Al explicar una solución y el procedimiento utilizado para hallarla, estás desarrollando la habilidad de **argumentar y comunicar**.

Conceptos

Una **relación lineal de dos variables** de la forma $f(x, y) = ax + by$, con $a, b \in \mathbb{Q}$ y $f(x, y) = c$, con $c \in \mathbb{Q}$ se puede graficar con una recta en el plano cartesiano.

Ejemplo 5

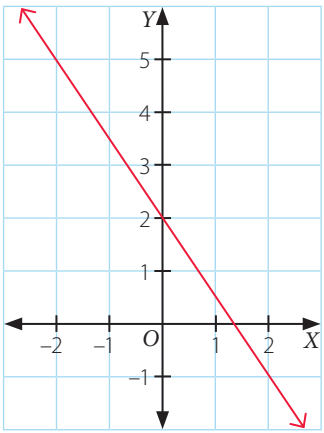
Si $f(x, y) = 4$, y además $f(x, y) = 3x + 2y$, ¿cuál es la gráfica asociada?

Una manera de construir la gráfica es representar la expresión en la forma $y = mx + n$ para luego construir una tabla y graficarla:

$f(x, y) = 4 \blacktriangleright 3x + 2y = 4$

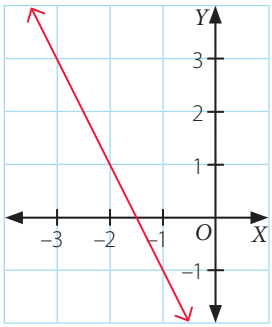
$\blacktriangleright y = -1{,}5x + 2$

x	$y = -1{,}5x + 2$
–2	5
–1	3,5
0	2
1	0,5
2	–1



Ejemplo 6

En el plano cartesiano se ha representado la relación $f(x, y) = ax + by$ con la condición que $f(x, y) = 5$, ¿cuáles son los valores de a y b?



PASO A PASO

1. Del gráfico se deduce que pasa por los puntos (–3, 3) y (–2, 1), por lo que se puede formar un sistema de ecuaciones, es decir:

$f(-3, 3) = 5 \blacktriangleright -3a + 3b = 5 \quad f(-2, 1) = 5 \blacktriangleright -2a + b = 5$

2. El sistema de ecuaciones es: $\begin{matrix} -2a + b = 5 \\ -3a + 3b = 5 \end{matrix}$

3. Para resolverlo se puede aplicar cualquier método. En particular, utilizando el método de Cramer, se tiene:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = -3 \qquad \Delta_a = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 10 \qquad \Delta_b = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 5$$

Respuesta: Los valores son $a = -\frac{10}{3}$ y $b = -\frac{5}{3}$, es decir, se tiene que $-\frac{10}{3}x - \frac{5}{3}y = 5$.

¿Cómo resolverías el problema anterior sin utilizar sistemas de ecuaciones?

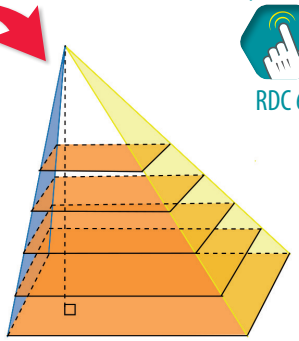
Ejemplo 7

Resuelve el siguiente problema.

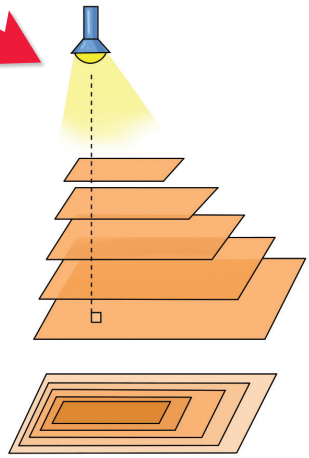
Recursos Digitales Complementarios

RDC 6

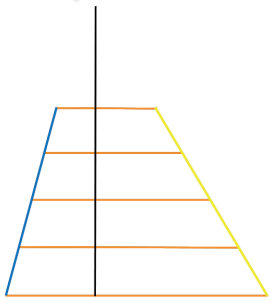
1 En una pirámide de base rectangular se han realizado diferentes cortes de forma transversal y paralela a su base, todos separados a la misma distancia.



2 Un estudiante representa lo anterior utilizando micas transparentes de forma rectangular y para ver cómo se aprecia la vista superior reflejada en un plano, la ilumina desde lo alto.



3 Finalmente, el estudiante utiliza otras 2 micas de color azul y amarillo, las apoya en los costados y marca con un plumón los segmentos de línea (líneas de nivel) en los que se apoya, como se muestra.



- En 2, ¿qué representa el rectángulo más oscuro reflejado en el plano?

  Respuesta: El rectángulo más oscuro representado en el plano corresponde al que se encuentra más cercano a la linterna, es decir, el que se encuentra en la parte superior.

- En 3, en las micas de color azul y amarillo, ¿cómo se relacionan los segmentos de línea dibujados?

  Respuesta: Los segmentos de líneas pintados en la mica de color azul son todos paralelos y se encuentran cercanos uno del otro, de igual manera los segmentos de líneas pintados en la mica de color amarillo son paralelos y la distancia que las separa es mayor que la distancia que separa los segmentos de línea en la mica de color amarillo.

¿Qué puedes concluir de las pendientes relacionadas con las micas de color azul y amarillo? Justifica tu respuesta.

Atención

Una **línea de nivel** es la línea que representa en un plano o mapa aquellos puntos que tienen la misma altura respecto de un plano de referencia.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Completa la tabla con los valores que correspondan.

a.

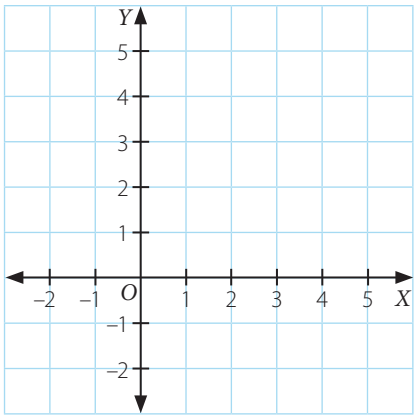
x	y	$f(x, y) = 4x + 2y$
–3	2	
7	4	
2	–5	

b.

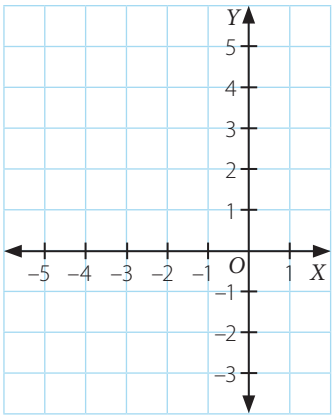
x	y	$f(x, y) = -0{,}1x + 2y$
3	–0,5	
	1,3	2
	–2,1	4

2. Representa cada gráfica en el plano cartesiano según la información entregada.

a. Si $f(x, y) = 3$, y $f(x, y) = x + y$.

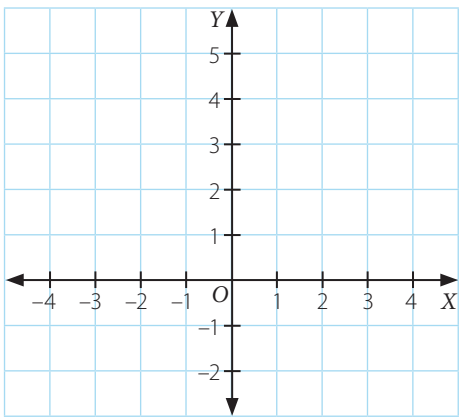


b. Si $f(x, y) = 2$, y $f(x, y) = -x + 2y$.

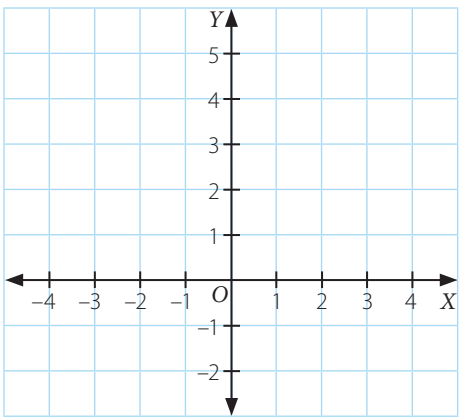


3. Grafica la recta que pasa por cada par de puntos P y Q, luego determina la ecuación de la recta que pasa por dichos puntos y grafica 2 rectas que sean paralelas.

a. $P(-1, 2)$ y $Q(1, 3)$



b. $P(-2, 1)$ y $Q(1, -1)$



4. Determina la relación lineal de la forma $f(x, y) = ax + by$ que se representa en cada tabla.

a.

x	y	$f(x, y) = 7$
1	–5	7
0	–3,5	7

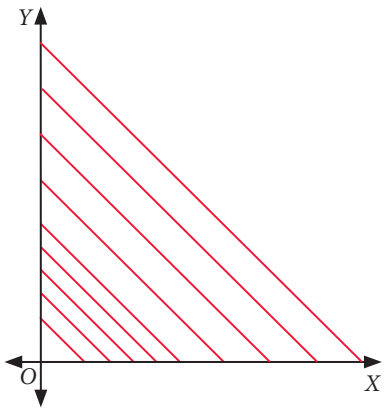
b.

x	y	$f(x, y) = 5$
–2	–3	5
–0,25	4	5

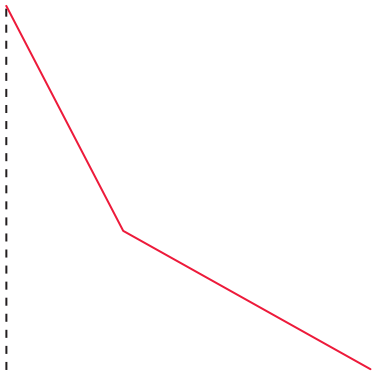
5. Junto con un compañero o una compañera y considerando la información del recuadro, responde.

En el plano cartesiano se muestran las proyecciones de líneas de nivel que resultan de una proyección vertical de la unión de dos techos con diferentes inclinaciones.

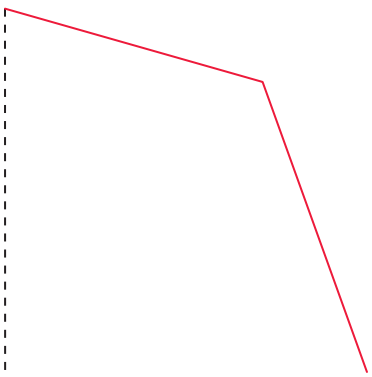
Proyecciones de las líneas de nivel



Perfil del techo A



Perfil del techo B



a. Determina qué perfil de techo corresponde a dicha proyección.

b. ¿Qué puedes concluir respecto de la relación entre las proyecciones de las líneas de nivel en el plano con la pendiente del techo? Argumenten sus respuestas.

6. Resuelve los siguientes problemas.

a. Si $f(x, y) = 10x - 3y$, además $f(x, y) = 2$, ¿se cumple que $f(2, 3)$ es igual a 10? Explica.

b. En una relación lineal de dos variables de la forma $f(x, y) = ax + by$ se sabe que $f(x, y) = 3$ y que la gráfica pasa por los puntos $P(-5, -1)$ y $Q(-1, 1)$, ¿cuáles son los valores de a y b?

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Página 40

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Te fue útil el estudio de los sistemas de ecuaciones para desarrollar este tema? Explica.

- ¿Trabajaste en equipo en forma responsable y proactiva? ¿Respetaste la opinión de tus compañeros? Explica.

Variación de parámetros

Objetivo

- Aplicar la variación de parámetros en expresiones de la forma $ax + by = c$, con $a, b, c \in \mathbb{Q}$.

Se tiene una ecuación lineal de dos variables de la forma $0{,}5x + y = c$, donde $c \in \mathbb{Q}$.

- Completa cada tabla según sea el valor dado para c.

a.

$0{,}5x + y = -1$	
x	y
–5	
–2	
0	
2	
4	

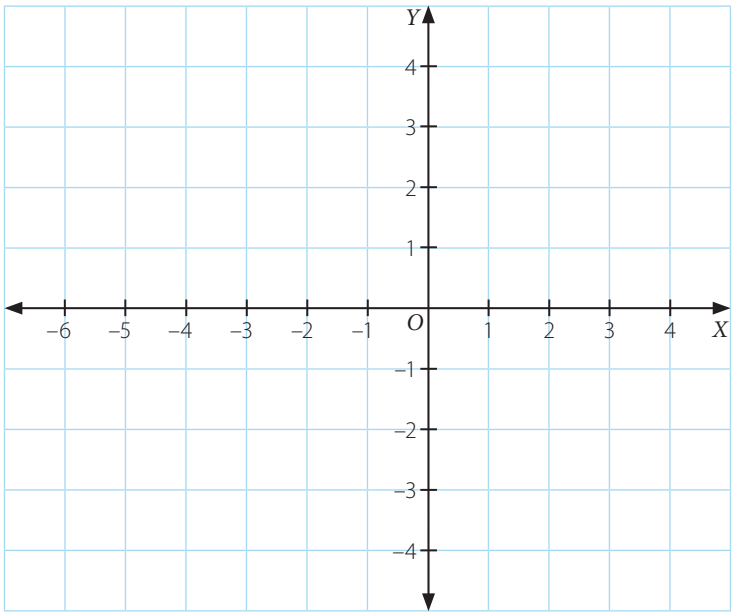
b.

$0{,}5x + y = 0$	
x	y
	3
	1
	0
	–1
	–2

c.

$0{,}5x + y = 1$	
x	y
–5	
	2
	0
2	
4	

- Realiza las 3 gráficas en el mismo plano cartesiano y luego responde.



- ¿Las tres gráficas se intersecan en algún punto? ¿Cómo clasificarías estas rectas? Explica.

_____

_____

_____

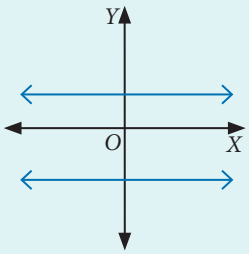
Habilidad

Al transitar entre distintas representaciones estás desarrollando la habilidad de **representar**.

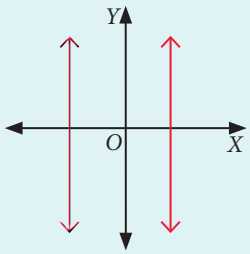
Conceptos

Respecto de la ecuación $ax + by = c$, con $a, b, c \in \mathbb{Q}$ dependiendo de los valores para a, b, c, es posible reconocer lo siguiente.

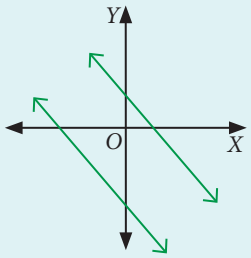
- Si $a = 0$ y $b, c \neq 0$, se tienen rectas **paralelas al eje X**.



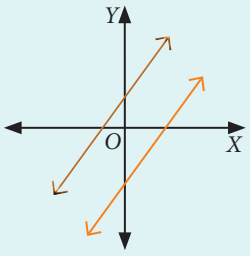
- Si $b = 0$ y $a, c \neq 0$, se tienen rectas **paralelas al eje Y**.



- Si $c \neq 0$ y $a > 0, b > 0$ o $a < 0, b < 0$, se tienen rectas con **pendiente negativa**.



- Si $c \neq 0$ y $a > 0, b < 0$ o $a < 0, b > 0$, se tienen rectas con **pendiente positiva**.



Ejemplo 1

De las rectas L_1, L_2 y L_3, ¿es correcto afirmar que son paralelas? ¿Cuál es la ecuación en la forma $ax + by = c$ que representa cada recta?

Se calculará la pendiente de cada recta.

$$L_1 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2} \qquad L_2 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2} \qquad L_3 = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{1}{2}$$

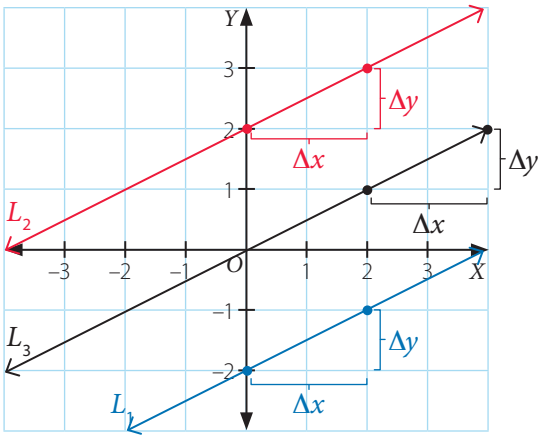
Al tener igual pendiente, es correcto afirmar que las rectas son paralelas.

La ecuación de cada recta es:

L_1: $y = \frac{1}{2}x - 2 \blacktriangleright 2y = x - 4 \blacktriangleright x - 2y = 4$

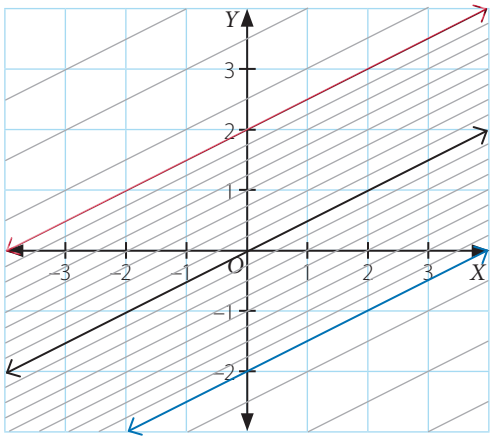
L_2: $y = \frac{1}{2}x + 2 \blacktriangleright 2y = x + 4 \blacktriangleright x - 2y = -4$

L_3: $y = \frac{1}{2}x \blacktriangleright 2y = x \blacktriangleright x - 2y = 0$



Lo anterior se puede generalizar considerando el haz de rectas paralelas de la forma:

$$x - 2y = c, \text{ con } c \in \mathbb{Q}.$$



En el plano se muestran algunas rectas.

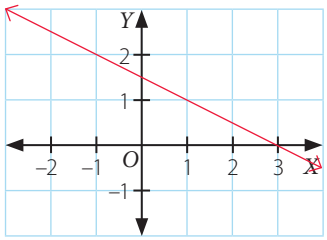
¿Qué forma tendría el haz de rectas representado por la ecuación $x + 2y = c$? Explica.

Ejercicios

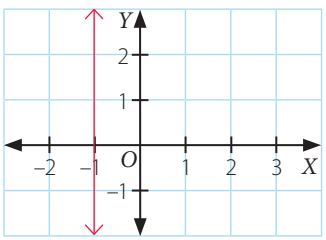
Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Traza 2 rectas paralelas a cada recta representada en el plano cartesiano. Luego escribe la recta correspondiente y explica si a, b, c, varía en la ecuación de la forma $ax + by = c$.

a.



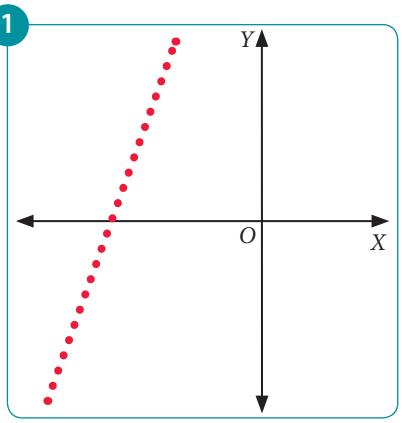
b.



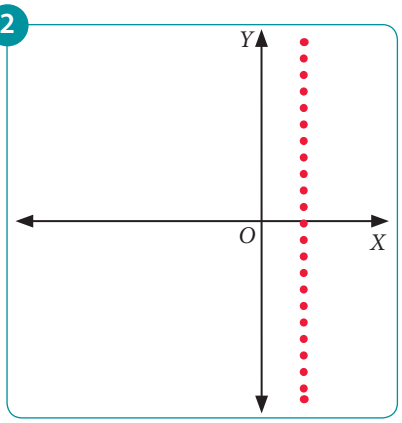
2. Responde las siguientes preguntas.

En cada recuadro se han graficado varios puntos que pertenecen a una recta.

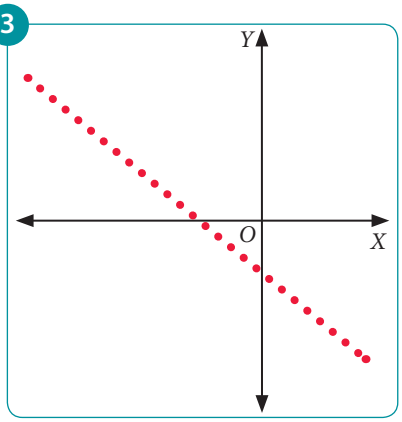
1



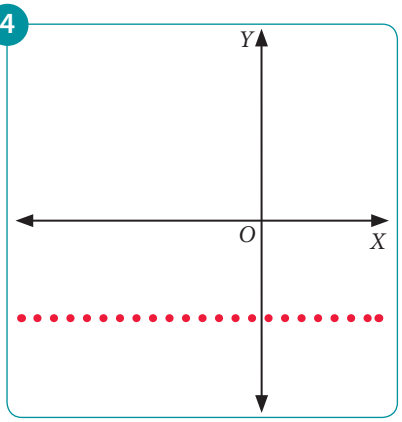
2



3



4



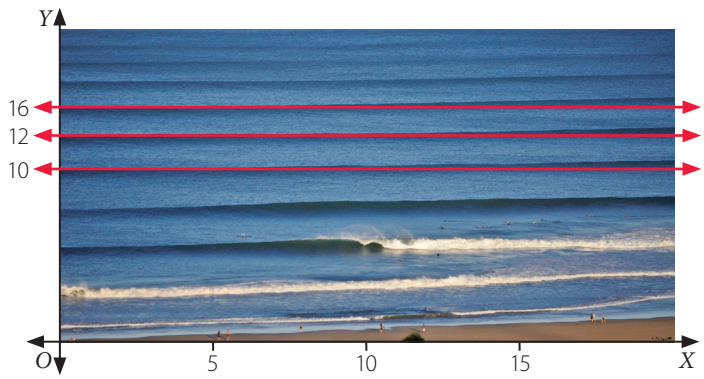
Considerando c ≥ 0, en cuál o cuáles de los gráficos los puntos satisfacen $ax + by = c$, con:

a. $a > 0, b > 0$ **b.** $a < 0, b > 0$ **c.** $a = 0, b < 0$ **d.** $a < 0, b = 0$

3. Ciencias El fenómeno conocido como mar de leva o mar de fondo consiste en el aumento anormal de la altura del oleaje. Cuando la mar de fondo llega a una playa, la alineación de sus líneas de monte se relaciona con líneas rectas que son paralelas a la costa, como se muestra a continuación.



En la imagen se muestran diferentes líneas de monte, las que se han ubicado en un plano cartesiano. Determina las ecuaciones de las rectas destacadas y explica cuál es el término que varía en la ecuación de la forma $ax + by = c$.



4. Junto con un compañero o compañera realicen la siguiente actividad.

Utiliza WolframAlpha que se explicó en la página 117. Para ello ingresa a *https://www.wolframalpha.com/*, y anota la ecuación de la forma $ax + by = c$, para los siguientes valores:

$a = b = 5, c = 7$ $\quad a = b = -5, c = 7$ $\quad a = b = 3, c = 7$ $\quad a = b = -3, c = 7$

a. ¿Qué conclusión puedes obtener respecto de la pendiente de la recta?

b. ¿Puede ser $a = b = 0$ y c cualquier número? Explica.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Página 41

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué puedes concluir respecto de la variación de parámetros en una relación lineal de dos variables? Explica.

- Al momento de trabajar de manera colaborativa, ¿consideraste de forma respetuosa su opinión? ¿Te sirvió para mejorar tu respuesta? Explica.

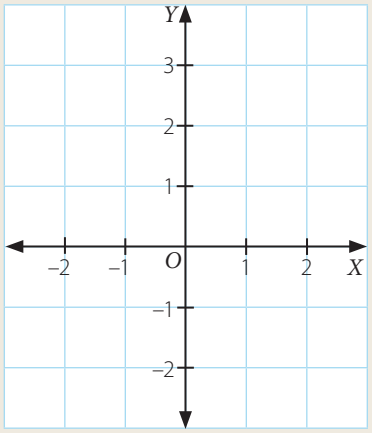
¿Cómo voy? Evaluación de proceso 4

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

1. Completa la tabla con los valores que correspondan, luego represéntala en el plano cartesiano y anota la pendiente (m) de cada recta. (3 puntos cada uno)

a.

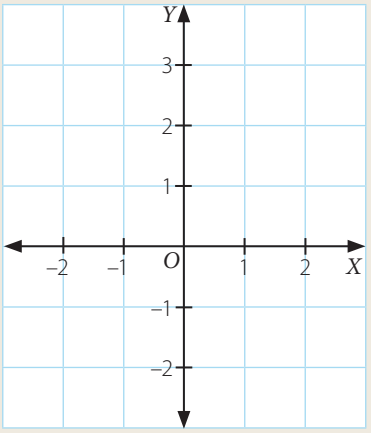
x	y	$f(x, y) = 3x + 2y$
–2	2	
0	–1	



$m =$ _____

b.

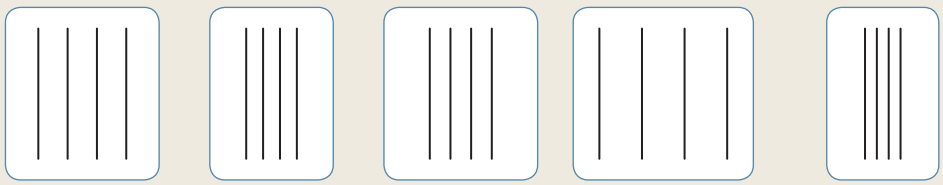
x	y	$f(x, y) = -2x + 3y$
–1		–1
	1	–1



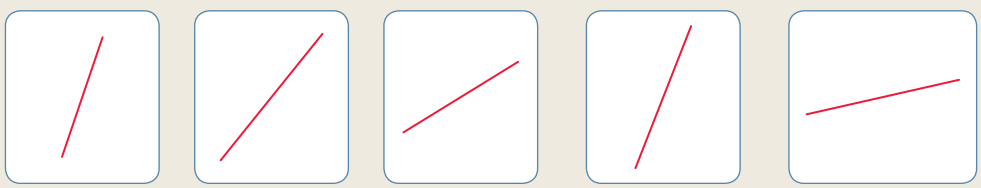
$m =$ _____

2. Relaciona correctamente las proyecciones de las líneas de nivel con sus planos inclinados en el espacio. Justifica tu elección. (6 puntos)

Proyecciones



Plano inclinado

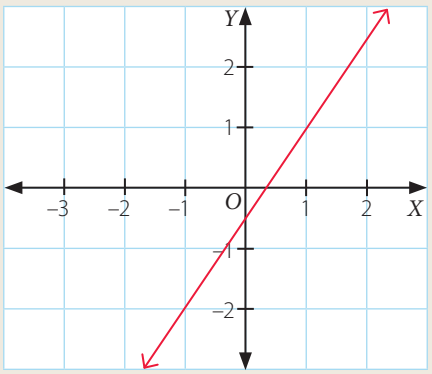


Justificación ▸ _____

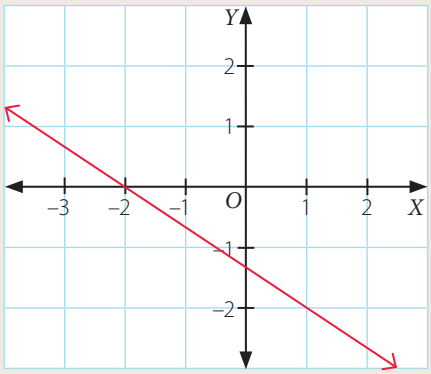
_____

3. Grafica 3 rectas paralelas a la representada en el plano, luego escribe la ecuación de la recta en la forma $ax + by = c$ explica la función afín que las representa. (3 puntos cada uno)

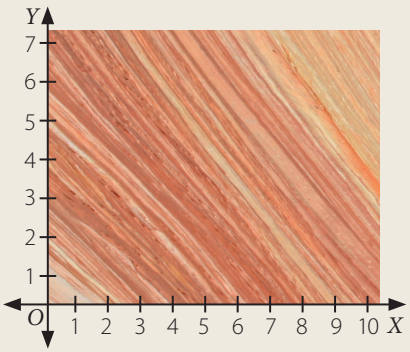
a.



b.



4. En el plano cartesiano se muestra la roca arenisca en North Coyote Buttes en Arizona, (Estados Unidos). Elige 3 líneas de sedimento y represéntalas en la forma $f(x, y) = c$. (6 puntos)



Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1	Elaborar tablas y gráficos para ecuaciones de la forma $ax + by = c$, reconociendo la pendiente de la ecuación de la recta asociada.		**Logrado:** 14 puntos o más. **Medianamente logrado:** 12 a 13 puntos. **Por lograr:** 11 puntos o menos.
2	Reconocer que las líneas con mayor densidad en el plano de proyección representan mayor cambio (pendiente).		
3	Confeccionar un haz de gráficos de funciones afines, sobre la base de $f(x, y) = ax + by$ (con a y b fijo).		
4	Representar fenómenos geográficos y cotidianos mediante expresiones $f(x, y)$ en dos variables.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica si cumpliste las metas que te propusiste en un principio.

- ¿Cómo resolviste las posibles dificultades que te surgieron al desarrollar el tema? Explica.

Actividades complementarias

CARACTERÍSTICAS PRINCIPALES DE UN CD

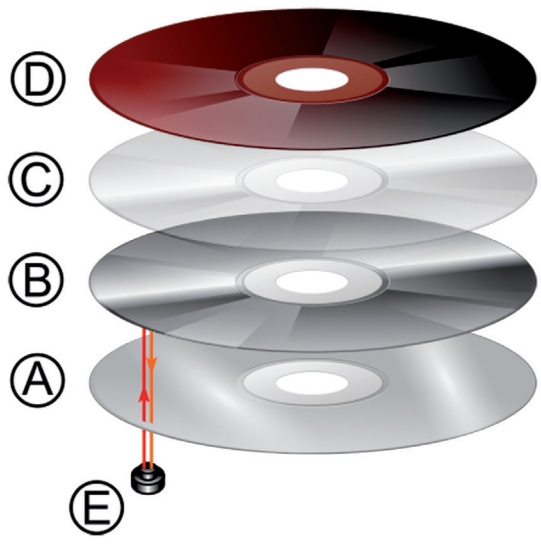
Escuchar la música de un CD (compact disc) o ver una película registrada en un DVD (digital video disc) hace parte de las actividades cotidianas sencillas, lo cual contrasta con la complejidad de su elaboración.

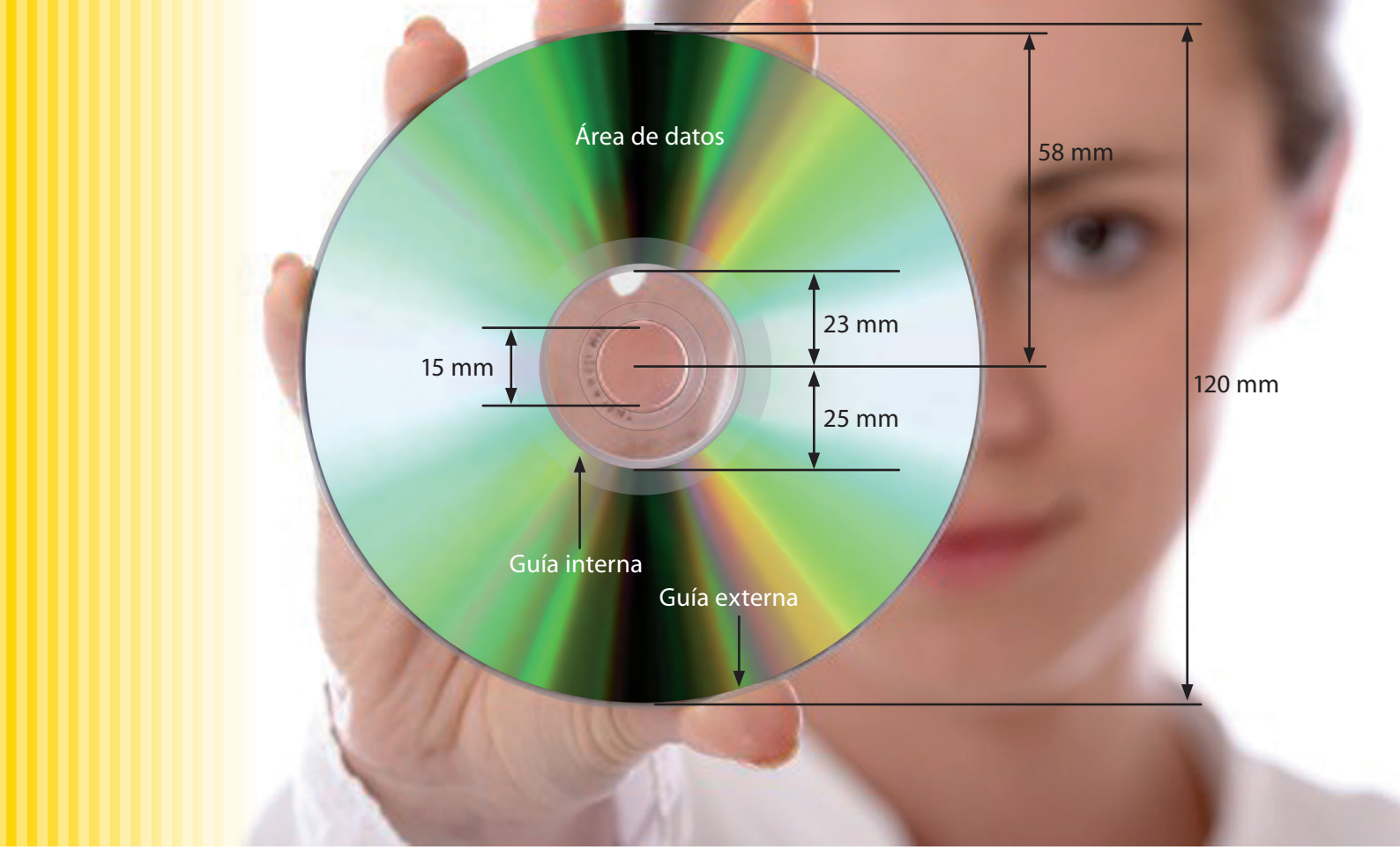
La materia prima de un CD o un DVD es el policarbonato, un plástico térmico de gama alta de gran transparencia y resistencia mecánica al impacto. Por cada centímetro cúbico de un CD, se requieren 6,9 gramos de policarbonato.

Para fabricar un CD, se vierte el policarbonato (A) en un molde que le da la forma redonda y plana. En la máquina donde se hace esto, ya se encuentra el *stamper* o matriz, una placa compuesta de níquel, con agujeros microscópicos de alto relieve que contienen la información (música o video) que llevará el disco.

Luego, el CD es enfriado y enviado a una cámara de vacío donde recibe moléculas de aluminio para darle capacidad de reflexión (B). Después, recibe un baño de laca acrílica (C), que cumple la función de protección y, luego, es secado con luz ultravioleta.

Posteriormente, el disco pasa por un verificador óptico de alta velocidad (E) donde se analiza si cumple con los parámetros técnicos internacionales. Finalmente, el CD pasa por una máquina que le hace el estampado (D) y queda listo para salir al mercado.





Diámetro del disco
($2R$): 120 mm = 12 cm

Diámetro de la abertura en el centro
($2r$): 15 mm = 1,5 cm

Espesor
(h): 1,2 mm = 0,12 cm

Para saber la cantidad de policarbonato que se requiere para fabricar un CD, es necesario calcular su volumen.

Para esto, el CD se puede considerar como un cilindro hueco cuyas alturas corresponden al espesor del CD, por lo que su volumen se puede determinar así:

1 $V = \pi R^2 h - \pi r^2 h$ 2 $V = \pi h(R^2 - r^2)$

Responde

Junto con un compañero o compañera consideren la expresión 1 o 2 para responder las siguientes preguntas.

1. Calcula la cantidad de policarbonato que se requiere para fabricar un CD. Compárala con tu compañero o compañera y explica por qué obtienen esos resultados.

2. Calcula el volumen de una torre que tenga 100 CD, ¿qué resultado obtiene tu compañero o compañera?

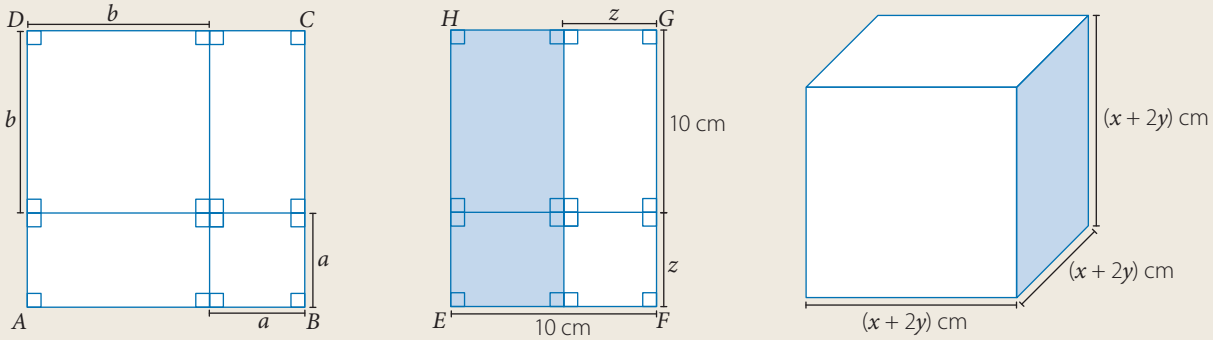
3. ¿Por qué crees que en las preguntas 1 y 2 obtienen esos resultados? Escribe una conclusión con tu compañero o compañera.

¿Qué aprendí? Evaluación final

A continuación, te proponemos preguntas que tendrás que desarrollar considerando lo que has aprendido en esta unidad.

Productos notables

1. En la imagen se muestra un cuadrado, un rectángulo y un cubo. (2 puntos cada uno)



Responde y luego explica el producto notable con el cual relacionas cada producto notable. (2 puntos cada uno)

a. ¿Cuál es el área del cuadrado $ABCD$? ¿Qué propiedad utilizas para calcularlo? Justifica.

b. ¿Cuál es el área de la parte pintada del rectángulo? ¿Qué propiedad utilizas para calcularlo? Justifica.

c. ¿Cuánto es el volumen del cubo? ¿Qué propiedad utilizas para calcularlo? Justifica.

2. Completa con los términos que faltan. (1 punto cada uno)

a. $(2x + 3y)(2x - 3y) = \square - \square$

b. $(z + 12)(z - 15) = z^2 + \square + \square$

c. $(3x^2 - 5xy^2)^2 = \square - 30x^2yz^2 + \square$

d. $(w - 16)(w - 9) = w^2 + \square + \square$

Factorización

3. Factoriza cada expresión algebraica. (1 punto cada uno)

a. $x^2 - 7x - 120 =$

b. $w^4 - 400 =$

c. $225 - 120q + 16q^2 =$

d. $t^2 + 8st + 16s^2 =$

e. $81a^4 - 64b^4 =$

f. $0{,}25r^2 - 5rs + 25s^2 =$

4. Responde. (2 puntos cada uno)

a. Si $(w - 12)(w + 4) = w^2 + sw + m$, ¿cuánto es el valor de $s^2 - m^2$?

b. Si $(y + 15)(y - 18) = y^2 + py + q$, ¿cuánto es el valor de $(p \cdot q)^2$?

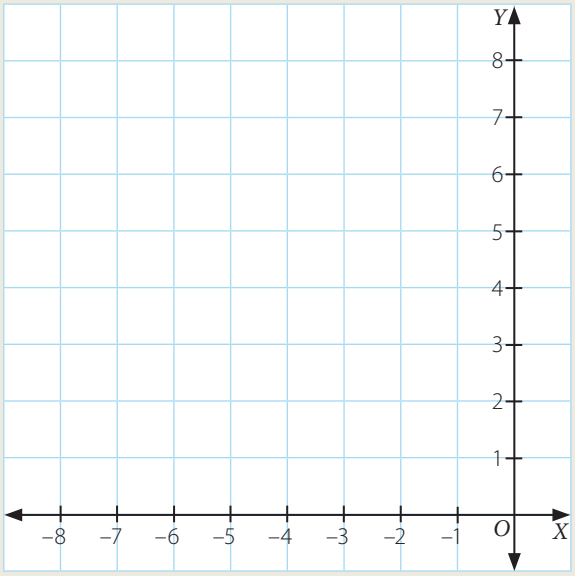
Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

5. Representa cada ecuación en la forma $y = mx + n$, explica qué representa m y n, luego determina al menos 4 pares ordenados que sean solución de dicha ecuación. (1 punto cada uno)

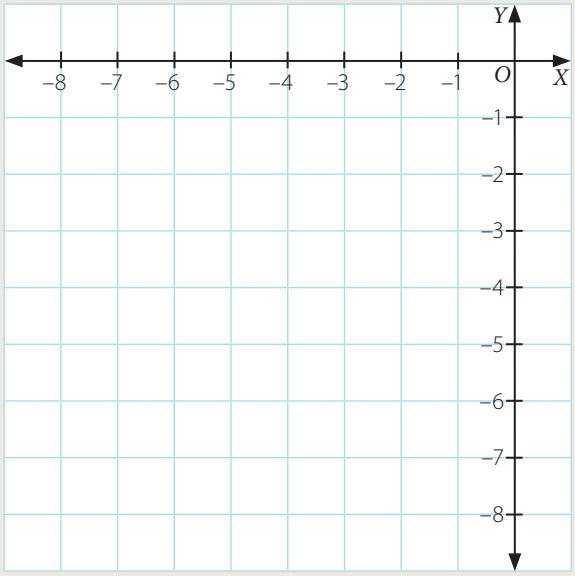
a. $4x + 2y = 8$ **b.** $-6x + 2y = 12$ **c.** $0{,}25x + 0{,}2y = 0{,}4$

6. Representa cada sistema de ecuaciones en el plano cartesiano y luego resuélvelas utilizando el método que estimes conveniente. (3 puntos cada uno)

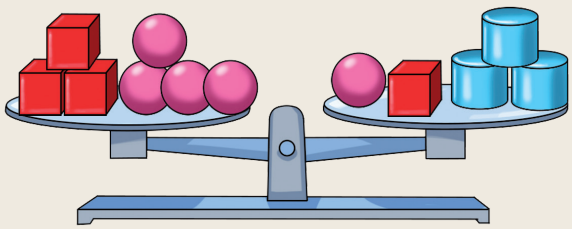
a. $\begin{aligned} 3x + 2y &= -8 \\ -x + y &= 6 \end{aligned}$

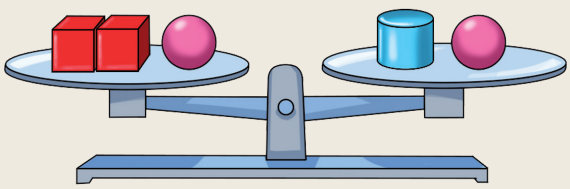


b. $\begin{aligned} x + 2y &= -14 \\ -x + 3y &= -10 \end{aligned}$



7. Las balanzas se encuentran formadas por cubos de igual masa, cilindros de igual masa y esferas de igual masa. Si cada cilindro tiene una masa de 3 kg, ¿cuál es la masa de cada cubo y esfera? (3 puntos)





8. Resuelve los siguientes problemas. (2 puntos cada uno)

a. Antonia tiene la mitad de la edad de Emilia. En 20 años, Emilia será 10 años mayor que Antonia. ¿Cuál es la edad de cada una?

b. En una librería, han vendido 20 libros a dos precios distintos, unos a $ 8 000 y otros a $ 12 000, con los que han obtenido $ 192 000. ¿Cuántos libros han vendido de cada precio?

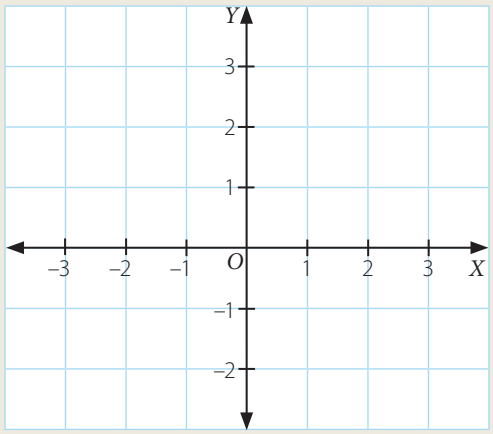
¿Qué aprendí? Evaluación final

Relación entre dos variables

9. Considera la relación en dos variables $f(x, y) = 3x + 4y$, con $f(x, y) = -2$. Completa la tabla, calcula la pendiente (m) de la relación entre dos variables y luego elabora el gráfico. (6 puntos)

$f(x, y) = -2$	
x	y

$m =$ ____



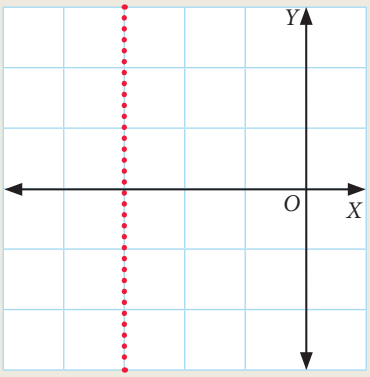
10. En el plano cartesiano se ha representado la relación entre dos variables $ax + by = c$. Marca la opción que representa las condiciones para a, b y c. Luego justifica tu elección. (4 puntos)

A. $a = 0, b > 0, c = 0$

B. $a < 0, b = 0, c > 0$

C. $a < 0, b > 0, c = 0$

D. $a > 0, b = 0, c > 0$



Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1 y 2	Comprender el uso de los productos notables.		**Logrado:** 28 puntos o más.
3 y 4	Factorizar expresiones algebraicas.		**Medianamente logrado:** 23 a 27 puntos.
5, 6, 7 y 8	Resolver sistemas de ecuaciones lineales de dos incógnitas.		**Por lograr:** 22 puntos o menos.
9 y 10	Comprender la relación lineal de dos variables de la forma $f(x, y) = ax + by$.		
	Total		

Actividad de cierre

Completa el esquema con tus conocimientos antes de empezar la unidad y lo que has aprendido en ella.

	¿Qué sabías antes de comenzar?	¿Qué querías aprender al comienzo?	¿Qué aprendí al finalizar?
Tema 1 Productos notables	Reducir expresiones algebraicas.		A calcular productos notables.
Tema 2 Factorización			
Tema 3 Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas	Resolver ecuaciones e inecuaciones.		
Tema 4 Relación entre dos variables			

Reflexiona sobre tu trabajo

- Las estrategias planteadas al comenzar cada tema, ¿te ayudaron a cumplir las metas planteadas? Explica.

_____

- ¿Usaste modelos, utilizando un lenguaje algebraico para resolver diversos problemas? Explica.

_____

- ¿Demostraste interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas? Si tu respuesta es negativa, explica por qué no lo hiciste. Si es afirmativa, explica cómo lo hiciste.

_____

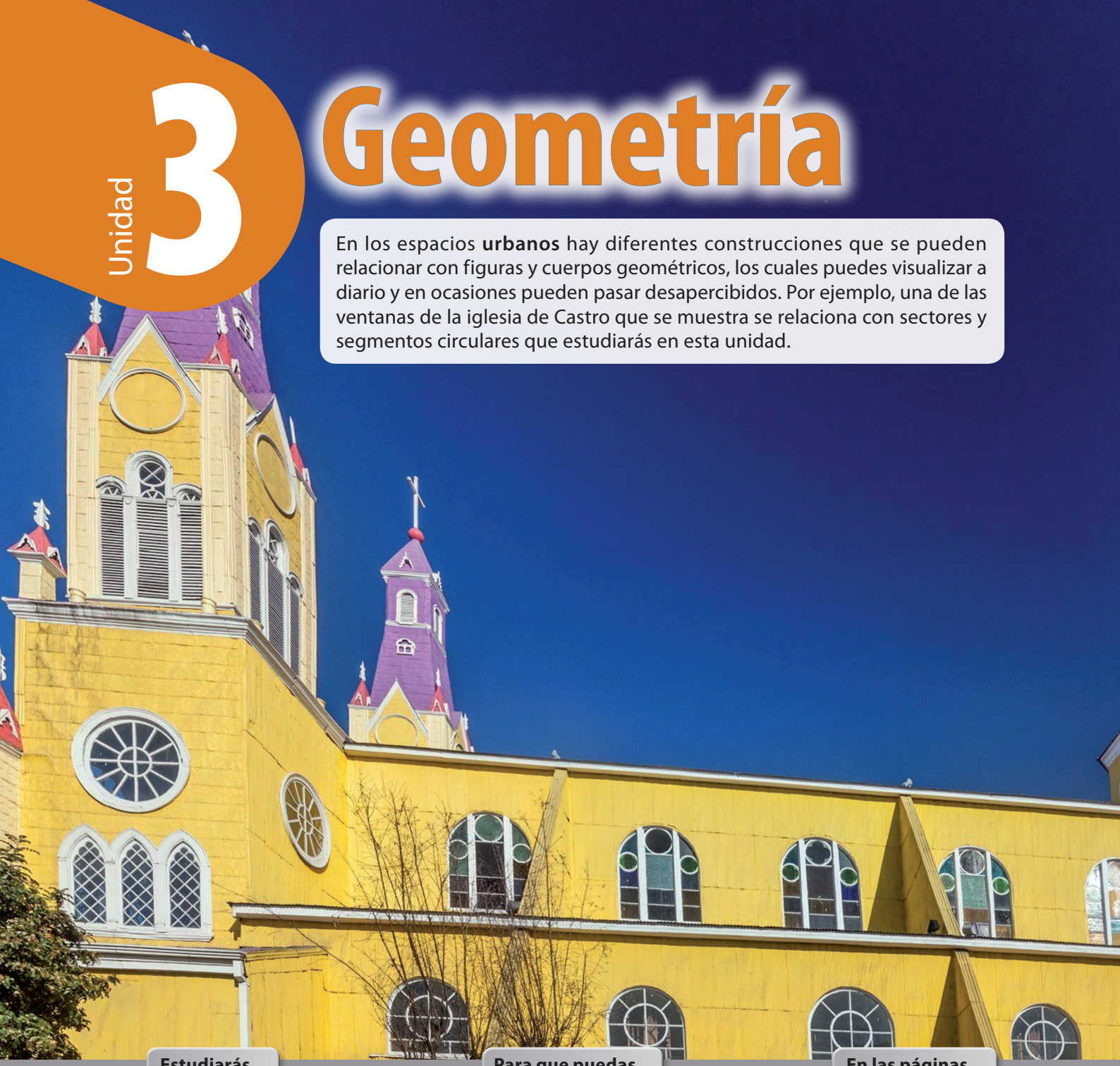
- ¿Qué aspectos mejorarías para desarrollar de mejor manera la próxima unidad? Explica.

_____

Unidad 3

Geometría

En los espacios **urbanos** hay diferentes construcciones que se pueden relacionar con figuras y cuerpos geométricos, los cuales puedes visualizar a diario y en ocasiones pueden pasar desapercibidos. Por ejemplo, una de las ventanas de la iglesia de Castro que se muestra se relaciona con sectores y segmentos circulares que estudiarás en esta unidad.



Estudiarás...	Para que puedas...	En las páginas...
Tema 1 Sectores y segmentos circulares	Desarrollar las fórmulas para calcular el área y perímetro de sectores y segmentos circulares.	146 a la 161
Tema 2 Área y volumen	Desarrollar las fórmulas para calcular el área y el volumen de un cono.	162 a la 173
Tema 3 Homotecia y teorema de Tales	Comprender el concepto de homotecia y el teorema de Tales.	174 a la 199
Tema 4 Semejanza	Aplicar las propiedades a modelos a escala y otras situaciones de la vida diaria.	200 a la 215



Al tomar fotografías, estas se pueden revelar de forma proporcional a la imagen captada.

Punto de partida

Te invitamos a observar la imagen para responder las siguientes preguntas que te ayudarán a planificar tu aprendizaje en esta unidad.

1. Describe una parte de tu entorno en la que reconozcas figuras y cuerpos geométricos.

2. De los temas que estudiarás en esta unidad, ¿hay alguno que te interese por sobre otro?

3. ¿Qué te motiva a aprender los temas propuestos? Comenta con tu compañero o compañera.

4. ¿Qué meta te propones cumplir al finalizar? ¿Cómo piensas cumplirla?

Actitud

Te invitamos a abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria, de la sociedad en general, o propios de otras asignaturas o de los modelos matemáticos.

¡¡Mucho éxito!!

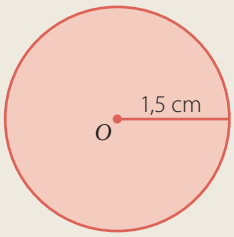
¿Cuánto sé? Evaluación inicial

Activa tus conocimientos previos y desarrolla las siguientes actividades de evaluación.

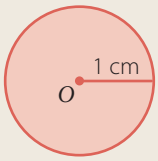
Área y perímetro del círculo

1. Calcula el área (A) y perímetro (P) de cada círculo. (1 punto cada uno)

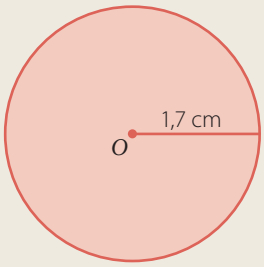
a.



b.



c.



2. Resuelve los siguientes problemas. (2 puntos cada uno)

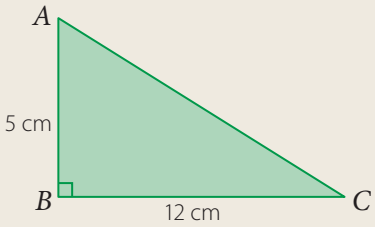
a. Si la base de una torta de forma circular tiene un diámetro de 20 cm como mínimo, ¿cuánto papel se necesita para cubrir la base completamente?

b. Si el perímetro de un círculo es 24π cm^2, ¿cuál es el área?

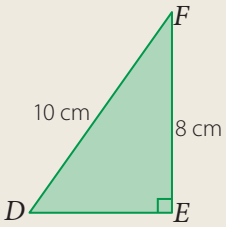
Teorema de Pitágoras

3. En cada triángulo rectángulo, calcula la medida del lado que corresponda. (1 punto cada uno)

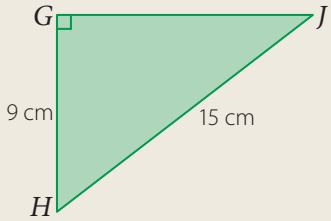
a. m($\overline{CA}$)



b. m($\overline{DE}$)



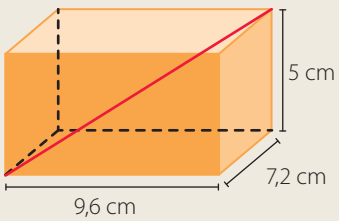
c. m($\overline{JG}$)



4. Resuelve los siguientes problemas. (2 puntos cada uno)

a. Se tiene un poste de 5 m de alto y se quiere poner un cable desde su extremo superior, anclado al piso a una distancia de 3 m del poste. ¿Cuál es el largo del cable comprendido entre el extremo superior del poste y el punto del piso al que se ancló?

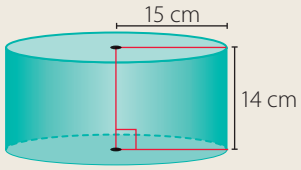
b. ¿Cuánto mide la diagonal del siguiente paralelepípedo?



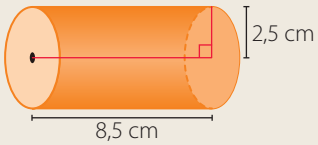
Área y volumen de un cilindro

5. Calcula el área (A) y volumen (V) de los siguientes cilindros. Considera $\pi \approx 3{,}14$. (2 puntos cada uno)

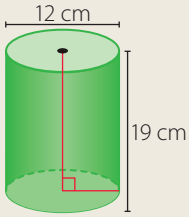
a.



b.



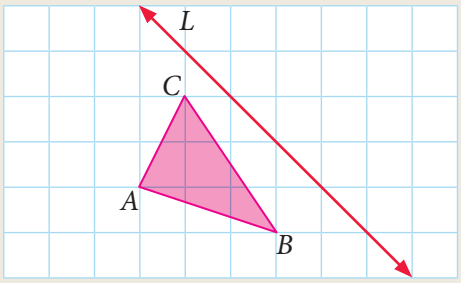
c.



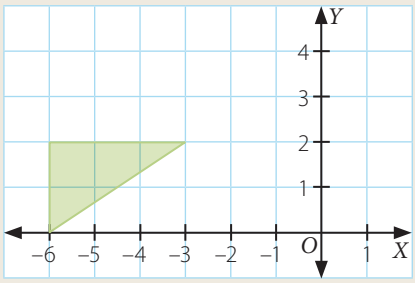
Transformaciones isométricas

6. Aplica cada transformación isométrica. (3 puntos cada uno)

a. Refleja el triángulo ABC según la recta L.



b. Traslada el polígono según el vector $\vec{v} = (4, 2)$.



Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1 y 2	Calcular área y perímetro de un círculo.		**Logrado:** 16 puntos o más. **Medianamente logrado:** 13 a 15 puntos. **Por lograr:** 12 puntos o menos.
3 y 4	Aplicar el teorema de Pitágoras.		
5	Calcular el área y el volumen de un cilindro.		
6	Realizar transformaciones isométricas.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué problemas consideras que fueron un desafío resolver? ¿Por qué?

- ¿Hay alguna actividad que no sabías resolver? ¿Cuál?

Tema 1

Sectores y segmentos circulares

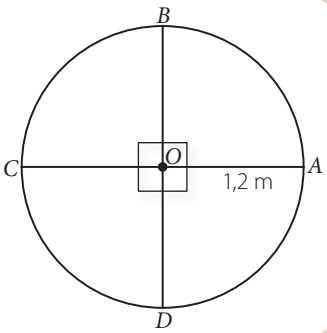
En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 1.

Recuerdo lo que sé

1. Lee la siguiente información.

En nuestro entorno podemos apreciar diferentes formas, las que por sus características se relacionan con elementos geométricos, en particular la ventana que se muestra tiene una forma de círculo.





a. Completa con la medida solicitada.

$m(\overline{OC}) =$ ____ Diámetro del círculo = ____

b. ¿Es correcto afirmar que la medida de cualquier cuerda es menor que 2,4 m? ¿Por qué? Explica.

_____

_____

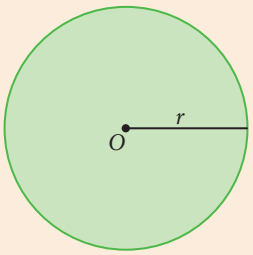
c. Escribe la medida de cada ángulo.

$m(\measuredangle AOB) =$ ____ $m(\measuredangle AOD) =$ ____

d. Calcula el perímetro del círculo. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

e. Calcula el área del círculo. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

En un **círculo de centro** O y **radio** r, el **perímetro** (P) y **área** (A) se calculan como:



$P = 2\pi r$

$A = \pi r^2$

Diseño mi estrategia

2. Analiza cada caso y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

a. ¿A qué parte del círculo corresponde el arco $\overset{\frown}{BC}$? ¿Cómo lo determinaste? Explica.

Resuelvo

Mi estrategia ▸ _____

b. ¿Cómo calcularías el área y perímetro del sector circular relacionado con el arco $\overset{\frown}{BC}$? Explica.

Resuelvo

Mi estrategia ▸ _____

c. Comenta tus estrategias con un compañero o una compañera, luego escribe lo que te sirvió para mejorar la tuya.

Reflexiona sobre tu trabajo

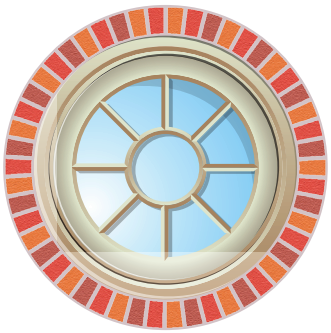
- ¿En qué otra situación has apreciado figuras que se relacionen con círculos? Explica.
- Al momento de responder las preguntas planteadas, ¿qué dificultades tuviste? ¿Cómo crees podrías mejorar? Explica.
- Considerando lo estudiado en años anteriores, ¿qué conocimientos utilizaste?
- ¿Fuiste creativo al momento de plantear tus estrategias?

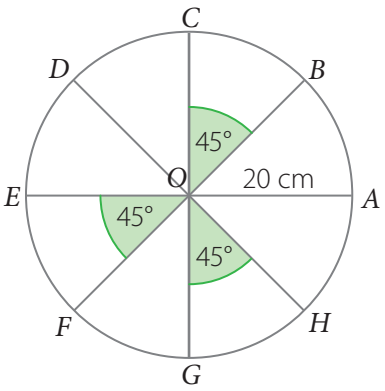
Elementos de la circunferencia y del círculo

Objetivos

- Reconocer el ángulo central en una circunferencia.
- Reconocer los elementos del círculo.

En variadas construcciones existen ventanas con diferentes formas y características, en particular la siguiente ventana tiene forma circular.





Habilidad

Al ejemplificar utilizando situaciones cotidianas para resolver un problema estás usando la habilidad de **representar**.

- Escribe la medida del diámetro de la circunferencia de centro O. ▸ _____
- ¿Cuánto mide el $\measuredangle COD$? ▸ _____
- ¿Cuánto suman las medidas de los ángulos del centro de la circunferencia? Explica cómo lo calculaste.

Realiza tus cálculos

Explicación ▸ _____

_____

_____

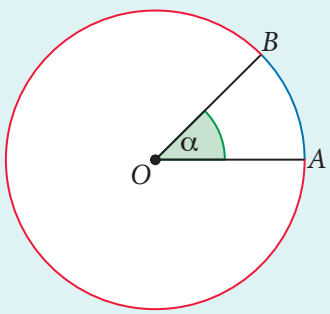
_____

_____

Conceptos

Un ángulo subtiende un **arco** de circunferencia, cuando el arco está comprendido entre los lados del ángulo.

En una circunferencia de centro O, el **ángulo del centro** corresponde a aquel cuyo vértice es el punto O y sus lados corresponden a radios.



La medida del ángulo AOB es α, es decir, $m(\measuredangle AOB) = \alpha$.

En general, se cumple que: $m(\measuredangle AOB) \neq m(\measuredangle BOA)$, ya que

$$m(\measuredangle AOB) = \alpha \text{ y } m(\measuredangle BOA) = 360° - \alpha$$

Al dividir una circunferencia en n partes iguales con $n \in \mathbb{N}$, la medida de los ángulos del centro (α) que se obtienen de esta división cumplen con:

$$\alpha = \frac{360°}{n}$$

Ejemplo 1

Un grupo de 4 amigos comerán una pizza, y para ello la dividirán en partes iguales, ¿cuánto medirá cada ángulo del centro?



Ya que quieres dividir en 4 trozos iguales la pizza, se calculará la medida del ángulo del centro, es decir:

$$\frac{360°}{4} = 90°$$

Respuesta: La medida de cada ángulo del centro mide 90°.

Ejemplo 2

Cada uno de los ángulos del centro de una circunferencia miden 60º, ¿en cuántas partes iguales se dividió?

Cada uno de los ángulos centrales de la circunferencia mide 60°, es decir, se cumple: $\frac{360°}{n} = 60°$ equivale a $n = \frac{360°}{60°}$, de donde se obtiene $n = 6$.

Respuesta: La circunferencia se dividió en 6 partes iguales.

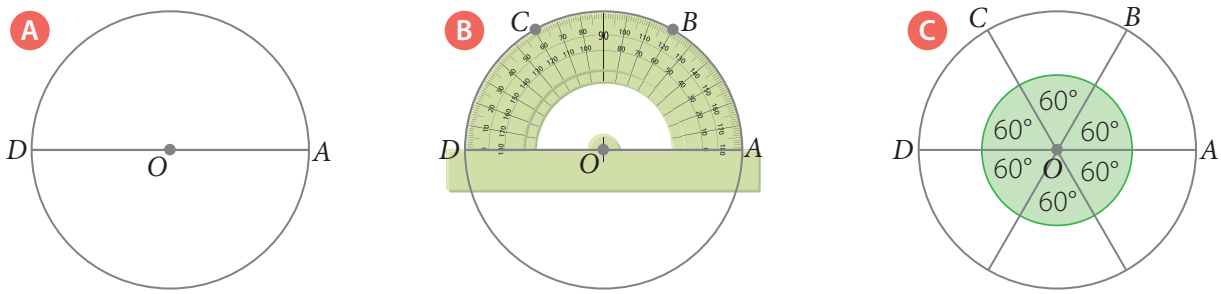
Ejemplo 3

Divide una circunferencia en 6 partes iguales.

Por el ejemplo anterior, se sabe que cada ángulo del centro mide 60°, luego construyes una circunferencia de centro O y radio r.

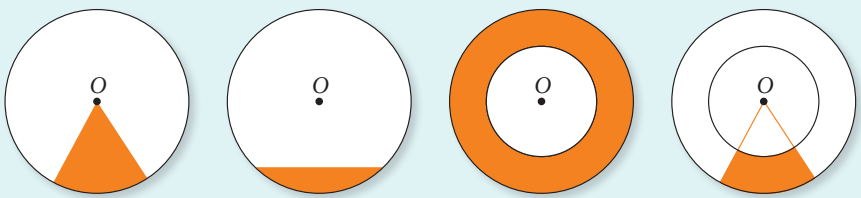
PASO A PASO

1. Construyes la circunferencia A.
2. Utilizando un transportador, marcas con un punto los ángulos B.
3. Trazas cada diámetro C.



Conceptos

- El **círculo** corresponde al lugar geométrico formado por todos los puntos de la **circunferencia** y sus puntos interiores.
- Las regiones del **círculo** son:



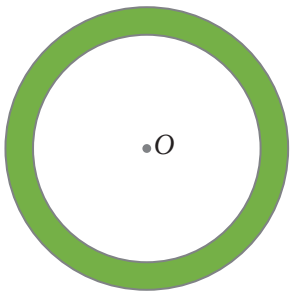
Sector circular | Segmento circular | Corona circular | Trapecio circular

Ejercicios

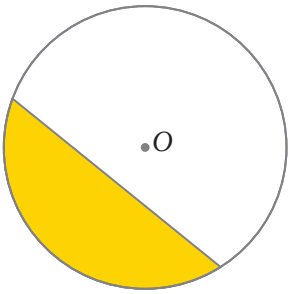
Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Escribe el nombre de la región del círculo que se encuentra pintada en cada círculo de centro O.

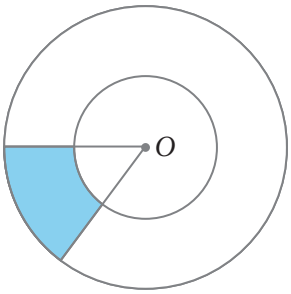
a.



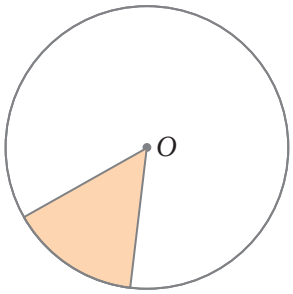
b.



c.

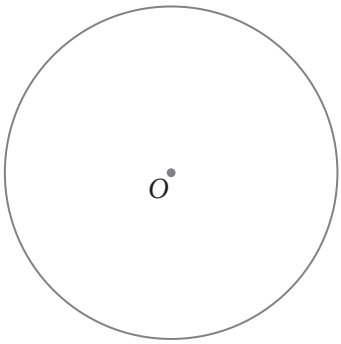


d.

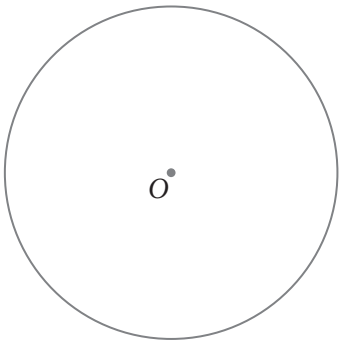


2. Construye los ángulos del centro en cada circunferencia de centro O, según las medidas presentadas.

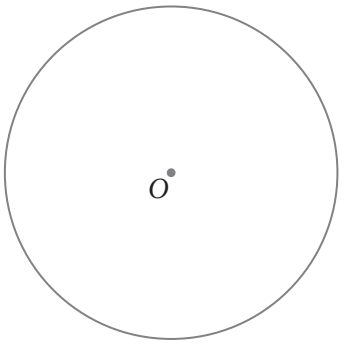
a. $\alpha = 90°$



b. $\beta = 60°$

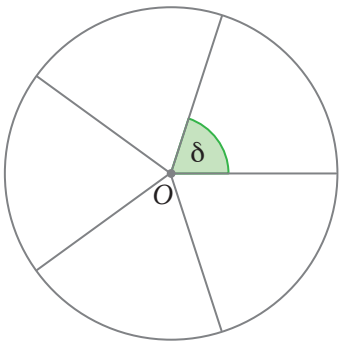


c. $\gamma = 30°$

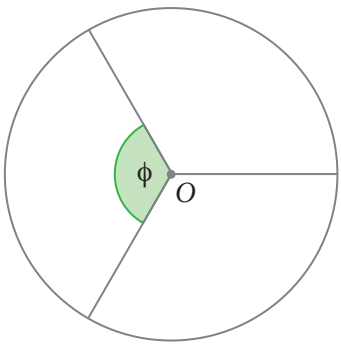


3. Cada circunferencia de centro O se encuentra dividida en partes iguales. Determina la medida de cada ángulo del centro.

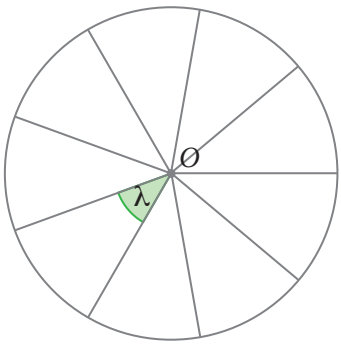
a.



b.



c.



4. Responde.

a. ¿Es correcto afirmar que cada sector circular relacionado con el ángulo del centro de un círculo que mide 90° corresponde a la cuarta parte de dicha circunferencia? Explica.

b. Si un sector circular tiene por ángulo del centro un ángulo que mide 36°, ¿es correcto afirmar que corresponde a la décima parte del círculo? Argumenta tu respuesta.

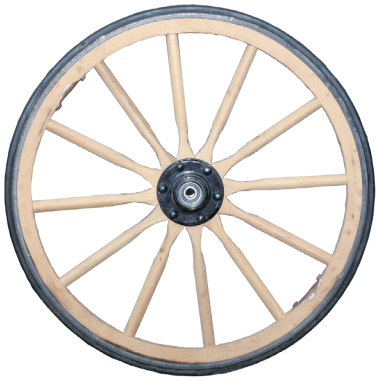
c. Si se tienen dos puntos A y B en una circunferencia de centro O, ¿existe un ángulo α tal que $m(\measuredangle AOB) = m(\measuredangle BOA)$? Justifica.

5. Observa cada imagen, relaciónala con una circunferencia de centro O y luego explica cuánto mide aproximadamente el ángulo del centro.

a. Símbolo de la radiactividad.

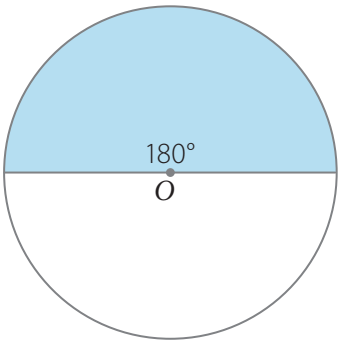


b. Rueda.

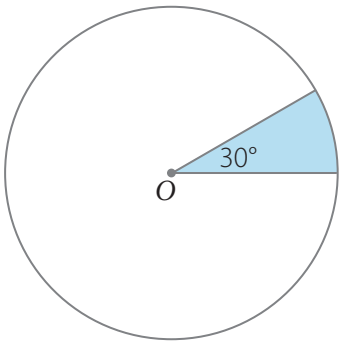


6. Explica qué parte del círculo representa cada sector circular.

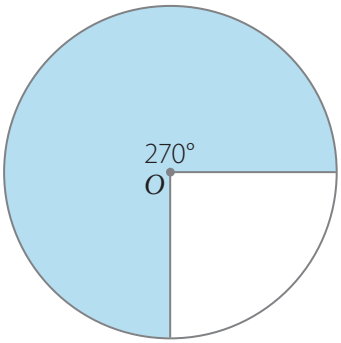
a.



b.



c.



7. Explica si cada afirmación es correcta o no.

a. Si el ángulo del centro es de 45º, el sector circular representado corresponde a un sexto del círculo.

b. Si se muestra una circunferencia dividida en 12 partes iguales, el ángulo central mide 30º.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 46 - 47

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Calculaste la medida de los ángulos del centro en una circunferencia? Explica.

_____

_____

- Respecto de la actividad que más te costó resolver, explica cómo lo lograste.

_____

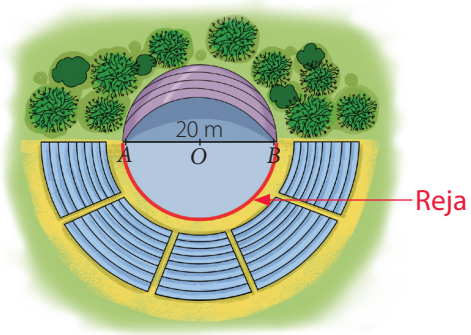
_____

Perímetro de un sector y segmento circular

Objetivo

- Calcular el perímetro de un sector y segmento circular.

Una productora de eventos contratará a una empresa para que instale rejas a parte del escenario donde se realizará un concierto, pero dicha reja solo se colocará en la parte marcada.



Habilidad

Al evaluar los procesos, comprobar resultados y las soluciones de un problema matemático estás desarrollando la habilidad de **resolver problemas**.

¿Cuál será la longitud de la reja?

- ¿Cuánto es el radio del escenario? ▸ _____
- Remarca la parte de la circunferencia a la cual se le quiere poner reja.

Tercera parte | Mitad | Cuarta parte

- Explica cómo calcularías la longitud de la reja que se colocará y luego calcúlala. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

Explicación ▸ _____

_____

_____

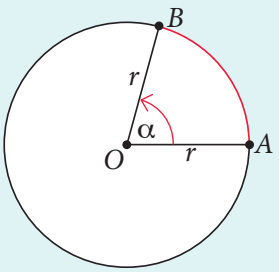
_____

Realiza tus cálculos

- Para calcular el largo de la reja que se pondrá en el escenario es necesario calcular la longitud del arco que se muestra en la imagen inicial, lo que se formalizará a continuación.

Conceptos

Para calcular la longitud de un **arco de circunferencia** utilizas lo siguiente:



$$L(\overset{\frown}{AB}) = \frac{2\pi r\alpha}{360°}$$

Donde:

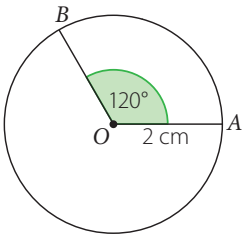
r: es el radio de la circunferencia.

α: es un ángulo del centro de la circunferencia.

$\pi = 3{,}141592...$

Ejemplo 1

En la circunferencia de centro O, ¿cuánto es la $L(\widehat{AB})$?



Para calcular la $L(\widehat{AB})$ debes considerar que el arco $\widehat{AB}$ mide 120°, luego:

$$L(\widehat{AB}) = \frac{2\pi \cdot 2 \cdot 120°}{360°}\text{ cm} = \left(\frac{480°}{360°}\right)\pi\text{ cm} = \frac{4\pi}{3}\text{ cm}$$

Considerando $\pi \approx 3{,}14$; la longitud del arco $\widehat{AB}$ aproximadamente es $4{,}18\overline{6}$ cm.

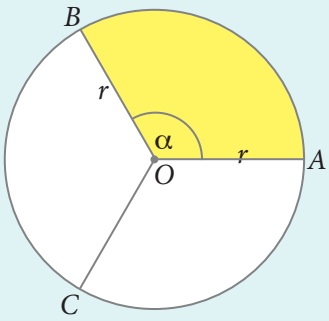
Respuesta: La longitud del arco $\widehat{AB}$ es $\frac{4\pi}{3}$ cm y es aproximadamente $\frac{314}{75}$ cm.

¿Cómo calcularías la $L(\widehat{BA})$? Explica.

Conceptos

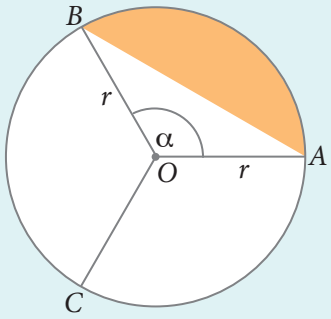
En un círculo de centro O y radio r, se tiene que:

- Para calcular el **perímetro** de un **sector circular**, realizas lo siguiente:



$$P_{\text{sector circular}} = 2r + L(\widehat{AB})$$

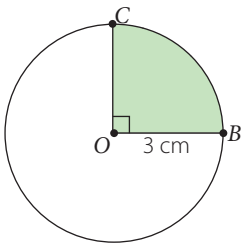
- Para calcular el **perímetro** de un **segmento circular**, realizas lo siguiente:



$$P_{\text{segmento circular}} = L(\widehat{AB}) + m(\overline{AB})$$

Ejemplo 2

En el círculo de centro O, ¿cuál es el perímetro (P) del sector circular pintado?



Para calcular el perímetro del sector circular, tienes que:

$$P = m(\overline{OB}) + m(\overline{OC}) + L(\widehat{BC})$$
$$= \left(3 + 3 + \frac{2\pi \cdot 3 \cdot 90°}{360°}\right)\text{ cm}$$
$$= \left(6 + \frac{3\pi}{2}\right)\text{ cm}$$

Considerando $\pi \approx 3{,}14$; obtienes que:

$$P \approx 10{,}71\text{ cm o } P \approx \frac{1\,071}{100}\text{ cm}$$

Respuesta: El perímetro del sector circular es $\left(6 + \frac{3\pi}{2}\right)$ cm y considerando $\pi \approx 3{,}14$, aproximadamente es $\frac{1\,071}{100}$ cm.

Ejercicios

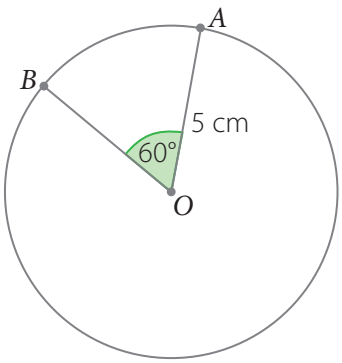
Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Completa la siguiente tabla según corresponda. Observa el ejemplo destacado.

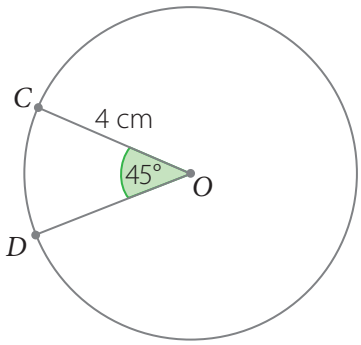
Ángulo central	Parte del ángulo completo	Parte del círculo	Largo del arco con el radio r
270°	$\frac{270°}{360°}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} \cdot 2\pi r$
180°			
90°			
60°			
45°			
α			

2. Calcula la longitud de cada arco. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

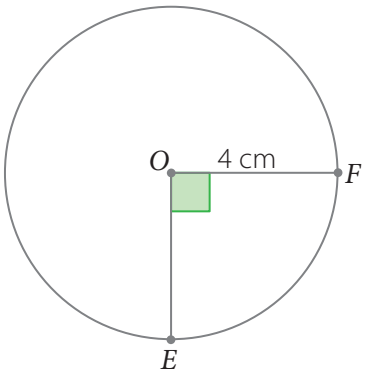
a. $L(\overset{\frown}{AB})$



b. $L(\overset{\frown}{CD})$

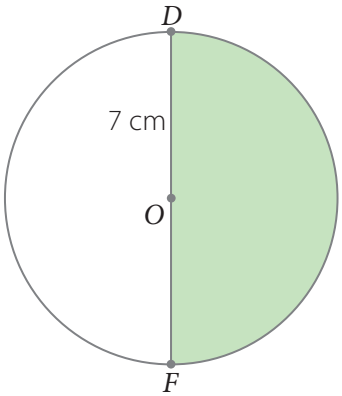


c. $L(\overset{\frown}{EF})$

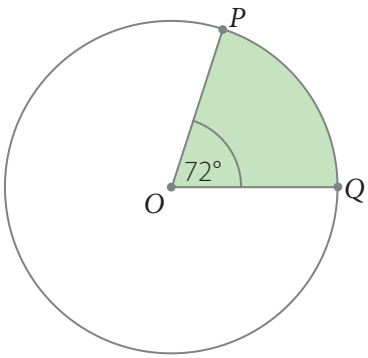


3. Calcula el perímetro de cada sector circular destacado.

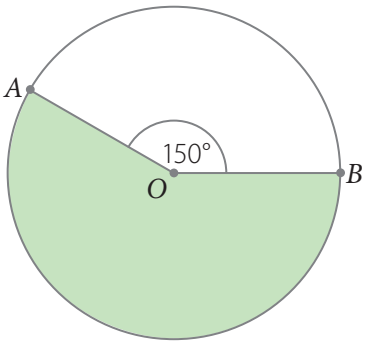
a. $\overline{DF}$ diámetro



b. $m(\overline{OQ}) = 6$ cm



c. $m(\overline{OB}) = 7$ cm



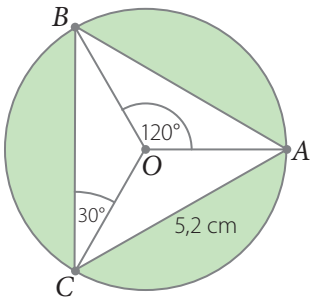
4. Considera $\pi \approx 3{,}14$ para responder a las siguientes preguntas.

a. Si el radio de una circunferencia es de 2,3 cm y la medida del ángulo central de un arco de circunferencia es de 60°, ¿cuánto es la longitud de dicho arco?

b. Si la longitud de un arco de circunferencia es de 2,355 cm y la medida del ángulo central es de 45°, ¿cuánto mide el radio de la circunferencia?

c. Si el radio de una circunferencia mide 4 cm y la longitud de un arco de circunferencia mide 6,28 cm, ¿cuánto mide al ángulo central de dicho arco?

5. En el círculo de centro O y radio 3 cm Josefa y Alejandro calcularán el perímetro del segmento circular pintado de la siguiente forma:

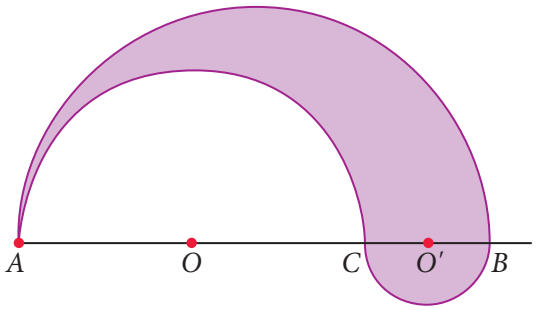


Josefa: Ya que el triángulo es equilátero, se calcula el perímetro de la circunferencia y luego al resultado obtenido se le suma el perímetro del triángulo.

Alejandro: Calculo el perímetro de un segmento circular, además como son 3 los que se deben calcular y el triángulo ABC es equilátero, dicho resultado lo multiplico por 3.

Junto con un compañero o compañera resuelvan utilizando las dos formas explicadas y luego expliquen si Josefa, Alejandro, ambos o ninguno se encuentra en lo correcto.

6. Una agencia de publicidad creó el siguiente logotipo utilizando solo arcos de circunferencias para una marca de tablas de surf.



a. ¿Cuánto mide el ángulo del centro en cada semicircunferencia de centro O y O'?

b. Si la medida del segmento $\overline{AC}$ es de 8 cm y la medida del segmento $\overline{CB}$ es de 4 cm, ¿cuál es el perímetro de la figura?

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Página 48

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica de qué manera calculaste el perímetro de sectores y segmentos circulares.

- ¿Cómo resolviste el problema que te causó mayor dificultad? Explica tu estrategia utilizada.

Área de un sector y segmento circular

Objetivos

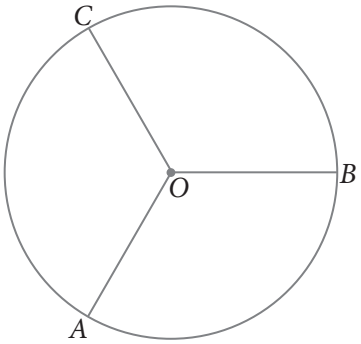
- Calcular el área de un sector circular.
- Calcular el área de un segmento circular.

Actitud

En geometría es importante que trabajes de manera ordenada, ya que esto te ayudará a comprender los conceptos matemáticos en juego.

En un restaurante de la ciudad se ofrece un servicio variado de menú, el tipo de plato que se muestra está dividido en 3 partes iguales, para servir diferentes preparaciones. Al ver el plato desde arriba la forma de este se relaciona con un círculo de radio O y diámetro 30 cm.





- ¿Cuánto es la medida del ángulo del centro? ▸

- Si se quiere calcular el área de uno de los sectores que se ocuparán con comida, ¿cómo lo calcularías? Explica.

Realiza tus cálculos

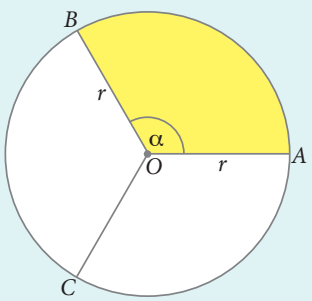
Explicación ▸

- A continuación, se formaliza el concepto relacionado con el área de un sector y segmento circular.

Conceptos

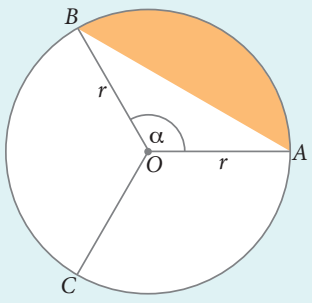
En un círculo de centro O y radio r, se tiene que:

▸ Para calcular el **área** del **sector circular**, realizas lo siguiente:



$$A_{\text{sector circular}} = \pi r^2 \cdot \frac{\alpha}{360°}$$

▸ Para calcular el **área** de un **segmento circular**, realizas lo siguiente:



$$A_{\text{segmento circular}} = A_{\text{sector circular}} - A_{\text{triángulo } OAB}$$

Ejemplo 1

En la imagen se muestra una pizza con forma circular que se ha dividido en partes iguales. ¿Cuál es el área del sector que se relaciona con la parte de la pizza que no aparece en la imagen?



1. El trozo representa la sexta parte, es decir, el ángulo central es de 60°.

2. Al calcular el área del sector circular, se tiene que:

$$A_{\text{sector circular}} = \pi \cdot 30^2 \cdot \frac{60°}{360°}\ \text{cm}^2 = 150\pi\ \text{cm}^2$$

PASO A PASO

3. Considerando $\pi \approx 3{,}14$; se tiene que $150 \cdot 3{,}14\ \text{cm}^2 = 471\ \text{cm}^2$.

4. Otra forma de resolver es dividir πr^2 por 6, ya que el trozo corresponde a la sexta parte, y se obtiene:

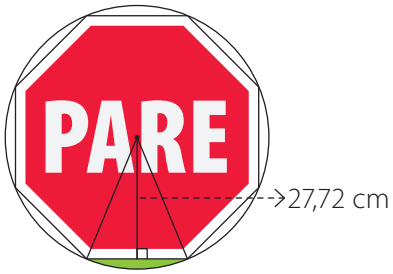
$$A_{\text{sector circular}} = \frac{\pi \cdot 30^2}{6}\ \text{cm}^2 = \frac{900\pi}{6}\ \text{cm}^2 = 150\pi\ \text{cm}^2$$

Respuesta: El área del sector circular es 150π cm^2, que aproximadamente es 471 cm^2 considerando $\pi \approx 3{,}14$.

Ejemplo 2

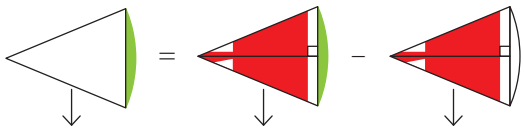
Marcela ha inscrito una señal de un disco pare, que corresponde a un octágono regular cuyos lados miden 22,96 cm, en un círculo de 60 cm de diámetro. ¿Cuál es el área del segmento circular de la parte pintada de color verde?

1. Como el diámetro del círculo mide 60 cm, su radio es 30 cm.



PASO A PASO

2. Para calcular el área, puedes resolver:



$$A_{\text{segmento circular}} = A_{\text{sector circular}} - A_{\text{triángulo}}$$

$$A_{\text{segmento circular}} = \left(30^2 \cdot \pi \cdot \frac{45°}{360°} - \frac{22{,}96 \cdot 22{,}72}{2}\right)\text{cm}^2$$

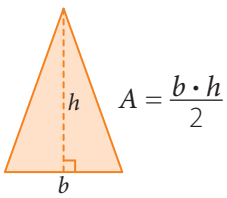
$$A_{\text{segmento circular}} = (112{,}5\pi - 260{,}8256)\ \text{cm}^2$$

Respuesta: El área del segmento circular es $(112{,}5\pi - 260{,}8256)$ cm^2.

Si $\pi \approx 3{,}14$ aproximadamente, ¿a cuánto corresponde al área del segmento circular? ¿De qué otra forma calcularías el área del segmento circular? Explica.

Atención

El área (A) de un triángulo de base b y altura h se calcula utilizando la expresión:



$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Ejercicios

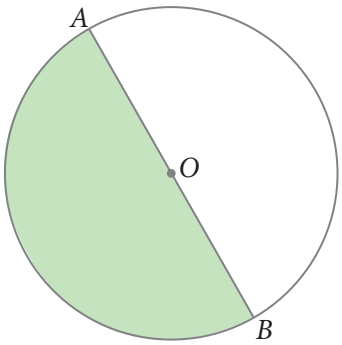
Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Completa la siguiente tabla según corresponda. Observa el ejemplo destacado.

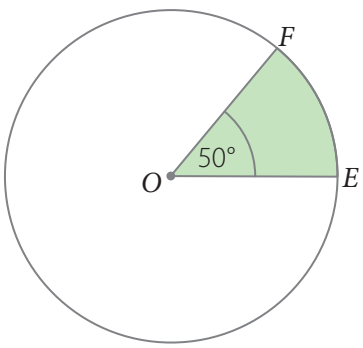
Ángulo central	Parte del ángulo completo	Parte del círculo	Área del sector con el radio r
270°	$\frac{270°}{360°}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} \cdot \pi r^2$
180°	$\frac{180°}{360°}$		
120°		$\frac{1}{3}$	
90°			$\frac{1}{4} \cdot \pi r^2$
60°		$\frac{1}{6}$	
45°	$\frac{45°}{360°}$		
α			

2. Calcula el área de cada sector circular o segmento circular. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

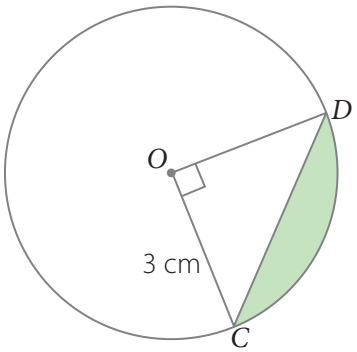
a. $\overline{AB}$ diámetro, $m(\overline{AB}) = 8$ cm.



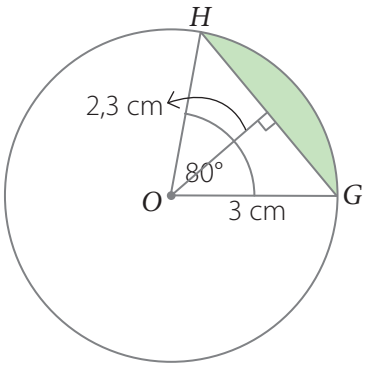
b. $m(\overline{OF}) = 5$ cm.



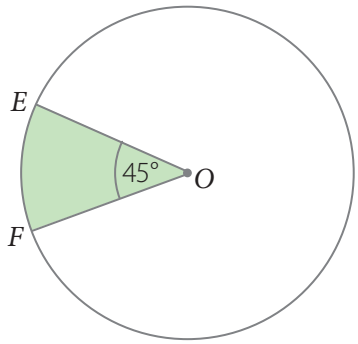
c. $\overline{CD}$ cuerda, $m(\overline{CD}) = 4{,}24$ cm.



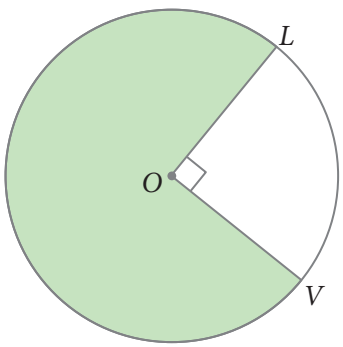
d. $m(\overline{HG}) = 3{,}86$ cm.



e. $m(\overline{OF}) = 5$ cm.

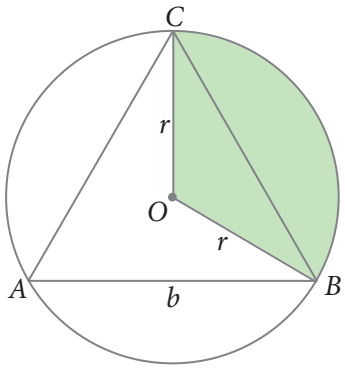


f. $m(\overline{OL}) = 4$ cm.

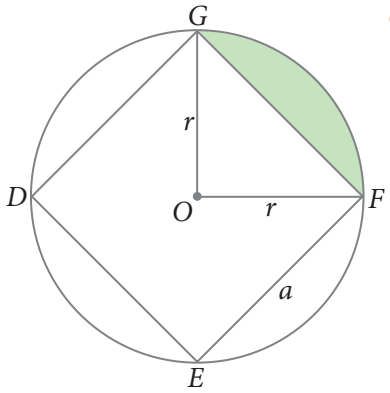


3. En cada círculo de centro O y radio r se ha inscrito un polígono regular. Explica cómo calcularías el área de cada sector circular o el área de cada segmento circular.

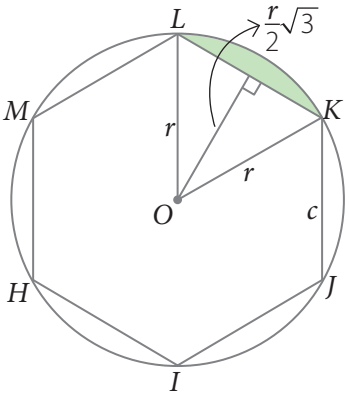
a.



b.

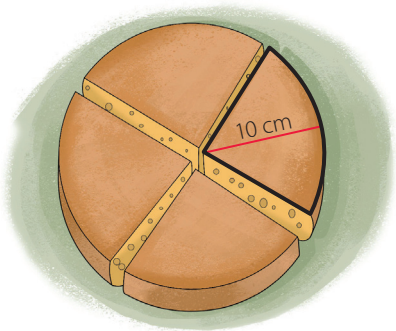


c.



4. Junto con un compañero, observa la resolución del siguiente problema. Luego explica si es correcta o no, y corrige de ser necesario.

Se calculará la superficie del trozo de queso que se ha marcado. La altura del trozo es de 7 cm.



1° Se calcula el área de la parte superior e inferior que corresponde a un sector circular, es decir:

▶ $2 \cdot \frac{100\pi}{4}\ \text{cm}^2 = 50\pi\ \text{cm}^2$

2° Las caras laterales se pueden representar por rectángulos congruentes de lado 7 cm y 10 cm, por lo que el área de las 3 caras laterales corresponde a:

▶ $3 \cdot 7 \cdot 10\ \text{cm}^2 = 210\ \text{cm}^2$

3° La superficie aproximada del trozo marcado corresponde a: $(50\pi + 210)\ \text{cm}^2$.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Página 49

Reflexiona sobre tu trabajo

- Para calcular el área de un sector y de un segmento circular, ¿qué elementos son necesarios conocer? Explica.

_____

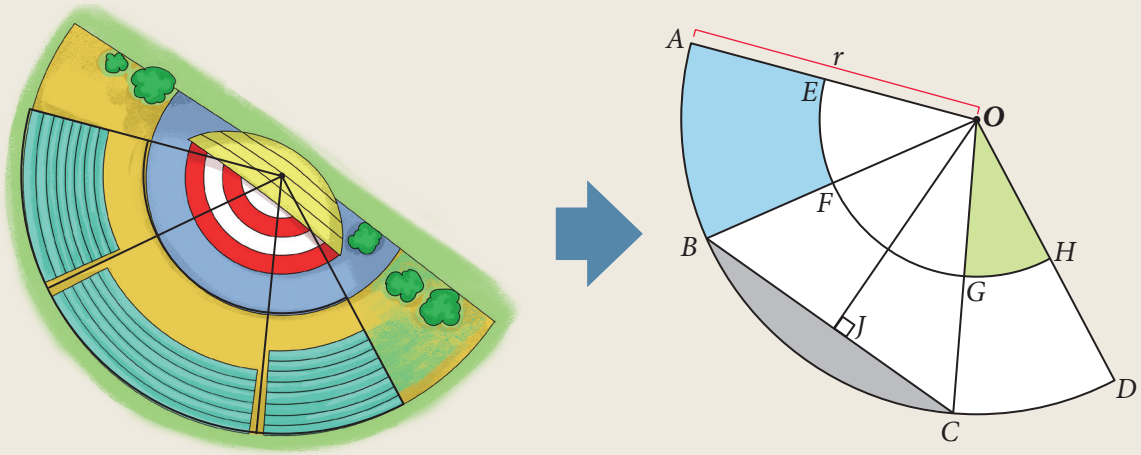
- Confiaste en tus propias capacidades para resolver los problemas propuestos, ¿qué mejorarías de tus capacidades? Explica.

_____

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 1

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

1. Diferentes anfiteatros tienen estructura semicircular, por ejemplo el anfiteatro al aire libre ubicado en la comuna de San Pedro de la Paz, Octava Región, tiene dicha forma. En particular, la ilustración muestra las medidas de un anfiteatro de centro O y radio igual a 27 m.



Considerando las siguientes medidas, $m(\widehat{AD}) = 145°$, $m(\widehat{AB}) = m(\widehat{CD}) = 35°$, $m(\overline{OF}) = 14$ m, $m(\overline{BC}) = 33$ m y $m(\overline{OJ}) = 21{,}42$ m. Responde.

a. ¿Cuánto es el perímetro y área del segmento circular de color gris? (3 puntos)

b. ¿Cuánto es el perímetro y área del sector circular de color verde? (3 puntos)

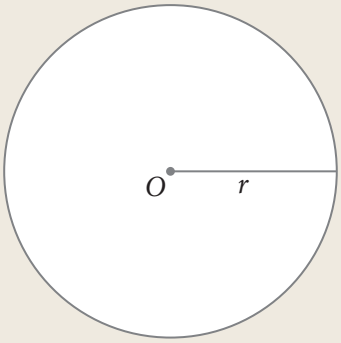
c. ¿Cuánto es el perímetro y área del sector de color celeste? Explica cómo lo calculaste. (3 puntos)

Realiza tus cálculos

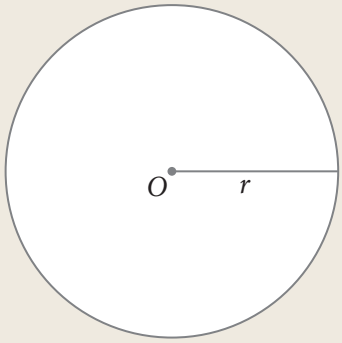
Explicación

2. Divide cada círculo de centro O y radio r de manera que se forme un ángulo del centro y luego responde.

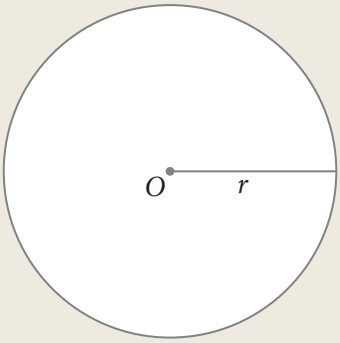
a. Divídela en 3 partes iguales. (1 punto)



b. Divídela en 4 partes iguales. (1 punto)



c. Divídela en 6 partes iguales. (1 punto)



d. Explica la relación que existe entre el ángulo del centro del círculo que se forma luego de dividirlo y el cálculo del perímetro y área de cada sector circular. (3 puntos)

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
2a, 2b y 2c	Reconocer la relación entre el círculo y los sectores circulares que lo componen.		**Logrado:** 9 puntos o más. **Medianamente logrado:** 7 a 8 puntos. **Por lograr:** 6 puntos o menos.
2d	Reconocer la relación entre el ángulo central y la parte del área o el perímetro del círculo.		
1a	Calcular perímetro y área de segmento circular.		
1b y 1c	Calcular perímetro y área de sector circular.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica la estrategia que utilizaste para resolver algún problema.
- Cumpliste las metas propuestas al iniciar el tema. Explica.

Tema 2

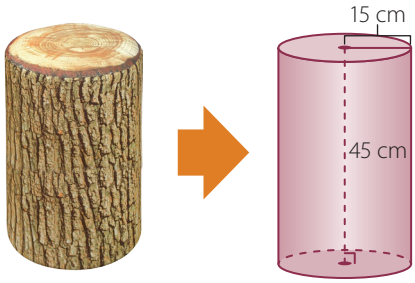
Área y volumen del cono

En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 2.

Recuerdo lo que sé

1. Lee la siguiente información.

En nuestro entorno hay variadas formas que se relacionan con diferentes cuerpos geométricos, en particular el trozo de tronco se puede relacionar con un cilindro.



a. Completa con la medida solicitada.

Radio de la base = ☐ Altura del cilindro = ☐

b. Para calcular el área y volumen de un cilindro, ¿qué datos son necesarios conocer? Explica.

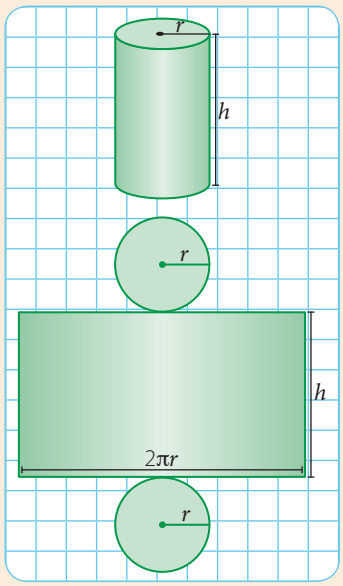
_____

_____

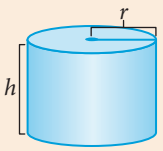
c. Calcula el área del cilindro.

d. Calcula el volumen del cilindro.

El **área** (A) **de un cilindro** está dada por:
$A = 2\pi \cdot r \cdot h + 2 \cdot \pi \cdot r^2$



El **volumen** (V) **de un cilindro** de radio r y altura h está dado por:
$V = \pi r^2 h$



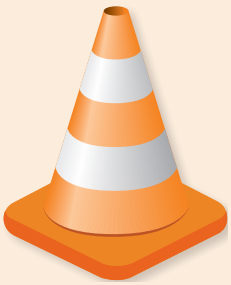
Diseño mi estrategia

2. Analiza cada caso y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

a. Observa las siguientes imágenes, ¿puedes construir una red de cuerpo geométrico que las represente? Explica qué medidas necesitas.







Explicación ▸ _____ **Respuesta**

_____

_____

_____

b. Si tuvieses una copa como la de la figura, para saber la cantidad máxima de líquido que podemos verter en ella, ¿qué necesitas calcular? ¿Cómo lo podrías calcular? ¿Qué estrategia utilizarías? Explica.



Mi estrategia ▸ _____ **Respuesta**

_____

_____

_____

3. Junto con un compañero o compañera, responde: ¿Es mayor el volumen de un cono o el de un cilindro si ambos tienen bases de igual radio y alturas de igual medida?, ¿creen que exista alguna relación? Argumenten su afirmación.

_____

Reflexiona sobre tu trabajo

- Al momento de responder las preguntas planteadas, ¿cómo crees que podrías mejorar aquellas en las que tuviste mayores dificultades? Explica.

_____

- ¿Demostraste interés, esfuerzo, perseverancia y rigor en la resolución de problemas? Explica.

_____

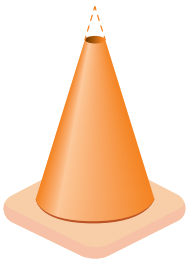
Área de un cono

Objetivo

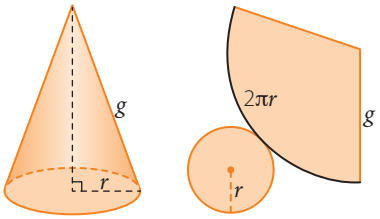
- Desarrollar la fórmula para calcular el área del cono.

Javiera observa un cono de señalización vial, prolonga la parte superior y lo relaciona de la siguiente manera.

Observa el cono de señalización vial



Lo relaciona con un cuerpo geométrico y luego con su correspondiente red



Habilidad

Al explicar procedimientos de soluciones propias estás desarrollando la habilidad de **argumentar** y **comunicar**.

- El radio r del sector circular de la red, ¿con qué elemento del cono se relaciona? Explica.

_____

_____

- ¿Por qué la longitud destacada es $2\pi r$? ¿Qué relación tiene con la base del cono? Justifica.

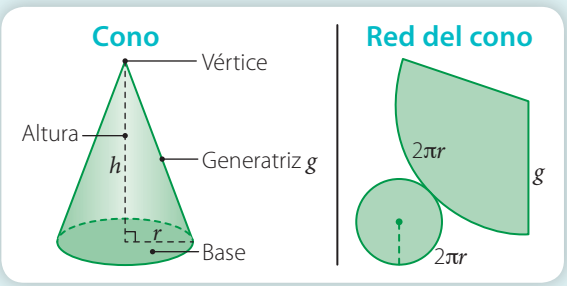
_____

_____

Conceptos

El **área de un cono** (A) puedes obtenerla al visualizar su red de construcción y la calculas utilizando:

$$A_{cono} = A_{base} + A_{lateral}$$
$$= \pi r^2 + \pi rg$$
$$= \pi r(r + g)$$



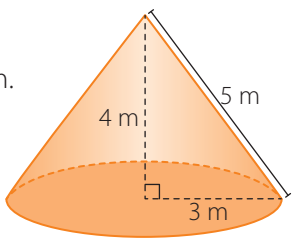
Ejemplo 1

¿Cuál es el área del siguiente cono?

Al observar la imagen, se tiene que $r = 3$ m y $g = 5$ m. Luego, al calcular el área, se tiene que:

$A = 3\pi(3 + 5)$ cm^2 $= 24\pi$ cm^2

Respuesta: El área del cono es 24π cm^2.

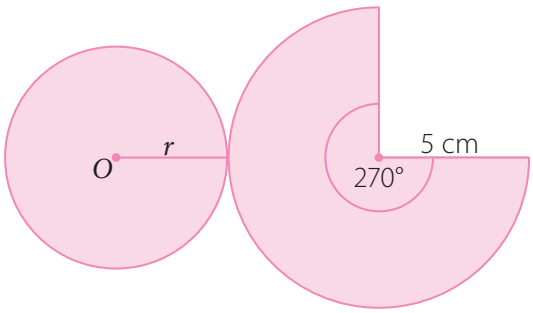


Ejemplo 2

Cálculo del área del cono de radio desconocido.

PASO A PASO

1. Observa que el área del manto del cono se relaciona con el área del sector circular correspondiente en su red de construcción, y se tiene lo siguiente:



$$A_{\text{sector circular}} = \pi \cdot 5^2 \cdot \frac{270°}{360°}\ \text{cm}^2 = \frac{75}{4}\pi\ \text{cm}^2$$

2. Además, para calcular el área de la base del cono es necesario saber la medida del radio. El área del manto lo calculas utilizando la expresión πrg, y se obtiene que:

$A_{\text{sector circular}} = A_{\text{manto}}$, es decir, $\frac{75}{4}\pi = 5\pi r$, de donde obtienes que $r = \frac{15}{4}$.

3. Luego, el área de la base será : $A_{\text{base}} = \pi \cdot \left(\frac{15}{4}\right)^2\ \text{cm}^2 = \frac{225}{16}\pi\ \text{cm}^2$.

4. Finalmente el área del cono resulta: $\left(\frac{75}{4}\pi + \frac{225}{16}\pi\right)\text{cm}^2 = \frac{525}{16}\pi\ \text{cm}^2$.

Recursos Digitales Complementarios

RDC 7

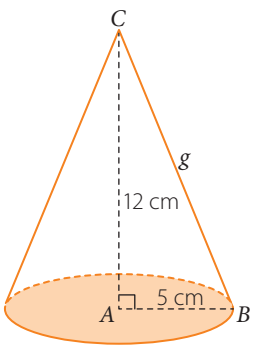
Ejemplo 3

Cálculo del área del cono de generatriz desconocida.

PASO A PASO

1. Para calcular el área (A) de un cono utilizas la expresión $A = \pi r\,(r + g)$

2. El radio r mide 5 cm, por lo que falta calcular la medida de la generatriz g. Para calcularla se utilizará el teorema de Pitágoras en el triángulo ABC.



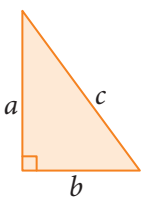
$$12^2 + 5^2 = g^2$$
$$\sqrt{12^2 + 5^2} = g$$
$$\sqrt{169} = g$$
$$13 = g$$

3. Luego, el área corresponde a: $A = 5\pi(5 + 13)\ \text{cm}^2 = 90\pi\ \text{cm}^2$ y al considerar $\pi \approx 3{,}14$, se tiene que es aproximadamente 282,6 cm^2.

Respuesta: El área del cono es $90\pi\ \text{cm}^2$ y al considerar $\pi \approx 3{,}14$; se tiene que aproximadamente es: 282,6 cm^2.

Atención

Recuerda que en un triángulo rectángulo:



el teorema de Pitágoras establece que:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

Además tienes que:

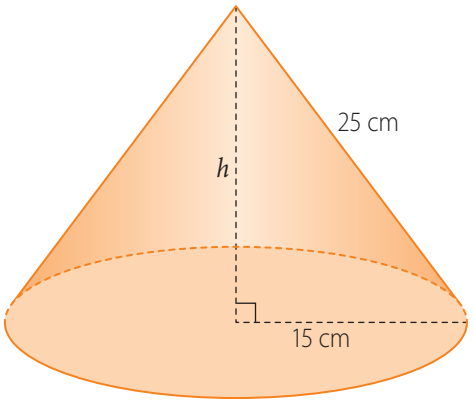
$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Ejercicios

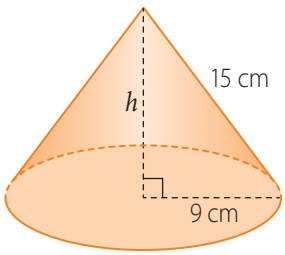
Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Calcula el área del cono. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

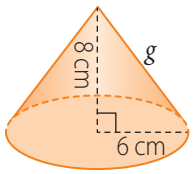
a.



b.



c.



2. En la tabla se muestran las medidas del radio, generatriz y volumen de un cono. Complétala según corresponda.

Radio (r)	Generatriz (g)	Área del cono ($A = \pi r(r + g)$)
5 cm	7 cm	
7 cm		105π cm^2
	15 cm	184π cm^2
12 cm	20 cm	
10 cm		250π cm^2

3. Observa la red del cono que se muestra y luego responde.

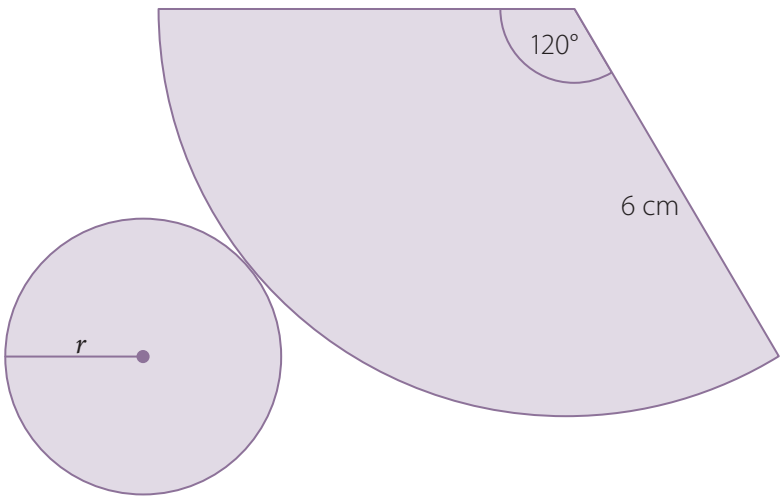
a. ¿Con qué parte de la base del cono coincide el sector circular?

b. ¿Cuánto es el área del sector circular?

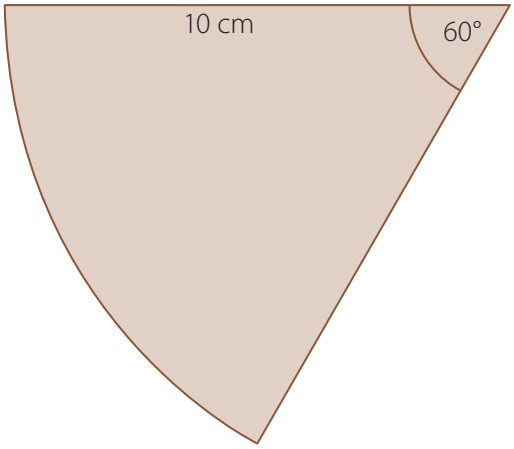
c. ¿Con qué elemento del cono relacionas el sector circular?

d. ¿Cuánto mide el radio (r) del círculo?

e. ¿Cuál es el área del cono relacionada con la red que se muestra?



4. **Un estudiante quiere confeccionar la red de un cono, y solo ha confeccionado la red del manto que se muestra.**



a. ¿Cuál es el área del sector circular?

b. ¿Cuánto debe medir el radio de la base del cono?

c. ¿Cuál es el área de la base del cono?

d. ¿Cuál es el área del cono?

e. Confecciona la red del cono y anota en ella las medidas del radio, generatriz y ángulo central.

5. **Resuelve el siguiente problema.**

Se tiene un espacio circular de diámetro 9 m y se quiere instalar una carpa con forma de cono, hecha de tela, con altura 4 m. Considerando $\pi \approx 3{,}14$, responde.

a. La medida del radio de la base del cono.

b. La medida de la generatriz del cono.

c. Julio y Sandra realizan una estimación del total de la tela que se necesita, Julio afirma que para el manto se necesitan 20 m^2 de tela, en cambio Sandra dice que se necesitan más. Julio, Sandra o ninguno se encuentra en lo correcto. Explica.

6. **Junto con un compañero o compañera confecciona una red del cono con las siguientes medidas: radio 5 cm, y generatriz 7 cm y luego responde.**

a. Al confeccionar la red, ¿cuánto mide el ángulo del sector circular que se relaciona con el manto del cono?

b. ¿Cuánto mide la altura del cono?

c. La generatriz del cono puede ser de 5 cm y el radio del cono puede ser 7 cm, ¿por qué? Explica.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 50 - 51

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Argumentaste y comunicaste tus conclusiones a tus compañeros? Explica.

_____

_____

- ¿Aplicaste las fórmulas para calcular el área del cono en variados contextos? Explica.

_____

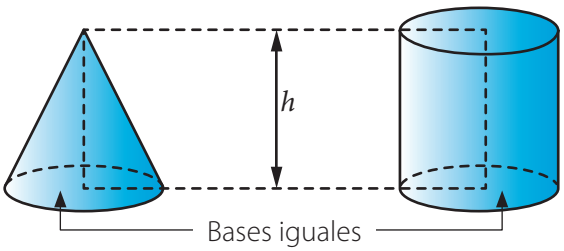
_____

Volumen de un cono

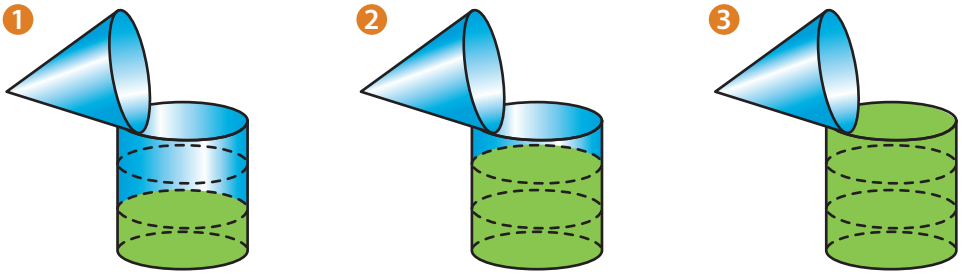
Objetivo

- Desarrollar la fórmula para calcular el volumen de un cono.

En una tienda Cristian compra un recipiente con forma de cono y otro con forma de cilindro. Ambos tienen igual base y altura.



Luego el recipiente con forma de cono lo llena y lo vierte en el recipiente con forma de cilindro, tantas veces hasta llenarlo.



Actitud

Al momento de resolver un problema no olvides explicar tus ideas propias de manera clara y coherente.

- ¿Con cuántos recipientes cónicos se llenó el cilindro? Explica.

_____

_____

- Si supieras el volumen del cilindro, ¿qué podrías afirmar con respecto del volumen de un cono? ¿Cómo lo calcularías? Explica.

_____

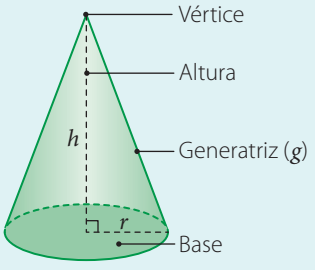
_____

Conceptos

El **volumen (V) de un cono** corresponde a un tercio del volumen de un cilindro con igual área de la base e igual medida de la altura. Se encuentra dado por la expresión:

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot V_{cilindro}$$

$$V_{cono} = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$$

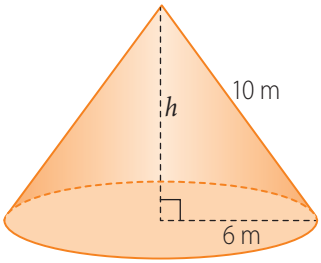


Ejemplo 1

¿Cuánto es el volumen del cono?

PASO A PASO

1 Al aplicar el teorema de Pitágoras para calcular la medida de la altura del cono, se tiene que:



$$\begin{aligned} 10^2 &= 6^2 + h^2 \\ 100 &= 36 + h^2 \\ 100 - 36 &= h^2 \\ 64 &= h^2 \\ \sqrt{64} &= h \\ 8 &= h \end{aligned}$$

Luego, la medida de la altura del cono es 8 m.

2 Al calcular el volumen del cono remplazas $r = 6$ m y $h = 8$ m en la expresión:

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \pi \cdot 6^2 \cdot 8 \text{ m}^3 \\ &= \frac{288}{3}\pi \text{ m}^3 \\ &= 96\pi \text{ m}^3 \end{aligned}$$

Respuesta: El volumen del cono, es 96π m^3 y considerando $\pi \approx 3{,}14$, el volumen es aproximadamente 301,44 m^3.

Recursos Digitales Complementarios

RDC 8

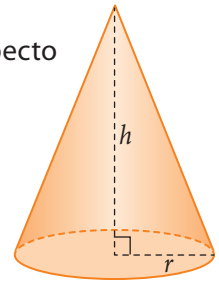
Atención

El **volumen** (V) corresponde al espacio que ocupa un cuerpo. Algunas unidades de medida de volumen son:

- km^3 (kilómetro cúbico)
- m^3 (metro cúbico)
- cm^3 (centímetro cúbico)

Ejemplo 2

Si en el siguiente cono se aumentan al doble las medidas del radio y la altura, ¿cuál será la variación porcentual respecto de su volumen?



PASO A PASO

1 El volumen del cono se calcula como: $V_1 = \frac{1}{3}\pi r^2 h$.

2 Las medidas aumentadas al doble del radio y su altura corresponden a $2r$ y $2h$, respectivamente, por lo que su volumen sería:

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot (2r)^2 \cdot (2h) = \frac{8}{3}\pi^2 rh$$

3 Para calcular la variación porcentual, se tiene que:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{8}{3}\pi^2 rh} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Esto equivale a un aumento del 12,5 %.

Respuesta: Si las medidas de la altura y base de un cono aumentan al doble, se tiene que el volumen aumentaría en un 12,5 %.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Observa los siguientes cuerpos geométricos. Recuerda que el volumen (V) de un cilindro de radio r y altura h se calcula utilizando la expresión $V = \pi r^2 h$.

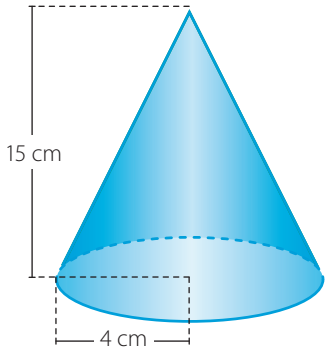


a. Si el radio de la base del cono es igual al radio de las bases del cilindro, ¿qué fracción del volumen del cilindro es igual al volumen del cono?

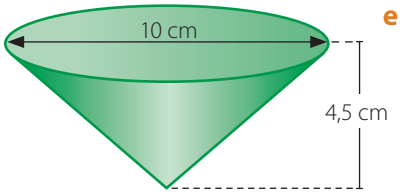
b. Si el volumen del cilindro es igual a $1\,296\pi$ cm^3 y sin utilizar la expresión para calcular el volumen del cono, ¿cuánto es el volumen del cono? Explica cómo lo calculaste.

2. Calcula el volumen de los siguientes conos.

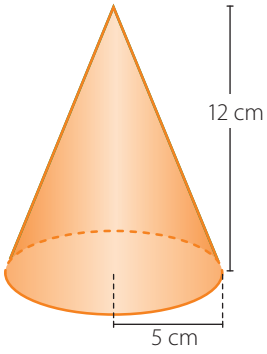
a.



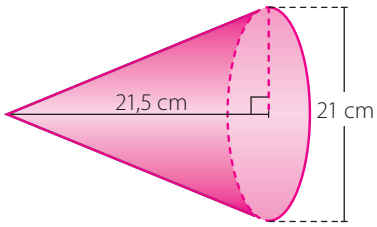
c.



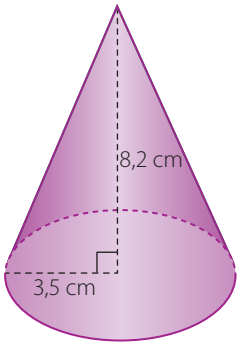
e.



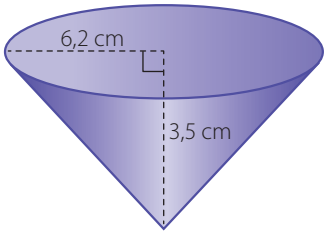
b.



d.



f.



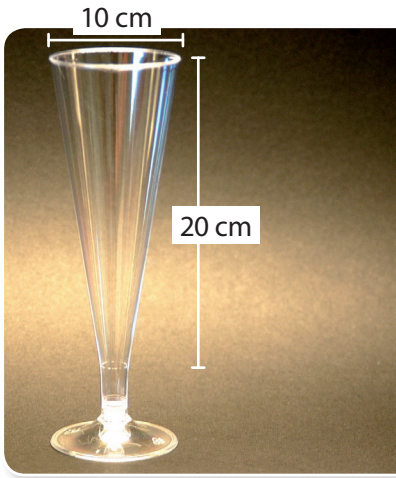
3. Considerando un cono de radio r y área h, responde.

a. Si el radio aumenta al doble y su altura se reduce a la mitad, ¿cuál es la expresión que corresponde al volumen del cono?

b. Si el radio disminuye a la mitad y su altura aumenta al doble, ¿cuál es la variación porcentual respecto del cono original?

c. Es correcto afirmar que si el radio y altura aumentan al triple, el volumen también aumenta al triple respecto del volumen original, ¿por qué? Explica.

4. Resuelve los siguientes problemas.



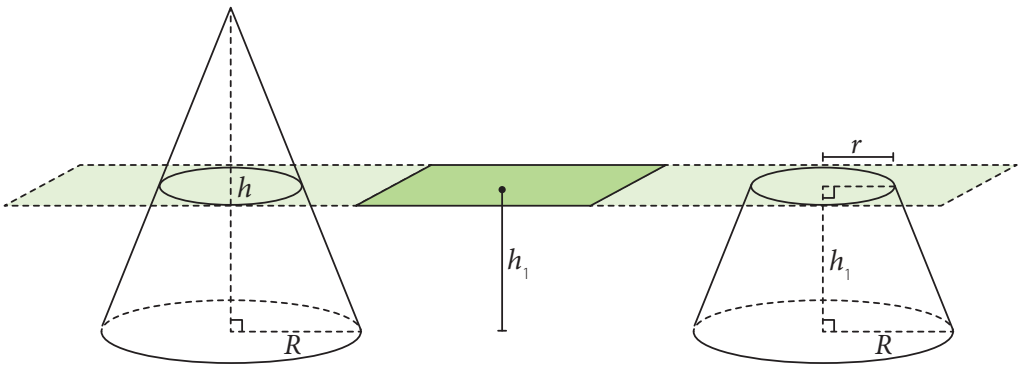
a. ¿Cuánta agua podemos verter en un cono con las siguientes medidas: diámetro de la base 10 cm y altura 15 cm?

b. Una carpa tiene forma cónica con radio basal igual a 3 m y su capacidad es de $5{,}25\pi$ m^3, ¿cuál es la altura de la carpa?

c. En una convivencia Sandra le servirá jugo de diferentes sabores a sus invitados. Para ello utilizará copas con forma cónica como las que se muestran. Si dispone de 5 litros de jugo y todas las copas se llenarán hasta su máxima capacidad. ¿Cuántas copas puede llenar? (Considera $\pi \approx 3{,}14$ y que 1 litro equivale a 1 000 cm^3).

5. Junto con un compañero resuelve el siguiente problema.

Se tiene un cono de radio R y altura h, el cual es cortado por un plano a una altura h_1 ($h_1 < h$), formando un cono truncado, como se muestra a continuación:



Cono Cono truncado

Un estudiante afirma que, ya que el radio de una de sus caras es r, para calcular el volumen del cono truncado se utiliza la expresión $V_{\text{cono truncado}} = \frac{1}{3}\pi r^2 h_1$.

a. Están de acuerdo con el estudiante. ¿Por qué? Argumenta tu respuesta.

b. Suponiendo las siguientes medidas, $R = 6$ cm, $r = 4$ cm, $h = 12$ cm y $h_1 = 5$ cm, ¿cuánto es el volumen del cono y del cono truncado? ¿En qué porcentaje el volumen del cono disminuye al cortarse por el plano?

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 52 - 53

Reflexiona sobre tu trabajo

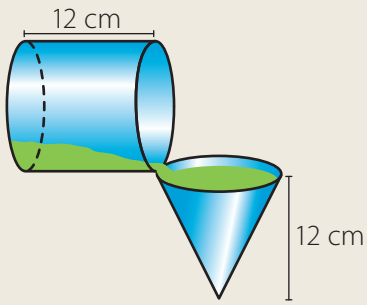
- ¿Cómo se relaciona el volumen del cono con el volumen de un cilindro? Explica.

- ¿Aplicaste la fórmula del volumen del cono para resolver problemas? Explica.

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 2

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

1. Un recipiente con forma de cilindro de radio igual a 5 cm se encuentra lleno de líquido y se vierte agua en un recipiente cónico de radio igual al del cilindro hasta llenarlo, como se muestra a continuación.



a. ¿Cuánto es el volumen del cilindro luego de verter el agua en el cono? (2 puntos)

Explicación▸ _____

_____

_____

_____

Realiza tus cálculos

b. ¿Cuánto es el volumen del cono? (2 puntos)

Explicación▸ _____

_____

_____

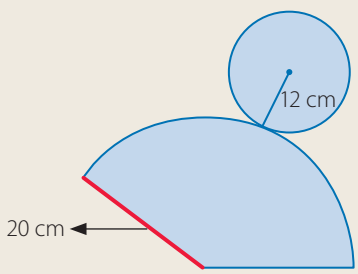
_____

Realiza tus cálculos

c. ¿Cuál es la relación entre el volumen del cono y el volumen del cilindro? Explica. (2 puntos)

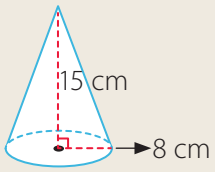
_____

2. La red que se muestra corresponde a la de un cono, ¿cuánto es el área del cono? (3 puntos)



3. Calcula el área (A) y el volumen (V) de cada cono. (2 puntos cada uno)

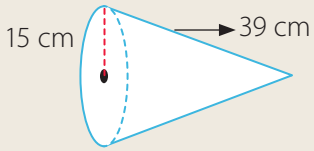
a.



$A =$

$V =$

b.

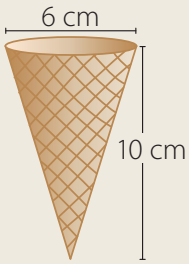


$A =$

$V =$

4. Resuelve el siguiente problema. Considera $\pi \approx 3{,}14$.

Alejandro vende barquillos como los que se muestran en la imagen, los que venderá llenos hasta su máxima capacidad.



a. ¿Cuál es el área del manto del cono? Considera $\sqrt{109} \approx 10{,}44$. (2 puntos)

b. ¿Cuál es el volumen del cono? (2 puntos)

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1	Determinar la relación entre el volumen del cono y del cilindro.		**Logrado:** 10 puntos o más. **Medianamente logrado:** 8 a 9 puntos. **Por lograr:** 7 puntos o menos.
2	Desarrollar la fórmula del área de un cono identificándola con el área de su red.		
3	Calcular el área y volumen de un cono.		
4	Resuelven problemas que involucren volúmenes y áreas de conos.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica la estrategia que utilizaste para resolver algún problema.

- ¿Cumpliste las metas propuestas al iniciar el tema? Explica.

Tema 3

Homotecia y teorema de Tales

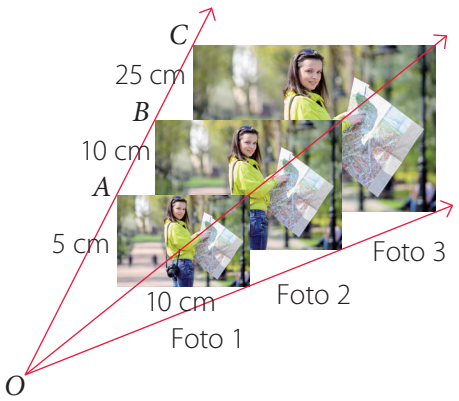
En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 3.

Recuerdo lo que sé

1. Lee la siguiente información.

Tomamos fotos a diferentes situaciones que nos ocurren, ya sea con los amigos, con la familia, en diferentes lugares, etc. En la imagen se muestra a un joven fotografiando a su amiga y también la fotografía revelada proporcionalmente en distintos tamaños.





a. Considerando la foto 1, completa con las siguientes medidas y luego explica cómo calcularías el valor de la razón.

$\frac{\text{Largo}}{\text{Ancho}} \rightarrow \frac{\square}{\square} = \square$ $\quad$ $\frac{\text{Ancho}}{\text{Largo}} \rightarrow \frac{\square}{\square} = \square$

Explicación: _____

_____

La **propiedad fundamental de las proporciones** establece que: "En toda proporción se cumple que el producto de los medios es igual al producto de los extremos", es decir, si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces: $a \cdot d = b \cdot c$

b. Para que las medidas de la foto 2 mantengan el mismo valor de la razón de la foto 1, ¿cuánto debe medir cada lado? Explica cómo lo calculaste.

c. Si la medida del largo en la foto 3 es de 40 cm, ¿se mantiene el valor de la razón como en las otras fotos? De no mantenerse, ¿cuánto debería ser la medida?

Diseño mi estrategia

2. Analiza cada caso y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

a. Si las medidas de la foto 1 aumentan al doble, ¿se conserva el valor de la razón respecto de las medidas originales? Explica.

Resuelvo

Mi estrategia ▸ _____

b. Considerando las medidas de las fotos 1 y 2, obtenidas en la actividad **1.** y además que $m(\overline{OA}) = 6$ cm, ¿cuánto mide la distancia entre O y B? ¿Podrás plantear una estrategia para responder este tipo de problemas? Explica.

Resuelvo

Mi estrategia ▸ _____

3. Comenta tus estrategias con un compañero o compañera. Luego escribe lo que te sirvió para mejorar la tuya.

Reflexiona sobre tu trabajo

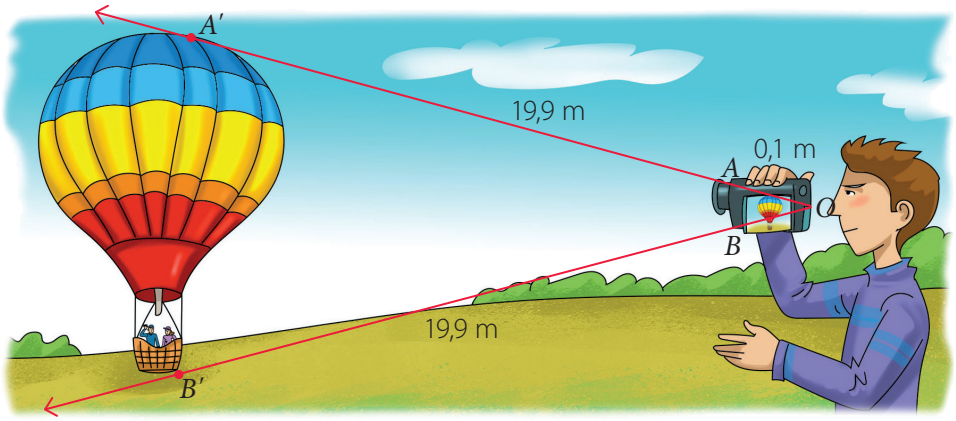
- ¿Confiaste en tus capacidades al momento de responder a las preguntas planteadas, incluso cuando no conseguiste una respuesta en forma inmediata? Explica.
- ¿Qué conocimientos de años anteriores utilizaste para desarrollar las actividades?
- ¿Qué dificultades tuviste para responder las preguntas anteriores? Explica cómo podrías resolverlas.

Homotecia

Objetivo

- Comprender el concepto de homotecia.

Luciano y Javiera contrataron un tour en un globo aerostático y un amigo de ellos grabó el momento en que suben al globo.



- ¿Qué representa la distancia OA'? ¿Y la distancia OB'? Explica.

_____

_____

Habilidad

Al elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, estás utilizando la habilidad de **representar**.

- Suponiendo que $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ tienen la misma medida, completa las siguientes expresiones.

$$\frac{OA'}{OA} = \frac{\square}{\square} = \square \qquad \frac{OB'}{OB} = \frac{\square}{\square} = \square$$

- ¿Qué relación hay entre los cocientes anteriores? Explica.

_____

_____

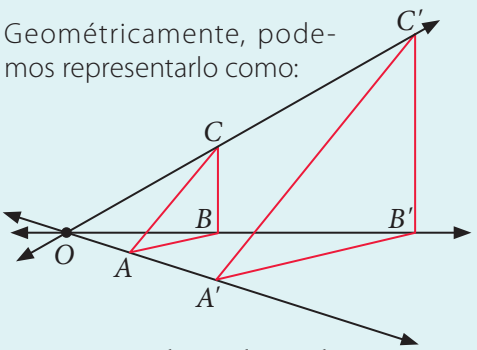
Conceptos

Una **homotecia** es una transformación geométrica que permite obtener una figura con igual forma a otra.

Dos figuras son **homotéticas** si al unir mediante rectas sus vértices correspondientes estas rectas concurren en un único punto, llamado **centro de homotecia** (O).

En una homotecia, la **razón** entre la distancia del centro de homotecia (O) al vértice de la figura imagen y la distancia del centro de homotecia (O) al vértice de la figura original se llama **razón de homotecia** (k).

Geométricamente, podemos representarlo como:



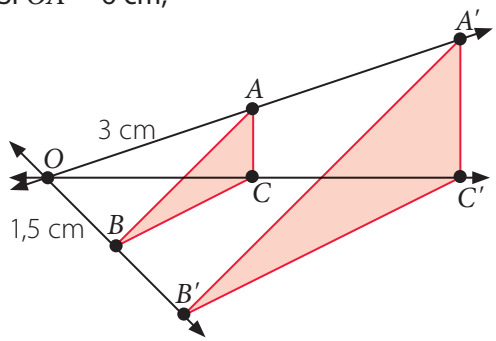
$$k = \frac{A'O}{AO} = \frac{B'O}{BO} = \frac{C'O}{CO}$$

Ejemplo 1

Sobre el triángulo ABC se realizó una homotecia de centro O. Si $OA' = 6$ cm, ¿cuánto mide $\overline{BB'}$?

PASO A PASO

1. Al plantear la proporción, se tiene: $\frac{A'O}{AO} = \frac{B'O}{BO} \blacktriangleright \frac{6}{3} = \frac{B'O}{1{,}5}$
2. Aplicando el teorema fundamental de las proporciones, se tiene: $6 \cdot 1{,}5 = 3 \cdot B'O \blacktriangleright B'O = 3$.
3. Ya que $OB' = OB + BB'$, se tiene que: $3 = 1{,}5 + BB' \blacktriangleright BB' = 1{,}5$.



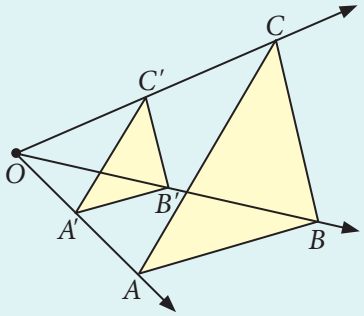
Respuesta: La medida de $\overline{BB'}$ es 1,5 cm.

Conceptos

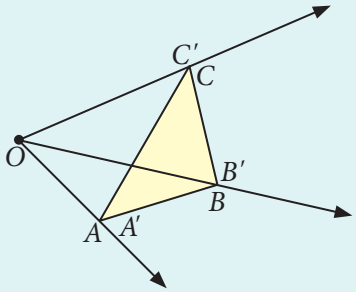
Dependiendo del valor de la razón ($k \neq 0$), se tiene lo siguiente:

1. Si $k > 0$, es una **homotecia directa** y se tienen los siguientes casos:

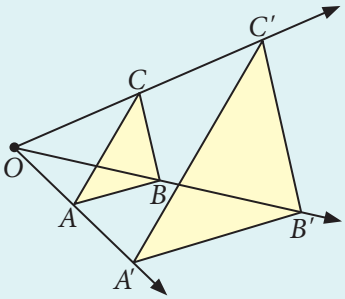
Si $0 < k < 1$, la figura resultante es una **reducción** de la figura original y ambas figuras están al mismo lado del centro de homotecia (O).



Si $k = 1$, la figura resultante es **congruente** con la figura original.

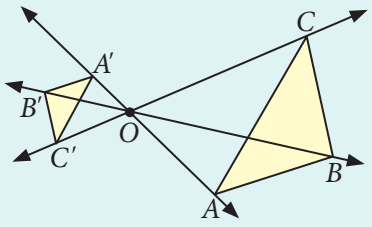


Si $k > 1$, la figura resultante es una **ampliación** de la figura original y ambas figuras están al mismo lado del centro de homotecia (O).

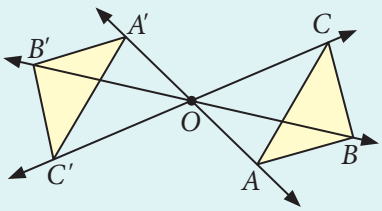


2. Si $k < 0$, es una **homotecia inversa** y se tienen los siguientes casos:

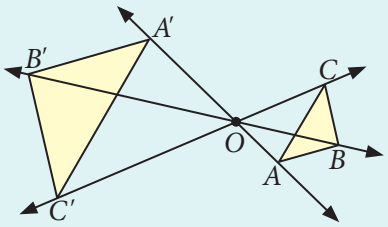
Si $-1 < k < 0$, la v es una **reducción** de la figura original y el centro de homotecia (O) está ubicado entre ambas figuras.



Si $k = -1$, la figura resultante es **congruente** con la figura original.



Si $k < -1$, la figura resultante es una **ampliación** de la figura original y el centro de homotecia (O) está ubicado entre ambas figuras.



Ejemplo 2

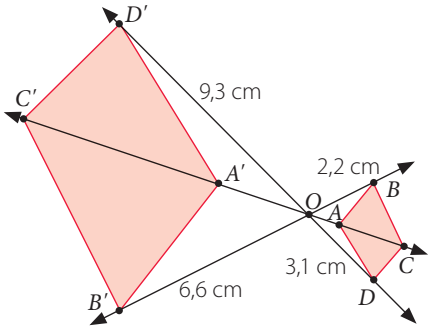
Sobre el cuadrilátero $ADCB$ se realizó una homotecia con centro en O, resultando el cuadrilátero $A'D'C'B'$. ¿Cuánto es el valor de la razón de homotecia?

1 Al calcular el cociente, se tiene:

$$k = \frac{OD'}{OD} = \frac{9,3}{3,1} = 3 \text{ y } k = \frac{OB'}{OB} = \frac{6,6}{2,2} = 3$$

PASO A PASO

2 Ya que el centro de la homotecia está entre ambas figuras, la homotecia es inversa y el valor de la razón es negativo.



Respuesta: El valor de la razón es –3.

Si OC' mide 8,4 cm, ¿cómo calcularías la medida de OC? Explica.

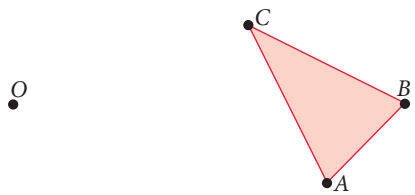
Ejemplo 3

Utiliza regla y compás para explicar cómo puedes realizar una homotecia de razón 2 y centro en O sobre el triángulo ABC.

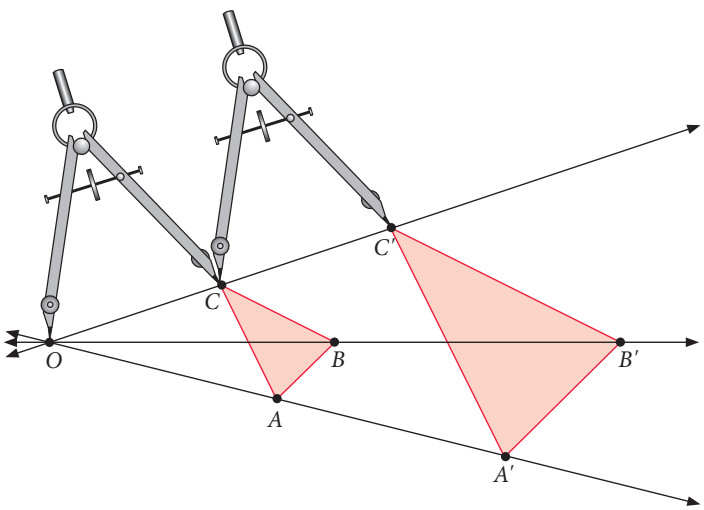
1 Utilizando una regla, trazas desde el centro O rectas que pasen por cada vértice del triángulo.

PASO A PASO

2 Luego, con el compás con centro en O y radio $\overline{OC}$, la replicas sobre la misma recta otra vez con centro en C. Realiza lo mismo con cada uno de los otros vértices.



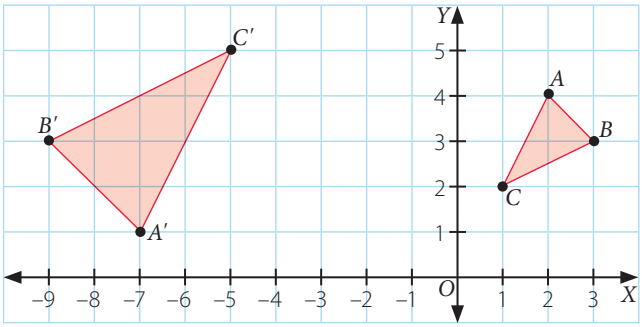
3 Finalmente trazas los segmentos sobre cada figura imagen obteniendo el triángulo $A'B'C'$ como se muestra a continuación:



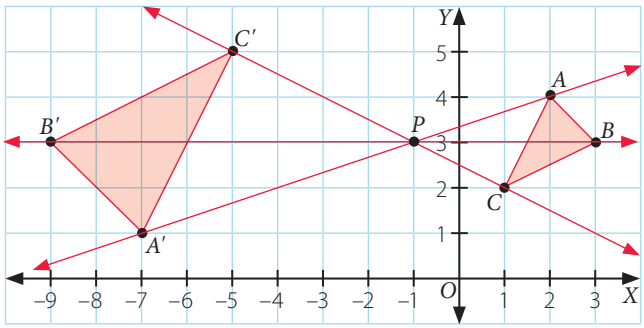
Utilizando un transportador, mide los ángulos internos y utilizando una regla mide los lados de los triángulos ABC y $A'B'C'$. ¿Qué puedes afirmar respecto de dichas medidas? ¿Es correcto afirmar que el lado $\overline{BC} \parallel \overline{B'C'}$? Argumenta tu respuesta.

Ejemplo 4

Al triángulo ABC se le aplicó una homotecia resultando el triángulo $A'B'C'$. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de homotecia P?



Para determinar las coordenadas del centro de homotecia se trazan las rectas que van de cada vértice de la figura original a la figura imagen. La intersección de dichas rectas corresponderá al centro de homotecia (P).



Respuesta: El punto del centro de homotecia es $P(-1, 3)$.

En este caso, ¿cómo calcularías el valor de la razón de homotecia? Explica.

Visita la Web

Para saber más sobre homotecia, visita el siguiente sitio web:

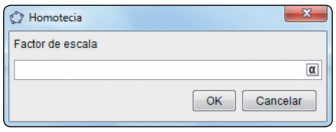
http://www.disfrutalas matematicas.com/ geometria/reescala.html

Herramientas tecnológicas

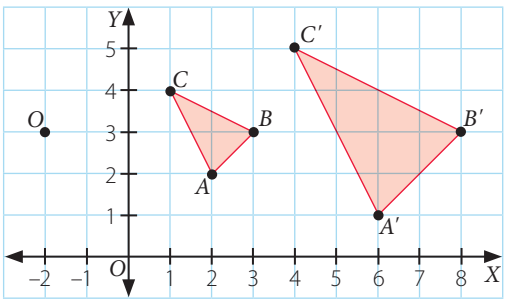
Nota: la aplicación GeoGebra (www.geogebra.org), creada por Markus Hohenwarter, fue incluida en este texto con fines de enseñanza y a título meramente ejemplar.

Para construir una homotecia utilizando el *software* GeoGebra, considera lo siguiente:

1. Utilizando el botón construyes el polígono correspondiente.
2. Con el botón ubicas el centro de homotecia.
3. Finalmente, con el botón haz clic en la figura, el centro de homotecia y luego se abrirá esta ventana, que es donde debes ingresar el valor de la razón de homotecia.



Por ejemplo, a continuación se muestra la aplicación de una homotecia al triángulo ABC de centro $O(-2, 3)$ y valor de razón de homotecia igual a 2.

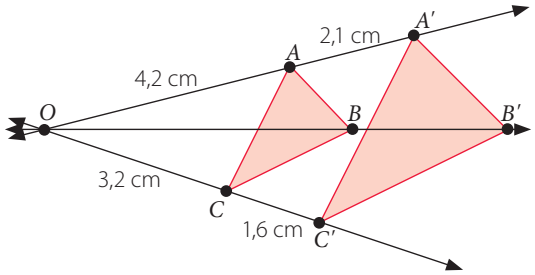


Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

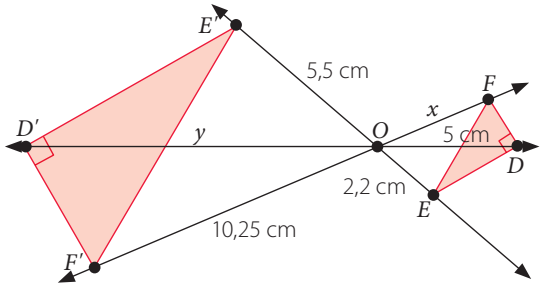
1. Observa cada homotecia que se aplica y luego responde.

a.



- ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia?
- Si $OB = 5$ cm, ¿cuánto mide BB'?
- Si $CA = 2{,}2$ cm, ¿cuánto mide $C'A'$?
- Si $m(\measuredangle ABC) = 72°$, ¿cuánto es la $m(\measuredangle A'B'C')$?

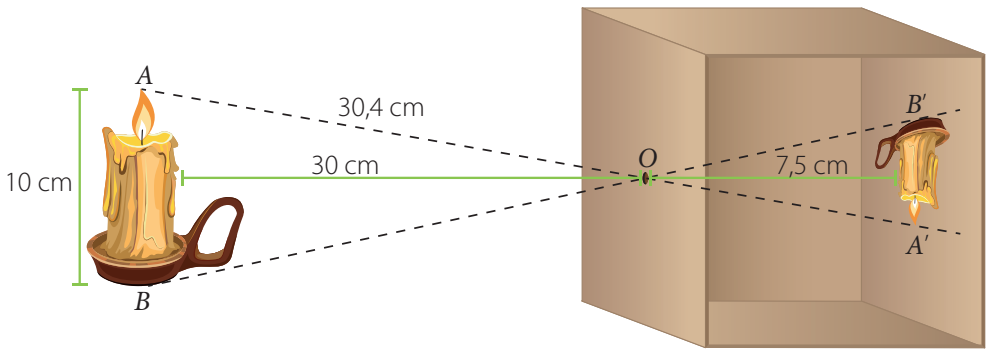
b.



- ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia?
- ¿Cuánto es $x + y$?
- Si $FE = 2{,}5$ cm, $ED = 2$ cm y $DF = 1{,}5$ cm, ¿cuál es el perímetro del $\Delta E'D'F'$?
- Si $m(\measuredangle D'E'F') = 20°$, ¿cuánto es la $m(\measuredangle EFD)$?

c. En la homotecia realizada en **a.** y en **b.**, ¿qué puedes concluir respecto de sus ángulos internos? ¿Corresponden a una homotecia directa o inversa? Explica.

2. Ciencias **Una cámara oscura es un instrumento que permite obtener una imagen plana proyectada a partir de una imagen real utilizando principios de la óptica.**



a. ¿Cuál es la clasificación de la homotecia?

b. ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia?

c. ¿Cuánto es la medida de la proyección de la vela en la cámara oscura ($B'A'$)?

d. Si $OB = OA$, ¿cuál es el perímetro del triángulo $OA'B'$?

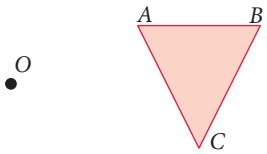
3. Escribe V si la afirmación es verdadera o F si es falsa.

a. ( ) Si el valor de razón de una homotecia cumple que $|k| > 1$, se tiene una reducción.

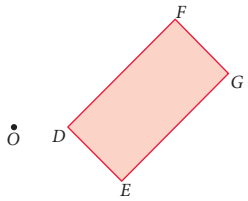
b. ( ) Si el valor de razón de una homotecia cumple que $k > 0$, es una homotecia directa.

4. Utilizando regla y compás construye cada homotecia de centro O y valor de razón k.

a. $k = 2$



b. $k = -1$

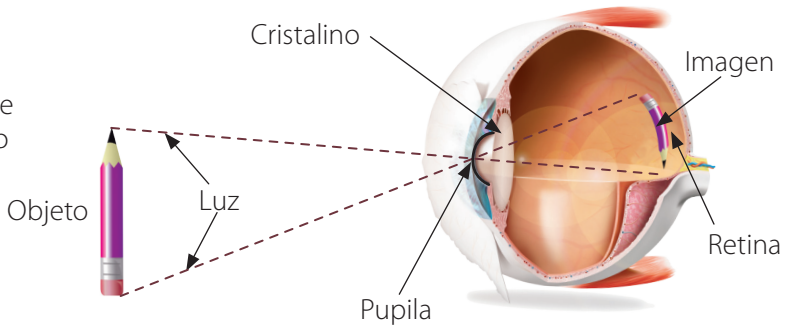


5. Biología **En el proceso de la visión, la luz reflejada por los objetos ingresa a nuestro ojo por la pupila y se proyecta en la retina, la cual contiene receptores visuales, que son los encargados de transmitir la información al cerebro. El ojo humano tiene forma parecida a una esfera y tiene un radio promedio aproximado de 2,5 cm.**

a. ¿Cuál es el centro de la homotecia? ¿Cómo lo supiste? Explica.

b. En este caso, ¿el valor de la razón de homotecia es un número positivo o negativo? Argumenta.

c. Si se observa un lápiz que mide 10 cm de altura a 20 cm de distancia, ¿cuál será el largo de la imagen proyectada en la retina?



6. Artes visuales **El punto de fuga es el lugar geométrico que corresponde al punto donde las rectas paralelas se juntan (convergen) de acuerdo a la perspectiva que se tenga.**

a. En la imagen, ¿qué elementos relacionas con segmentos que son paralelos? Explica.

b. Realiza en tu cuaderno el dibujo que se muestra y explica cuál es el punto de fuga.



Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Cómo explicarías con tus palabras el concepto de homotecia?

_____

- ¿Demostraste confianza en tus capacidades para resolver los problemas? Explica.

_____

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Página 54

Homotecia de forma vectorial

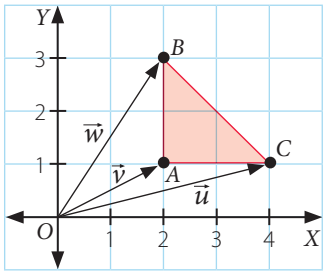
Objetivo

- Describir la homotecia de figuras planas mediante el producto de un vector y un escalar.

Actitud

Al momento de resolver un desafío confía en tus capacidades, aun cuando no consigas un resultado inmediato.

En el plano cartesiano se ha representado el triángulo ACB con los vectores $\vec{v}$, $\vec{u}$ y $\vec{w}$, respectivamente, que van desde el origen (O) a cada uno de los vértices del triángulo.



Al multiplicar por 2 el vector $\vec{u} = (4, 1)$, se tiene:

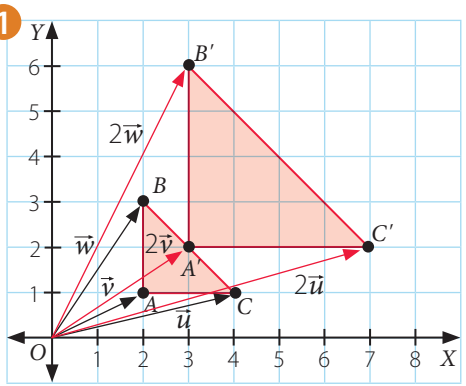
$2 \cdot \vec{u} = (2 \cdot 4, 2 \cdot 1) = (8, 2)$

- Multiplica los vectores $\vec{v}$ y $\vec{w}$ por 2.

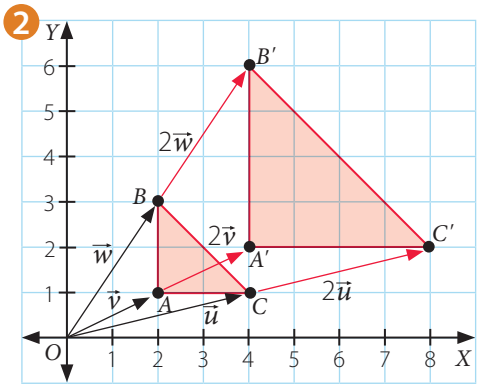
$2 \cdot \vec{v} =$ ____ $2 \cdot \vec{w} =$ ____

- ¿Con cuál de los siguientes planos relacionas la multiplicación de los vectores? Explica.

1



2



Conceptos

En el plano cartesiano, un **vector** se puede representar como un segmento de recta orientado, determinado por dos puntos: un origen y un extremo. De esta manera, un vector se caracteriza por su longitud, dirección y sentido.

Al **multiplicar** un vector $\vec{w}$ por un **escalar** α se obtiene otro vector, que corresponde al **vector ponderado** de $\vec{w}$. Si $\vec{w} = (x, y)$, al multiplicar por α obtienes:

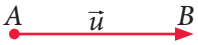
$$\alpha \cdot \vec{w} = \alpha \cdot (x, y) = (\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = (\alpha x, \alpha y)$$

Un vector ponderado cumple con lo siguiente:

- Mantiene la dirección del vector.
- Si $\alpha = 0$, se obtiene el vector nulo, es decir, $0 \cdot \vec{w} = 0 \cdot (x, y) = (0 \cdot x, 0 \cdot y) = (0, 0)$.
- Si $\alpha < 0$, el vector cambia de sentido.
- Si $\alpha > 0$, el vector mantiene el sentido.

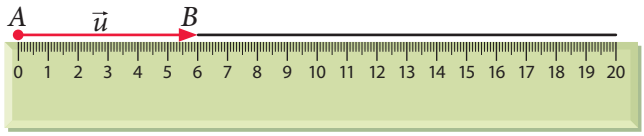
Ejemplo 1

Construye el vector $3 \cdot \overrightarrow{AB}$ utilizando la regla y luego el compás.

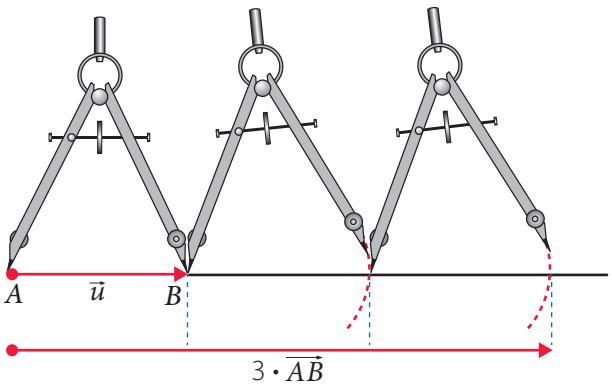


PASO A PASO

1 Como se multiplicará por un escalar mayor que 0, el vector ponderado mantiene la dirección y sentido, por lo que con una regla trazas un segmento de línea en el sentido del vector.



2 Al utilizar un compás con centro en A y radio $\overline{AB}$ y, a partir de B, replicas la amplitud del vector $\overrightarrow{AB}$, obtendrás el vector $3\overrightarrow{AB}$, como se muestra a continuación.



¿Qué diferencias aprecias entre el vector $\overrightarrow{AB}$ y el vector $3 \cdot \overrightarrow{AB}$? ¿Cómo representarías utilizando regla y compás el vector $0{,}5 \cdot \overrightarrow{AB}$? Explica.

Habilidad

Al explicar tus soluciones y los procedimientos que utilizaste estás desarrollando la habilidad de **argumentar y comunicar**.

Conceptos

Al aplicar una **homotecia de centro** O tal que el valor de la razón k sea distinto de cero ($k \neq 0$), a un vector $\vec{v} = \overrightarrow{OA}$, se obtiene lo siguiente:

- Si $k > 0$, el sentido del vector no cambia.



- Si $k < 0$, el sentido del vector se invierte.



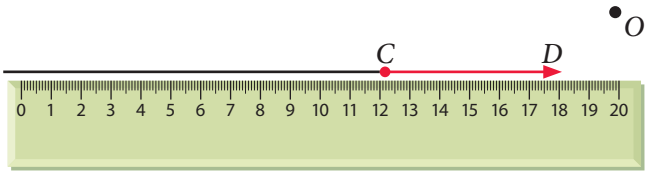
Ejemplo 2

Se marcó el centro de homotecia O y un vector $\overrightarrow{CD}$. A partir de esto construye el vector $-2\overrightarrow{CD}$ utilizando regla y compás.

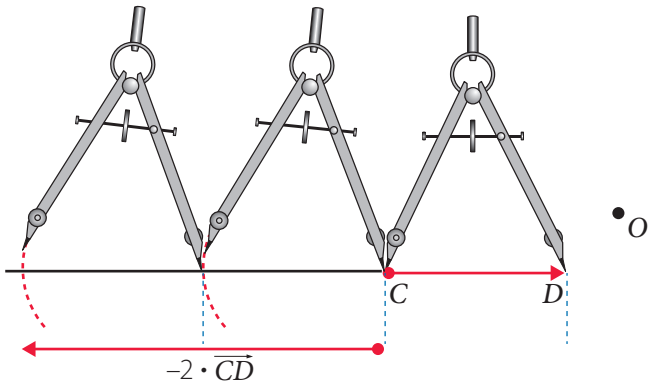


PASO A PASO

1. Como el escalar es –2, al aplicar la homotecia el sentido del vector cambiará, luego utilizando una regla trazas un segmento de línea en sentido contrario al vector.



2. Luego utilizando un compás con centro en C y radio $\overrightarrow{CD}$, a partir de C replicas la amplitud del vector $\overrightarrow{CD}$, para obtener el vector solicitado como se muestra a continuación:



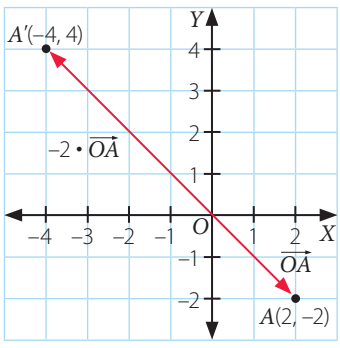
¿Qué ocurre si el centro de homotecia se cambia? Explica.

Ejemplo 3

Si al punto $A(2, -2)$ se le aplica una homotecia de centro $O(0, 0)$, tal que el valor de la razón k es –2, ¿cuáles son las coordenadas del punto que resulta luego de aplicada la homotecia?

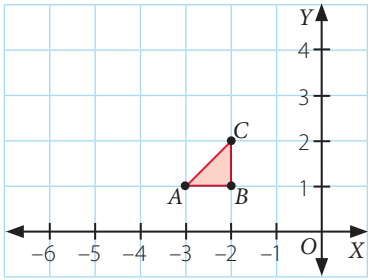
Una manera de resolverlo es trazar el vector que va desde el origen $O(0, 0)$ hasta el punto $A(2, -2)$, y luego multiplicar por el valor de la razón k, es decir: $k \cdot \overrightarrow{OA} = -2(2, -2) = (-4, 4)$, de donde se deduce que el punto imagen es $A'(-4, 4)$.

Gráficamente, se tiene:



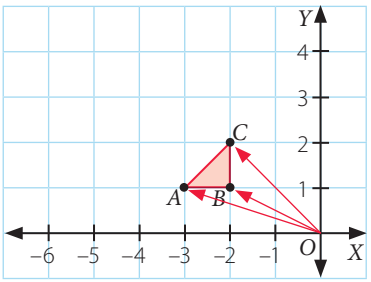
Ejemplo 4

En el plano cartesiano se representa el triángulo ABC. Si se le aplica una homotecia de centro $O(0, 0)$ y el valor de la razón de homotecia k es 2, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices de la figura que resulta?



PASO A PASO

1 Se trazan los vectores que van desde el origen a cada uno de los vértices, luego se multiplica cada uno de los vectores por el escalar k, es decir:



$k \cdot \overrightarrow{OC} \blacktriangleright (2 \cdot -2, 2 \cdot 2) = (-4, 4)$

$k \cdot \overrightarrow{OB} \blacktriangleright (2 \cdot -2, 2 \cdot 1) = (-4, 2)$

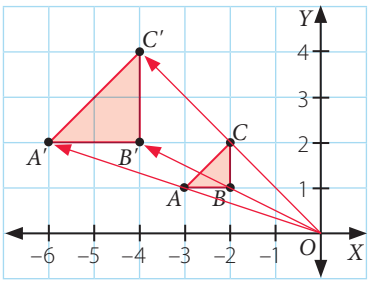
$k \cdot \overrightarrow{OA} \blacktriangleright (2 \cdot -3, 2 \cdot 1) = (-6, 2)$

2 Al trazar los vectores, se tiene que los vértices de la figura que resulta son:

$A'(-6, 2)$

$B'(-4, 2)$

$C'(-4, 4)$



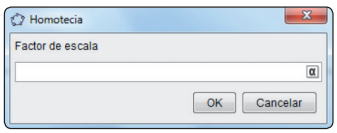
¿Cómo lo resolverías si el centro de homotecia no estuviera en el origen? Explica.

Herramientas tecnológicas

Nota: la aplicación GeoGebra (www.geogebra.org), creada por Markus Hohenwarter, fue incluida en este texto con fines de enseñanza y a título meramente ejemplar.

Para construir una homotecia utilizando el *software* GeoGebra, considera lo siguiente:

1. Utilizando el botón construyes el polígono correspondiente.
2. Con el botón ubicas el centro de homotecia.
3. Finalmente, con el botón haz clic en la figura, el centro de homotecia y luego se abrirá esta ventana, que es donde debes ingresar el valor de la razón de homotecia.



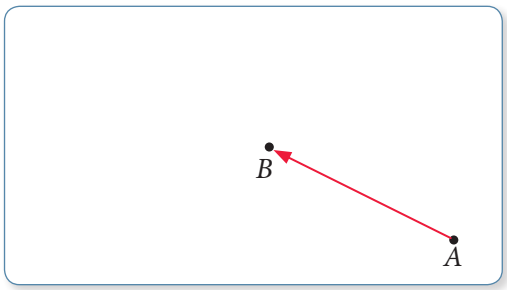
Utilizando el *software* GeoGebra, construye un cuadrilátero de vértices $A(-2, 4)$, $B(-4, 4)$, $C(-5, 1)$ y $D(-1, 1)$ y luego aplica una homotecia de $O(1, -1)$ y valor de la razón $k = -0{,}5$. ¿Cuáles son las coordenadas homotéticas de cada vértice?

Ejercicios

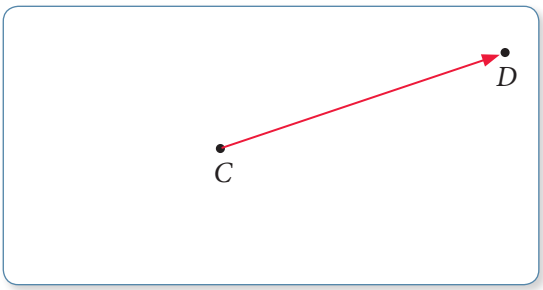
Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Construye utilizando regla y compás cada vector. Luego explica la construcción.

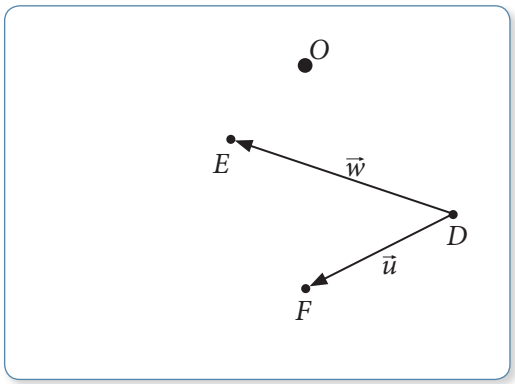
a. Se representa el vector $\overrightarrow{AB}$. Construye el vector $2 \cdot \overrightarrow{AB}$.



b. Se representa el vector $\overrightarrow{CD}$. Construye el vector $-0{,}5 \cdot \overrightarrow{CD}$.



2. En la imagen se representan los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$, y los puntos D, E y F.

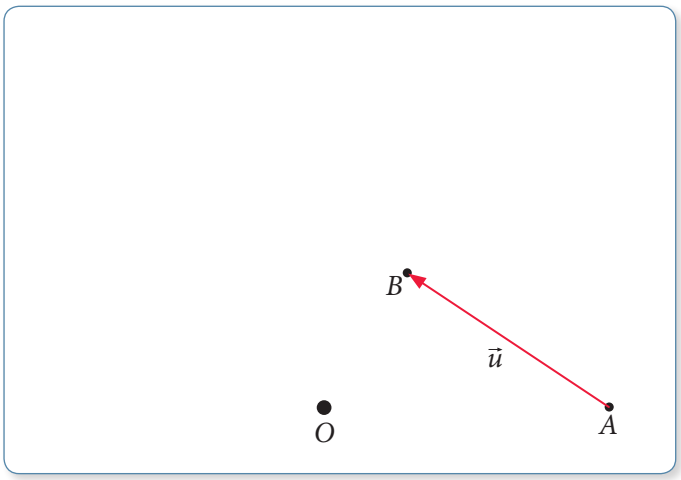


a. Representa los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$ utilizando los puntos E, D y F.

b. Realiza una homotecia de centro O y valor de razón k igual a 2.

c. Explica una conclusión al comparar las imágenes $\vec{u}\,'$ y $\vec{w}\,'$ respecto de los vectores $\vec{u}$ y $\vec{w}$.

3. Se representó el vector $\vec{u}$ y los puntos A y B. Además, el punto O corresponde al centro de una homotecia.

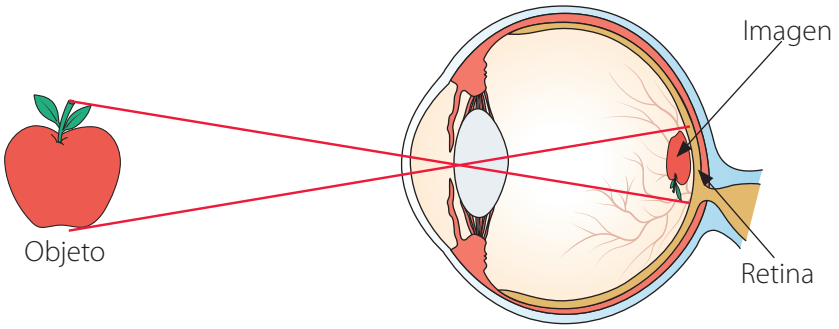


a. Realiza una homotecia de centro O y valor de razón $k = 2$.

b. Realiza sobre la imagen $\vec{u}\,'$ otra homotecia con el mismo centro y valor de razón $k = 0{,}5$.

c. Compara la imagen $\vec{u}\,''$ de la segunda homotecia con la preimagen original $\vec{u}$. ¿Qué regularidad aprecias? Explica.

4. Ciencias A continuación se muestra un dibujo esquemático del ojo humano, donde se marcan dos segmentos de rectas en color rojo que representan una homotecia.

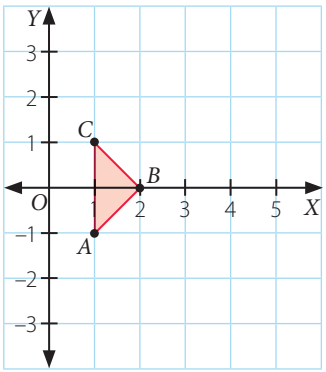


a. ¿Cuál es el signo del valor de la razón de homotecia que se muestra? Explica.

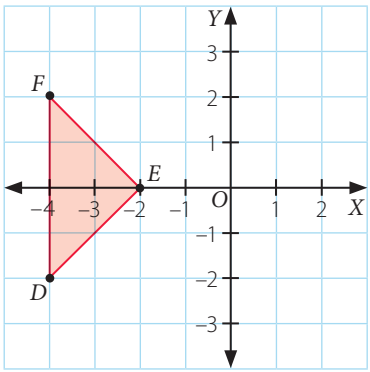
b. Suponiendo que se ve una manzana a una distancia de 10 m, que tiene una altura de 10 cm y considerando que la retina del ojo se encuentra a una distancia aproximada de 25 mm, ¿cuál es la altura de la imagen que se generaría en la retina?

5. Aplica una homotecia a cada figura geométrica. Para ello, considera que el valor de la razón es k.

a. Centro de homotecia O, $k = 2{,}5$.



b. Centro de homotecia O, $k = -0{,}5$.



6. Resuelve el siguiente problema.

A un triángulo de vértices $A(-2, 4)$, $B(-4, 6)$ y $C(-4, 2)$ se le aplica una homotecia de centro O y valor de razón k, obteniéndose como imagen otro triángulo de vértices $A'(4, 4)$, $B'(8, 0)$ y $C'(8, 8)$.

a. ¿Cuáles son las coordenadas del centro O?

b. ¿Cuál es el valor de razón de homotecia?

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Página 55

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica con tus palabras el concepto de vector ponderado.

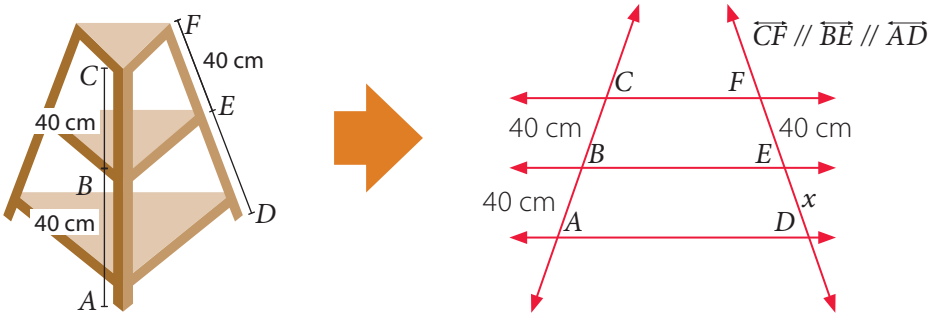
- ¿Demostraste confianza en tus capacidades para resolver los problemas? Explica.

Teorema de Tales

Objetivo

- Desarrollar el teorema de Tales mediante las propiedades de la homotecia, para aplicarlo en la resolución de problemas.

En una tienda Alicia compra una repisa para su hogar. Quiere determinar la medida de una parte de ella y para ello realiza un bosquejo con algunas medidas.



- Escribe el valor de cada razón.

$CB : BA$ ▸ ____ $CB : CA$ ▸ ____

- Escribe la expresión que representa la medida de $\overline{FD}$. ▸ _____
- Escribe la proporción solicitada y calcula el valor de x. Luego explica por qué es importante considerar que $\overleftrightarrow{CF} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{AD}$.

Habilidad

Al elegir o elaborar representaciones de acuerdo a las necesidades de la actividad, estás desarrollando la habilidad de **representar**.

$\frac{CB}{BA} = \frac{FE}{ED}$

$\frac{CB}{CA} = \frac{FE}{FD}$

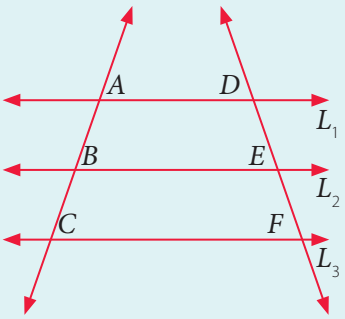
Explicación ▸ _____

_____

Conceptos

Teorema de Tales: Si dos o más **rectas paralelas** se intersecan por dos transversales, entonces las medidas de los segmentos determinados sobre las secantes son **proporcionales**.

Si $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$ se tiene que:



$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF} = \frac{AC}{DF}$$

o equivalentemente:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF} \text{ y } \frac{AB}{AC} = \frac{DE}{DF}$$

Ejemplo 1

En la siguiente figura $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$, ¿que medida representa x?

Al utilizar el teorema de Tales, se tiene que:

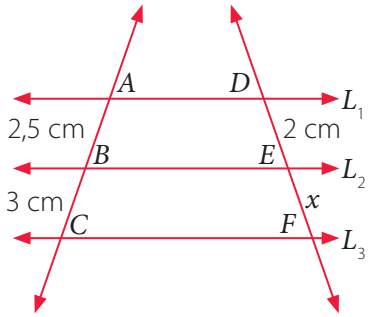
$$\frac{AB}{DE} = \frac{BC}{EF}$$

Luego, al remplazar las medidas, se obtiene lo siguiente:

$$\frac{2{,}5}{2} = \frac{3}{x}$$

$$x = \frac{2 \cdot 3}{2{,}5}$$

$$x = 2{,}4$$



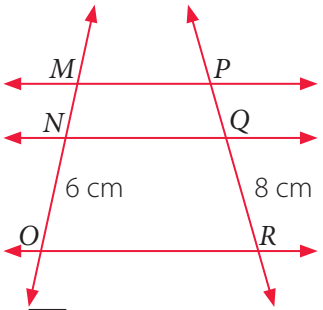
Respuesta: La medida de x es 2,4 cm.

Ejemplo 2

Calcula la medida de $\overline{MN}$ y $\overline{PQ}$, si $\overleftrightarrow{MP} \parallel \overleftrightarrow{NQ} \parallel \overleftrightarrow{OR}$, $PQ = MN + 1$ cm.

PASO A PASO

1. $\frac{MN}{NO} = \frac{MN+1}{QR}$ ⟶ Planteas la proporción.
2. $\frac{MN}{6} = \frac{MN+1}{8}$ ⟶ Remplazas las medidas.
3. $8MN = 6(MN + 1)$ ⟶ Resuelves.
4. $MN = 3$



Respuesta: La medida de $\overline{MN}$ es 3 cm y la medida de $\overline{PQ}$ es 4 cm.

Ejemplo 3

Si $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$, ¿cuál es la medida del segmento $\overline{AB}$?

Al utilizar el teorema de Tales, se tiene que:

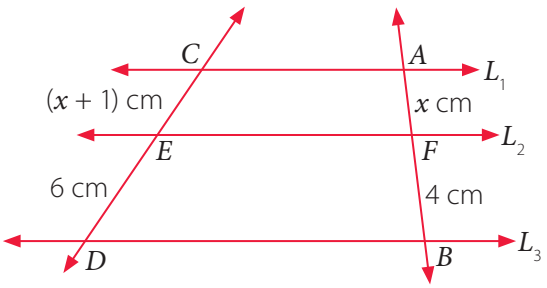
$$\frac{CE}{ED} = \frac{AF}{FB} \blacktriangleright \frac{x+1}{6} = \frac{x}{4}$$

$$4(x + 1) = 6x$$

$$4x + 4 = 6x$$

$$4 = 2x$$

$$2 = x$$



Remplazando $x = 2$, se tiene que: $AF = x = 2$, $FB = x + 2 = 4$.

Luego, $AB = AF + AF = 2 + 4 = 6$.

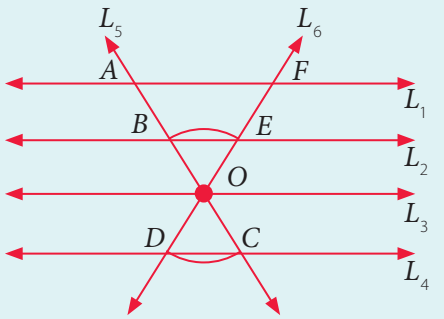
Respuesta: La medida del segmento $\overline{AB}$ es 6 cm.

Atención

Según la Real Academia Española (RAE), **corolario** significa: "Proposición que no necesita prueba particular y se deduce con facilidad de lo demostrado previamente."

Conceptos

Corolario del teorema de Tales: Si los lados de un ángulo o sus prolongaciones se cortan con varias rectas paralelas, las medidas de los segmentos que se determinan en los lados del ángulo son **proporcionales**, es decir, $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3 \parallel L_4$ y además L_5 y L_6 se intersecan con estas rectas, se cumple lo siguiente:



$$\frac{FE}{AB} = \frac{EO}{BO} = \frac{OD}{OC}$$

Ejemplo 4

Calcula la medida de $\overline{BD}$.

PASO A PASO

1. Al aplicar el corolario, se tiene que:

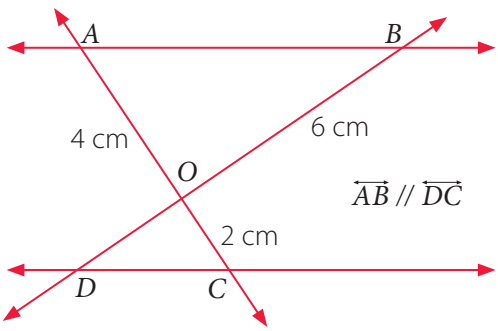
$$\frac{AO}{BO} = \frac{OC}{OD}$$

2. Al remplazar las medidas, se tiene:

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{OD}$$

3. Al resolver, se tiene:

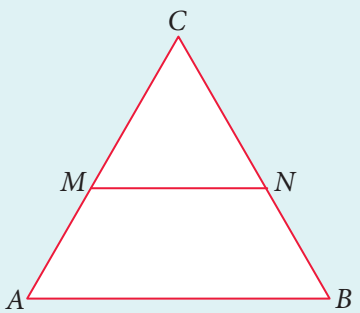
$$OD = \frac{6 \cdot 2}{4} = \frac{12}{4} = 3$$



Respuesta: Como $BD = BO + OD$, se tiene que: $BD = (6 + 3)$ cm $= 9$ cm.

Conceptos

El **teorema particular de Tales** establece que un segmento de recta paralelo a un lado de un triángulo y que interseca a los otros dos determina en estos últimos segmentos proporcionales. Por ejemplo, dado el triángulo ABC y $\overline{AB} \parallel \overline{MN}$, entonces se cumplen las siguientes relaciones:



$$\frac{CM}{MA} = \frac{CN}{NB} \quad \frac{CM}{CA} = \frac{CN}{CB} \quad \frac{CM}{MN} = \frac{CA}{AB}$$

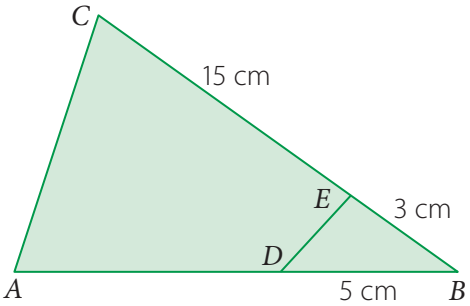
El recíproco del teorema particular de Tales establece que si una recta corta dos lados de un triángulo y los divide en segmentos proporcionales, entonces esa recta es paralela al otro lado del triángulo.

Ejemplo 5

En la figura, ¿cuál es la medida del lado $\overline{AD}$ para que $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$?

Para que se cumpla que $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, la medida de los segmentos sobre los lados $\overline{AB}$ y $\overline{CB}$ deben ser proporcionales, es decir:

$$\frac{CE}{EB} = \frac{AD}{DB}$$



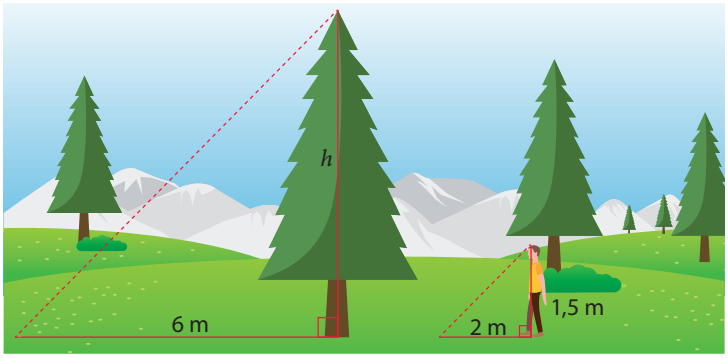
Al remplazar los valores, se tiene que:

$$\frac{CE}{EB} = \frac{AD}{DB} \blacktriangleright \frac{15}{3} = \frac{AD}{5} \blacktriangleright AD = 25$$

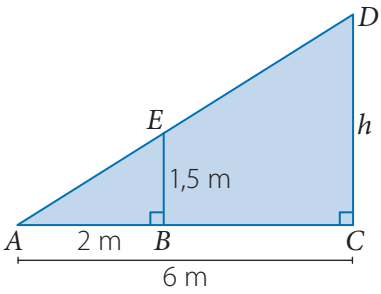
Respuesta: Para que $\overline{AC} \parallel \overline{DE}$, se debe cumplir que la medida del segmento $\overline{AD}$ sea de 25 cm.

Ejemplo 6

A la misma hora una persona y un árbol proyectan una sombra, como se muestra en la imagen. ¿Cuál es la altura (h) del árbol?



Al representarlo utilizando un triángulo, se tiene lo siguiente:



Donde:

AB: es la sombra que proyecta la persona.

AC: es la medida de la sombra que proyecta el árbol.

BE: es la altura de la persona.

h: es la altura del árbol.

Al aplicar el teorema particular de Tales y remplazar los valores, se tiene:

$$\frac{AB}{BE} = \frac{AC}{CD} \blacktriangleright \frac{2}{1{,}5} = \frac{6}{h} \blacktriangleright h = 4{,}5$$

Respuesta: La altura del árbol corresponde a 4,5 m.

Recursos Digitales Complementarios

RDC 9

Tales de Mileto

630-545 a. C.



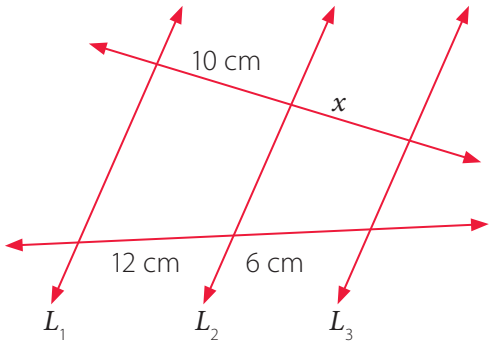
Es considerado el primer filósofo griego y pensador de la historia, a quien se le atribuyen interesantes descubrimientos matemáticos.

Ejercicios

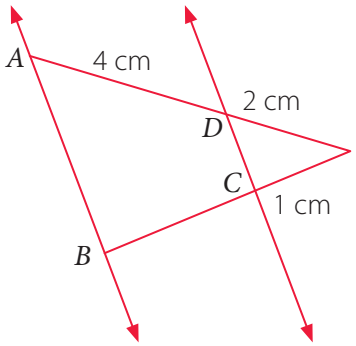
Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Calcula la medida solicitada en cada caso.

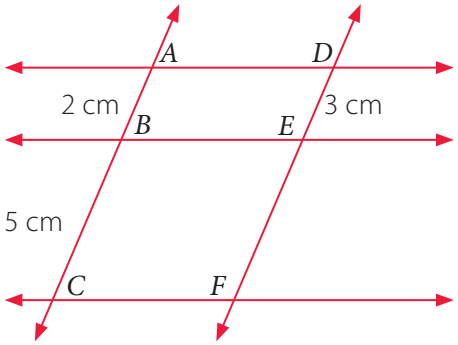
a. Si $L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$, calcula x.



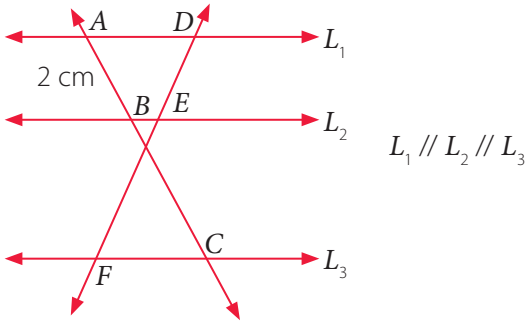
b. Si $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$, calcula la medida de $\overline{BC}$.



c. Si $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BE} \parallel \overleftrightarrow{CF}$, calcula la medida de $\overline{DF}$.



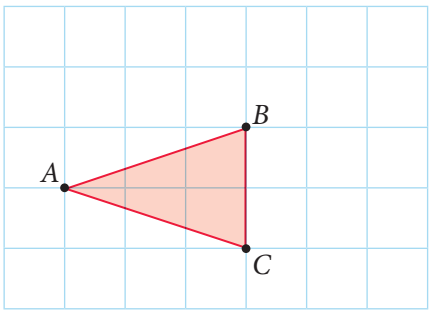
d. Si $BC = 10$ cm, $DF = 14$ cm, calcula la medida de $\overline{EF}$.



$L_1 \parallel L_2 \parallel L_3$

2. Realiza la siguiente actividad.

Con centro de homotecia en A y valor de la razón de homotecia $k = 1{,}5$; realiza una homotecia a los vértices B y C del siguiente triángulo y luego responde. Considera $AB = 3{,}2$ cm y $AC = 3{,}2$ cm.



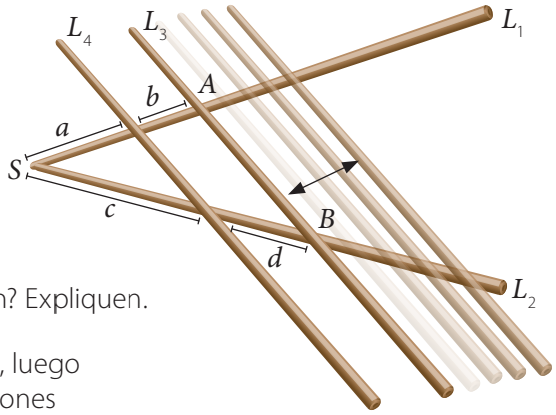
a. Respecto del valor de la razón $\frac{AC'}{AC}$; ¿cómo se relaciona con el valor de la razón $\frac{AB'}{AB}$? ¿Por qué crees que ocurre?

b. Si se trazan las rectas $\overleftrightarrow{BC}$ y $\overleftrightarrow{B'C'}$, ¿qué puedes afirmar?

c. ¿Con qué concepto estudiado relacionas esta homotecia? Argumenta tu respuesta.

3. **Utilizando palitos de brochetas, junto con un compañero o una compañera realicen la siguiente actividad.**

Formen un ángulo agudo con dos palitos de brochetas L_1 y L_2, fijándolos en sus puntas. Encima de ellos coloquen otros dos palitos L_3 y L_4 en posición transversal y paralelos entre sí, como se muestra.



a. Midan el largo de los segmentos a, b, c y d.

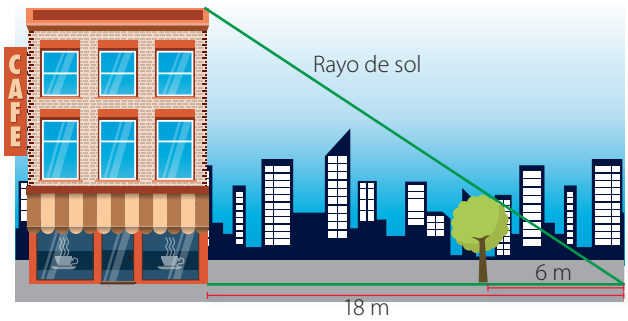
b. Calculen el valor de las razones $a : b$ y $c : d$. Comparen dichas cantidades, ¿qué característica tienen en común? Expliquen.

c. Si mantienen fijo L_4, y mueven L_3 en dirección paralela, luego midan las nuevas distancias y comparen las nuevas razones que se forman. ¿Qué característica encuentran en común?

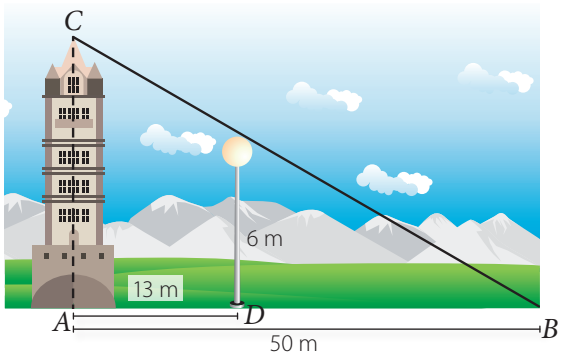
d. ¿Cuál es la importancia de que L_4 sea paralela a L_3? Expliquen.

4. **Resuelve los siguientes problemas.**

a. Si la altura del árbol en la figura es de 4 m y las distancias son las que se muestran en la figura, ¿cuánto mide el edificio?



b. Con la información que se muestra en el dibujo, calcula la altura de la torre.



Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 56 - 57

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica con tus palabras lo que entiendes del teorema de Tales.

_____

- ¿Demostraste confianza en tus capacidades para resolver los problemas? Explica.

_____

- ¿Utilizaste representaciones para aplicar el teorema de Tales? ¿Qué requisito es necesario para aplicarlo? ¿Por qué? Explica.

_____

División proporcional de segmentos

Objetivo

- Comprender la división proporcional de un segmento.

Julio ha trazado con una regla un segmento de 15 cm y ubicó un punto P, como se muestra a continuación.



Verifica cuál de las siguientes afirmaciones es o son verdaderas.

- La razón entre la medida de los segmentos $\overline{QP}$ y $\overline{PR}$ es 3 : 15 y su valor es 0,2.

  Realiza tus cálculos

  Explicación ▸ _____

- La razón entre la medida de los segmentos $\overline{QP}$ y $\overline{QR}$ es 3 : 23 y su valor es 0,15.

  Realiza tus cálculos

  Explicación ▸ _____

- A continuación se generalizará la división de un trazo, que puede ser interior o exterior.

Conceptos

Para **dividir interiormente** un segmento $\overline{QR}$ en la razón r se necesita encontrar un punto P en este segmento, de manera que el valor de la razón entre $\overline{QP}$ y $\overline{PR}$ sea igual a r, es decir:



$$\frac{QP}{PR} = r$$

Además se tiene que: $QP + PR = QR$.

Ejemplo 1

Un segmento $\overline{QR}$ se ha dividido interiormente ubicando un punto P sobre él, en la razón de 4 : 7, como se muestra a continuación. ¿Cuáles son las medidas de los segmentos $\overline{PR}$ y $\overline{QR}$?



PASO A PASO

1. La medida del segmento $\overline{QP}$ es 12 cm.

2. Se tiene que $\frac{QP}{PR} = r$, y además se sabe que $\frac{QP}{PR} = \frac{12}{PR}$ y $r = \frac{4}{7}$. Al plantear la proporción, se tiene:

$$\frac{12}{PR} = \frac{4}{7} \blacktriangleright PR = \frac{7 \cdot 12}{4} \blacktriangleright PR = 21$$

3. Por otra parte, sabemos que $QR = QP + PR$, luego, $QR = 12 + 21 = 33$.

Respuesta: La medida del segmento $\overline{PR}$ es 21 cm y la medida del segmento $\overline{QR}$ es 33 cm.

Conceptos

Para **dividir exteriormente** un segmento $\overline{QS}$ en la razón r, se necesita encontrar un punto P en la prolongación del segmento $\overline{QS}$, de manera tal que la razón entre $\overline{QP}$ y $\overline{SP}$ sea igual a r, es decir: $\frac{QP}{SP} = r$.

Se tienen dos casos:

$0 < r < 1$



$r > 1$



Ejemplo 2

Al dividir exteriormente el segmento $\overline{QS}$ ubicando el punto P, en la razón 7 : 2, se tiene la situación que se presenta en la siguiente figura.



Calcular la medida de x.

Se tiene que $r = \frac{7}{2}$, además $\frac{QP}{SP} = r$, luego se tiene la siguiente proporción:

$$\frac{QP}{SP} = \frac{7}{2} \blacktriangleright \frac{25 + x}{x} = \frac{7}{2} \blacktriangleright 2(25 + x) = 7x \blacktriangleright x = 10$$

Respuesta: La medida de x es 10 cm.

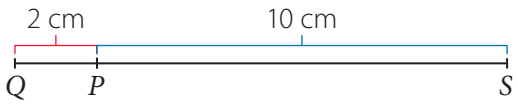
¿En qué se diferencian la división interior y exterior de segmentos? Explica.

Ejercicios

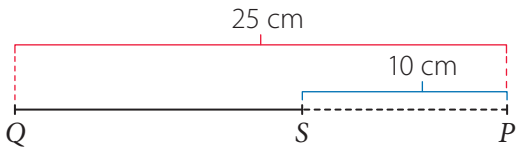
Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Calcula la razón pedida en las siguientes divisiones interiores y exteriores de segmentos. Considera que el punto P siempre está ubicado sobre los segmentos $\overline{QS}$ o en su prolongación, según corresponda.

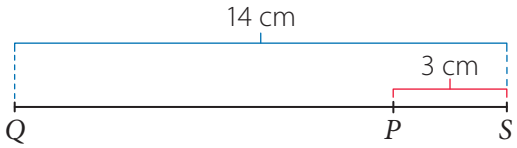
a.



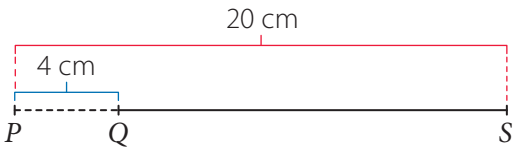
b.



c.



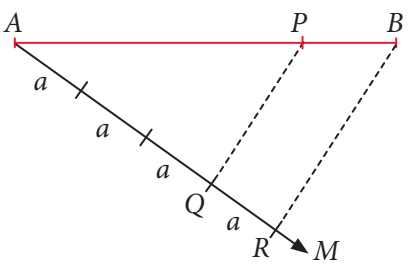
d.



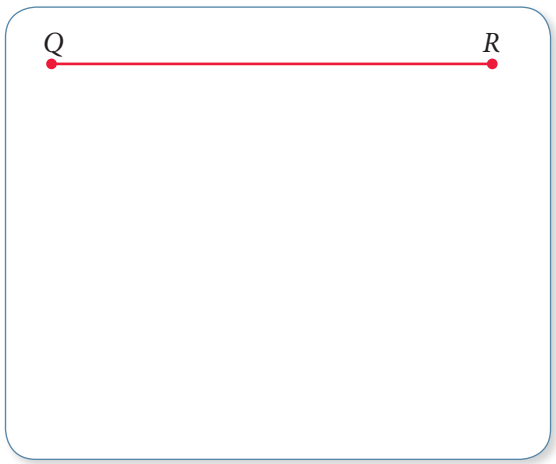
2. Analiza la siguiente información y luego divide interiormente cada segmento en la razón dada.

Para dividir un segmento $\overline{AB}$ en la razón 3 : 1, puedes considerar lo siguiente:

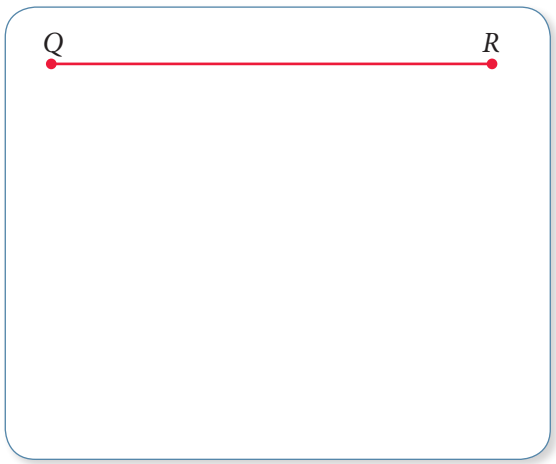
- Considerando el segmento $\overline{AB}$ se dibuja un rayo $\overline{AM}$. Luego un segmento a de cualquier medida se copia 3 veces sobre $\overline{AM}$ y se marca el punto Q.
- A continuación del punto Q, se copia 1 vez sobre $\overline{AM}$ el segmento a, resultando el punto R.
- Une con una regla el punto R con el punto B y luego traza un segmento paralelo a RB, de manera que pase por el punto Q. La intersección de la recta paralela con el segmento $\overline{AB}$ es el punto P.



a. Razón 2 : 1



b. Razón 3 : 2.



3. Resuelve los siguientes problemas.

a. Un segmento $\overline{QS}$ mide 45 cm. Un punto P lo divide exteriormente en razón de 4 : 9. Determina las medidas de los segmentos $\overline{QP}$ y $\overline{SP}$.

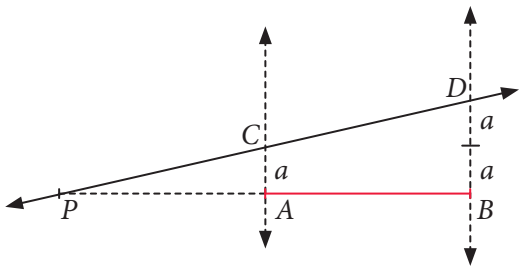
b. Un segmento $\overline{QS}$ mide 30 cm. Se ubica un punto P sobre su proyección que divide externamente al segmento en razón de 3 : 2. Determina las medidas de los segmentos $\overline{QP}$ y $\overline{PS}$.

c. Un segmento $\overline{QS}$ está dividido externamente por un punto P, ubicado en la prolongación del mismo, a la izquierda de Q. Si las medidas de $\overline{QP}$ y $\overline{QS}$ son 21 cm y 49 cm, respectivamente, ¿cuál es el valor de la razón?

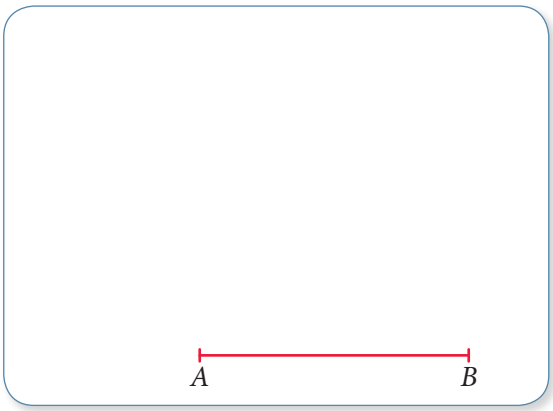
4. Analiza la siguiente información y luego divide exteriormente cada segmento en la razón dada.

Para dividir exteriormente un segmento $\overline{AB}$ en la razón $r = 1 : 2$ puedes considerar lo siguiente:

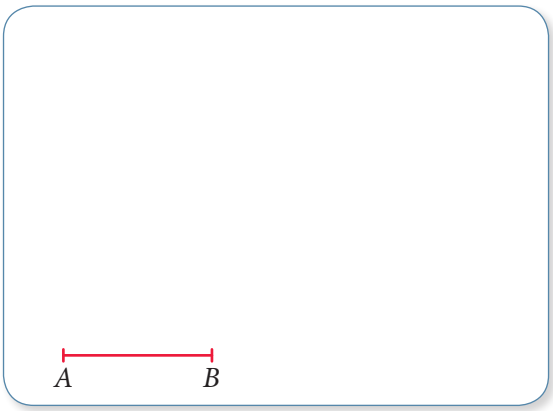
- Traza dos rectas paralelas por los puntos A y B.
- Considerando un segmento de longitud a, cópialo 1 vez sobre la recta que contiene al punto A y 2 veces sobre la que contiene al punto B. Define dichos puntos como C y D.
- Une con una recta los puntos C y D, de manera que se interseque con la prolongación del segmento $\overline{AB}$.
- Llama a dicho punto P. Este punto dividirá exteriormente al segmento $\overline{AB}$ en la razón 1 : 2.



a. Razón 1 : 3



b. Razón 3 : 2.



Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Dividiste de manera proporcional diferentes segmentos? Explica cómo lo realizaste.

_____

- ¿Utilizaste representaciones para resolver problemas sobre segmentos proporcionales? Explica.

_____

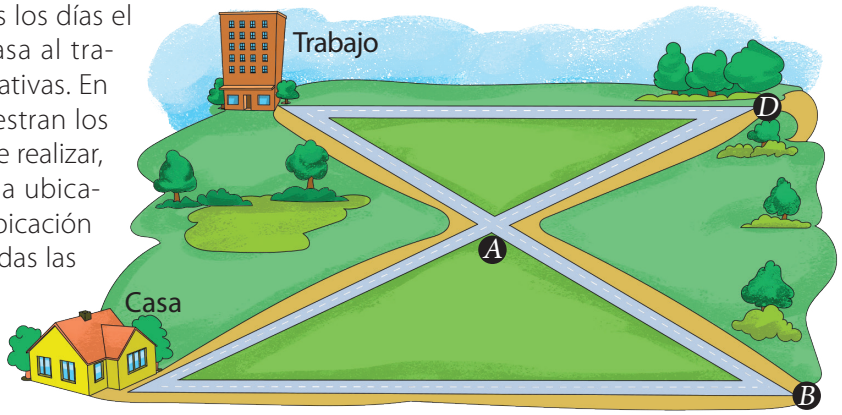
Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 58 - 59

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 3

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

1. Analiza la siguiente información y luego responde.

Un hombre que realiza todos los días el mismo trayecto desde su casa al trabajo y viceversa busca alternativas. En el siguiente esquema se muestran los posibles recorridos que puede realizar, donde "Trabajo" representa la ubicación del trabajo y "Casa", la ubicación de la casa. (Considera que todas las calles son de doble sentido).



Él realiza el trayecto desde su casa hasta D, y luego hasta el trabajo. Se sabe que las calles entre el trabajo y D, y entre la casa y B son paralelas, y además que las distancias entre la casa y A es de 3 km, entre A y D es de 2 km, entre D y el trabajo es de 3 km y entre A y B es de 2,5 km. Responde a las siguientes preguntas para averiguar cuál es el mejor trayecto que podría seguir.

a. Si consideramos que el triángulo formado por los puntos A, D y el trabajo son una imagen por homotecia del triángulo formado por los puntos A, la casa y B, ¿cuál sería el centro de homotecia? Explica. (2 puntos)

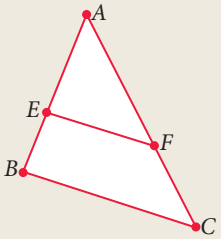
b. ¿Cuáles son las medidas de los trayectos que no están mencionados? Describe por lo menos 2 estrategias diferentes para averiguarlo. (2 puntos)

Realiza tus cálculos

Explicación ▸

Marca la opción correcta en los ítems 2 al 4. (1 punto cada uno)

2. Se sabe que $\overline{EF} \parallel \overline{BC}$ y que $AE = 9$ cm, $EF = 3$ cm, $EB = 6$ cm. ¿Cuánto mide el segmento $\overline{BC}$?



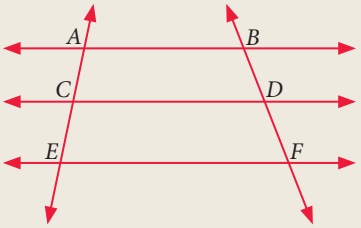
A. 2 cm

B. 15 cm

C. 5 cm

D. 3 cm

3. En la figura $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD} \parallel \overleftrightarrow{EF}$, $m(\overline{CE}) = \frac{1}{2}\, m(\overline{AC})$ y $m(\overline{DF}) = 4$ cm, ¿cuál es la medida de $\overline{BF}$?



A. 2 cm

B. 3 cm

C. 8 cm

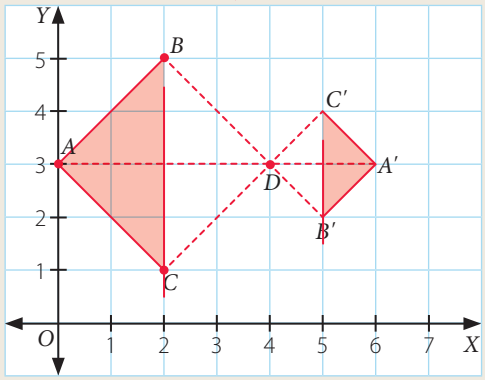
D. 12 cm

4. Con respecto a la homotecia, es correcto afirmar que:

I. D es el centro de homotecia.

II. La razón de homotecia es $-\frac{1}{2}$.

III. $\overrightarrow{DC} = 2 \cdot \overrightarrow{DC'}$



A. Solo III

B. Solo I y II

C. Solo II y III

D. I, II y III

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1	Mostrar que comprenden el concepto de homotecia.		**Logrado:** 4 puntos o más. **Medianamente logrado:** 2 a 3 puntos. **Por lograr:** 1 punto. o menos.
2 y 3	Aplicar el teorema de Tales.		
4	Comprender las homotecias de forma vectorial.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica la estrategia que utilizaste para resolver algún problema.

- ¿Cumpliste las metas propuestas al iniciar el tema? Explica.

Tema 4 Semejanza

En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 4.

Recuerdo lo que sé

1. Lee la siguiente información.

¿Te has dado cuenta de que comúnmente usamos los mapas para movernos ya sea en la ciudad o fuera de ellas, observar distancias, saber donde queremos ir, etc? Los mapas son un símil de la realidad. Ellos nos muestran en proporción lo que realmente es. Podemos tener mapas más grandes o más pequeños de la misma realidad, porque están en escalas diferentes. Por ejemplo, una escala de "1 : 1 000" significa que 1 cm del mapa equivale a 1 000 cm de la realidad.



a. Supón que la escala del mapa que se está mirando es 1 : 500, ¿qué quiere decir eso? Explica.

Una **razón** es una comparación entre dos cantidades mediante una división. Una **proporción** es una igualdad entre dos o más razones.

b. Considerando la escala anterior, Javiera quiere ir a un punto que en el mapa está a una distancia de 20 cm del punto en el que esta se encuentra. ¿Cuánto tendría que caminar para llegar al lugar deseado? ¿Y en metros?

c. Si la escala de un nuevo mapa es 1 : 1 000, ¿cuál es la distancia real en centímetros, metros y kilómetros si en el mapa medimos 32 centímetros? ¿Y cuál es la distancia en el mapa de 120 kilómetros?

Diseño mi estrategia

2. Analiza cada caso y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

Se muestra una fotografía en dos medidas diferentes.





a. Utilizando una regla, podrías afirmar que los cuadros anteriores son proporcionales. ¿Qué estrategia podrías utilizar para afirmar lo anterior? Explica.

Realiza tus cálculos

Explicación

b. Comenta tus estrategias con un compañero o una compañera. Luego escribe lo que te sirvió para mejorar la tuya.

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Demostraste interés en resolver las actividades anteriores? Explica.
- ¿Qué dificultad tuviste para responder las actividades anteriores? Explica.
- ¿En qué otro ámbito crees que se utiliza lo anteriormente resuelto? Explica.
- ¿Qué contenidos de años anteriores aplicaste para resolver las actividades? Argumenta tu respuesta.

Semejanza de figuras

Objetivo

- Aplicar propiedades de semejanza y de proporcionalidad a modelos a escala y otras situaciones de la vida diaria.

Un fotógrafo ha tomado una foto con forma rectangular, como se aprecia en la imagen. Luego quiere obtener otra fotografía que sea semejante a la que tomó inicialmente.



Habilidad

Al describir relaciones y situaciones matemáticas estás desarrollando la habilidad de **argumentar y comunicar**.

- Si la otra fotografía quiere que de ancho mida 6 cm, para que sea semejante a la fotografía original, ¿cuál debe ser la medida de su otro lado? Explica.

Realiza tus cálculos

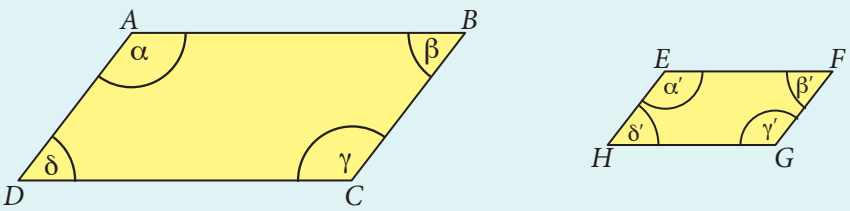
Explicación ▸ _____

- A continuación se generalizará el tema de semejanza.

Conceptos

Dos figuras son **semejantes (~)** cuando tienen la misma forma. Dos polígonos son semejantes si sus ángulos interiores correspondientes son congruentes y la razón entre las medidas de sus lados correspondientes es constante.

Para que el cuadrilátero $ADCB$ sea semejante con el cuadrilátero $EHGF$, se debe cumplir:

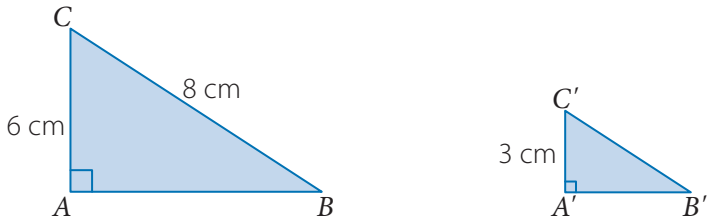


1. Los ángulos correspondientes tienen la misma medida: $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $\delta = \delta'$.
2. La medida de los lados correspondientes son proporcionales. La constante de proporcionalidad k recibe el nombre de razón de semejanza.

$$\frac{AB}{EF} = \frac{BC}{FG} = \frac{CD}{GH} = \frac{DA}{HE} = k$$

Ejemplo 1

Si $\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$, ¿cuánto mide el lado $B'C'$?



Ya que los triángulos son semejantes, la medida de los lados correspondientes es proporcional, es decir:

$$\frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'} \blacktriangleright \frac{6}{3} = \frac{8}{B'C'} \blacktriangleright B'C' = \frac{8 \cdot 3}{6} \blacktriangleright B'C' = 4$$

Respuesta: La medida del lado $B'C'$ es 4 cm.

Ejemplo 2

En un mapa que utiliza una escala 1 : 50 000, la distancia entre dos casas es de 1,8 cm, ¿cuál es la distancia real entre las casas?

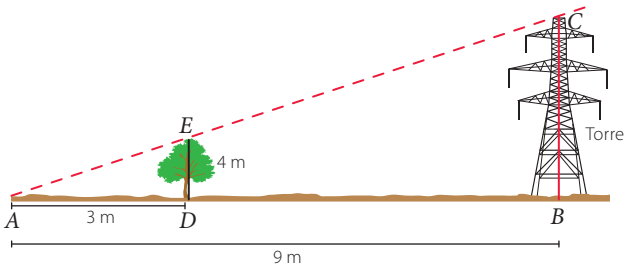
PASO A PASO

1. La razón es 1 : 50 000 significa que 1 cm del mapa corresponden a 50 000 cm en la realidad.
2. La distancia entre las dos casas, que se encuentra en el mapa, corresponde a 1,8 cm.
3. La proporcionalidad a resolver es $\frac{1}{50\,000} = \frac{1{,}8}{x} \blacktriangleright x = 90\,000$.

Respuesta: La distancia que separa las dos casas es de 90 000 cm, que equivale a 900 m.

Ejemplo 3

Una torre de alta tensión da una sombra y a la misma hora un árbol proyecta una sombra, formándose dos triángulos semejantes ($\Delta ABC \sim \Delta ADE$), como se muestra en la imagen. ¿Cuál es la altura de la torre?



Los triángulos son semejantes. Al aplicar proporcionalidad entre los lados correspondientes se tiene: $\frac{9}{3} = \frac{x}{4} \blacktriangleright x = \frac{9 \cdot 4}{3} \blacktriangleright x = 12$

Respuesta: La altura de la torre de alta tensión es de 12 m.

Atención

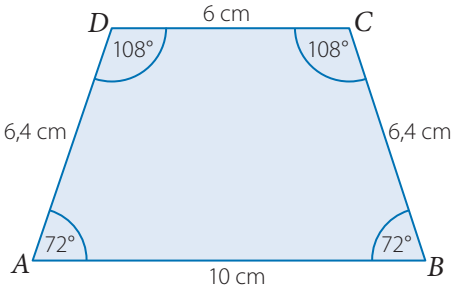
Si dos polígonos regulares tienen la misma cantidad de lados, son semejantes.

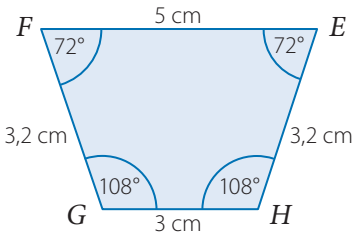
Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

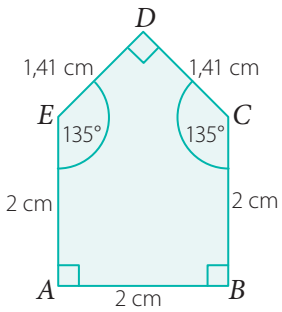
1. Explica si los siguientes polígonos son semejantes o no. Argumenta tu afirmación.

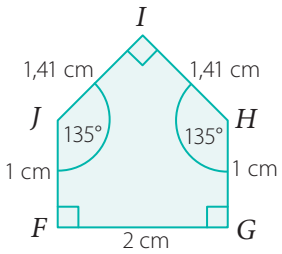
a.





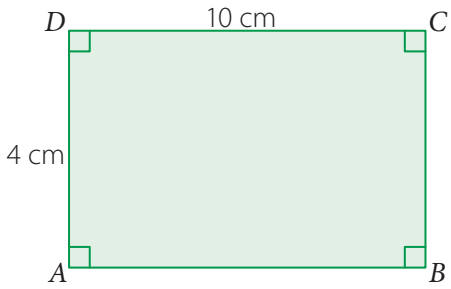
b.

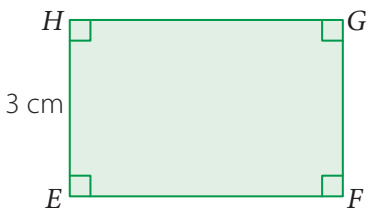




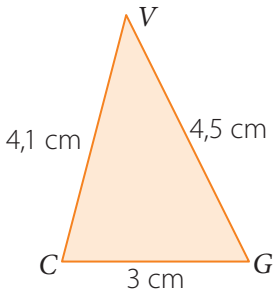
2. Calcula la medida del lado que falta en los siguientes polígonos semejantes.

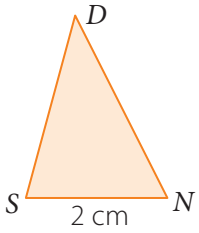
a. Calcula la medida del lado $\overline{FE}$.





b. Calcula la medida de los lados $\overline{SD}$ y $\overline{ND}$.





3. Resuelve los siguientes problemas.

a. Si el largo y el ancho del rectángulo $ABCD$ son 3 cm y 1 cm respectivamente, mientras que el largo y el ancho del rectángulo $EFGH$ son 5 cm y 3 cm respectivamente, ¿son semejantes los rectángulos? Justifica tu respuesta.

b. En un triángulo cuyos lados miden 3 cm, 4 cm y 5 cm, se cuadruplican todos sus lados para construir otro triángulo, ¿es este triángulo semejante al inicial? Explica.

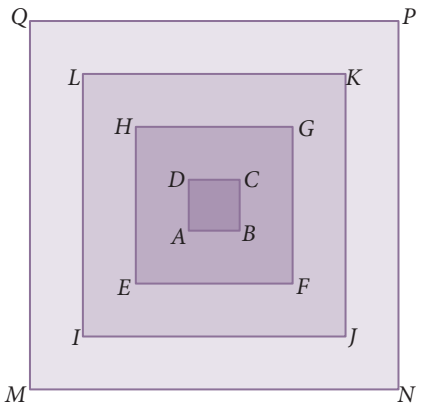
4. Analiza los siguientes cuadrados y luego responde.

a. ¿Son todos los cuadrados semejantes? Explica.

b. ¿Cuál es el centro de homotecia que transforma los cuadrados?

c. Utilizando una regla y considerando el cuadrado $ABCD$ como preimagen, ¿cuál es el valor de la razón de homotecia respecto del cuadrado $EFGH$? ¿Cómo lo calcularías con los otros cuadrados? Explica.

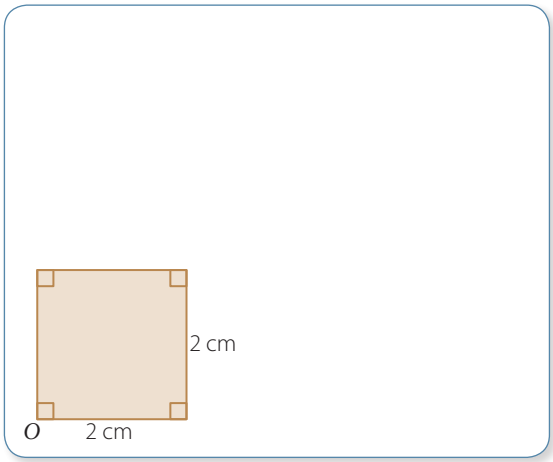
d. Construye el siguiente cuadrado exterior. Explica cómo lo construiste.



5. Se muestra un cuadrado donde se ha marcado uno de sus vértices O, el que corresponde al centro de una homotecia. Utilizando una homotecia de centro O, se quiere construir un cuadrado que tenga el cuádruple del área del cuadrado dado.

a. ¿Cuál es el valor de la razón de homotecia?

b. Utilizando regla y compás, realiza la construcción y explica la construcción realizada.



6. Analiza la siguiente información y luego realiza lo solicitado.

Un jardinero quiere cuadruplicar el área de un jardín circular de flores, que tiene un radio de 3 m.

- Dibuja en tu cuaderno el modelo del jardín en la escala de 1 : 100.
- Elige el centro del círculo como el centro de una homotecia con la cual se logra el objetivo. Luego utiliza regla y compás para realizar la construcción.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 60 - 61

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué entiendes por semejanza? Explícalo utilizando tus palabras.

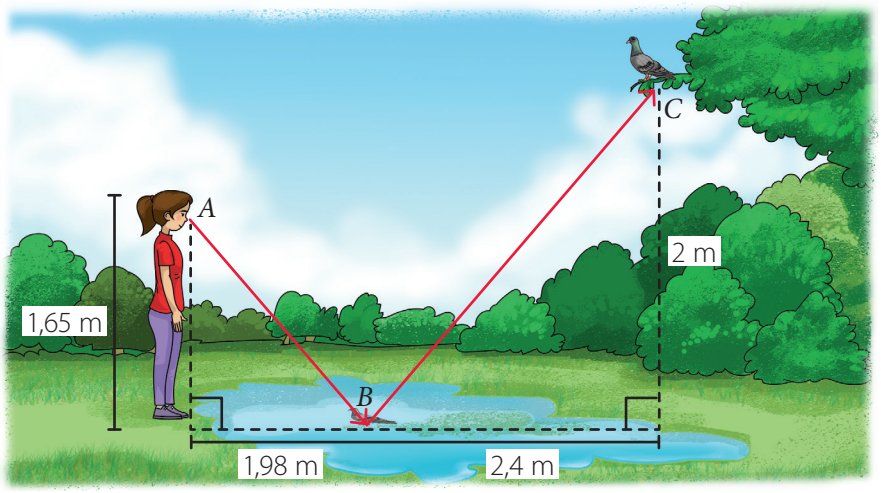
- ¿Argumentaste y explicaste tus respuestas de manera clara? Explica.

Criterios de semejanza

Objetivo

- Comprender los criterios de semejanza en figuras geométricas.

Al visitar un parque de su comuna, Gabriela observa en un charco de agua la silueta de una paloma, como se muestra a continuación.



Actitud

Participa en la búsqueda de posibles soluciones y expón tus argumentos.

- ¿Las distancias que se muestran son proporcionales? Argumenta tu respuesta.

_____

_____

- Para calcular la distancia entre A y B y sin utilizar el teorema de Pitágoras, ¿qué distancia necesitas saber? Explica.

_____

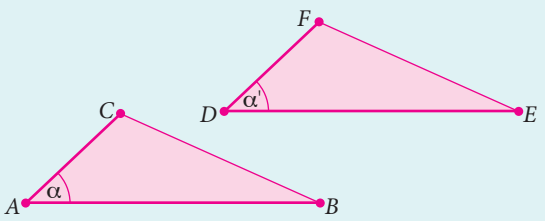
_____

- A continuación, se formalizará la semejanza de triángulos, la que te puede ayudar a resolver diferentes problemas relacionados con la vida diaria.

Conceptos

Los criterios de **semejanza** de triángulos establecen condiciones suficientes para decidir si dos triángulos son o no semejantes.

- **Criterio lado, ángulo, lado (LAL):** Dos triángulos son semejantes si dos lados correspondientes tienen medidas proporcionales y el ángulo comprendido por ellos tienen igual medida.



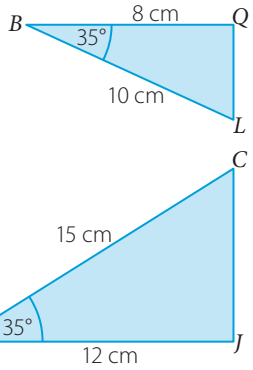
Si se cumple que: $\alpha = \alpha'$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF}$$

Se tiene que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Ejemplo 1

El triángulo LQB, ¿es semejante al triángulo RJC?



El ángulo formado entre los lados que tienen las medidas anotadas es igual en ambos triángulos, por lo que se determinará si los lados correspondientes son proporcionales.

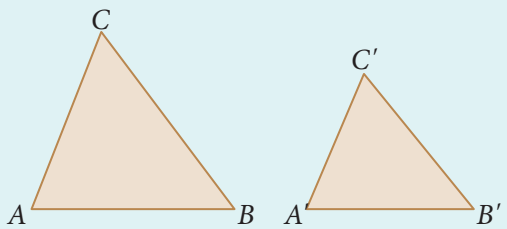
$$\frac{BL}{RC} = \frac{10}{15} = \frac{2}{3} \text{ y } \frac{BQ}{RJ} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

Respuesta: Se cumple el criterio lado, ángulo, lado (LAL), por lo tanto $\Delta LQB \sim \Delta CJR$.

Conceptos

Criterio lado, lado, lado (LLL)

Dos triángulos son **semejantes** si los tres pares de lados correspondientes tienen medidas proporcionales.

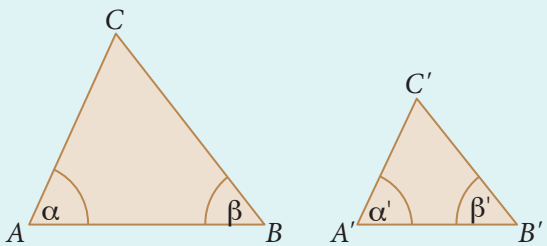


$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Criterio ángulo, ángulo (AA)

Dos triángulos son **semejantes** si dos de sus ángulos interiores correspondientes tienen igual medida.

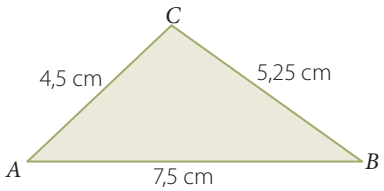


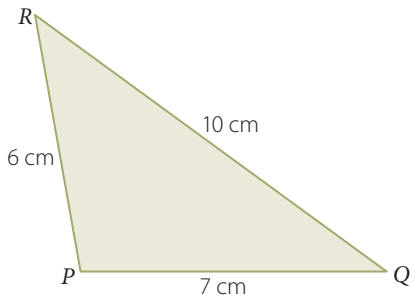
$$\alpha = \alpha' \qquad \beta = \beta'$$

$$\Delta ABC \sim \Delta A'B'C'$$

Ejemplo 2

¿Los triángulos que se muestran son semejantes?





Se calculará el valor de razón entre los lados proporcionales, es decir:

$$\frac{AB}{QR} = \frac{7{,}5}{10} = 0{,}75 \qquad \frac{BC}{QP} = \frac{5{,}25}{7} = 0{,}75 \qquad \frac{CA}{RP} = \frac{4{,}5}{6} = 0{,}75$$

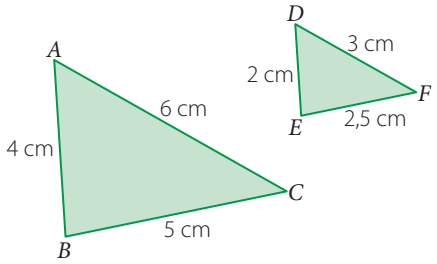
Respuesta: Se cumple el criterio lado, lado, lado (LLL), por lo tanto $\Delta ABC \sim \Delta RQP$.

Ejercicios

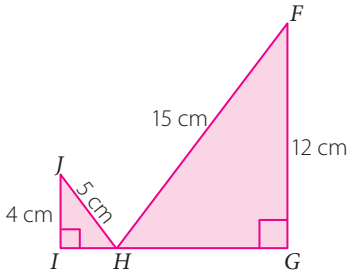
Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Determina qué criterio permite explicar la semejanza entre cada par de triángulos. Justifica tu respuesta.

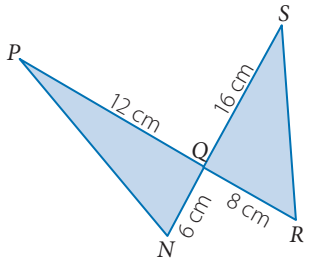
a.



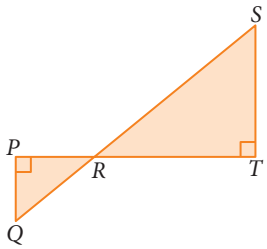
c.



b.

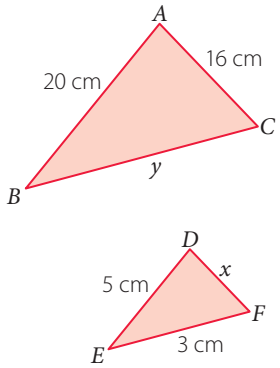


d.

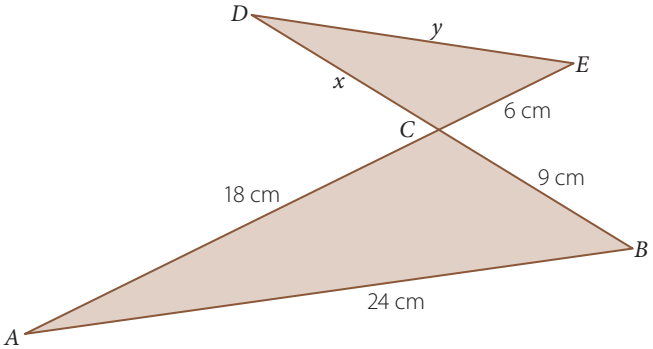


2. Teniendo en cuenta que los triángulos son semejantes, calcula cada valor desconocido.

a.



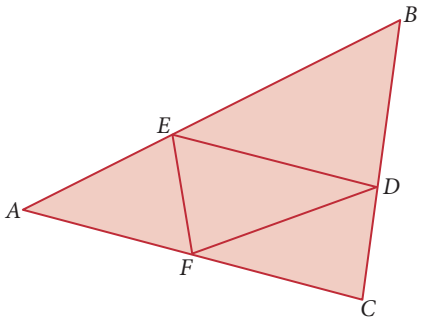
b.



3. Calcula la medida de $\overline{EF}$ y la medida de $\overline{DF}$, si:

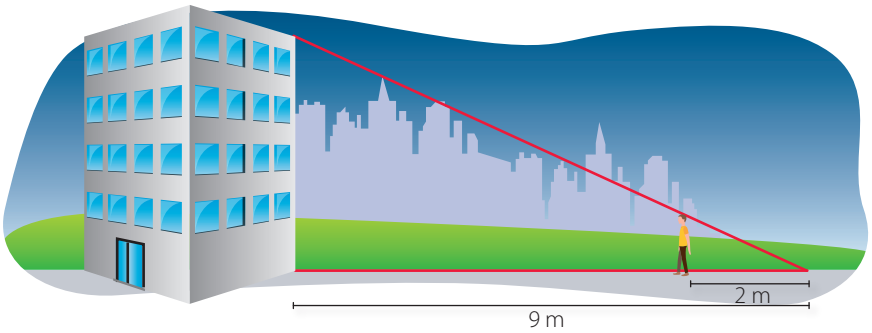
$\Delta ABC \sim \Delta DEF$

$AB = 12$ cm
$BC = 8$ cm
$AC = 10$ cm
$DE = 6$ cm

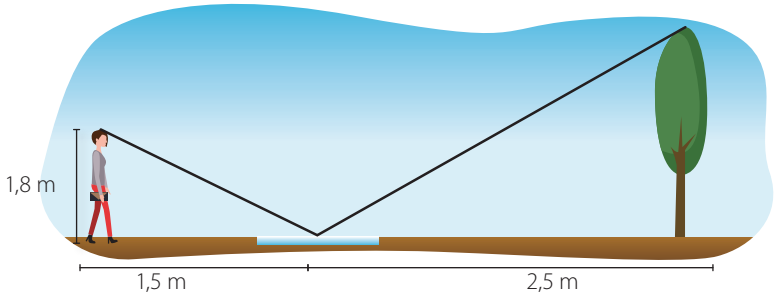


4. Resuelve los siguientes problemas.

a. Si la persona mide 1,6 m, ¿cuál es la altura del edificio?

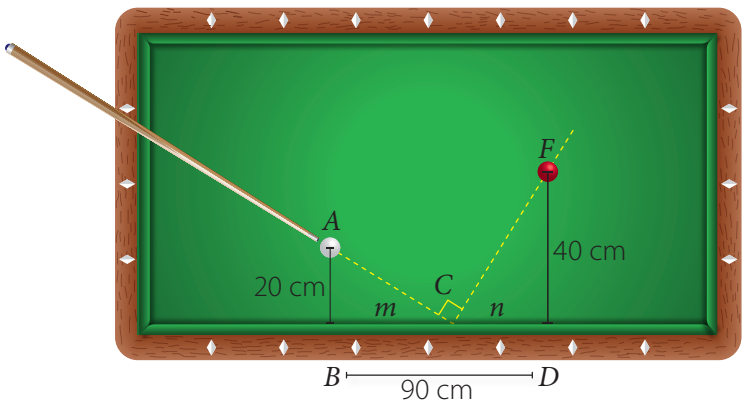


b. Existe un método para calcular la altura de un objeto, el cual consiste en colocar un espejo en el piso y ubicarse en un lugar desde el cual se vea, en el espejo, la parte más alta del objeto. En la figura, ¿cuál es la altura del árbol?



c. En la siguiente figura, C representa el punto en el cual rebota una de las bolas al ser golpeada sin efecto.

- Demuestra que $\Delta ABC \sim \Delta FDC$.
- Calcula la medida de m y n.



Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Página 62

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica utilizando tus palabras los criterios de semejanza de los triángulos.

_____

- ¿Participaste en la búsqueda de soluciones y expusiste tus argumentos? Explica.

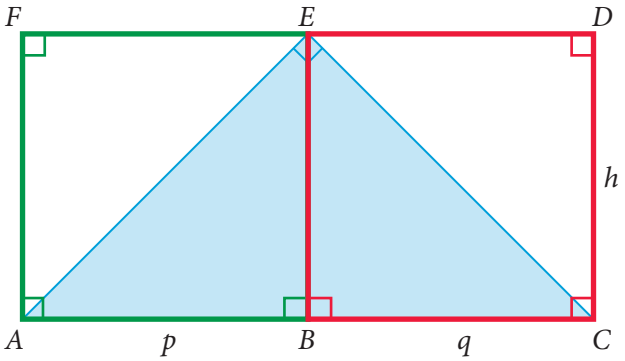
_____

Teoremas de Euclides

Objetivo

- Comprender los teoremas de Euclides utilizando la semejanza de triángulos.

La medida del largo del rectángulo $ACDF$ corresponde al doble de la medida del ancho. En el cual se inscribe un triángulo rectángulo isósceles ACE, como se muestra a continuación.



Habilidad

Al ajustar modelos eligiendo los parámetros adecuados para que se acerquen más a la realidad estás desarrollando la habilidad de **modelar**.

- ¿Es correcto afirmar que $\Delta ABE \sim \Delta CBE$? ¿Qué relación hay entre p y q? Explica.

_____

- Utilizando solo las variables p y q, calcula el área del cuadrado verde y solo utilizando la variable h calcula el área del cuadrado rojo. Explica.

Realiza tus cálculos

Explicación ▸ _____

_____

_____

_____

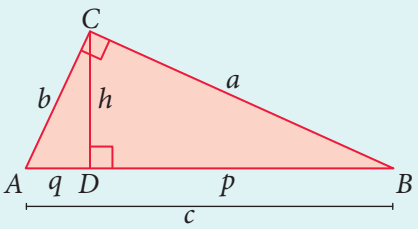
- ¿Qué relación hay entre las áreas de los cuadrados? ¿Encuentras una relación entre p, q y h? Justifica tu respuesta.

_____

Conceptos

En el ΔABC, rectángulo en C, la altura desde el vértice C interseca al lado $\overline{AB}$ en un punto D, formando dos nuevos triángulos rectángulos ΔACD y ΔCBD. En estos triángulos, es posible establecer la siguiente relación:
$\Delta ABC \sim \Delta ACD \sim \Delta CBD$

A partir de lo anterior, es posible expresar los **teoremas de Euclides**:



$a^2 = c \cdot p$
$b^2 = c \cdot q$ → Referentes a los catetos.

$h^2 = p \cdot q$ → Referente a la altura.

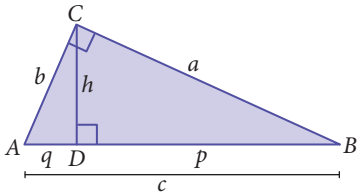
Ejemplo 1

Si se sabe que $\Delta ABC \sim \Delta CBD$, demuestra que en el ΔABC se cumple la igualdad $a^2 = c \cdot p$.

PASO A PASO

1. Sabiendo que $\Delta ABC \sim \Delta CBD$, se tiene la siguiente proporción entre la medida de sus lados correspondientes.

$$\frac{AB}{CB} = \frac{BC}{BD} = \frac{AC}{CD}$$



2. Remplazando las medidas de sus lados en la igualdad $\frac{AB}{CB} = \frac{BC}{BD}$, se tiene:

$$\frac{c}{a} = \frac{a}{p} \blacktriangleright a^2 = c \cdot p$$

3. Por lo tanto, en el ΔABC se cumple que $a^2 = c \cdot p$.

¿Qué criterio de semejanza te permite demostrar que $\Delta ABC \sim \Delta CBD$? Justifica tu afirmación.

Ejemplo 2

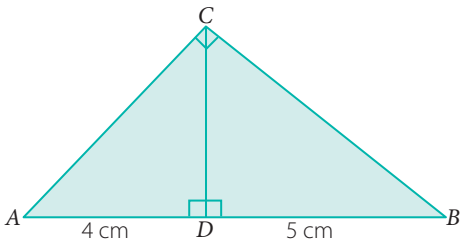
El ΔABC es rectángulo en C. ¿Cuál es la medida de los lados $\overline{CA}$ y $\overline{BC}$?

Al utilizar el teorema de Euclides referente a los catetos, se tiene que:

$CA^2 = 4 \cdot 9$ $\quad$ $BC^2 = 5 \cdot 9$

$CA^2 = 36 \,/\, \sqrt{\ }$ $\quad$ $BC^2 = 45 \,/\, \sqrt{\ }$

$CA = 6$ $\quad$ $BC = \sqrt{45}$



Respuesta: La medida de los lados $\overline{CA}$ y $\overline{BC}$ son 6 cm y $\sqrt{45}$ cm, respectivamente.

¿Cuánto mide el segmento $\overline{CD}$?

Ejemplo 3

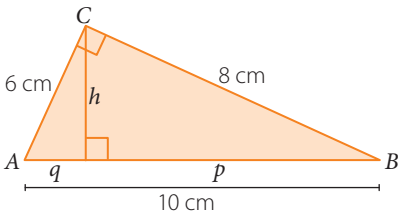
El ΔABC es rectángulo en C. ¿Cuáles son los valores de p, q y h?

Al utilizar el teorema de Euclides referente a los catetos, se tiene que:

$8^2 = p \cdot 10 \blacktriangleright p = 6{,}4$ $\quad$ $6^2 = q \cdot 10 \blacktriangleright q = 3{,}6$

Utilizando las medidas de p y q se calculará la medida de h.

$h^2 = 3{,}6 \cdot 6{,}4 \blacktriangleright h^2 = 23{,}04 \blacktriangleright h = 4{,}8$



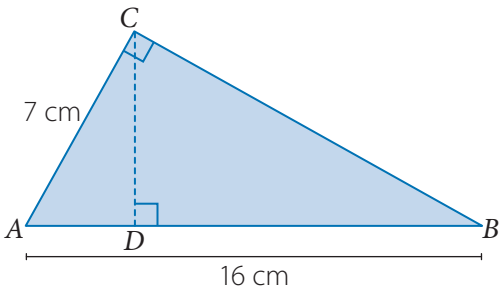
Respuesta: Las medidas de p, q y h son 6,4 cm, 3,6 cm y 4,8 cm, respectivamente.

Ejercicios

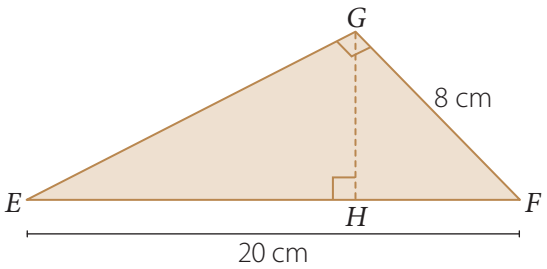
Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Utiliza los teoremas de Euclides y calcula lo solicitado.

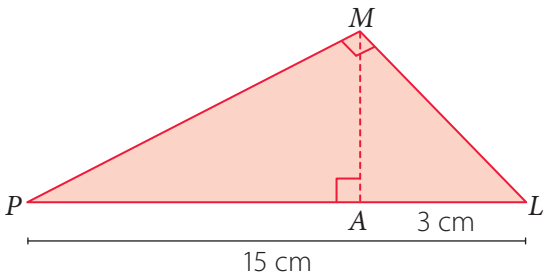
a. Calcula la medida de $\overline{AD}$.



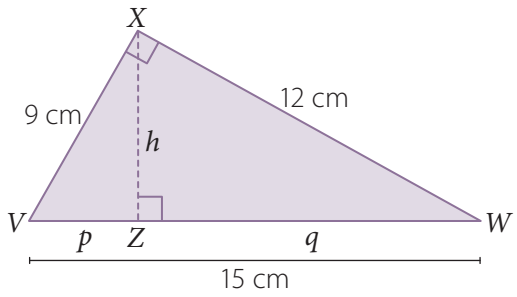
b. Calcula la medida de $\overline{HF}$.



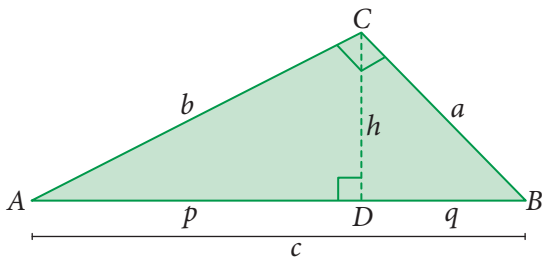
c. Calcula la medida de $\overline{AM}$.



d. Calcula las medidas de p, q y h.



2. Analiza el siguiente triángulo. Luego, responde.



a. Si $a = 8$ cm y $q = 2$ cm, ¿cuál es el valor de c?

b. Si $h = 9$ cm y $p = 4$ cm, ¿cuál es el valor de q?

c. Si $q = 5$ cm y $p = 10$ cm, ¿cuál es el valor de b?

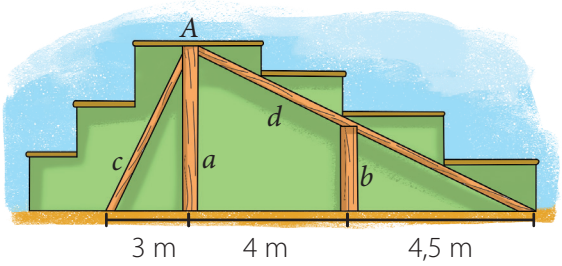
d. Si $a = 3$ cm, $b = 4$ cm y $c = 5$ cm, ¿cuál es el valor de p, q y h?

e. Si $h = \frac{60}{13}$ cm, $p = \frac{25}{13}$ cm y $q = \frac{144}{13}$ cm, ¿cuál es el valor de a, b y c?

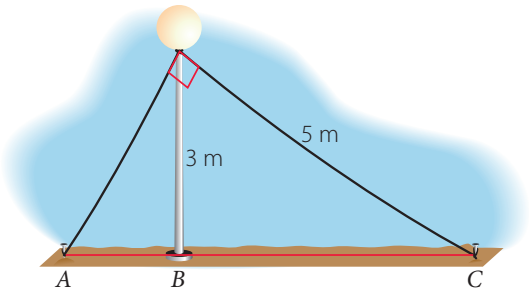
f. Si $a = 8$ cm, $b = 15$ cm y $c = 17$ cm, ¿cuál es el valor de p, q y h?

3. Resuelve los siguientes problemas.

a. Para sostener los asientos de una tribuna, se han puesto por debajo las columnas a y b, y las vigas c y d. Si las vigas forman entre sí un ángulo recto, ¿cuál será la altura de cada columna?



b. Un poste se encuentra anclado mediante dos cables que forman un ángulo recto. ¿Cuáles son las medidas de $\overline{AB}$ y $\overline{BC}$? (Considera que el poste no tiene grosor).



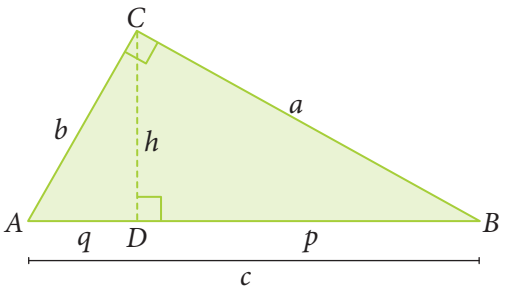
4. Demuestra que en el ΔABC se cumple que:

a. $b^2 = c \cdot q$

b. $h^2 = p \cdot q$

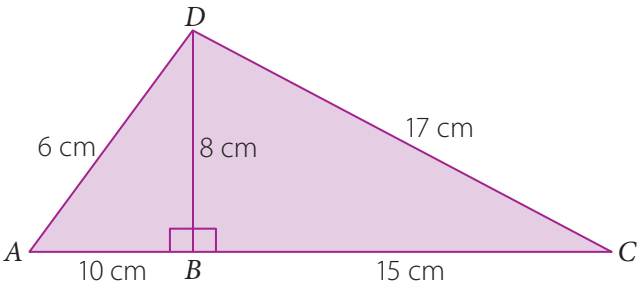
c. $a \cdot b = c \cdot h_c$

d. $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$



5. Junto con un compañero o una compañera expliquen quién está en lo correcto. Argumenten.

Juan le comenta a Melissa que las medidas escritas en el ΔACD no son correctas, ya que no cumplen con el teorema de Euclides, a lo que Melissa le responde que sí son correctas, ya que no se puede aplicar el teorema de Euclides. ¿Quién está en lo correcto?



Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Aplicaste los teoremas de Euclides en la resolución de problemas?

_____

- ¿Utilizaste procedimientos matemáticos para demostrar los teoremas de Euclides? Escríbelos.

_____

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Página 63

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 4

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

1. Analiza la siguiente información y luego responde. (2 puntos cada uno)

Luis, a partir de una pintura original, ha recreado, conservando la proporción, el cuadro que se muestra a continuación.



a. Si el ancho original del cuadro mide 75 cm, ¿cuánto mide el largo original?

b. ¿Cuál sería el valor de la razón entre el cuadro original y la recreación que se tiene? Explica cómo lo calculaste.

Realiza tus cálculos

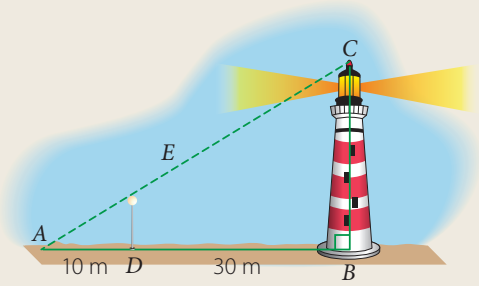
Explicación

c. Si quiere recrear, conservando la proporción, otros cuadros de manera que su largo sea mayor que 50 cm y menor que 140 cm, ¿qué posibles medidas del largo y ancho puede considerar? Escribe al menos 2 medidas y explica cómo las calculaste.

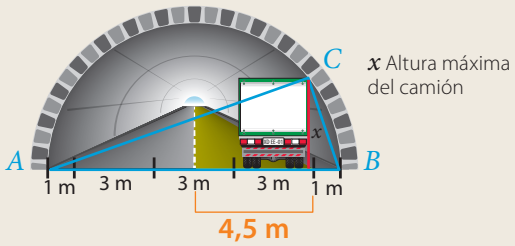
Realiza tus cálculos

Explicación

2. Si $\overline{AB}$ es la sombra del faro y $\overline{AD}$ es la sombra del poste de 6 m de alto a la misma hora, ¿cuál es la altura del faro? (4 puntos)



3. Se muestra la vista de atrás de un camión que pasa por un túnel con la forma de medio cilindro. La imagen es bidimensional y por eso el cilindro se proyecta en forma de semicírculo. El triángulo ABC está inscrito en una semicircunferencia de radio 5,5 m. ¿Cuál es la altura máxima del camión? (4 puntos)



Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1	Calcular, a partir de las medidas de un modelo, las medidas de un objeto real y viceversa.		**Logrado:** 9 puntos o más. **Medianamente logrado:** 7 a 8 puntos. **Por lograr:** 6 puntos o menos.
2	Aplicar propiedades de semejanza.		
3	Aplicar los teoremas de Euclides.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- Explica con tus palabras lo que entiendes por semejanza de figuras.

- ¿Participaste en la búsqueda de soluciones a problemas? Explica.

- Respecto de las metas propuestas al iniciar el tema, ¿las cumpliste? Argumenta tu respuesta.

Actividades complementarias

CIUDADES RADIOCONCÉNTRICAS

Las ciudades radioconcéntricas se caracterizan, generalmente, por estar centradas en una plaza y rodeadas de calles en círculos concéntricos.

Del centro salen avenidas rectas que las unen y que forman cruces aproximadamente de 120°, que se relacionan con sus radios.

La ventaja que tiene este tipo de ciudad es el fácil y rápido acceso entre el centro y la periferia.

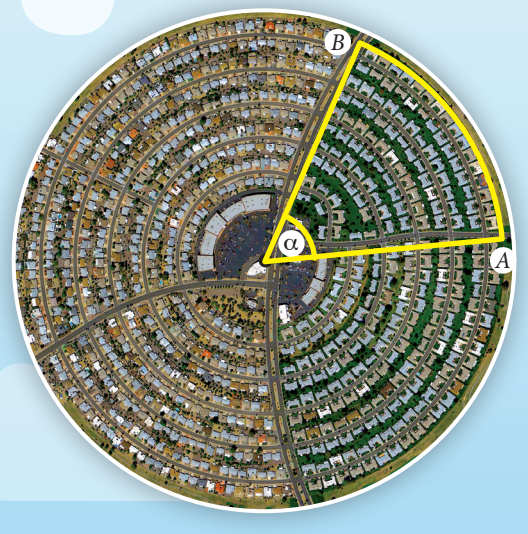
Ciudades con este modelo de urbanización son escasas, por ejemplo:

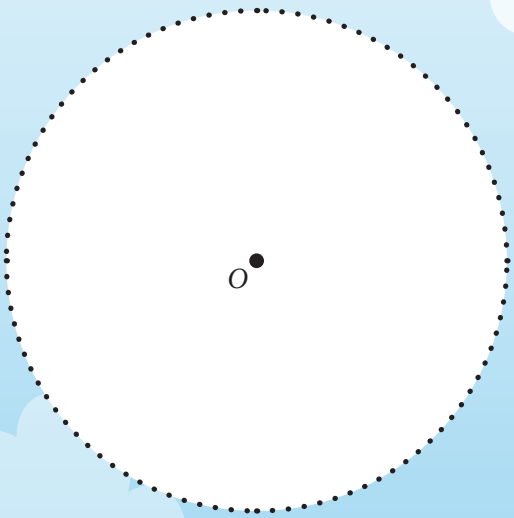
- La ciudad italiana de **Palmanova**, que en realidad no es un círculo sino un polígono regular de 9 lados (eneágono regular).
- La ciudad de **Sun City** en Arizona (EE.UU.) presenta una urbanización radioconcéntrica totalmente circular y el diámetro del círculo mayor mide aproximadamente 1 150 metros.
- Dentro de la ciudad de París encontramos la **plaza de l´Étoile** y el **Arco del triunfo**, en el cual desembocan doce avenidas, produciéndose un diseño radial pero sin calles concéntricas.



Responde

A continuación, se considera una parte de la ciudad concéntrica, en la que se destaca un sector circular con su respectivo ángulo.





1. Representa en el círculo la información anterior, ¿cuánto mide su radio?
2. ¿Qué expresión representa el perímetro y área del sector circular?
3. Suponiendo que el ángulo del centro mide 45°, ¿cuánto es el área y perímetro del sector circular?
4. Considerando la medida del ángulo anterior, ¿cuánto mide el arco $\overset{\frown}{AB}$ y el arco $\overset{\frown}{BA}$?

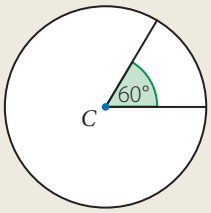
¿Qué aprendí? Evaluación final

A continuación, te proponemos preguntas que tendrás que desarrollar considerando lo que has aprendido en esta unidad.

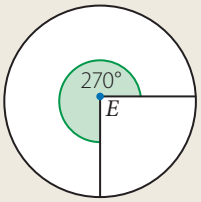
Sectores y segmentos circulares

1. Determina qué parte del círculo son los siguientes sectores circulares. (1 punto cada uno)

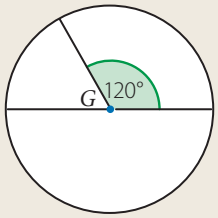
a.



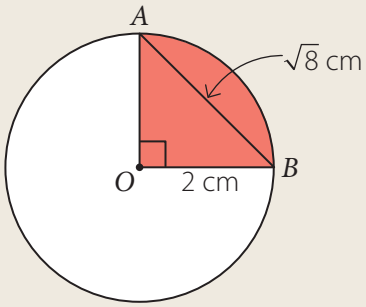
b.



c.



2. En la siguiente circunferencia se destacan segmentos y sectores circulares. (1 punto cada uno)



a. ¿Cuál es el área del sector circular pintado?

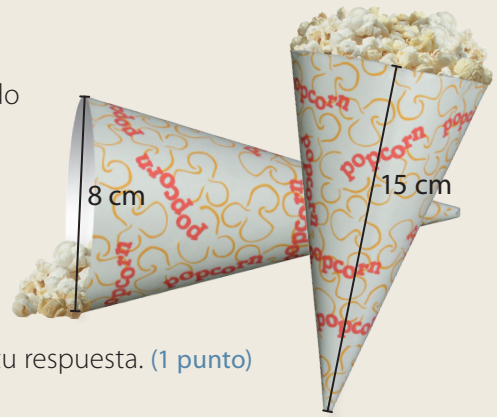
b. ¿Cuál es el perímetro del sector circular pintado?

c. ¿Cuál es el área del segmento circular marcado?

d. ¿Cuál es el perímetro del segmento circular marcado?

Área y volumen del cono

3. Los envases de cabritas que se muestran en la imagen están hechos de cartón y tiene igual forma.



a. ¿Qué forma tienen los envases de las cabritas? (1 punto)

b. ¿Cuánta capacidad tiene cada envase de cabritas, suponiendo que el grosor del cartón es despreciable? (2 puntos)

c. ¿Cuánto cartón se usó en cada envase? (2 puntos)

d. Si los envases tuvieran tapa, ¿cambia su capacidad? Justifica tu respuesta. (1 punto)

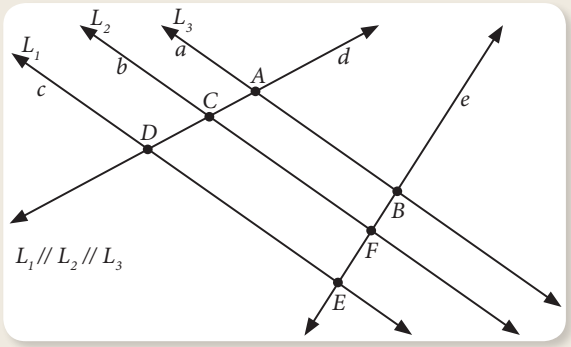
e. Si los envases tuvieran tapa, ¿cambia su superficie? Justifica tu respuesta. (1 punto)

4. Resuelve los siguientes problemas. (3 puntos cada uno)

a. Andrés va a una tienda a comprar una copa con forma cónica. El vendedor le dice que tiene una de 4 cm de diámetro y 15 cm de altura y otra de 6 cm de diámetro y 7 cm de altura. Si Andrés escoge la que tiene mayor capacidad, ¿cuál elige?

b. Andrea debe construir 200 conos de cartulina para usarlos como envases de papas fritas que venderán en la fiesta de la escuela. Si cada envase debe tener 5 cm de radio, 12 cm de altura y el precio de una cartulina de 70 cm de ancho y 100 cm de largo es de $ 150, ¿cuánto gastará?

Homotecia y teorema de Tales

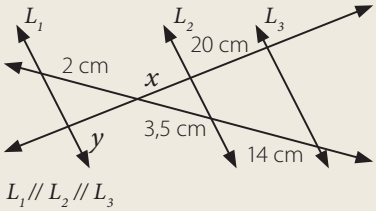


5. Observa la imagen y responde. (3 puntos)

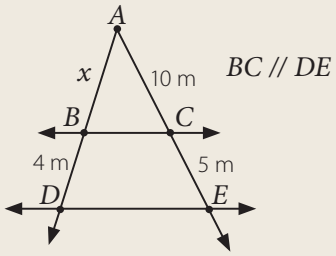
a. Nombra tres proporciones entre las medidas de segmentos definidos por las rectas paralelas sobre las transversales.

6. En cada caso, calcula el valor de x.
(3 puntos cada uno)

a.

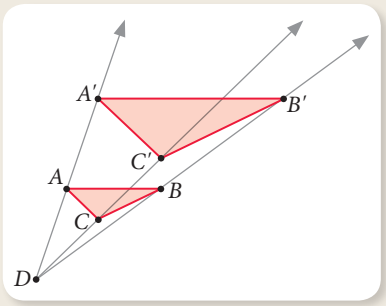


b.

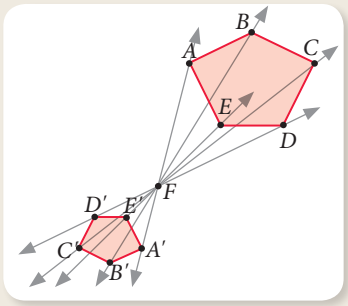


7. Mide y determina el valor de razón de homotecia en cada caso. (1 punto cada uno)

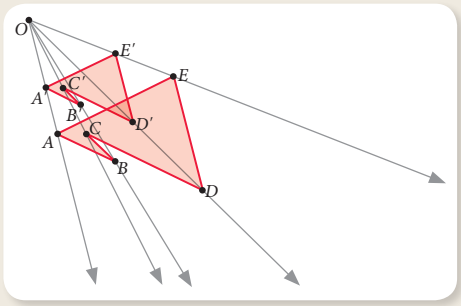
a.



b.



c.



8. Determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las falsas.
(1 punto cada uno)

a. ◯ La imagen de una figura al aplicarle una homotecia es siempre congruente con la figura original.

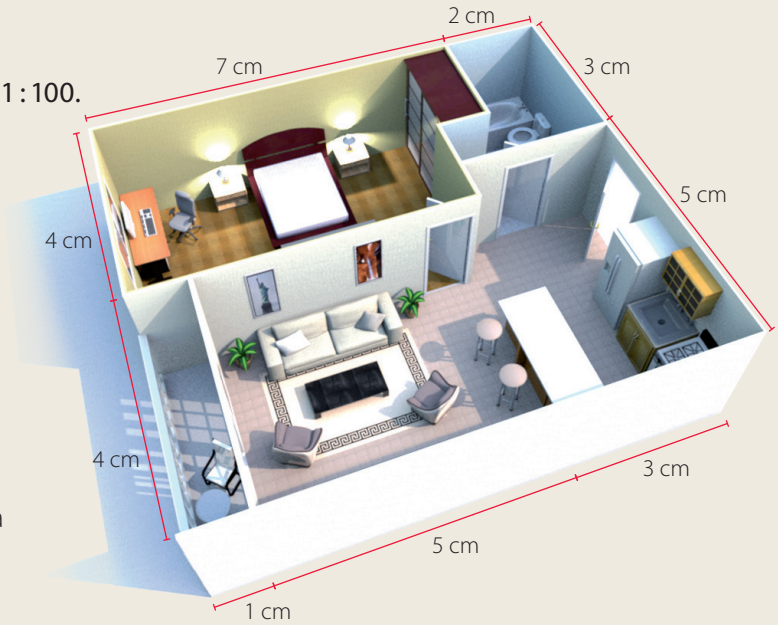
b. ◯ Si el valor de la razón en una homotecia es menor que 1 y mayor que 0, siempre es una reducción de la figura original.

c. ◯ Vectorialmente, una homotecia es una transformación que pondera cada uno de los vectores por una razón dada.

¿Qué aprendí? Evaluación final

Semejanza

9. El siguiente plano tiene una escala de 1 : 100. Responde las siguientes preguntas.



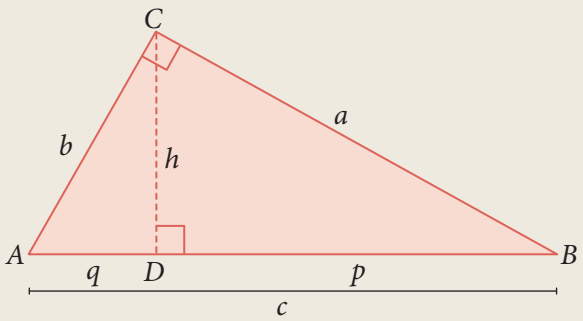
a. En el mapa, ¿cuáles son las medidas del comedor? (1 punto)

b. En la realidad, ¿cuáles serían las medidas del comedor? (1 punto)

c. ¿Cuál es el área real del comedor en metros cuadrados? (2 puntos)

d. Se quiere poner cerámica en la cocina, cuyo metro cuadrado cuesta $ 1 500, ¿cuánto dinero se necesita, aproximadamente? (2 puntos)

10. Observa la imagen y responde.



a. ¿Por qué el triángulo ABC es semejante al ACD? ¿Y al triángulo CBD? (1 punto)

b. ¿Qué proporciones se cumplen entre las medidas de los lados de los triángulos ABC y ACD? (2 puntos)

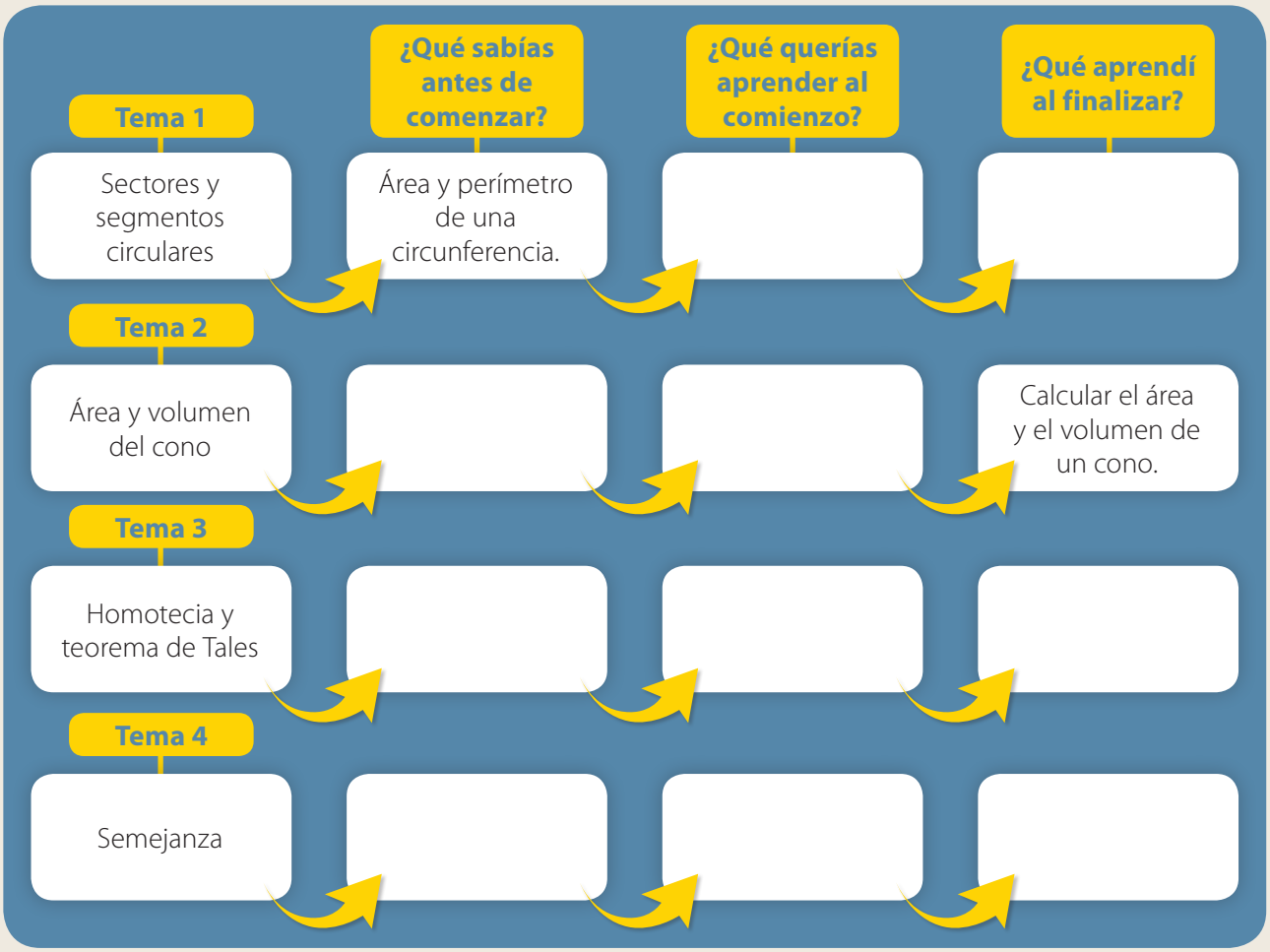
c. Usa lo anterior para demostrar que $b^2 = q \cdot c$. (3 puntos)

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1 y 2	Calcular el área y el perímetro de sectores y segmentos circulares.		**Logrado:** 28 puntos o más. **Medianamente logrado:** 23 a 27 puntos. **Por lograr:** 22 puntos o menos.
3 y 4	Calcular el área y el volumen de conos.		
5, 6, 7 y 8	Comprender el concepto de homotecia. Desarrollar y aplicar el teorema de Tales.		
9 y 10	Aplicar y reconocer propiedades de semejanza en modelos a escala, triángulos y los teoremas de Euclides.		
	Total		

Actividad de cierre

Completa el esquema con tus conocimientos antes de empezar la unidad y lo que has aprendido en ella.



Reflexiona sobre tu trabajo

- Las estrategias que planteaste, ya sea de forma individual o con tus compañeros al inicio de cada tema, ¿te ayudaron a desarrollar los aprendizajes para esta unidad?

_____

- ¿Crees que lo aprendido en esta unidad te ayuda a resolver desafíos matemáticos relacionados con la resolución de problemas reales?

_____

- ¿Cumpliste tu meta propuesta al iniciar la unidad? Explica.

_____

Unidad 4

Probabilidad y estadística

La **probabilidad y la estadística** están presentes en cualquier situación en la que no exista certeza de sus posibles resultados. La estadística permite, a partir de datos, sacar conclusiones e incluso predecir resultados con alguna medida de confiabilidad. Por otro lado, la probabilidad es una manera de medir la incertidumbre de los resultados.



Al realizar encuestas, los datos recopilados los puedes representar en un gráfico para estudiarlos de mejor forma.

Estudiarás...	Para que puedas...	En las páginas...
Tema 1 Comparación de muestras	Registrar y comparar distribuciones de dos características o poblaciones.	226 a la 243
Tema 2 Propiedades de la probabilidad	Resolver problemas que involucran probabilidad.	244 a la 265
Tema 3 Comportamiento aleatorio	Comprender el concepto de azar mediante experimentos y análisis estadísticos.	266 a la 279



Al realizar juegos de azar, se puede determinar la probabilidad asociada a diferentes experimentos aleatorios.

Punto de partida

Te invitamos a observar la imagen para responder las siguientes preguntas que te ayudarán a planificar tu aprendizaje en esta unidad.

1. ¿Cómo crees que se relacionan la estadística y la probabilidad? Explica.

2. ¿Qué situación o tema de tu interés crees que se pueda relacionar con estadística o probabilidad y con lo que estudiarás en esta unidad? ¿Por qué?

3. Respecto a lo que te interesa aprender, ¿qué meta te propones cumplir al finalizar esta unidad? ¿Cómo piensas cumplirla?

Actitud

Te invitamos a desarrollar esta unidad con una actitud crítica frente a informaciones, a valorar el aporte de los datos en la comprensión de la realidad social; y a ser responsable en el uso de las tecnología. ¡Que tengas éxito en el cumplimiento de tus metas!

¿Cuánto sé? Evaluación inicial

Activa tus conocimientos previos y desarrolla las siguientes actividades de evaluación.

Medidas de tendencia central y posición

1. Lee la situación y responde.

En un colegio se realizó una prueba de habilidades de lectura a 20 estudiantes con problemas auditivos. Los puntajes obtenidos fueron:

42	26	22	30	44	22	30	26	38	22	30	22	22	22	26	30	20	44	36	26

a. Calcula la media, la mediana y la moda de los datos. Escribe una conclusión para cada medida. (3 puntos)

Realiza tus cálculos

Conclusión ▸ _____

b. Determina la cantidad de estudiantes que constituyen menos del 90 % de los datos del estudio. (1 punto)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ _____

c. Calcula el valor del dato que deja por debajo el 85 % de los puntajes. (1 punto)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ _____

d. Determina el valor de los cuartiles e interprétalo en su contexto. (2 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ _____

Probabilidad de un evento

2. Supón que se lanza cuatro veces una moneda honesta (no se encuentra cargada).

a. Escribe el espacio muestral del experimento aleatorio. (2 puntos)

b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cuatro caras? (2 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ _____

c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos un sello? (2 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ _____

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1	Comprender y aplicar las medidas de tendencia central y de posición.		**Logrado:** 8 puntos o más. **Medianamente logrado:** 6 a 7 puntos. **Por lograr:** 5 puntos o menos.
2	Aplicar el principio multiplicativo para calcular probabilidades.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué conceptos crees que debes repasar antes de empezar esta unidad? ¿Qué estrategia usarás?

_____

- ¿Por qué se puede asumir que una moneda es honesta? Explica.

_____

Tema 1

Comparación de muestras

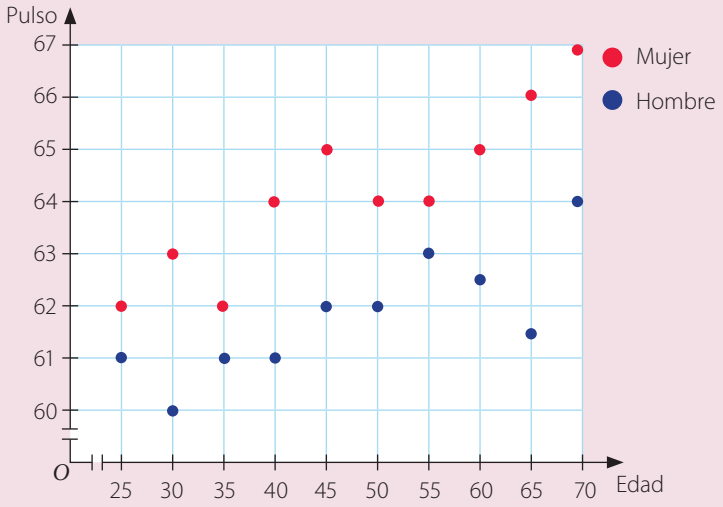
En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 1.

Recuerdo lo que sé

1. Lee la siguiente información.

En la ciudad de Santiago se eligió a 10 mujeres y 10 hombres y se les midió su pulso en reposo.

En el gráfico se representan los datos, donde cada punto muestra la información de la edad y pulso de una persona.



a. Escribe la información del pulso de todas las personas del estudio, por género.

Hombres ▸ _____

Mujeres ▸ _____

b. ¿La persona con mayor pulso es hombre o mujer? ¿Y la con menor pulso?

_____

c. Calcula las medidas de tendencia central del pulso de hombres y mujeres, y luego da una interpretación de cada medida.

Realiza tus cálculos

La **moda**, la **mediana** y la **media** son **medidas de tendencia central**. La moda corresponde al valor con mayor frecuencia, la mediana divide la distribución de los datos en dos partes iguales y la media se obtiene con el promedio de los datos.

Interpretación ▸ _____

_____

_____

_____

Recursos Digitales Complementarios



RDC 10

Diseño mi estrategia

2. Analiza cada caso y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

El estudio busca establecer una relación, aproximada, entre la edad de una persona y su pulso a partir de los datos. Esta relación permitiría determinar cuál debería ser el pulso aproximado de una persona conociendo su edad.

a. ¿Se puede observar en el gráfico algún tipo de relación entre la edad y el pulso de una persona? Descríbela con tus palabras.

b. La relación entre la edad y el pulso, ¿es la misma para los hombres y las mujeres? Justifica.

c. A partir de los datos, ¿qué harías para determinar el pulso que debería tener una persona de 63 años o de 42 años? Explica tu estrategia.



3. Comenta tu estrategia con un compañero o compañera y luego escribe lo que te sirvió para mejorar la tuya.

Reflexiona sobre tu trabajo

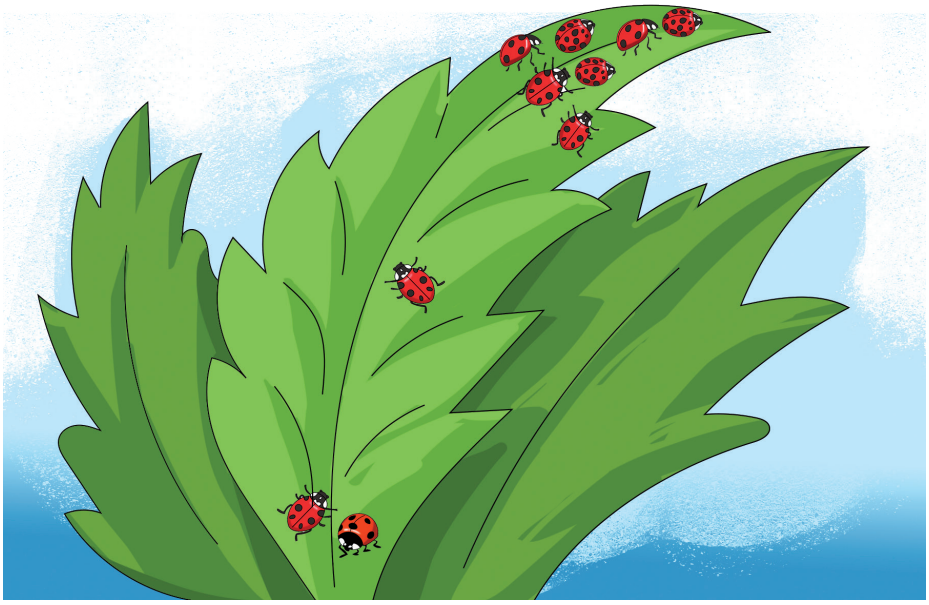
- ¿Qué dificultades tuviste para crear una estrategia? ¿Cómo podrías superarlas?
- ¿Qué conocimientos de años anteriores o de tu experiencia utilizaste en el análisis estadístico de los datos?
- ¿Qué otras variables estimas que se podrían relacionar en un estudio estadístico de tu interés? Da un ejemplo.
- ¿Crees que los datos del problema son reales? Justifica tu respuesta.

Relación entre dos variables cuantitativas

Objetivo

- Registrar distribuciones de dos características distintas de una misma población en una nube de puntos.

Un veterinario especialista en insectos decidió estudiar a las chinitas. Fue a su jardín y observó a un grupo que vivía en la hoja de una planta.



- Describe con tus palabras cómo están distribuidas las chinitas.

  _____

- Si el veterinario pone otra chinita en la misma hoja, ¿dónde crees que se ubicaría?

  _____

- ¿Tu respuesta anterior quiere decir que se puede saber con certeza dónde se ubicará la chinita? Justifica tu respuesta.

  _____

  _____

- La distribución de las chinitas se asemeja a la representación por puntos en el plano usada en estadística para mostrar la posible relación entre dos variables y se conoce como **nube de puntos** o **gráfico de dispersión**.

Atención

Recuerda que una variable puede ser cuantitativa o cualitativa. Es **cuantitativa** cuando sus valores son numéricos, por ejemplo la estatura o la masa corporal, y **cualitativa** si sus valores son categorías no numéricas, como color de ojos o pelo.

Conceptos

- Una **nube de puntos** corresponde a la gráfica de un conjunto de pares ordenados en el plano cartesiano, donde las coordenadas de cada punto corresponden a una **variable cuantitativa** en estudio.
- Las nubes de puntos se pueden presentar de muchas formas, por lo que identificar ciertas **tendencias** o comportamientos puede ayudar a obtener información sobre la relación que tienen las características estudiadas.

Ejemplo 1

La siguiente tabla corresponde a datos obtenidos mediante una encuesta que se les realizó a 10 personas sobre su masa corporal y edad.

Persona	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Edad	10	13	15	14	11	17	19	15	17	11
Masa corporal	28	34	43	40	31	52	63	42	53	31

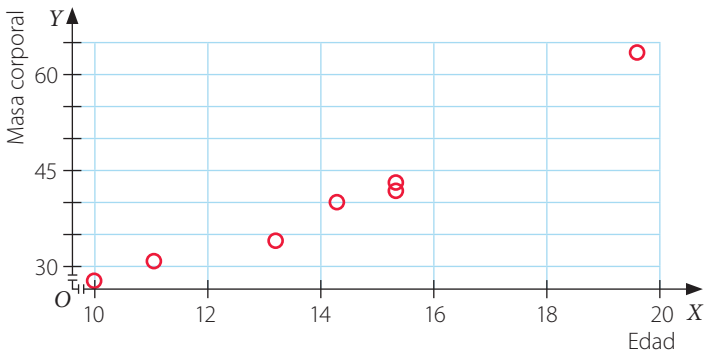
Representa los datos de la tabla en una nube de puntos.

Para graficar los datos, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. Debes generar los puntos que conformarán la nube, es decir, los pares ordenados (edad, masa corporal) para cada persona; por ejemplo, a la persona 1 le corresponde el par (10, 28) y a la persona, 5 el par (11, 31).

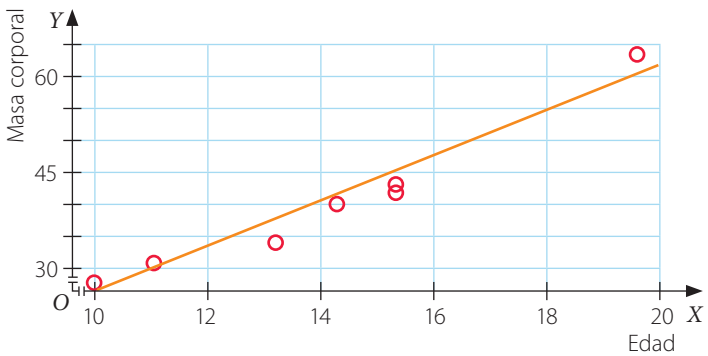
2. Construyes un plano cartesiano en el que el eje X representa la edad y el eje Y, la masa corporal. Luego, ubicas los puntos.



¿Se puede observar alguna relación entre las variables?

Se puede observar una tendencia lineal, es decir, que las variables se relacionan, aproximadamente, de manera proporcional.

A continuación se observa que se podría trazar una línea recta para aproximar dicha relación.



Atención

En ocasiones se utiliza el peso y la masa como términos equivalentes. Sin embargo no lo son, ya que el peso es una magnitud vectorial y la masa, un escalar.

Habilidad

Representar relaciones entre variables te ayudará a mejorar su comprensión y análisis.

Atención

En muchas ocasiones diremos que hay una tendencia lineal cuando se puede trazar una línea recta aproximada entre los puntos.

Conceptos

Cuando una nube de puntos tiene una tendencia semejante a una recta o están en torno a una recta, diremos que las variables tienen una **relación lineal** o están **correlacionadas linealmente**.

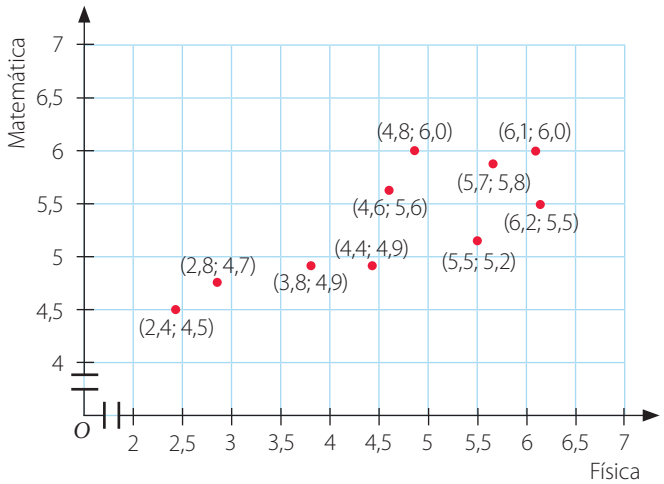
Ejemplo 2

Un estudiante ha tenido las calificaciones que se muestran en la tabla:

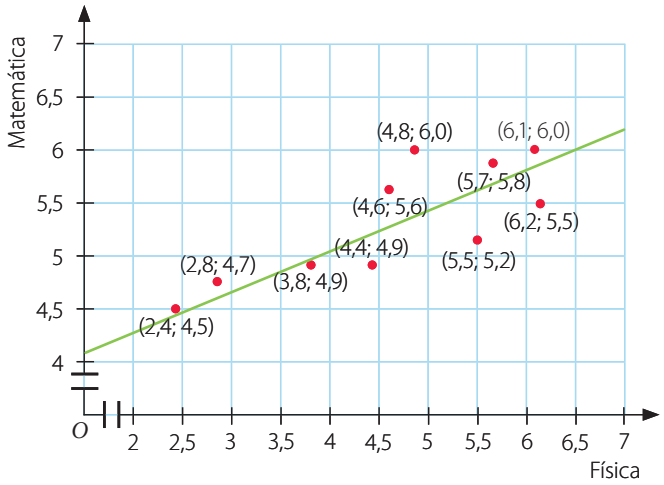
Física	6,1	2,8	5,5	4,6	4,8	4,4	6,2	2,4	5,7	3,8
Matemática	6,0	4,7	5,2	5,6	6,0	4,9	5,5	4,5	5,8	4,9

PASO A PASO

1 Al representar la información anterior en un plano cartesiano, considerando en el eje X las calificaciones obtenidas en Física y en el eje Y las calificaciones obtenidas en Matemática, se tiene lo siguiente:



2 Al trazar una recta que pase cerca de la mayoría de las calificaciones, se tiene:



Respuesta: Ya que la mayoría de los puntos está cerca de la recta, entonces las calificaciones (variables) están correlacionadas linealmente.

Actitud

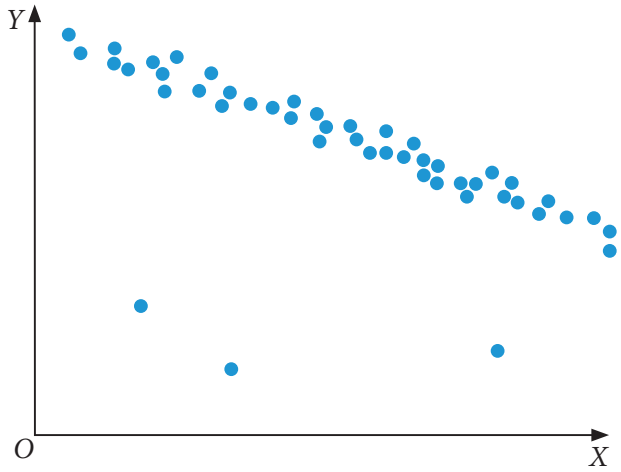
Siempre cuestiona los datos o estudios que se presentan en los medios de comunicación, ya que puede que tengan errores de registro o de análisis.

Conceptos

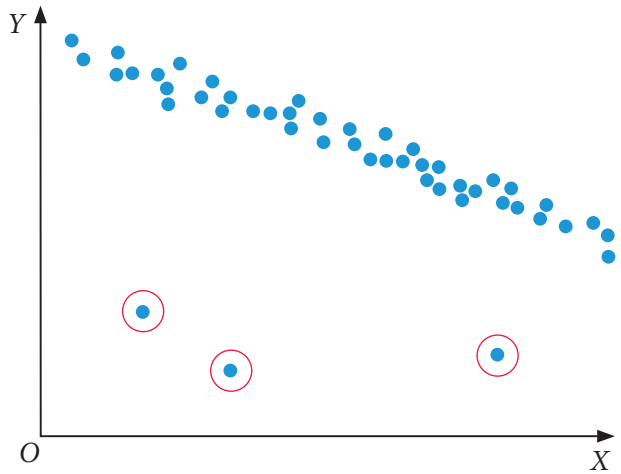
Diremos que un punto es **aislado** (punto atípico u *outlier*) si en el gráfico muestra un comportamiento muy distinto al de los demás puntos.

Ejemplo 3

Detecta los puntos aislados en la siguiente nube, luego enciérralos.



Los puntos en la nube siguen la forma de una recta, salvo aquellos tres que se encuentran más cercanos al eje X y se marcan en la imagen.



Con ello hemos identificado los puntos atípicos.

Atención

Muchos modelos estadísticos buscan relaciones lineales entre las variables y analizan los puntos aislados que se presentan en la información.

- Dibuja una recta lo más próxima a todos los datos sin considerar los puntos aislados.
- Si se dibuja una recta considerando los puntos aislados, ¿crees que la tendencia se ve afectada? Justifica tu respuesta.
- Si en una situación donde se relacionan dos variables el gráfico de dispersión presenta puntos aislados, ¿la medida de cada variable cambia si se quitan dichos puntos? Da un ejemplo.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Representa los siguientes datos como nube de puntos.

a. {(1, 2), (3, 4), (5, 6), (7, 8), (9, 9), (12, 3), (1, 3)}

b. {(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6), (7, 7)}

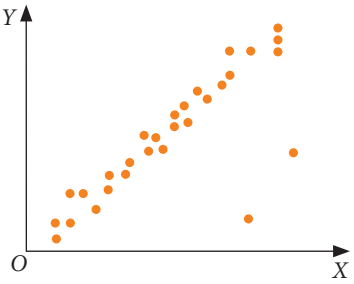
c. {(1, 0), (10, 3), (3, 10), (4, 4), (8, 7), (9, 1), (2, 10)}

d. {(0, 1), (2, 6), (3, 2), (5, 6), (2, 2), (3, 1), (6, 2)}

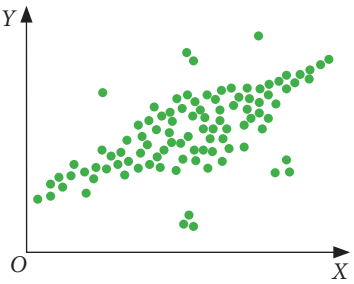
2. En cada una de las nubes del ítem anterior, determina si los puntos siguen algún patrón o parecen estar distribuidos al azar.

3. En las siguientes nubes de puntos, decide si se puede establecer alguna relación entre las variables. En el caso de que tu respuesta sea afirmativa, determina si la relación es lineal y si existen puntos atípicos. Justifica tu respuesta.

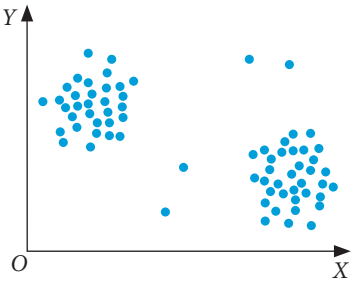
a.



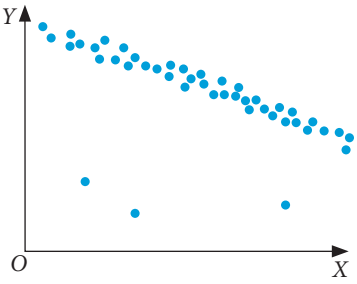
c.



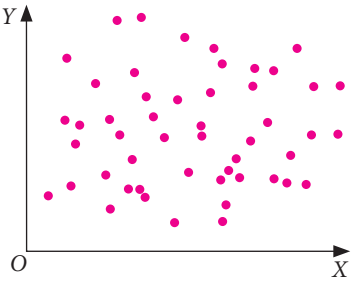
e.



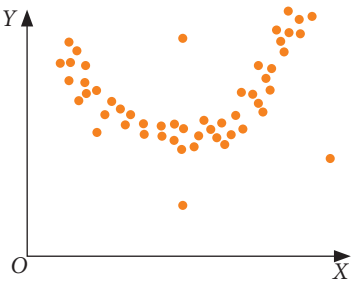
b.



d.



f.



4. Junto con un compañero o compañera, realiza la siguiente actividad.

a. Cada uno elija una variable cuantitativa distinta para analizar y apliquen una encuesta a cada uno de sus compañeros.

b. Organicen los datos en un gráfico de dispersión.

c. Verifiquen si existe correlación entre las características que eligieron. En caso de que no la haya, ¿observan algún otro tipo de relación en los datos?

d. Repitan la actividad anterior un par de veces consultando a otras personas. ¿Varían sus conclusiones al cambiar la muestra?

5. Lee la situación y responde.

Doña Martina es dueña de una panadería y está muy interesada en saber si el monto de sus ventas diarias tiene alguna relación con la cantidad de clientes que van a la panadería en el día. Para ello, registró durante una semana la cantidad de clientes diarios y la recaudación de sus ventas (en miles de $) cada día y elaboró la siguiente tabla:

Cantidad de clientes	Recaudación (en miles de $)
82	125
58	90
50	68
65	95
100	155
115	175
85	115

a. Construye una nube de puntos para los datos (utilizando una graduación conveniente del plano cartesiano).

b. Describe brevemente el comportamiento que se observa en la nube de datos.

c. ¿Se puede verificar la conjetura que tenía doña Martina en términos de la relación clientes y recaudación? ¿Cuál sería dicha relación?

d. ¿Observas datos atípicos? Explica.

e. ¿Crees que una semana de registro de datos es suficiente para verificar la conjetura de doña Martina? Justifica tu respuesta.

f. ¿Crees que tiene sentido hablar de datos atípicos en esta situación?

g. ¿Qué harías tú para que doña Martina pueda tener una respuesta más confiable a su conjetura respecto de la relación de clientes y montos de venta?

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 68 – 69

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Te cuestionaste los datos que aparecieron en las actividades? ¿Averiguaste más sobre los temas? Explica.

- ¿Crees que el estudio de la relación entre dos variables podría variar si se cambia la muestra en estudio? Justifica tu respuesta.

Relación entre dos variables cualitativas

Objetivo

- Registrar distribuciones de dos características distintas, de una misma población, en una tabla de doble entrada.

En un estudio se quiere determinar si es más probable que un niño tenga asma si tiene padres fumadores que aquel cuyos padres no son fumadores. La tabla de frecuencias resume los resultados.

Tabla de frecuencias

Tipo de familia	Frecuencia
Padres fumadores e hijo con asma	280
Padres fumadores e hijo sin asma	45
Padres no fumadores e hijo con asma	32
Padres no fumadores e hijo sin asma	143

Tabla de contingencia

	Padres fumadores	Padres no fumadores
Hijo con asma		
Hijo sin asma		

Conexión con Biología

El asma es una enfermedad del sistema respiratorio que causa la inflamación de las vías respiratorias, lo que produce dificultad al respirar.

- Completa la tabla de contingencia a partir de la tabla de frecuencias.
- Según los datos, ¿cuál sería la conclusión del estudio? ¿En qué tabla te fijaste?

_____

_____

_____

- Escribe una diferencia entre las tablas. Considera, por ejemplo, la cantidad de variables y sus categorías.

_____

_____

_____

- Cuando se requiere analizar dos características se utilizan las tablas de doble entrada, ya que permiten organizar los datos de forma ordenada y conveniente.

Atención

Los posibles valores de una variable cualitativa reciben el nombre de **categorías**. Por ejemplo, la variable sexo presenta las categorías hombre y mujer.

Conceptos

- Una **tabla de doble entrada** o **tabla de contingencia** es aquella que sirve para contar la cantidad de individuos u objetos con dos tipos de características o variables cualitativas.
- Una tabla de doble entrada está conformada por filas y columnas. Las filas están formadas por las categorías de una variable, y las columnas, por las de la otra variable. En cada una de las casillas formadas se ubica la cantidad de datos que tienen ambas características simultáneamente.

Ejemplo 1

Considera la siguiente tabla de datos:

Tipo de individuo	Frecuencia
Hombre en zona rural	12
Hombre en zona urbana	54
Mujer en zona rural	16
Mujer en zona urbana	48

Representa la tabla de frecuencias en una tabla de doble entrada y escribe conclusiones a partir de ella.

Para representar la tabla de frecuencias en una tabla de doble entrada puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. Identificas las características o variables que se deben relacionar. En este ejemplo, las características son el género y la zona donde se habita, por lo que la tabla tendrá la siguiente forma:

	Rural	Urbana
Hombre		
Mujer		

2. Completa las casillas de los cruces con los datos correspondientes

	Rural	Urbana
Hombre	12	54
Mujer	16	48

3. Escribe conclusiones a partir de la tabla de contingencia.

   En el estudio se consideró a 64 mujeres y 66 hombres. La cantidad de personas en una zona rural es 28, mientras que en la zona urbana es 102. Tanto en hombres como en mujeres hay mayor concentración de personas en la zona urbana.

- ¿La información presente en una tabla de doble entrada se puede representar con una nube de puntos? Comenta con un compañero.
- ¿Cuándo usarías una tabla de doble entrada en vez de una nube de puntos para representar la relación entre dos variables? Comenta con un compañero o compañera.

Conexión con Geografía

El país se divide política y administrativamente en regiones, provincias y comunas. Para la realización de censos y encuestas se utiliza la división en áreas urbana y rural.

Para saber más, ingresa a los siguientes *links*:

http://www19.iadb.org/intal/intalcdi/PE/2011/08534.pdf

http://www.subdere.gov.cl/documentacion/regiones-provincias-y-comunas-de-chile

Actitud

Muchos estudios estadísticos tienen por objetivo ser una base en la toma de decisiones, por lo que deben ser rigurosos y críticos. Cuando realices actividades estadísticas, persigue esta actitud.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. La siguiente tabla de doble entrada muestra las preferencias en deportes (individual y en equipo) de 40 estudiantes de un colegio.

	Fútbol	Balonmano	Básquetbol
Natación	2	5	3
Tenis	6	7	8
Correr	1	2	6

Calcula las siguientes probabilidades; para ello, considera que se escoge a un estudiante al azar.

a. La probabilidad de que al estudiante le guste el fútbol y el tenis.

b. La probabilidad de que al estudiante le guste el balonmano y correr.

c. La probabilidad de que al estudiante le guste el tenis.

d. La probabilidad de que al estudiante le guste el básquetbol y el tenis o correr.

2. Lee la situación y responde.

Una persona quiere realizar un estudio para saber cuál es el medio de transporte más usado en la Región Metropolitana. Para ello se encuestó a 40 personas de la zona norte de la región y a 40 de la zona sur y se obtuvieron los siguientes resultados:

Zona norte

M	M	T	A	A	A	M	B
B	T	T	M	A	M	T	T
B	B	A	M	T	T	T	B
M	M	A	B	B	T	T	T
M	M	A	A	M	T	B	M

Zona sur

A	M	T	A	M	T	M	T
A	A	T	B	T	M	T	T
T	B	M	M	T	T	T	B
M	T	A	B	B	B	B	T
M	M	M	A	A	T	B	T

A: Automóvil, **M**: Metro, **T**: Transantiago y **B**: Bicicleta.

a. Identifica las variables consideradas en el estudio.

b. Construye una tabla de doble entrada para los datos anteriores.

c. ¿Cuál es el transporte más usado en la zona norte?

d. ¿Cuál es el transporte más usado en la zona sur? ¿Coincide con el de la zona norte?

e. Calcula la probabilidad de que una persona de la zona norte prefiera andar en bicicleta. ¿Coincide con la probabilidad de que una persona de la zona sur prefiera andar en bicicleta?

f. ¿Cuál es el transporte más usado en la Región Metropolitana?

3. De la página web http://datos.gob.cl/ se puede obtener mucha información de estudios o encuestas del Gobierno de Chile. A continuación se muestra información obtenida de esta página.

Defunciones según grupo de edad, por región, gran grupo de causas de muertes y sexo. Chile, 2010

	Total	< 1	1 a 4	5 a 9	10 a 19	20 a 44	45 a 64	65 a 79	80 y más
Hombres	52 237	1 038	171	111	661	5 047	12 255	17 722	15 232
Mujeres	45 693	824	141	77	306	2 067	7 207	13 265	21 806

a. ¿Por qué crees que los datos fueron presentados en una tabla de doble entrada?

b. ¿Cómo piensas que se obtuvieron los datos? Averigua y comprueba si estabas en lo correcto.

c. ¿Qué porcentaje de las personas que fallecieron en ese año tenía menos de 20 años?

d. ¿Qué grupo etario y de qué sexo fue el que tuvo mayor registro de decesos?

e. ¿De qué otra manera se podrían haber representado los datos? Explica tu respuesta.

f. Si al año siguiente se siguiera con este mismo patrón, ¿qué tan probable es que una persona fallecida sea una mujer de edad mayor o igual que 65 años?

g. ¿Observas alguna relación entre la edad y el sexo en la cantidad de defunciones? Explica tu respuesta.

Actitud

Cuando uses información oficial o de un autor, debes indicar y citar de manera adecuada las fuentes que utilizaste. Hay muchas formas de hacer esto. Averigua algunas.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 70 - 71

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué ventajas tienen los gráficos de dispersión y tablas de doble entrada respecto de los gráficos de barras simples y tablas de frecuencias?

- ¿Las respuestas y conclusiones que sacaste en las actividades fueron fundadas en los datos y procedimientos matemáticos o en tu intuición o conocimiento previo? Justifica tu respuesta.

Comparación de dos poblaciones

Objetivo

- Comparar poblaciones mediante gráficos de dispersión para dos variables utilizando puntos con colores o separando la nube con una recta de manera intuitiva.

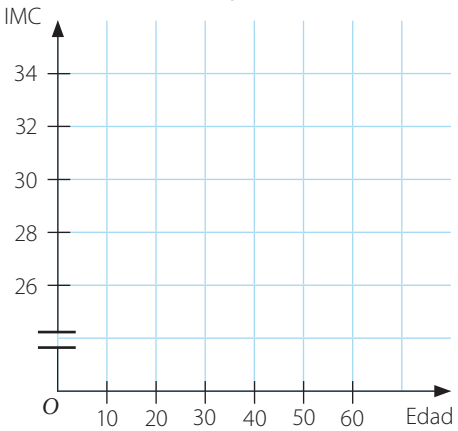
De una población se extrae una muestra de 12 hombres y 12 mujeres, a los cuales se les preguntó su edad y se les midió el IMC (índice de masa corporal). Los datos se registraron en las siguientes tablas.

Mujer	Edad	IMC
1	34	29
2	45	31
3	18	27
4	23	28
5	29	30
6	36	29
7	57	34
8	20	30
9	45	27
10	31	29
11	54	31
12	41	25

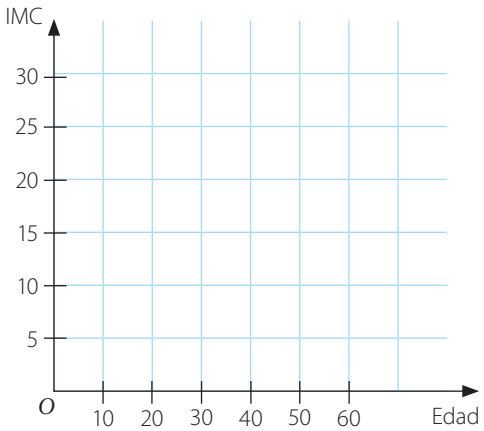
Hombre	Edad	IMC
1	22	19
2	39	25
3	25	22
4	40	21
5	28	20
6	32	31
7	51	24
8	33	22
9	44	21
10	19	16
11	58	26
12	51	24

- Representa, para los hombres y para las mujeres, las variables Edad - IMC en una nube de puntos.

Mujeres



Hombres



Habilidad

Representar de diversas formas un concepto matemático te ayudará a mejorar su comprensión.

- Escribe una conclusión sobre la relación IMC - Edad en hombres y mujeres a partir de las tablas.

  Hombres ▸ _____

  _____

  Mujeres ▸ _____

  _____

- Escribe una conclusión sobre la relación IMC - Edad en hombres y mujeres a partir de las nubes de puntos que construiste. ¿Siguen algún patrón?

  Hombres ▸ _____

  _____

  Mujeres ▸ _____

  _____

- A partir de las tablas o de las nubes, compara la relación IMC - Edad de los hombres y mujeres. Escribe una conclusión.

  _____

  _____

- ¿Qué dificultad presenta la forma en que se muestran los datos al momento de hacer comparaciones de las poblaciones? Explica.

  _____

  _____

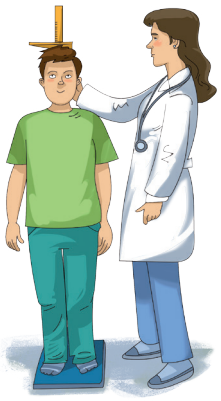
- Propón una forma de representar los datos para poder realizar una comparación de las poblaciones de manera sencilla.

  _____

  _____

Conexión con La salud

Existen muchos métodos para identificar si se tiene exceso de masa corporal, pero entre los más utilizados está el llamado índice de masa corporal (IMC), que es la razón que existe entre la masa corporal medida en kilogramos, y el cuadrado de la estatura medida en metros.



$$IMC = \frac{\text{Masa corporal (kg)}}{\text{Estatura}^2\ (m^2)}$$

Actitud

Cuando realices análisis estadísticos, fundamenta usando herramientas matemáticas.

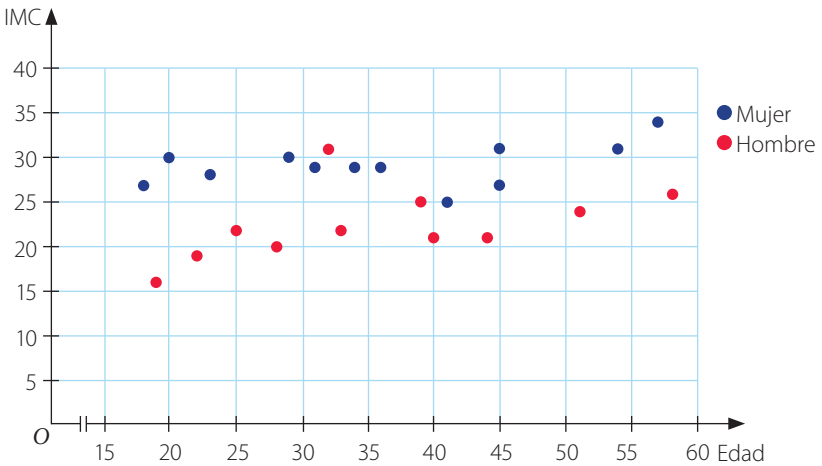
Conceptos

Una **nube de puntos** permite realizar comparaciones entre dos poblaciones cuando se relacionan dos **variables cuantitativas**. Para esto, basta con representar los datos de ambas poblaciones en el mismo gráfico, con distintos colores para distinguirlas, y en la misma escala.

Ejemplo 1

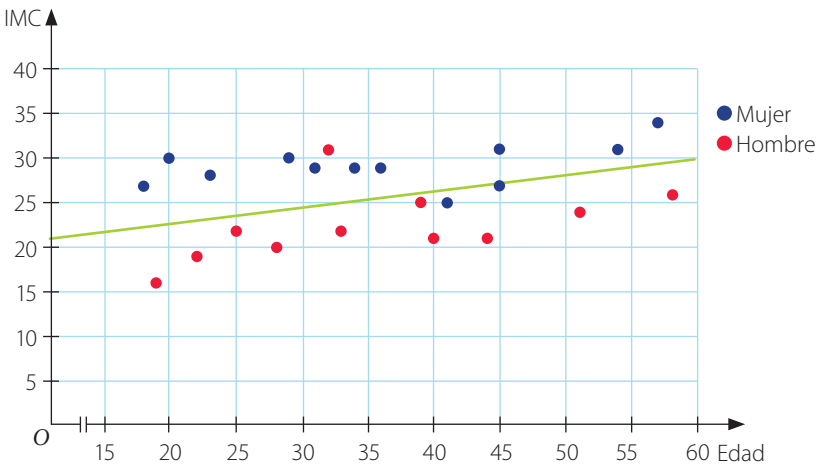
Con los datos de la actividad inicial, genera una nube de puntos para dos características usando dos colores y luego determina si existe una correlación.

1 La nube de puntos queda como sigue:



PASO A PASO

2 Puedes trazar una recta de forma intuitiva que separe ambas nubes de puntos para compararlas.

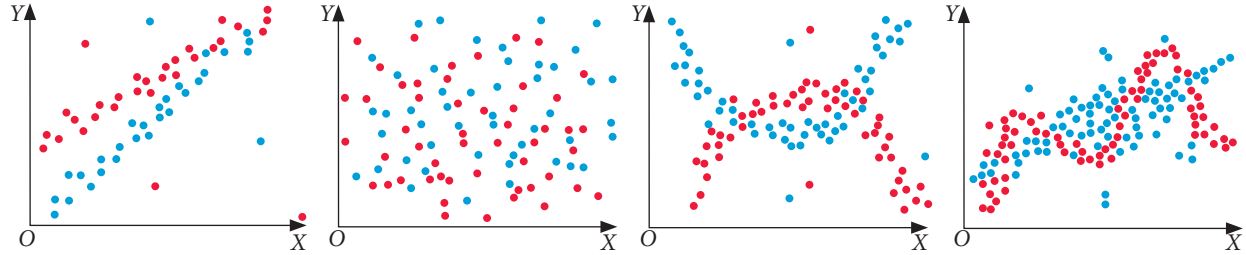


Respuesta: En este caso, podemos concluir que el IMC de la mujer es, en general, mayor que el de los hombres para las mismas edades. Se puede observar que existe correlación lineal.

Ejercicios

Ahora te proponemos ejercicios en los que podrás practicar y aplicar los conceptos y procedimientos estudiados.

1. Observa las siguientes nubes de puntos.



a. Dibuja una línea que, de forma intuitiva, creas que separa de mejor manera los puntos rojos de los puntos azules.

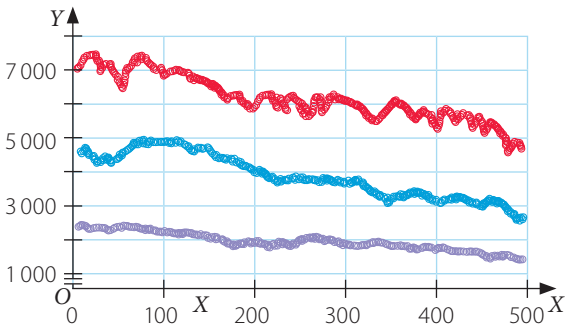
b. Determina si existe o no correlación para los puntos azules y rojos. Justifica tu respuesta en cada caso.

c. Marca, en cada nube, aquellos puntos que consideres aislados. ¿Existe alguna relación entre los puntos aislados rojos y los azules? Explica.

2. Economía **Lee la información y responde.**

El mercado bursátil o accionario es un mecanismo mediante el cual dueños de grandes empresas dan la posibilidad a otras personas para que sean parte de ella mediante la compra de sus acciones, para así obtener mayores recursos y poder realizar inversiones.

El gráfico muestra tres índices de precios de acciones en distintos países, los cuales se presentan como nube de puntos.



a. Para cada nube de puntos (roja, azul y morada) traza una recta que represente su tendencia.

b. ¿Cómo es la tendencia de las rectas que obtuviste?

c. Traza también una recta de distinto color a las anteriores que, según tu criterio, separe de mejor manera la nube roja de la azul, y la nube azul de la morada.

d. ¿Qué puedes concluir a partir de lo hecho antes?

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 72 - 73

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué herramienta estadística matemática utilizaste para analizar la tendencia de datos?

- ¿Por qué es necesario graficar la información de dos poblaciones en un mismo gráfico?

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 1

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

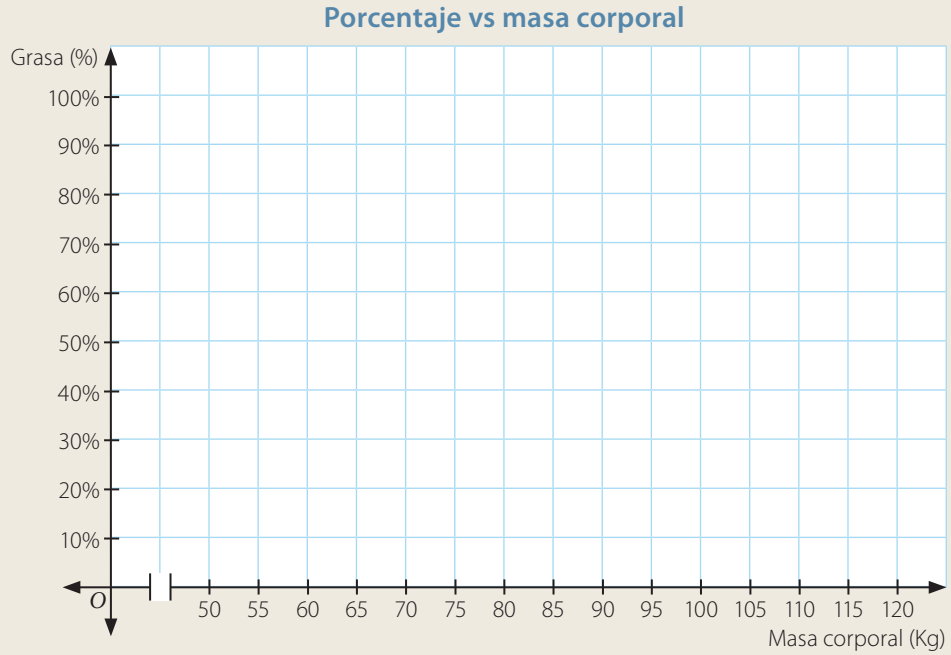
1. Lee la situación y responde.

La tabla muestra el registro de la masa corporal y porcentaje de grasa corporal de una muestra de 20 personas (10 hombres y 10 mujeres). Todas las mujeres tienen la misma talla, al igual que los hombres.

Mujer	Grasa	Masa corporal
1	20 %	54
2	25 %	56
3	30 %	60
4	29 %	60
5	27 %	57
6	35 %	65
7	26 %	55
8	28 %	57
9	23 %	56
10	10 %	71

Hombre	Grasa	Masa corporal
1	17 %	70
2	20 %	72
3	12 %	70
4	18 %	74
5	22 %	74
6	34 %	92
7	4 %	117
8	15 %	67
9	22 %	72
10	23 %	75

a. Representa en una nube de puntos la relación entre la masa corporal y el porcentaje de grasa de las mujeres y de los hombres utilizando distintos colores. (3 puntos)



b. ¿Que puedes deducir a partir de lo que se observa en el gráfico en términos de correlación entre las variables? Explica tu respuesta. (1 punto)

c. Traza una línea (para cada uno de los grupos de puntos) que mejor represente la relación entre las variables masa corporal y porcentaje de grasa. (1 punto)

d. ¿Se observan puntos aislados en los gráficos obtenidos? Márcalos y da una posible explicación sobre la presencia de ellos. (2 puntos)

e. ¿Se puede trazar una línea que separa los dos grupos de puntos? En caso afirmativo, dibújala en el gráfico, de lo contrario explica por qué no es posible. (1 punto)

f. ¿Se puede a partir de lo observado deducir que las mujeres, en general, poseen mayor grasa que los hombres? Justifica su respuesta. (1 punto)

g. La información mostrada, ¿se puede representar en una tabla de doble entrada? Explica tu respuesta. (1 punto)

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1a, 1b y 1g	Registrar distribuciones de dos características distintas en una nube de puntos.		**Logrado:** 6 puntos o más. **Medianamente logrado:** 4 a 5 puntos. **Por lograr:** 3 puntos o menos.
1c, 1d, 1e y 1f	Comparar poblaciones mediante gráficos de dispersión para dos atributos de muestras.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Utilizaste la estrategia planteada al inicio de este tema? ¿Cuáles otras usaste?
- ¿Has cumplido tus metas iniciales? ¿Qué has hecho para cumplirlas? ¿Qué debes mejorar?
- ¿Es más útil un gráfico de dispersión o una tabla de doble entrada? Justifica tu respuesta.

Tema 2

Propiedades de la probabilidad

En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 2.

Recuerdo lo que sé

Lee la siguiente información.

Alejandro se encuentra con su amiga Natalia, quien trae dos dados de 6 caras, numeradas del 1 al 6. Natalia le comenta que un dado es honesto (no está cargado) y el otro es un dado especial, ya que la probabilidad de obtener un número x al lanzarlo es $\frac{x}{21}$.

1. ¿Cuál es el espacio muestral de lanzar un dado?

_____

2. Para el dado honesto, aplica la regla de Laplace para determinar la probabilidad de cada resultado posible.

a. $P($  $) =$ ☐

b. $P($  $) =$ ☐

c. $P($  $) =$ ☐

d. $P($  $) =$ ☐

e. $P($  $) =$ ☐

f. $P($  $) =$ ☐

El **espacio muestral (Ω)** es el conjunto de los resultados posibles de un experimento aleatorio. Por ejemplo, al lanzar una moneda, sus resultados posibles son cara o sello.

La **regla de Laplace** permite calcular la probabilidad de un evento cuando los resultados del experimento son equiprobables y el espacio muestral es finito. La probabilidad de un evento A se calcula por:

$$P(A) = \frac{\text{Casos favorables}}{\text{Casos totales}} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

3. Considera el dado especial de Natalia y completa cada afirmación.

a. La probabilidad de obtener  es ☐.

b. La probabilidad de obtener un ☐ es $\frac{5}{21}$.

c. La probabilidad de obtener un  es menor que la probabilidad de obtener un ☐.

4. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar dos veces el dado honesto se obtenga un puntaje igual a 2 en el primer lanzamiento y un puntaje igual a 5 en el segundo?

Realiza tus cálculos

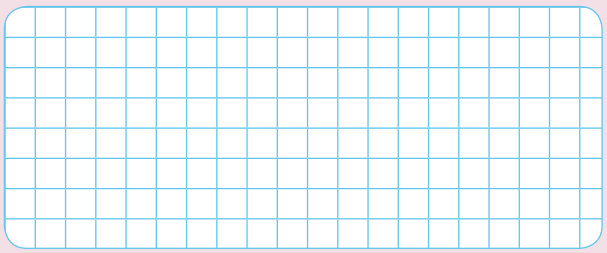
Respuesta ▸ _____

Diseño mi estrategia

Analiza cada caso y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

5. ¿Cuál es la probabilidad de que al lanzar el dado especial de Natalia se obtenga un número par?

Plantea tu estrategia



Respuesta ▸ _____

6. A partir del problema anterior, responde las siguientes preguntas.

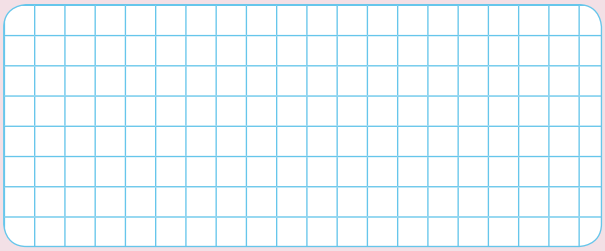
a. ¿Cuál es la principal dificultad del problema anterior?

_____

_____

b. Si en vez de considerar el dado especial de Natalia se considera el dado honesto y se pide calcular la misma probabilidad del ítem 5, ¿cómo cambia tu estrategia de cálculo? Explica tu respuesta.

Plantea tu estrategia



Respuesta ▸ _____

_____

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿En qué otro ámbito crees que se utilicen las probabilidades? ¿Por qué razón piensas que se usan?

  _____

- ¿Qué dificultades tuviste en las actividades anteriores? ¿Cómo podrías resolverlas?

  _____

- ¿Qué conocimientos previos utilizaste?

  _____

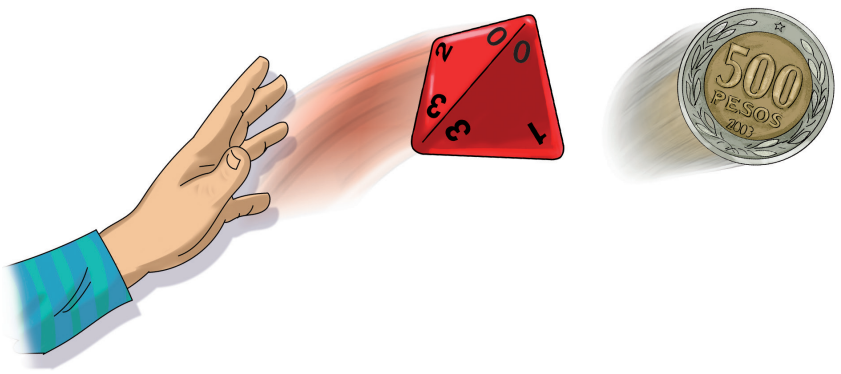
  _____

Unión e intersección de eventos

Objetivos

- Elaborar o completar diagramas de árbol.
- Determinar la unión y la intersección de eventos de un experimento aleatorio.

Se lanza un dado de cuatro caras numerado del 0 al 3, y luego una moneda honesta tantas veces como el número que se obtenga en el dado, es decir, si sale 0 no se lanza la moneda, si sale 1 la moneda se lanza una vez, y así sucesivamente.



- Escribe el espacio muestral (Ω) correspondiente al experimento. ¿Cuántos elementos tiene?

El espacio muestral tiene ☐ elementos.

- Describe los eventos que consideran la obtención de al menos dos caras.

Atención

Una moneda o un dado se dice **honesto** si no está cargado.

- Considera el evento A, que corresponde a que en el dado se obtuvo un 3 y en los lanzamientos de la moneda, 3 caras; y el evento B, que corresponde a que en el dado se obtuvo un 3 y en los lanzamientos de la moneda, tres sellos. ¿Cuál es el evento que corresponde a que en el dado se haya obtenido un 3 y en los lanzamientos de la moneda, tres sellos o tres caras? ¿Cómo se relaciona con el evento A y el B?

Conceptos

- Dados dos eventos A y B, se define el **evento unión** de A y B como aquel en el que cada elemento pertenece a A o pertenece a B, es decir, a uno de los dos eventos o a ambos.
- Simbólicamente se denota por $A \cup B$.

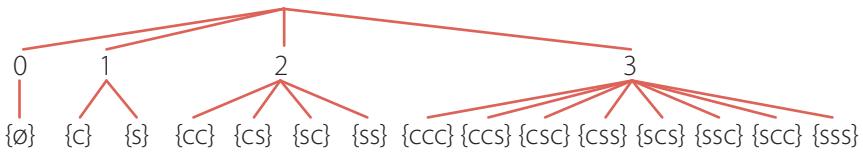
Ejemplo 1

Considera que los resultados del experimento aleatorio de la actividad inicial son equiprobables. Usa la regla de Laplace para calcular la probabilidad de la unión de los eventos C y D, en que C corresponde a los resultados, cuyo lanzamiento del dado se obtuvo 2 y D, a los resultados que tienen por lo menos dos sellos.

Para responder a la pregunta, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. Construyes un diagrama de árbol para conocer los posibles resultados del experimento. Recuerda que cada rama representa un resultado.



El espacio muestral tiene 15 elementos, es decir, $\#\Omega = 15$.

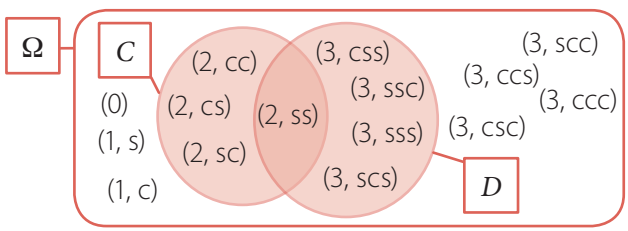
2. Identificas los elementos de cada evento.

$C = \{(2, cc), (2, cs), (2, sc), (2, ss)\}$ $D = \{(2, ss), (3, css), (3, scs), (3, ssc), (3, sss)\}$

3. Describes la unión de los eventos, es decir, el conjunto que tiene los elementos de ambos eventos.

$C \cup D = \{(2, cc), (2, cs), (2, sc), (2, ss), (3, css), (3, scs), (3, ssc), (3, sss)\}$

El evento $C \cup D$ tiene 8 elementos, es decir, $\#(C \cup D) = 8$. El siguiente diagrama representa los eventos, su unión y el espacio muestral.



4. Aplicas la regla de Laplace para calcular la probabilidad de la unión.

$$P(C \cup D) = \frac{\#(C \cup D)}{\#\Omega} = \frac{8}{15}$$

Atención

La suposición de que el dado y la moneda sean honestos permite asumir que los resultados del experimento son **equiprobables**.

Atención

El diagrama usado para representar el espacio muestral y los eventos se llama **diagrama de Venn**.

Habilidad

Cuando construyes diagramas en situaciones problemas estás desarrollando la habilidad de **representar**.

Conceptos

- Dados dos eventos A y B, se define el **evento intersección** de A y B como aquel en que cada uno de sus elementos pertenece a A y pertenece a B, es decir, todos los elementos comunes de A y B.
- Simbólicamente se denota por $A \cap B$.

Ejemplo 2

Considera los eventos C y D del ejemplo 1, en el que C corresponde a los resultados en cuyo lanzamiento del dado se obtuvo 2 y D, a los resultados que tienen por lo menos dos sellos. Calcula la probabilidad de la intersección de los eventos.

Para responder a la pregunta, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. A partir del diagrama del ejemplo 1, se tiene que el espacio muestral tiene 15 elementos, es decir, $\#\Omega = 15$.

2. Del ejemplo 1 se tienen los elementos de cada evento.

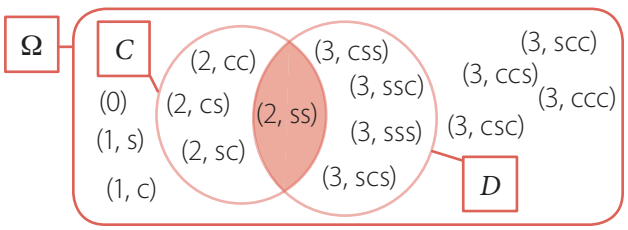
$C = \{(2, cc), (2, cs), (2, sc), (2, ss)\}$

$D = \{(2, ss), (3, css), (3, scs), (3, ssc), (3, sss)\}$

3. Describes la intersección de los eventos, es decir, el conjunto que tiene los elementos comunes de ambos eventos.

$C \cap D = \{(2, ss)\}$

El evento $C \cap D$ tiene 1 elemento, es decir, $\#(C \cap D) = 1$. El siguiente diagrama representa los eventos, su intersección y el espacio muestral.



4. Aplicas la regla de Laplace para calcular la probabilidad de la intersección.

$$P(C \cap D) = \frac{\#(C \cap D)}{\#\Omega} = \frac{1}{15}$$

- ¿Cómo crees que facilita el cálculo de probabilidades el uso de un diagrama de Venn? Comenta con un compañero o compañera.
- ¿Qué evento tiene más elementos, la unión o la intersección? ¿Siempre se cumple una de estas relaciones? Justifica tu respuesta.

Conceptos

En problemas de planteo, la **unión de eventos** está asociada a la disyunción **o**. Por otra parte, la **intersección de eventos** se asocia con la conjunción **y**. En el siguiente ejemplo se muestra el uso de estas conjunciones y su relación con la unión e intersección de eventos.

Ejemplo 3

Considera el experimento de lanzar dos veces un dado honesto de seis caras. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos sea 6 y que en el primer lanzamiento se obtenga mayor puntaje que en el segundo?



Para responder la pregunta, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. Identificas el espacio muestral. Lo puedes representar por un conjunto de pares ordenados, donde la primera coordenada representa el puntaje del primer lanzamiento y la segunda, la del segundo.

$\Omega = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 5), (1, 6), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (3, 4), (3, 5), (3, 6), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (4, 4), (4, 5), (4, 6), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (5, 5), (5, 6), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5), (6, 6)\}$

El espacio muestral tiene 36 posibles resultados, es decir, $\#\Omega = 36$.

2. Describes los eventos involucrados en el problema.
El evento E_1 está formado por todos aquellos resultados en los cuales la suma de los puntos en los dados es 6.

$E_1 = \{(1, 5), (2, 4), (3, 3), (4, 2), (5, 1)\}$

El evento E_2 considera los pares en que la primera coordenada es mayor que la segunda.

$E_2 = \{(2, 1), (3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2), (4, 3), (5, 1), (5, 2), (5, 3), (5, 4), (6, 1), (6, 2), (6, 3), (6, 4), (6, 5)\}$

3. Para resolver el problema debes calcular la probabilidad de que ocurran el evento E_1 **y** el evento E_2, es decir, su **intersección**.

$E_1 \cap E_2 = \{(4, 2), (5, 1)\}$

El evento $E_1 \cap E_2$ tiene 2 elementos, es decir, $\#(E_1 \cap E_2) = 2$.

4. Aplicas la regla de Laplace para calcular la probabilidad de la intersección.

$$P(E_1 \cap E_2) = \frac{\#(E_1 \cap E_2)}{\#\Omega} = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Respuesta: La probabilidad de que la suma de los puntos sea 6 y que en el primer lanzamiento se obtenga mayor puntaje que en el segundo es $\frac{1}{18}$.

Atención

Si la pregunta del problema hubiera requerido calcular la probabilidad de ocurrencia del evento E_1 **o** del E_2, se tendría que determinar la **unión** de los eventos.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Considera el siguiente experimento aleatorio:

Se lanza una moneda. Si sale sello se lanza un dado y termina el experimento. Si sale cara, se lanza nuevamente la moneda y se analiza el resultado. Esto se repite a lo más 4 veces si sale cara consecutivamente.

Construye un diagrama de árbol para representar el experimento aleatorio y calcula las siguientes probabilidades usando la regla de Laplace.



a. La probabilidad de obtener un puntaje mayor que 4.

b. La probabilidad de obtener 3 caras.

c. La probabilidad de obtener 3 caras o un número primo de puntos.

d. La probabilidad de obtener un puntaje igual a 1.

e. La probabilidad de obtener un 3 o un 4.

f. La probabilidad de obtener un 1, un 4 o un sello.

g. Si en el primer lanzamiento de moneda salió una cara, la probabilidad de obtener un número menor que 3.

h. Si en el primer y segundo lanzamiento se obtuvo una cara, la probabilidad de obtener un número impar.

2. **Julia realiza el experimento aleatorio de extraer las cuatro tarjetas de la bolsa, una tras otra, y ver la palabra que resulte, tenga o no sentido.**



a. Usa un diagrama de árbol para determinar todas las posibles palabras que se pueden formar.

b. Describe el evento de las palabras que empiezan con la letra B. Nómbralo por E_1.

c. Describe el evento de las palabras que terminan con la letra Z. Nómbralo por E_2.

d. Describe el evento correspondiente a la unión de los eventos E_1 y E_2.

e. Describe el evento correspondiente a la intersección de los eventos E_1 y E_2.

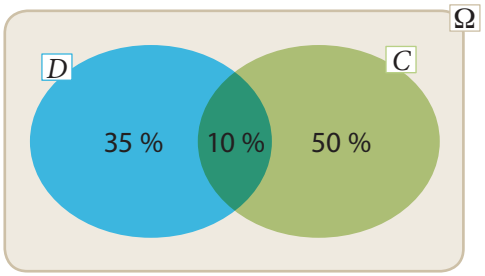
f. Calcula la probabilidad de los eventos E_1, E_2, $E_1 \cup E_2$ y $E_1 \cap E_2$.

g. ¿Observas alguna relación entre las probabilidades obtenidas? Descríbela.

3. Lee la información y responde.

El diagrama de Venn que se muestra presenta la información que registró una tienda de calzado femenino. Dicha información está relacionada con los diferentes medios de pago que utilizan sus clientes al adquirir alguno de sus zapatos.

Los pagos que se registraron fueron hechos con tarjeta de crédito o con tarjeta de débito, de tal forma que C es el evento en que la persona paga con tarjeta de crédito y D es el evento en que la persona paga con tarjeta de débito.



Calcula la probabilidad de que al seleccionar uno de los clientes al azar, este haya pagado con:

a. Tarjeta de crédito.

b. Tarjeta de débito.

c. Tarjeta de débito una parte, y la otra con tarjeta de crédito.

d. Cualquier otra forma de pago diferente a tarjeta de crédito o tarjeta de débito.

e. Tarjeta de crédito o con tarjeta de débito.

Se sabe que quienes hicieron un pago diferente a tarjeta de débito o de crédito usaron dinero en efectivo. Teniendo en cuenta esta nueva condición, halla la probabilidad de que:

f. El pago fuese con tarjeta de crédito o en efectivo.

g. El pago fuese con tarjeta de débito o en efectivo.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 74 - 75

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué representación te parece mejor para el cálculo de probabilidades: los diagramas de árbol o los diagramas de Venn? Justifica tu respuesta.

_____

_____

- ¿Qué estrategia fue la que más usaste para el cálculo de probabilidades en las actividades? ¿Por qué?

_____

_____

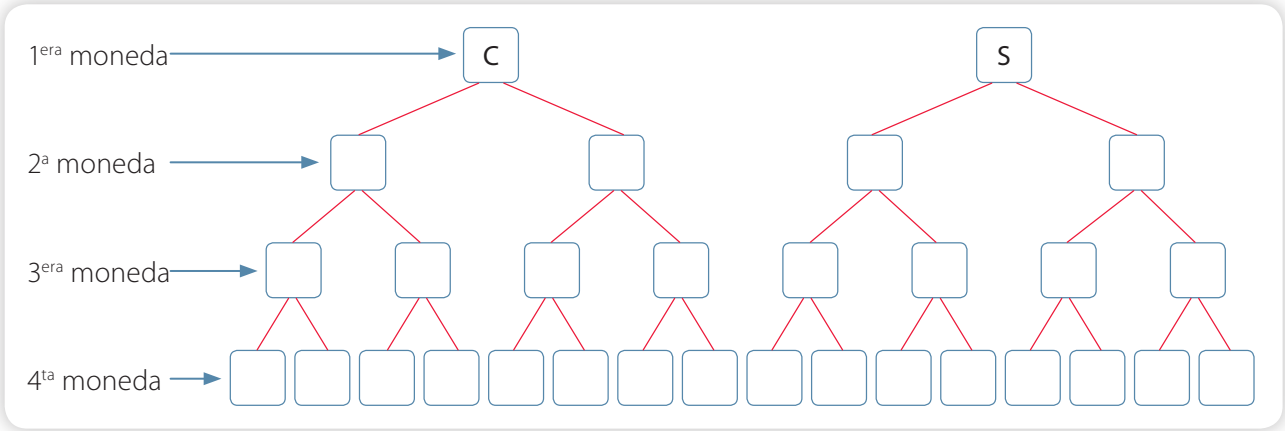
Reglas aditivas de la probabilidad

Objetivo

- Desarrollar la regla de probabilidad aditiva y aplicarla en la resolución de problemas.

Un profesor de Matemática, con el objetivo de enseñar probabilidades, toma cuatro monedas honestas de su bolsillo y las tira sobre la mesa.

- Completa el diagrama de árbol para representar el espacio muestral del experimento.



- ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral? ¿Se puede decir que cada resultado es equiprobable? Justifica tu respuesta.

- Considera el evento A, en el que en todas las monedas se obtuvo cara, y el evento B, en el que todas resultaron sello. Calcula las siguientes probabilidades, usando la regla de Laplace:

$$P(A) = \frac{\square}{\square} \qquad P(B) = \frac{\square}{\square} \qquad P(A \cup B) = \frac{\square}{\square} \qquad P(A \cap B) = \frac{\square}{\square}$$

- ¿Cómo se relacionan las probabilidades anteriores?

- ¿Crees que la relación anterior es una regla general? Si tu respuesta es afirmativa, justifícala usando un esquema, en caso contrario, da un ejemplo.

Cada resultado posible del experimento aleatorio es un evento. En muchos textos los llaman **eventos elementales**. Por su estructura, estos eventos no tienen elementos en común. A continuación, veremos la relación entre eventos que no tienen elementos en común y la probabilidad de la unión.

Conceptos

- Dos eventos son **disjuntos** si no tienen elementos en común, es decir, no pueden ocurrir de manera simultánea, entonces la intersección entre los eventos es vacía.
- Si los eventos son **disjuntos**, entonces $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
- La probabilidad del evento que no tiene elementos (vacío) es cero, es decir, $P(\varnothing) = 0$.
- En general, la **probabilidad de la unión** de eventos se calcula como:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

- A estas propiedades se las conocen como **reglas aditivas de la probabilidad**.

Ejemplo 1

Se extrae al azar una carta de una baraja inglesa. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta extraída sea un trébol o una J de corazón?

Para resolver el problema, puedes seguir estos pasos.

PASO A PASO

1. Identificas los eventos involucrados. En este caso son:
   El evento A, como aquel en que la carta extraída fue una J de corazón.
   El evento B, como aquel en que la carta extraída fue un trébol.
2. Verificas si los eventos son disjuntos. Para esto, debes determinar si los eventos pueden ocurrir de forma simultánea. En este caso, la respuesta es no, porque una carta no puede ser trébol y corazón a la vez, es decir, los eventos son disjuntos.
3. Por lo anterior, la probabilidad de la unión de los eventos será calculada simplemente por $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.
4. Calculas la probabilidad de cada evento, $P(A) = \frac{1}{52}$ y $P(B) = \frac{13}{52}$. Entonces,

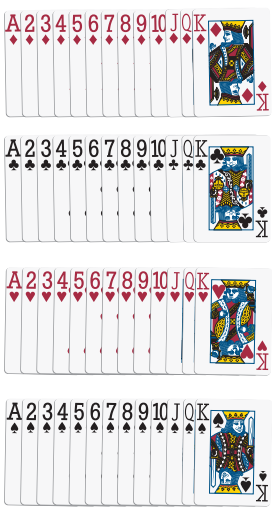
$$P(A \cup B) = \frac{1}{52} + \frac{13}{52} = \frac{14}{52} = \frac{7}{26}$$

Respuesta: La probabilidad de que la carta extraída sea un trébol o una J de corazón es $\frac{7}{26}$.

Atención

La baraja inglesa es un conjunto de naipes o cartas formado por 52 unidades repartidas en cuatro pintas, cada una con 13 cartas: trébol, corazón, diamante y picas; y 2 comodines.

En este texto consideraremos la baraja sin comodines.



- ¿Por qué cuando los eventos no son disjuntos se debe restar la intersección de los eventos? Comenta con un compañero o una compañera. Puedes realizar un esquema con un diagrama de Venn para comprender la idea.
- Si se quiere calcular la probabilidad de la unión de tres eventos, ¿cómo crees que sería la fórmula en el caso de que sean eventos disjuntos y en el caso de que no lo sean? Comenta con un compañero o una compañera.

Ejemplo 2

Se extrae al azar una carta de una baraja inglesa. ¿Cuál es la probabilidad de que la carta extraída sea un trébol o una J?

A diferencia del ejemplo anterior, la J puede tener cualquier pinta. Para resolver el problema, puedes seguir estos pasos.

1. Identificas los eventos involucrados. En este caso son:
El evento C, como aquel en que la carta extraída fue una J.
El evento B, como aquel en que la carta extraída fue un trébol.

PASO A PASO

2. Verificas si los eventos son disjuntos. Para esto, debes determinar si los eventos pueden ocurrir de forma simultánea. En este caso, la respuesta es sí, porque la carta extraída puede ser una J de trébol, es decir, los eventos **no** son disjuntos.

3. Por lo anterior, la probabilidad de la unión de los eventos será calculada simplemente por $P(C \cup B) = P(C) + P(B) - P(C \cap B)$.

4. Realizas los cálculos. $P(C) = \frac{4}{52}$, $P(B) = \frac{13}{52}$, $P(C \cap B) = \frac{1}{52}$. Entonces,

$$P(A \cup B) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{16}{52} = \frac{4}{13}$$

Respuesta: La probabilidad de que la carta extraída sea un trébol o una J es $\frac{4}{13}$.

Habilidad

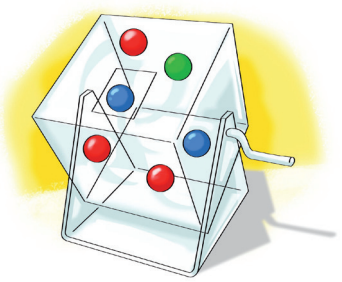
El ejemplo 3 se puede resolver aplicando directamente la regla de Laplace, sin embargo conocer y usar nuevas estrategias y propiedades desarrolla tu habilidad de **resolver problemas**.

Ejemplo 3

Observa la tómbola de la imagen. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola verde o una roja?

Para resolver el problema, puedes seguir estos pasos.

1. Identificas los eventos involucrados. El evento A se puede definir como aquel en que la bola extraída es verde y el evento B, como aquel en que la bola extraída es la roja.



PASO A PASO

2. Determinas si los eventos son disjuntos. Los eventos son disjuntos, ya que una bola no puede tener dos colores.

3. La probabilidad de la unión de los eventos será calculada por:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B).$$

4. Realizas los cálculos considerando que los resultados del experimento son equiprobables y se puede usar la regla de Laplace.

$P(A) = \frac{1}{6}$ y $P(B) = \frac{3}{6}$, por lo que $P(A \cup B) = \frac{1}{6} + \frac{3}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

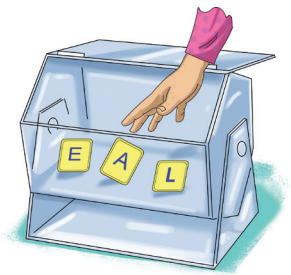
Respuesta: La probabilidad de que la bola extraída sea verde o roja es $\frac{2}{3}$.

Conceptos

Cuando el experimento aleatorio se puede representar mediante un diagrama de árbol, cada resultado representado por ramas distintas es un **evento disjunto** de los demás. Por lo tanto, la probabilidad de la unión de eventos de cada rama es la suma de las probabilidades de cada una.

Ejemplo 4

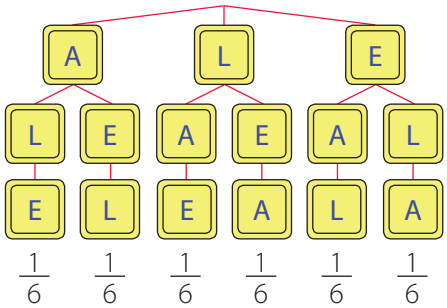
Francisca extrae, sin mirar, una tras otra, todas las tarjetas de la tómbola para formar una palabra, con o sin sentido, en el orden que aparecen. ¿Cuál es la probabilidad de que la palabra extraída termine con la letra A o con la L?



Para responder a la pregunta del problema, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. Representas los resultados en un diagrama de árbol.



2. Cada rama del árbol representa un posible resultado de la extracción, es decir, un evento elemental disjunto de los demás. Como hay seis posibles palabras, la probabilidad de cada uno es de $\frac{1}{6}$.

3. Defines los eventos. El evento A corresponde a que la palabra formada termine con la letra A, y el evento B, a que la palabra formada termine con la letra M. Se debe calcular $P(A \cup B)$.

4. Calculas la probabilidad de cada evento. Como cada evento está formado por eventos elementales disjuntos, la probabilidad de cada uno se calcula como la suma de las probabilidades de los eventos elementales.

$$P(A) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} \qquad P(B) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6}$$

Como A y B también son disjuntos, la probabilidad de la unión es la suma de las probabilidades.

$$P(A \cup B) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

Respuesta: La probabilidad de que la palabra formada termine con la letra A o con la letra L es $\frac{2}{3}$.

Visita la Web

Para saber más sobre las propiedades de la probabilidad, visita el siguiente sitio web:

http://www.hrc.es/bioest/Probabilidad_14.html

Actitud

Recuerda que las respuestas y soluciones a problemas deben estar justificadas por tus conocimientos matemáticos.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Se lanzan dos dados honestos en una mesa lisa. Calcula la probabilidad de los siguientes eventos.

a. Que la suma de los puntos sea 8.

b. Que la suma de los puntos sea 10.

c. Que la suma de los puntos sea 8 o 10.

d. Que se obtenga el mismo puntaje en ambos dados.

e. Que la suma de los puntos sea 8 o que se obtenga igual puntaje en ambos dados.

f. Que la suma de los puntos sea menor que 7 o que se obtenga igual puntaje en ambos dados.

g. Que la suma de los puntos sea 8 o se obtenga al menos un número primo de puntos en uno de los dados.

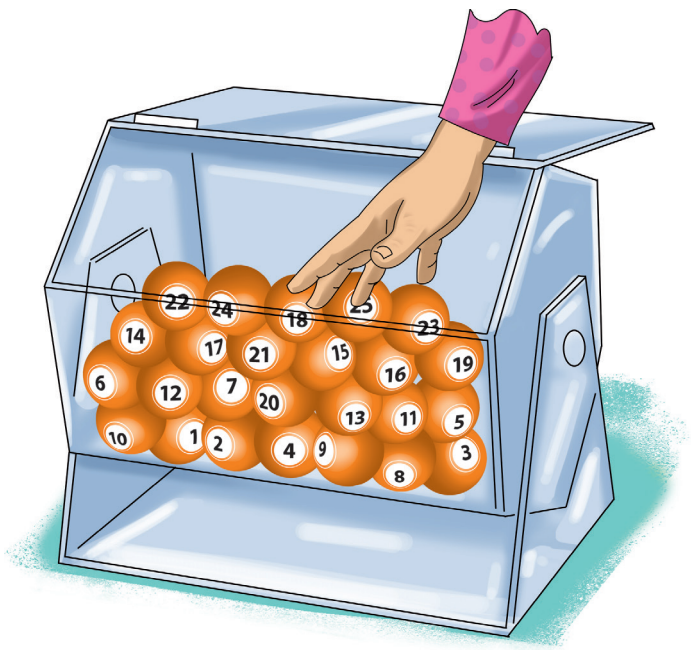
h. Que la suma de los puntajes sea un número primo o en ambos dados se obtenga el mismo puntaje.

i. Que la suma de los puntajes sea un número par o un número primo.

2. Resuelve los siguientes problemas.

a. Se extrae una bolita al azar de la tómbola.

- ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita sea un número par o un múltiplo de 4?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita sea un número mayor que 10 o menor que 20?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita sea un número primo o un múltiplo de 3?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la bolita sea un divisor de 20 o un múltiplo de 6?



b. Si Daniela lanza dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que los puntajes sean distintos o iguales?

c. Se lanzan cuatro monedas y se observan sus resultados. Luego, se quitan todas las monedas en que se obtuvo cara y se dejan aquellas en las que se obtuvo un sello. ¿Cuál es la probabilidad de que una vez terminado el experimento queden al menos dos monedas?

3. Lee la situación y responde.

El encargado de un taller mecánico debe realizar la mantención de un camión minero, y para ello debe seleccionar a 3 de entre sus 5 mecánicos para llevar a cabo el trabajo: Juana, José, Bastián, Rodrigo y Gabriela. El encargado considera que todos sus mecánicos son capaces de efectuar el trabajo, por lo que decide seleccionarlos al azar mediante un sorteo.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el equipo sea conformado por Gabriela, Rodrigo y Juana?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que Juana o Rodrigo queden seleccionados?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que Gabriela no quede en el equipo pero Bastián sí?

4. Lee la situación, observa la tabla y luego responde.

Para pintar un muro, el dueño le dice al pintor que puede pintarlo de rojo, azul o verde, y que él decida. El pintor, entonces, toma un dado honesto de seis caras, lo lanza y anota el puntaje obtenido. Luego lo vuelve a lanzar y entonces decide el color de la siguiente manera:

- Pintará rojo si el segundo lanzamiento fue menor que el primero.
- Pintará azul si el segundo lanzamiento fue igual al primero.
- Pintará verde si el segundo lanzamiento fue mayor que el primero.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos al lanzar dos dados:

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1, 6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

a. ¿Cuál es la probabilidad de que lo pinte rojo?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que lo pinte verde?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que lo pinte azul?

d. Si en el primer lanzamiento obtuvo un 6, ¿cuál es la probabilidad de que lo pinte rojo?

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 76 – 77

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Cuántas estrategias distintas usaste para justificar el cálculo de probabilidades en los distintos problemas?

_____

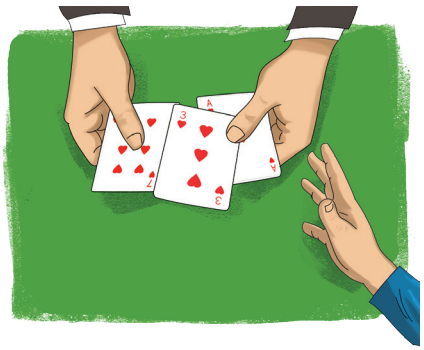
- ¿Qué estrategias te resultaron más complejas? ¿Por qué? Comenta con un compañero o una compañera para que puedas aclarar tus dudas.

_____

Reglas multiplicativas de la probabilidad

Objetivo

- Desarrollar la regla multiplicativa de las probabilidades y aplicarla en la resolución de problemas.



Un mago pide extraer dos cartas sin reposición de las que muestra, es decir, sin devolverlas al mazo después de la extracción.

Considera los siguientes eventos:

A: En la primera extracción obtener un as.

B: En la segunda extracción obtener un 7.

- Escribe el espacio muestral del experimento como un conjunto de pares ordenados en que la primera coordenada representa la primera extracción, y la segunda coordenada, la segunda extracción.

- Escribe los elementos del evento intersección entre A y B.

- ¿Cuál es la probabilidad del evento $A \cap B$?

$$P(A \cap B) = \frac{\square}{\square}$$

Habilidad

Cuando construyes diagramas estás desarrollando la habilidad de **representar**.

- Si consideras solo la primera etapa del experimento, ¿cuál es la probabilidad del evento A?

La probabilidad del evento A es $\frac{\square}{\square}$.

- Supón que se ha dado la ocurrencia del evento A en la primera etapa. En la segunda etapa, ¿cuál es la probabilidad del evento B?

La probabilidad del evento B es $\frac{\square}{\square}$.

- ¿Observas alguna relación entre las probabilidades de los eventos A, B y la intersección de los eventos? Comenta con un compañero.

La probabilidad de la intersección de dos eventos se puede relacionar con el producto de probabilidades.

Conceptos

- La probabilidad de la intersección de dos eventos A y B se calcula como:

$$P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A|B),$$

donde $P(A|B)$ corresponde a la probabilidad del evento A dada la ocurrencia del evento B. Se conoce como **probabilidad condicional**.

- Dos eventos son **independientes** si $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$, o en forma equivalente, dos eventos son independientes si la realización de uno no afecta la probabilidad del otro, es decir, $P(A|B) = P(A)$.
- Estas propiedades se conocen como **reglas multiplicativas de la probabilidad**.

Atención

El evento $A|B$ se lee A dado B.

Ejemplo 1

Se lanza un dado honesto de seis caras. Se definen los siguientes eventos:

- A: **El puntaje obtenido es un número mayor que 2.**
- B: **El puntaje obtenido es un número menor que 5.**

Calcula la probabilidad del evento $A|B$ donde:

PASO A PASO

1. Describes el espacio muestral y los eventos.

$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ $A = \{3, 4, 5, 6\}$ $B = \{1, 2, 3, 4\}$

El evento $A|B$ corresponde a los elementos de A dado que ocurrió B, es decir, $A|B = \{3, 4\}$, ya que en el contexto de que ocurrió B el espacio muestral se reduce a 4 elementos, de los cuales solo 2 pertenecen a A.

2. Sin aplicar una fórmula, obtienes que $P(A|B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

3. Para aplicar la fórmula,se debe conocer:

$P(A) = \frac{4}{6}$ $P(B) = \frac{4}{6}$ $P(A \cap B) = \frac{2}{6}$

4. Aplicas la fórmula. $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{2}{6} : \frac{4}{6} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} = 0{,}5$.

Respuesta: La probabilidad del evento $A|B$ es 0,5.

En la situación inicial, si el mago pidiera la extracción de las cartas pero con reposición, es decir, después de sacar la carta se devuelve a la mano.

- ¿El experimento aleatorio es el mismo?
- ¿Cuáles son las probabilidades de los eventos descritos? ¿Cómo se relacionan con la probabilidad de la intersección?
- ¿Son los eventos independientes? ¿Por qué?

El experimento aleatorio de la situación inicial se puede describir como una sucesión de experimentos aleatorios. La ocurrencia del evento A en la primera etapa influía en la ocurrencia del evento B de la segunda, por lo que los eventos no eran independientes, y calculaste la probabilidad condicional. Ahora veremos un ejemplo de eventos independientes.

Atención

Recuerda que las ramas de un diagrama de árbol representan eventos elementales, disjuntos entre sí, por lo que la probabilidad de la unión de estos eventos es la suma de las probabilidades.

Ejemplo 2

Considera el experimento de lanzar dos veces una moneda al aire y observar el resultado que se obtiene. Considera los siguientes eventos:

A: En el primer lanzamiento se obtiene una cara.

B: En el segundo lanzamiento se obtiene una cara.

Los eventos A y B, ¿son independientes?

PASO A PASO

1. Describes el espacio muestral y los eventos.

$\Omega = \{cc, cs, sc, ss\}$ $A = \{cc, cs\}$ $B = \{sc, cc\}$ $A \cap B = \{cc\}$

2. Calculas la probabilidad de los eventos A, B y de su intersección.

$$P(A) = \frac{1}{2} \qquad P(B) = \frac{1}{2} \qquad P(A \cap B) = \frac{1}{4}$$

3. Compruebas que los eventos sean independientes usando la definición:

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4} = P(A \cap B)$$

Respuesta: Los eventos son independientes. Esto también se refleja en el hecho de que los resultados de lanzar una moneda no tienen relación con los resultados obtenidos en otros lanzamientos.

Atención

En general, los resultados de lanzamientos sucesivos de monedas y dados son independientes en cada etapa. No así cuando se extraen bolas de una tómbola o cartas de un mazo sin reposición, ya que al extraer una bola o una carta, en la siguiente etapa, las probabilidades de los resultados posibles cambian.

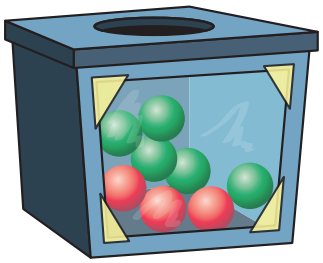
Conceptos

- Un **diagrama de árbol** permite representar un experimento aleatorio de varias etapas, como la extracción sucesiva de cartas, el lanzamiento sucesivo de monedas y la extracción sucesiva de bolas de una tómbola.
- En un diagrama de árbol se pueden asignar probabilidades en cada etapa considerando la ocurrencia de la etapa anterior, es decir, verificando si los resultados entre etapas son independientes.
- La probabilidad de una rama del árbol se obtiene como el producto de las probabilidades sucesivas obtenidas en cada etapa, es decir, se aplican las **reglas multiplicativas de la probabilidad**.
- Recuerda que las ramas de un diagrama de árbol representan eventos elementales, disjuntos entre sí, por lo que la probabilidad de la unión de estos eventos es la suma de las probabilidades, es decir, se aplican las **reglas aditivas de la probabilidad**.

Ejemplo 3

Se extrae una bolita al azar de una urna como la de la imagen. Se observa su color y luego se devuelve agregando otras 7 bolitas del mismo color. Considera los eventos A y B.

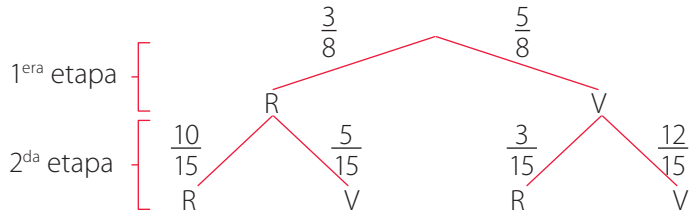
- A : En la primera extracción se obtiene una bolita roja.
- B : En la segunda extracción se obtiene una bolita roja.



¿Son independientes los eventos A y B?

PASO A PASO

1 Usando un diagrama de árbol, en cada etapa debes asignar las probabilidades correspondientes según las características del experimento en esa etapa. El siguiente diagrama de árbol representa las probabilidades de los resultados de cada etapa, donde R corresponde al color rojo y V, al color verde.



La probabilidad del evento A es $\frac{3}{8}$, porque en la primera etapa hay 8 bolitas y solo 3 son rojas.

La probabilidad del evento B se obtiene considerando las dos ramas cuya segunda etapa considere una bola roja. En cada rama se multiplican las probabilidades y luego se suman.

$$P(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{10}{15} + \frac{5}{8} \cdot \frac{3}{15} = \frac{2}{8} + \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$$

La probabilidad de la intersección se consigue considerando la rama que cumple con la descripción de ambos eventos, es decir, que en ambas extracciones salga una bolita roja.

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{10}{15} = \frac{1}{4}.$$

2 Compruebas si los eventos son independientes usando la definición

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{3}{8} \cdot \frac{3}{8} = \frac{9}{64} \neq \frac{1}{4} = P(A \cap B)$$

Respuesta: Los eventos no son independientes.

Atención

Supón que en una urna se tienen b bolas blancas y r bolas rojas. Un experimento aleatorio consiste en seleccionar una bola al azar y regresarla a la urna junto con c bolas del mismo color. Dicho experimento se conoce como la urna de Polya.

Recursos Digitales Complementarios

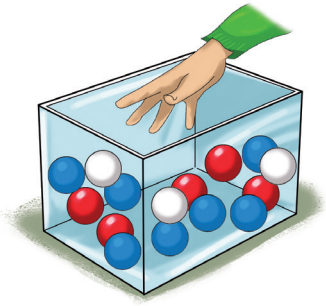
RDC 11

- Explica con tus palabras cuándo la probabilidad de la intersección de dos eventos es igual al producto de las probabilidades.
- ¿Crees que se podría usar un diagrama de Venn para representar un experimento en varias etapas? Justifica tu respuesta.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Claudia extrae sin mirar una bolita de la urna que se muestra en la imagen, anota su color y la devuelve. Luego, vuelve a sacar otra y anota su color.



a. Da un ejemplo de dos eventos independientes.

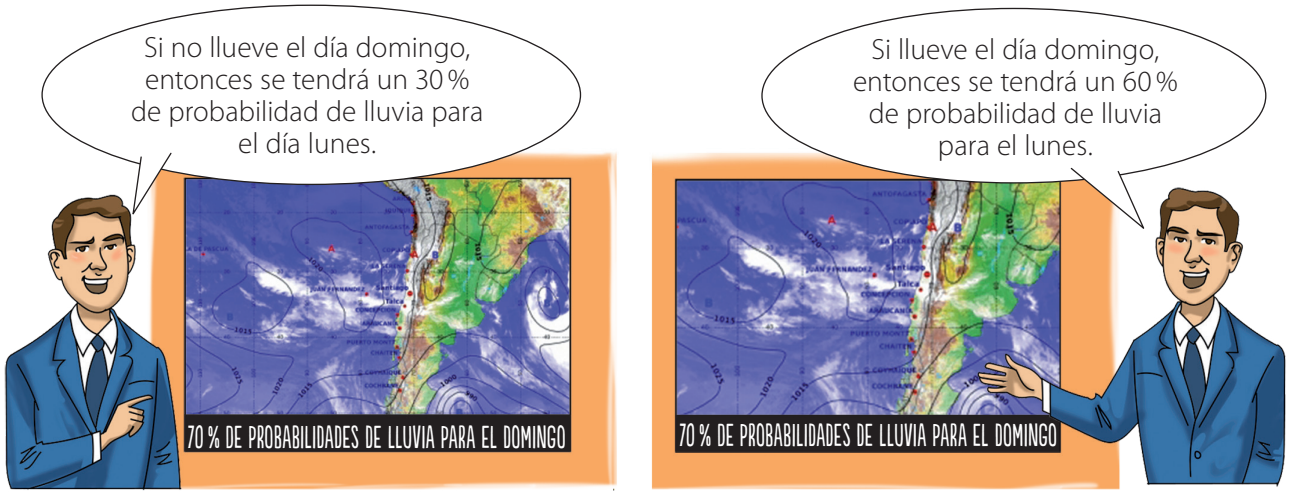
b. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolitas sean del mismo color?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que las dos bolitas sean de colores distintos?

d. ¿Cómo cambian las probabilidades anteriores si el experimento se realiza sin devolver la bolita a la urna?

e. Si las bolitas no se devuelven a la urna, los eventos que planeaste en el ítem a, ¿siguen siendo independientes?

2. Observa la imagen de la presentación del tiempo, lee la situación y responde.



a. Los eventos "llueve el día domingo" y "llueve el día lunes", ¿son independientes?

b. Calcula la probabilidad de que llueva el día lunes. Puedes usar un diagrama de árbol.

3. Una persona se encuentra en la calle, a 3 pasos de su casa, y decide efectuar el siguiente experimento: toma una moneda y la lanza al aire. Si obtiene una cara, avanza un paso y si obtiene un sello, retrocede un paso.

a. El evento "al quinto lanzamiento la persona avanza un paso", ¿es independiente de los resultados que haya obtenido en los cuatro lanzamientos anteriores?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona llegue a su casa después de 3 lanzamientos?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona llegue a su casa después de 4 lanzamientos?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona se encuentre a 6 pasos de su casa después de 4 lanzamientos?

e. ¿Es probable que la persona nunca llegue a su casa realizando este experimento? Justifica tu respuesta.

4. Lee la situación.

En cierto país existen tres partidos políticos: A, B y C. En cada proceso de elecciones, se tiene que:

- Existe un 30 % de probabilidades de que los que votaron en el proceso anterior por A ahora lo hagan por B, y un 70 % de que mantengan el voto.
- Existe un 20 % de probabilidades de que los que votaron en el proceso anterior por B ahora lo hagan por A, un 30 % de que ahora lo hagan por C y un 50 % de que mantengan su voto.
- Existe un 10 % de probabilidades de que los que votaron en el proceso anterior por C ahora lo hagan por A y un 90 % de que mantengan su voto.

Responde las siguientes preguntas considerando que en la primera elección que se realizó en dicho país un individuo decidió su voto al azar.

a. Los eventos "en la primera elección votó por A" y "en la segunda elección votó por B", ¿son independientes?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que en la 3^{era} elección el individuo vote por C?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que en la 2da elección el individuo vote por B?

d. Si en la 1^{era} elección el individuo votó por B, ¿cuál es la probabilidad de que en la 3^{era} elección vote por A?

5. Resuelve el siguiente desafío matemático.

Considera el intervalo [0, 1], esto es, todos los números que son mayores o iguales que 0 y menores o iguales que 1. También considera el intervalo $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$, ambos contenidos en [0, 1]. Si se define la probabilidad de escoger un subintervalo del [0, 1] como su largo (es decir, punto final menos punto inicial), entonces muestra que los intervalos $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ son independientes.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 78 - 79

Reflexiona sobre tu trabajo

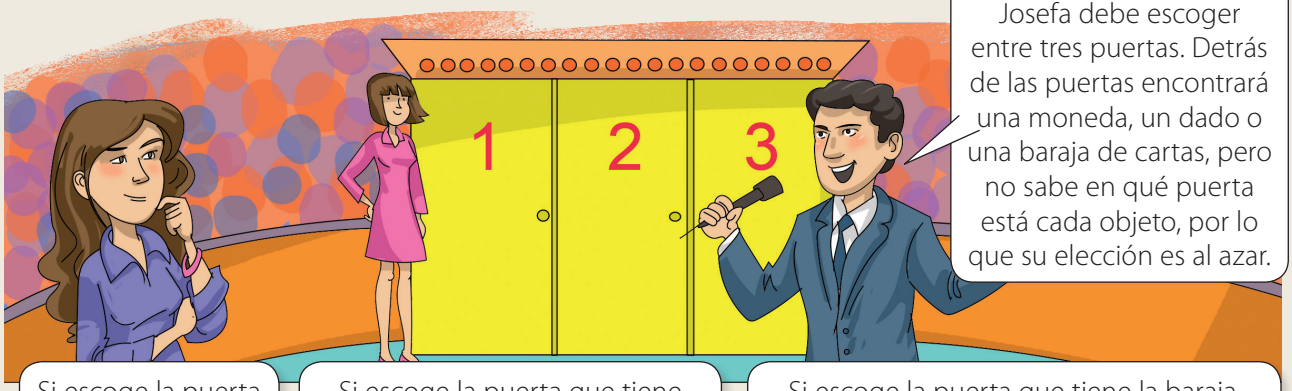
- ¿Qué estrategias nuevas usaste para resolver problemas de probabilidad? Descríbelas.

- Explica cómo se relacionan las propiedades de la unión, intersección y los diagramas de árbol.

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 2

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

1. Analiza la situación y responde.



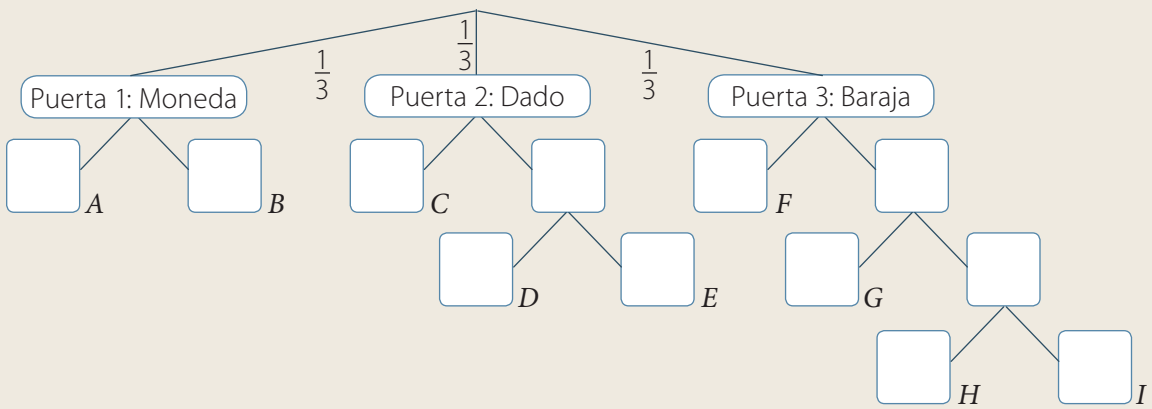


Si escoge la puerta que contiene la moneda, deberá lanzarla y gana si obtiene cara.

Si escoge la puerta que tiene el dado, deberá lanzarlo y si obtiene un puntaje mayor que 4, entonces podrá lanzar una moneda y ganará si obtiene cara.

Si escoge la puerta que tiene la baraja, deberá extraer una carta y si saca un trébol, entonces podrá lanzar un dado y si obtiene un puntaje mayor que, 4 podrá lanzar una moneda y ganará si obtiene una cara.

a. Completa el diagrama de árbol con los resultados posibles y probabilidades. (9 puntos)



b. Calcula la probabilidad de los siguientes resultados posibles del experimento. (1 punto cada uno)

$P(D) =$ ☐ $P(E) =$ ☐ $P(F) =$ ☐ $P(G) =$ ☐ $P(H) =$ ☐ $P(I) =$ ☐

c. ¿Cuál es la probabilidad de que Josefa gane el concurso? ¿Y de que pierda? (2 puntos)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ _____

d. ¿Cuál es la probabilidad de que escoja la puerta que contiene la baraja y pierda en el lanzamiento de la moneda? (1 punto)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ _____

e. ¿Cuál es la probabilidad de que Josefa pierda el concurso si escogió la puerta con el dado? (1 punto)

Realiza tus cálculos

Respuesta ▸ _____

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1a	Elaborar o completar diagramas de árbol con las posibilidades de experimentos aleatorios para representar los eventos y determinar sus probabilidades.		**Logrado:** 11 puntos o más. **Medianamente logrado:** 9 a 10 puntos. **Por lograr:** 8 puntos o menos.
1b, 1c, 1d y 1e	Aplicar la regla aditiva, la multiplicativa y combinación de ambas para determinar probabilidades de eventos simples y compuestos.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- La estrategia que planteaste al inicio de este tema, ¿tenía relación con el uso de diagramas de árbol? Si no, ¿cómo se podría relacionar? Explica.

- ¿Has cumplido tus metas iniciales? ¿Qué has hecho para ello? ¿Qué debes mejorar?

- ¿Qué conocimientos previos fueron importantes para el desarrollo de este tema?

Tema 3

Comportamiento aleatorio

En esta sección recordarás lo que has estudiado en años anteriores y diseñarás una estrategia para desarrollar el Tema 3.

Recuerdo lo que sé

1. Lee la siguiente información.

Mauricio está en la calle y puede tomar varios caminos para ir al quiosco, como se muestra en la imagen. Decide que en cada esquina donde debe elegir entre su derecha e izquierda lo hará al azar usando una moneda honesta.



Supón que Mauricio siempre va en dirección al quiosco, es decir, cada vez que se enfrenta a dos caminos y sabe que uno de ellos lo conduce al quiosco, lo toma y en caso de no saber, la decisión es al azar.

a. ¿Se puede considerar que cada camino es evento de un experimento aleatorio? Explica tu respuesta.

_____

_____

b. Traza con distintos colores todos los caminos posibles que puede tomar Mauricio para llegar a su casa. ¿Cuántos caminos posibles hay? Completa la respuesta.

Hay ☐ caminos posibles.

c. ¿Se podría decir que cada camino tiene la misma probabilidad de ser escogido? Justifica tu respuesta.

_____

_____

d. Usa la regla de Laplace y calcula la probabilidad de cada uno de los caminos al quiosco.

e. ¿Cuál es el camino con mayor probabilidad de ser escogido?

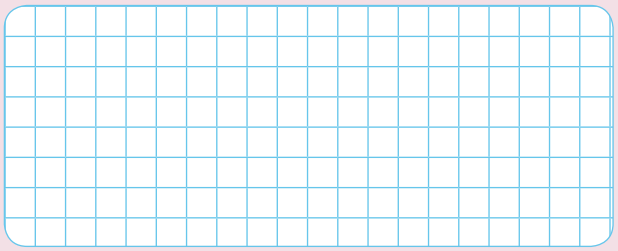
_____

Diseño mi estrategia

Analiza cada caso y plantea una estrategia para desarrollar cada actividad.

2. Si al día siguiente Mauricio elige el camino de la derecha con $\frac{1}{3}$ de probabilidades y con $\frac{2}{3}$ de probabilidades el de la izquierda, ¿cuáles son las probabilidades de los caminos ahora?

Plantea tu estrategia



Respuesta ▸ _____

3. Responde las siguientes preguntas a partir del problema anterior.

a. ¿Se podría haber ocupado la regla de Laplace para resolver el problema? Justifica tu respuesta.

b. ¿Cuál es el camino con mayor probabilidad de ser escogido al modificar las probabilidades? Compara tu respuesta con la obtenida en el ítem 1e.

Reflexiona sobre tu trabajo

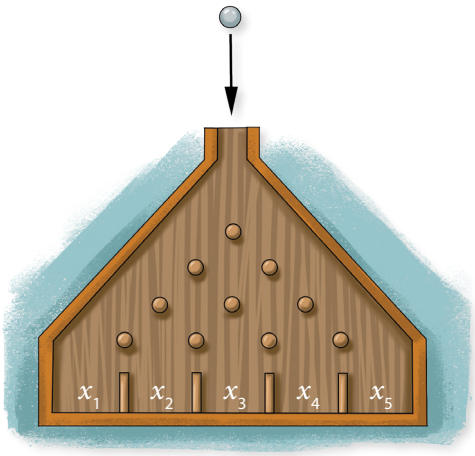
- ¿Qué otras situaciones en las que esté presente el azar se pueden definir por etapas?
- ¿Justificaste cada problema usando tus conocimientos matemáticos? Explica.
- ¿Qué conocimientos del tema anterior utilizaste para diseñar tu estrategia?

Paseos aleatorios y frecuencias relativas

Objetivos

- Comprender el concepto de azar.
- Experimentar con la tabla del Galton y con paseos aleatorios sencillos.
- Realizar análisis estadísticos usando frecuencias relativas.

La **tabla de Galton** o **máquina de Galton** consta de un tablero vertical con varias filas de clavos. Se introducen bolitas en la parte superior para que caigan rebotando aleatoriamente y depositándose, a medida que caen, en los casilleros de la parte inferior. La imagen muestra una máquina de Galton con 4 filas de clavos y 5 casilleros x_1, x_2, x_3, x_4 y x_5.



Considera que cada vez que una bolita rebota en un clavo esta tiene una probabilidad de 0,5 de ir hacia la derecha y de 0,5 de ir hacia la izquierda.

Habilidad

"Se lanza una moneda 10 veces y se quiere calcular la probabilidad de que salgan 4 caras".

Esta y muchas otras situaciones se pueden **modelar** usando la tabla de Galton. Averigua cuáles otras.

- Traza con distintos colores todos los caminos posibles que puede tomar la bolita para llegar a uno de los casilleros. ¿Cuántos caminos pudiste formar? ¿Cómo se relaciona la cantidad de caminos con las potencias de base 2?

- ¿Cuál de los casilleros tiene una mayor cantidad de caminos por los cuales la bolita puede llegar a él?

- Si se lanza un bolita en el tablero, ¿puedes saber con certeza en qué casillero caerá? ¿Por qué?

- Si se lanzan 10 bolitas, escribe cuántas crees que deberían caer en cada casillero. ¿Qué casilleros se ocupan con mayor frecuencia? Justifica tu respuesta.

- Si se agregan 5 filas más de clavos, ¿cuántos caminos crees que se pueden formar en total?

Simula 10 lanzamientos de bolitas en la tabla inicial. Para hacerlo, lanza una moneda en cada fila de la tabla. Si sale cara, la bolita va a la derecha, si sale sello, a la izquierda, es decir, para cada bolita deberás lanzar 4 veces una moneda.

- Completa la tabla de frecuencias con los resultados de tu simulación.

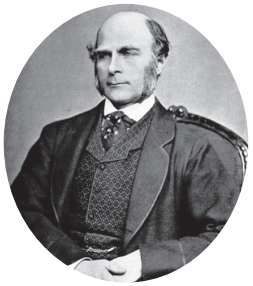
Casillero	Frecuencia	Frecuencia relativa
x_1		
x_2		
x_3		
x_4		
x_5		
Total	10	1

- La cantidad de bolitas que pensaste que caerían fue cercana a las frecuencias obtenidas. ¿Por qué crees que pasó eso?

_____

_____

Francis Galton
1822-1911



Estadístico, entre otras profesiones. Dedicó gran parte de su vida a la investigación. Sus contribuciones fueron reconocidas recién cuando tenía 87 años. Cofundador de la revista científica *Biometrika*, muy prestigiosa en las áreas de Economía y Biología.

Herramientas tecnológicas

Entra al *link* https://tube.geogebra.org/m/10276 y encontrarás una máquina de Galton virtual.

- ¿Cuántos caminos posibles puede tomar una bolita? ¿Cómo lo supiste?

_____

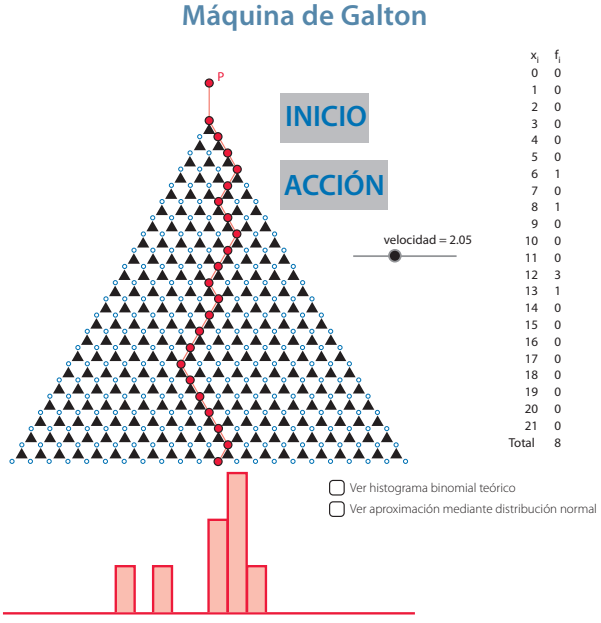
- En esta máquina, ¿en qué casilleros crees que se concentrarán las bolitas que ingresan en la parte superior?

_____

- Presiona el botón de inicio y luego el de acción para simular 100 lanzamientos de bolitas. Observa la tabla de frecuencias que aparece al costado derecho de la máquina. ¿Se cumplió tu conjetura anterior?

_____

_____



x_i	f_i
0	0
1	0
2	0
3	0
4	0
5	0
6	1
7	0
8	1
9	0
10	0
11	0
12	3
13	1
14	0
15	0
16	0
17	0
18	0
19	0
20	0
21	0
Total	8

Como pudiste notar, tanto la actividad de inicio de tema como la tabla de Galton corresponden a un experimento en el que en cada etapa se carece de certeza respecto a qué camino se seguirá. Situaciones como estas se conocen como **paseos aleatorios**.

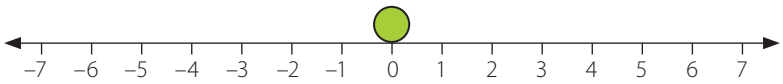
Conceptos

- Un **experimento aleatorio** es aquel en que, bajo ciertas condiciones, podemos conocer todos sus posibles resultados, pero al realizarlo no podemos determinar con certeza cuál se obtendrá.
- Un **paseo aleatorio** es una caminata o un recorrido en el cual en cada paso o etapa se tienen varias opciones para continuar, pero no se tiene certeza de cuál tomaremos.

Ejemplo 1

Lee la situación y responde.

Considera la recta numérica de la imagen, en la que se sitúa una pelotita en el 0.



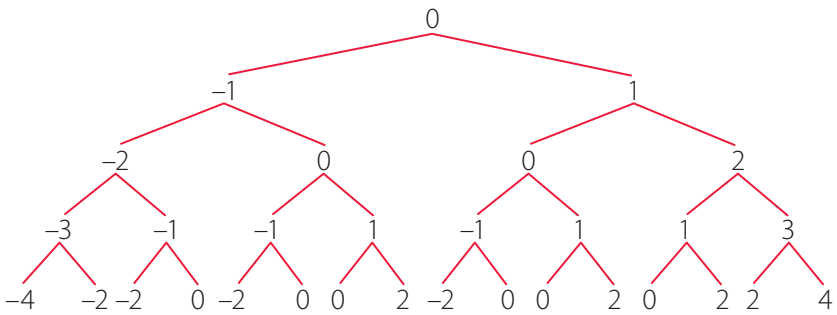
Se realiza el siguiente experimento: Se lanza una moneda al aire. Si sale cara, avanza la pelotita una posición hacia la derecha, si sale sello, una posición hacia la izquierda. El experimento se hace 4 veces.

¿Cuántas opciones tiene la bolita de terminar en la posición marcada con 0?

Para responder a la pregunta puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. La forma más sencilla de revisar todas las posibles opciones que tiene para posicionarse la bolita es construir un diagrama de árbol.



2. Buscas los resultados de interés, en este caso que la bolita se encuentre situada en la posición 0, y las cuentas.

Respuesta: Existen 6 opciones de terminar en la posición marcada con el 0 después de efectuar 4 veces el experimento.

¿Cómo crees que se pueden usar los diagramas de árbol para el cálculo de la probabilidad de un camino aleatorio?

Conceptos

- Cuando realizas varias veces un mismo experimento aleatorio, la **frecuencia relativa de un evento** se define como la cantidad de resultados a favor del evento elegido, dividido por la cantidad total de veces que se realizó el experimento.
- La frecuencia relativa de un evento también es conocida como la **probabilidad empírica**. Esta permite aproximar la probabilidad teórica de cierto evento en situaciones en que no se conoce con exactitud.

Ejemplo 2

Lee la situación y responde.

A un joven, fanático de los autos rojos, le gustaría saber cuál es la probabilidad de que en una hora observe uno desde su balcón. Decidió anotar en una hoja el color de cada auto que pasara por la calle, y obtuvo lo siguiente:

A	V	R	N	V	B	A	R	N	A
V	B	A	N	R	A	N	V	V	B
R	V	R	V	A	N	V	B	N	R

Donde **A**: Azul, **B**: Blanco, **R**: Rojo, **N**: Negro y **V**: Verde.

A partir de los datos, ¿cuál es la probabilidad empírica de que pase un auto rojo en una hora?

PASO A PASO

1 Construyes la tabla de frecuencias para poder obtener las frecuencias relativas.

Colores de auto		
Color	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
Azul	6	$\frac{6}{30}$
Blanco	4	$\frac{4}{30}$
Negro	6	$\frac{6}{30}$
Rojo	6	$\frac{6}{30}$
Verde	8	$\frac{8}{30}$
Total	30	1

2 Observas la frecuencia relativa del evento de interés y obtienes la probabilidad empírica. En este caso, el evento es ver un auto rojo, cuya frecuencia relativa es $\frac{6}{30}$, que simplificada es $\frac{1}{5}$.

Respuesta: La probabilidad empírica de ver un auto rojo en una hora es de $\frac{1}{5}$, que es igual a 0,2.

Atención

Recuerda que la frecuencia absoluta es la cantidad de veces que se observa un cierto evento, y la frecuencia relativa de un evento corresponde a la frecuencia absoluta dividida por el total observado.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Lee la situación y responde.

Para un estudio se realizó una encuesta a 54 mujeres sobre la cantidad de hijos que tenía. Lamentablemente, después de registrar los resultados se produjo un problema en la computadora que almacenaba los datos y se perdieron algunos, quedando solo la siguiente tabla:

Resultados de una encuesta		
Cantidad de hijos	**Frecuencia absoluta**	**Frecuencia relativa**
0	9	
1		$\frac{1}{9}$
2	18	
3		
4		$\frac{1}{6}$

a. Completa los datos que faltan en la tabla anterior.

b. Si se escoge una mujer al azar de este grupo, ¿cuál es la probabilidad empírica de que ella tenga 2 o 4 hijos?

2. Decide si las siguientes situaciones corresponden o no a paseos aleatorios. Justifica tu respuesta.

a. Una persona que camina por las calles de una ciudad, cada vez que puede doblar a la derecha en una calle lo hace.

b. Una persona camina por un sendero y cada 10 minutos lanza una moneda al aire. Si sale cara, toma un descanso, y si sale sello, sigue su camino sin descansar.

c. Una persona está apostando en un juego de casino y solo puede ganar o perder, nunca empatar.

d. En el ejercicio **c.** agregamos que puede empatar.

e. El conserje de un edificio abre la puerta y deja pasar a una persona si la reconoce y sabe que vive ahí; en caso contrario, no la deja pasar.

3. Cada una de las situaciones anteriores que consideraste un paseo aleatorio, represéntala con un diagrama de árbol.

4. Junto con un compañero o una compañera planteen tres situaciones de la vida real que se puedan considerar como paseos aleatorios.

5. Como se mencionó en la cápsula de **Habilidad**, la tabla de Galton permite modelar distintas situaciones de la vida real. Averigüen sobre este tema, su relación con el modelo binomial y hagan un informe. Recuerden mencionar la bibliografía y fuentes que ocuparon.

6. **Un hombre realiza el siguiente experimento: se para en un cierto punto de inicio y lanza una moneda. Si sale cara, avanza un paso, y en caso de salir sello, vuelve al punto de inicio.**

a. Construye un diagrama de árbol para representar el experimento anterior si la persona realizó el experimento 4 veces.

b. Si suponemos que la posición de la persona es la cantidad de pasos a la que se encuentra del punto de inicio, ¿cuál es la posición que posee más caminos en el diagrama de árbol?

c. ¿Corresponde el experimento anterior a un paseo aleatorio? Justifica tu respuesta.

7. **Junto con un compañero o una compañera, consideren la tabla de Galton de la actividad inicial y realicen lo siguiente.**

Dibujen en su cuaderno la tabla de Galton de la actividad inicial y simulen el camino de una bolita de la siguiente manera:

- Tracen el recorrido de la bolita, el cual se obtendrá en forma aleatoria tirando una moneda cada vez que la bolita toque un clavo. Le corresponderá ir hacia la derecha si sale cara, y a la izquierda en caso contrario, y así hasta que la bolita llegue a un casillero.
- Registren en qué casillero cayó la bolita y sigan con otra.
- Hagan este experimento simulando 5 bolitas, luego 10 bolitas y finalmente 15 bolitas.

a. Confeccionen una tabla con las frecuencias absolutas y relativas para los tres casos (5, 10 y 15 bolitas).

b. ¿Cómo se comportan las frecuencias relativas en los tres casos? ¿Existe algún patrón en los tres experimentos? Explica.

c. Construyan el diagrama de árbol teórico que corresponde a este experimento y calculen las probabilidades teóricas de caer en cada receptáculo.

d. ¿Cómo se comportan las probabilidades empíricas (frecuencia relativa) en relación con las teóricas?

e. En caso de existir diferencias, ¿por qué creen que sucede? Comenten.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 80 - 81

Reflexiona sobre tu trabajo

- En el trabajo sobre la tabla de Galton, ¿nombraste adecuadamente la bibliografía y autores de donde obtuviste la información?

_____

_____

- Si buscaste información de Internet, ¿te fijaste que fuera confiable? Explica.

_____

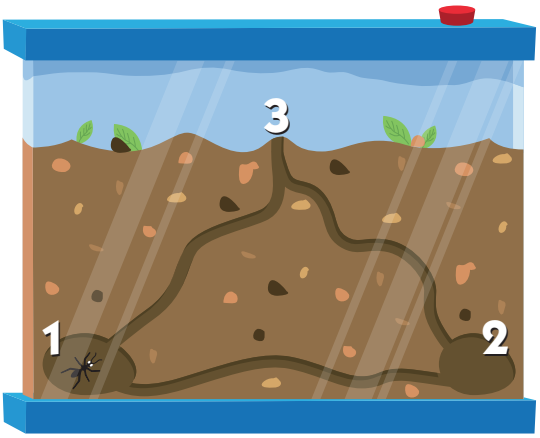
_____

Paseos aleatorios y probabilidad

Objetivos

- Comprender el concepto de azar.
- Experimentar con paseos aleatorios sencillos.
- Utilizar probabilidades para describir el comportamiento azaroso.

Una hormiga se encuentra en uno de los vértices de un triángulo y se mueve a uno de los otros dos vértices en forma aleatoria. Además se sabe que la hormiga tiene igual preferencia por ir a cualquiera de los dos vértices.



- ¿Qué significa en términos de probabilidad que la hormiga tenga igual preferencia por ir a cualquiera de los dos vértices?

_____

_____

- Si suponemos que la hormiga se ha movido 4 veces, construye el diagrama de árbol correspondiente.

- ¿Cómo se puede incluir el concepto de probabilidad en el diagrama de árbol que modela la situación?

_____

_____

En la lección anterior pudiste analizar paseos aleatorios usando frecuencias relativas, pero también es posible modelarlos con probabilidades.

Conceptos

Un **paseo aleatorio** se puede modelar usando probabilidades y un diagrama de árbol, asignando probabilidad de ocurrencia a cada una de las etapas y aplicando las propiedades de las probabilidades estudiadas en el Tema 2.

Ejemplo 1

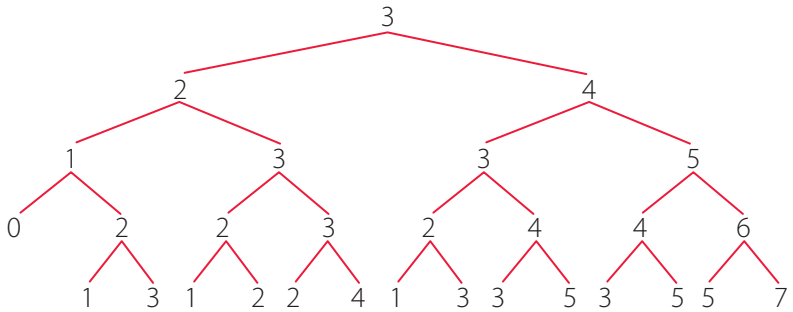
Resuelve el siguiente problema.

Marcela apostará en cierto juego en el que se sabe hay una probabilidad de ganar de 0,5 y una probabilidad de perder de 0,5. Ella cuenta inicialmente con $ 3 y apuesta $ 1 en cada juego. Marcela jugará a lo más 4 juegos. ¿Cuál es la probabilidad de que quede en la bancarrota (con $ 0) o que gane al menos $ 1? Se supone que juega siempre que puede.

Para resolver el problema, puedes seguir estos pasos:

PASO A PASO

1. Construyes un diagrama de árbol para representar el experimento.



Recursos Digitales Complementarios

RDC 12

2. Identificas los resultados a favor del evento A descrito como "Marcela queda en bancarrota o gana por lo menos $ 1". En este caso corresponden a las ramas con números finales 0, 4, 5 y 7.

3. Calculas las probabilidad de cada uno de los resultados. Para esto, en cada línea asignas $\frac{1}{2}$ de probabilidad y por el principio multiplicativo tienes que la probabilidad de que Marcela quede con $ 4, $ 5 o $ 7 es $\frac{1}{16}$ en cada caso, y la probabilidad de que quede en bancarrota es $\frac{1}{8}$.

4. Calculas la probabilidad del evento A. Como este evento está compuesto por resultados disjuntos, utilizas la propiedad aditiva de las probabilidades:

$$P(A) = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16} + \frac{2}{16} = \frac{7}{16} = 0{,}4375$$

Respuesta: La probabilidad de que Marcela acabe en bancarrota o gane al menos $ 1 es 0,4375.

Habilidad

En la resolución de problemas, recuerda justificar tus pasos. Así desarrollas la habilidad de **argumentar y comunicar**.

Ejercicios

Resuelve en tu cuaderno las siguientes actividades de los contenidos y procedimientos que has estudiado.

1. Considera una tabla de Galton con 5 niveles, es decir, con 5 filas de clavos: la primera con un clavo, la segunda con dos, y así sucesivamente.

a. Construye el diagrama de árbol para representar los posibles caminos de una bolita a un casillero.

b. Si asumimos que la probabilidad de que en cada nivel la bolita vaya a la derecha o a la izquierda es la misma, calcula la probabilidad de que una bolita tome un camino específico.

c. ¿Cómo se podrían comparar las probabilidades de distintos caminos?

d. Si lanzamos una bolita por la tabla de Galton, y sabemos que llega a una casilla al terminar su recorrido, ¿qué casilla tiene mayor probabilidad de recibir la bolita?

2. De cinco tenistas en un torneo del circuito profesional, tres de ellos serán sometidos a un test de antidopaje escogidos al azar.

a. Construye un diagrama de árbol para determinar el total de posibilidades que existen.

b. Si dos de los cinco tenistas son hermanos, determina la probabilidad de que ambos sean sometidos al control de antidopaje.

3. Lee la situación y responde.

> Una persona realiza el siguiente experimento: Se para en un punto inicial y lanza una moneda al aire. Si sale cara, la persona avanza un paso, y en caso de sello, la persona se devuelve al punto inicial. Si ya estaba en el punto inicial, se queda allí.

a. Construye un diagrama de árbol para representar la situación en el caso de que la persona lanzara 5 veces la moneda.

b. Si la persona lanzó 5 veces la moneda, ¿cuál es la probabilidad de que este se encuentre a tres pasos del punto inicial?

c. ¿Existe alguna tendencia en la probabilidad de que la persona tenga rachas muy largas de avanzar un paso? Para esta pregunta, considera la probabilidad de que la persona saque 15, 20 o 30 caras seguidas y analiza qué pasa con las probabilidades.

d. Según los resultados del experimento y sus probabilidades, después de varios intentos, ¿cómo debería ser el comportamiento de la persona respecto de su posición?

e. Si la persona hace el experimento con una moneda cargada, es decir, no tiene la misma probabilidad de salir cara que de salir sello, en este caso, comenta sobre cómo cambia el experimento. Propón distintas situaciones con probabilidades y cantidad de lanzamientos.

f. Si se asume que la probabilidad de cara es de $\frac{2}{3}$, ¿cambia la conclusión del ítem anterior?

g. Supón ahora que la persona cambió el experimento y cuando sale sello en vez de volver al inicio simplemente retrocede un paso (para la cara sigue igual). En esta nueva situación, repite los ítems **a**, **b** y **c**. ¿Cambian las probabilidades obtenidas en este nuevo experimento en relación con el primero? Explica.

4. **Considera el ejemplo de la hormiga de la actividad inicial y supón que esta tiene el doble de probabilidades de elegir ir al vértice a su derecha que al de su izquierda.**

a. Construye un diagrama de árbol para representar el comportamiento de la hormiga en 4 etapas.

b. ¿En qué posición es más probable que se encuentre la hormiga después de 4 etapas?

c. ¿Es la misma posición que en el caso cuando la hormiga tenía igual probabilidad de ir a la derecha o a la izquierda? Justifica tu respuesta.

5. **Junto con un compañero o compañera realicen la siguiente actividad.**

El siguiente problema es conocido como "Problema de *Monty Hall* o de las tres puertas".

- Una persona va a un concurso de un programa de televisión en el que debe escoger una de tres puertas. Detrás de cada una hay un premio: en dos de ellas un regalo sorpresa y, en la otra, el premio máximo, que es un automóvil.
- El participante escoge una de las puertas al azar e inmediatamente después de eso el conductor, quien sabe dónde se encuentra el automóvil, abre una de las puertas que no escogió el participante y que tiene un regalo sorpresa detrás.
- El conductor ofrece al participante cambiar la puerta que escogió inicialmente por la otra que queda sin abrir.

¿Le conviene al participante cambiar la puerta en el sentido de aumentar sus probabilidades de ganar?

a. A partir de tu intuición, ¿cuál sería tu respuesta al problema?

b. Construye un diagrama de árbol para representar la situación del concurso.

c. ¿Cuáles son todos los casos en los que el participante gana si se cambia de puerta?

d. ¿Cuáles son todos los casos en los que el participante pierde si se cambia de puerta?

e. ¿Qué aconsejarían hacer al participante para aumentar la probabilidad de que gane el auto en el concurso?

f. ¿Era lo que tú esperabas de forma intuitiva? Comenta.

Ejercita lo estudiado
Cuaderno de ejercicios
Páginas 82 - 83

Reflexiona sobre tu trabajo

- Para modelar una situación real en la que está presente el azar, ¿usarías un enfoque más frecuentista (experimental) o probabilidades teóricas? Justifica tu respuesta.

_____

_____

- ¿Qué estrategias de las que has aprendido te han parecido más útiles? ¿Por qué?

_____

_____

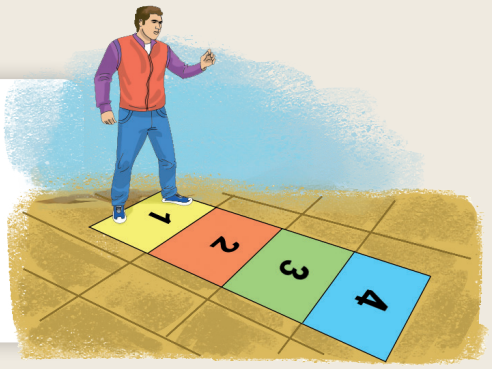
¿Cómo voy? Evaluación de proceso 3

Desarrolla las siguientes actividades de evaluación que te permitirán reconocer lo que has estudiado en este tema.

1. Lee la información y responde.

Un hombre se encuentra parado en un tablero rectangular, como se muestra en la imagen, y realiza el siguiente experimento:

Lanza una moneda. Si sale cara avanza hacia el cuadrado siguiente, y si sale sello, retrocede al anterior, salvo que esté en el primero, en cuyo caso se queda en el mismo lugar.



a. ¿Cuánto es la mínima cantidad de lanzamientos de moneda que debe hacer para llegar al último cuadrado? (1 punto)

b. Simula el experimento 10 veces usando una ficha para representar a la persona y lanza 4 veces la moneda. Realiza el experimento 10 veces y registra el casillero en el que queda la persona después de los 4 lanzamientos. (4 puntos)

Casillero en el que queda	1	2	3	4	Total
Frecuencia					
Frecuencia relativa					

c. Según la tabla que obtuviste, ¿qué tan probable es que la persona llegue al casillero 4? (1 punto)

d. ¿Cuál/es casillero/s tiene/n mayor frecuencia? ¿Cuál/es la menor frecuencia? ¿Qué significa? (1 punto)

e. Representa los posibles resultados al lanzar 4 veces la moneda en un diagrama de árbol. Anota las probabilidades asociadas en cada rama. (4 puntos)

f. ¿Cuál(es) camino(s) tiene(n) mayor probabilidad de ocurrencia? ¿Cuál(es) menos? Escribe en cada caso las probabilidades de los eventos. (1 punto)

g. ¿Cuál es la probabilidad de que después de 4 lanzamientos aún se encuentre en el primer cuadrado? (1 punto)

h. ¿Cuál es la probabilidad de que se encuentre en el segundo cuadrado después de 3 lanzamientos? (1 punto)

i. Tienen relación las probabilidades que obtuviste experimentalmente con las que planteaste teóricamente? Justifica tu respuesta. (2 puntos)

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1e, 1f, 1g y 1h	Elaborar diagramas de árbol para representar caminos aleatorios y estudiar sus resultados.		**Logrado:** 10 puntos o más. **Medianamente logrado:** 8 a 9 puntos. **Por lograr:** 7 puntos o menos.
1a, 1b, 1c, 1d y 1i	Resolver problemas que involucran estimaciones basadas en frecuencias relativas.		
	Total		

Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Qué estrategia para modelar situaciones de azar te parece más adecuada, registrar datos experimentales y usar las probabilidades empíricas, o utilizar diagramas de árbol con probabilidades teóricas? Justifica tu respuesta.
- ¿Has cumplido tus metas iniciales? ¿Qué has hecho para ello? ¿Qué debes mejorar?
- ¿Qué fue lo que más te interesó de la unidad? ¿Por qué?

Actividades complementarias



Juegos de azar

Juegos de probabilidades

El error del duque de Toscana

Alrededor del año 1560, el duque de Toscana, un gran jugador de juegos de azar, había observado que a lo largo de su experiencia al lanzar tres dados y sumar sus puntos, el 10 aparecía con más frecuencia que el 9, a pesar de que, según él, para ambas sumas había seis maneras de lograrlas.

Para él, las maneras de sumar 9 eran:		
1 + 6 + 2	1 + 3 + 5	1 + 4 + 4
2 + 2 + 5	2 + 3 + 4	3 + 3 + 3

Y las maneras de sumar 10 eran:		
1 + 3 + 6	1 + 4 + 5	2 + 2 + 6
2 + 3 + 5	2 + 4 + 4	3 + 3 + 4

a. ¿Qué error cometió el duque de Toscana en sus cálculos?

b. Según la regla de Laplace, ¿cuál es el espacio muestral al lanzar tres dados?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma sea 9? ¿Y que la suma sea 10?

d. ¿Qué puedes concluir sobre este error? Explica tu respuesta.

Juegos de azar

En Chile existen diferentes juegos de azar. Entre los juegos que consisten en extraer cierta cantidad de bolitas desde una tómbola para completar un cartón existe la posibilidad de escoger los números del cartón.

En este contexto, las personas escogen números que en lo posible se encuentren distribuidos dentro del total de las bolitas, por ejemplo, si las bolitas son 20 y deben escoger 5 números, una persona podría escoger; los números 2, 7, 11, 15 y 19. Es muy poco posible que escojan la combinación 1, 2, 3, 4 y 5, porque creen que tienen menos posibilidades.

a. Según el cálculo de probabilidades, ¿sería correcto pensar de esta manera? Justifica tu respuesta.

b. ¿Se podría hacer un análisis de las frecuencias relativas con los resultados de los sorteos anteriores para obtener información sobre la probabilidad de las combinaciones? Explica tu respuesta.

Lanzamiento de un dado

Tres compañeros quieren calcular la probabilidad de sacar un puntaje igual a 1 y 2 al lanzar dos dados.

- El primero razona de la siguiente manera: La probabilidad de sacar un 1 es $\frac{1}{6}$ y la probabilidad de sacar un 2 es $\frac{1}{6}$, por lo tanto la probabilidad de que salga un 1 y un 2 es $\frac{1}{6}+\frac{1}{6}=\frac{1}{3}$.
- El segundo razona de la siguiente manera: La probabilidad de sacar un 1 es $\frac{1}{6}$ y la probabilidad de sacar un 2 es $\frac{1}{6}$, por lo tanto la probabilidad de que salga un 1 y un 2 es $\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$.
- El tercero razona de la siguiente manera: La probabilidad de sacar un 1 o un 2 en un dado es $\frac{2}{6}$ y la probabilidad de sacar un 1 o un 2 en el otro dado es de $\frac{2}{6}$, por lo tanto la probabilidad de que salga un 1 y un 2 es $\frac{2}{6}+\frac{2}{6}=\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$.

a. Los tres cálculos son incorrectos. ¿Cuál fue el error en cada caso?

b. Determina correctamente la probabilidad de sacar un puntaje igual a 1 y 2 al lanzar dos dados.

El problema del sorteo discutido

Un profesor decidió sortear un obsequio entre los 30 alumnos de su clase. Un alumno propuso tomar 30 papelitos, marcar uno de ellos y, después de doblarlos y mezclarlos, repartir uno a cada estudiante. El profesor propuso un método más sencillo y rápido: Pensaré en un número entre 1 y 30, y lo anotaré en un papel y, luego, siguiendo el orden en el que están sentados, cada alumno dirá un número distinto hasta que uno acierte el número que he pensado.

Uno de los alumnos, sentado al fondo de la sala, respondió que no estaba de acuerdo con este método, argumentando que él tendría menos posibilidades de acertar que los primeros, y que lo más probable es que ni siquiera llegara la oportunidad de decir el número, por que antes otro alumno ya lo habría acertado. ¿Este alumno estaba en lo cierto o, por el contrario, el profesor propuso un sorteo justo?

Problema de la apuesta interrumpida

Dos hermanos, Beatriz y Andrés, están apostando en un juego, en el que gana el primero que consigue 10 puntos. En cada ronda ambos tienen la misma probabilidad de ganar y el que gana obtiene un punto. El partido se encuentra en un punto culminante. Beatriz lleva 9 y Andrés, 8 puntos, pero por motivos extraordinarios, deben interrumpir el juego. Dado que ninguno ha llegado a los 10 puntos, deciden repartir el dinero de la apuesta realizada.

a. ¿Cómo deben repartir la apuesta? Explica tu respuesta.

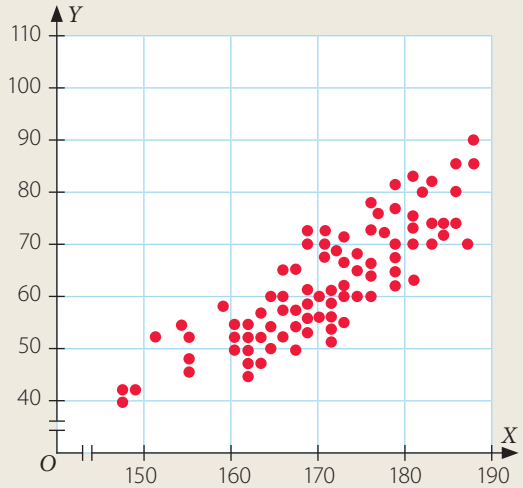
b. Conversa con tus compañeros y compañeras la solución del problema.

c. La solución correcta del problema dependerá de aspectos que pueden no ser matemáticos, pero intenta llegar a una solución mediante el uso de probabilidades. Puedes usar un diagrama de árbol con las jugadas que quedan.

¿Qué aprendí? Evaluación final

A continuación, te proponemos preguntas que tendrás que desarrollar considerando lo que has aprendido en esta unidad.

Comparación de muestras



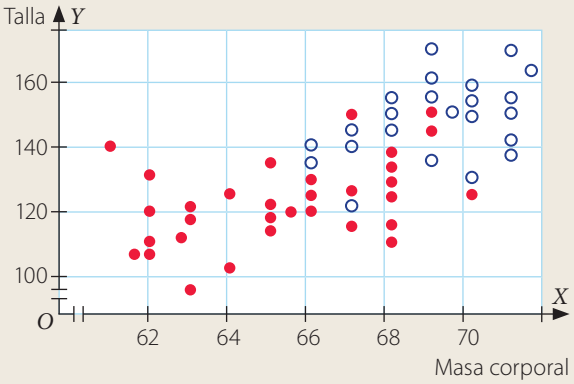
1. Responde las siguientes preguntas a partir del gráfico de dispersión.

a. Los puntos, ¿presentan alguna tendencia? (1 punto)

b. Traza la recta más próxima a los datos. (1 punto)

c. En el gráfico, ¿hay presencia de puntos atípicos (aislados o *outliers*)? (1 punto)

d. A partir de las respuestas anteriores, ¿qué conclusión puedes sacar sobre la relación entre las variables (X e Y)? (2 puntos)



2. El diagrama de dispersión muestra los datos de una encuesta hecha a hombres y mujeres para analizar la relación entre la talla y la masa corporal. Los puntos rojos corresponden a mujeres y los círculos, a hombres.

a. Para el caso de las mujeres, ¿están correlacionadas la talla y la masa corporal? ¿Y para los hombres? (2 puntos)

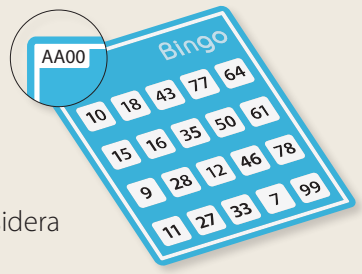
b. ¿Se pueden apreciar con claridad puntos atípicos, rojos o círculos? (1 punto)

c. Traza una recta que a tu criterio separe de mejor manera los puntos rojos de los círculos. (1 punto)

d. ¿Cómo cambia la masa corporal a medida que la talla es mayor? Responde por separado para el caso de las mujeres y de los hombres. (2 puntos)

e. De acuerdo a tus respuestas y al gráfico, escribe una conclusión respecto a la relación entre la talla y la masa corporal, y su diferencia entre hombres y mujeres. (2 puntos)

Propiedades de la probabilidad



3. Miguel está organizando un bingo a beneficio en su barrio y folia cada uno de los cartones con dos letras (excepto CH, LL y Ñ) y dos números. Los números y las letras se pueden repetir.

a. Determina la cantidad de cartones distintos que pueden elaborar. Considera 26 letras y los 10 dígitos. (1 punto)

b. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un cartón que esté marcado solo con números pares? (1 punto)

c. ¿Cuál es la probabilidad de sacar un cartón y que su marca contenga al menos una vocal y un número primo? (1 punto)

4. En un restaurante se ofrecen promociones para almorzar, las cuales están compuestas de una comida y una bebida, donde los clientes pueden elegir entre las siguientes:

- Comida: hamburguesa, pizza o completo
- Bebida: jugo, agua o bebida cola

a. Construye un diagrama de árbol para obtener todos los casos posibles de promociones. (1 punto)

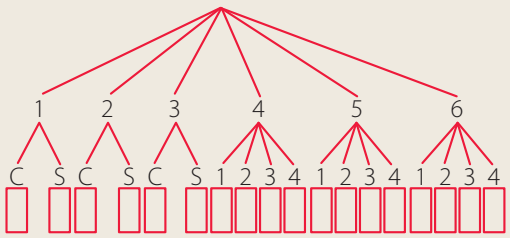
b. ¿Cuál es la probabilidad de que en una promoción el cliente pida una bebida cola? (1 punto)

c. ¿Cuál es la probabilidad de que en una promoción el cliente pida una hamburguesa o una pizza? (2 puntos)

5. En la imagen se muestra el diagrama de árbol correspondiente al siguiente experimento:

Se lanza un dado. Si sale 3 o menos, se lanza una moneda, de lo contrario se vuelve a lanzar un dado, pero esta vez de 4 caras.

Completa el diagrama asignando la probabilidad de cada rama y de los eventos finales. (1 punto)



6. Supón que tienes los siguiente eventos:

A: El gato se sube a un árbol. B: El niño toma un helado. C: La niña salta la cuerda.

a. Describe con tus palabras los eventos $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$ y $A \cap C$. (3 puntos)

Supón que $P(A) = \frac{1}{3}$, $P(B) = \frac{1}{4}$ y $P(C) = \frac{1}{6}$ y que los eventos son todos independientes entre sí.

b. Calcula la probabilidad de los eventos $A \cup B$, $B \cup C$, $A \cup C$, $A \cap B$, $B \cap C$ y $A \cap C$. (3 puntos)

c. ¿Los cálculos anteriores se pueden hacer sin suponer la independencia de los eventos? Explica. (2 puntos)

Comportamiento aleatorio

7. Lee la situación y responde.

Josefina escucha música y activa la función de reproducción aleatoria para no preocuparse de cambiarla. Ella está intrigada con saber la probabilidad de que suene una canción de rock, por lo que cada vez que comenzaba una canción anotaba en una hoja el género de esta, obteniendo los siguientes datos, en los que **R:** Rock, **P:** Pop, **M:** Metal y **T:** Tropical.

R	P	M	T	M	P	R	M	R	P	T	R	P	T	R
M	T	P	R	M	T	M	R	P	M	R	T	R	T	R

a. ¿Dónde está el componente aleatorio del experimento que realizó Josefina? (1 punto)

b. Representa los datos en una tabla de frecuencias. (1 punto)

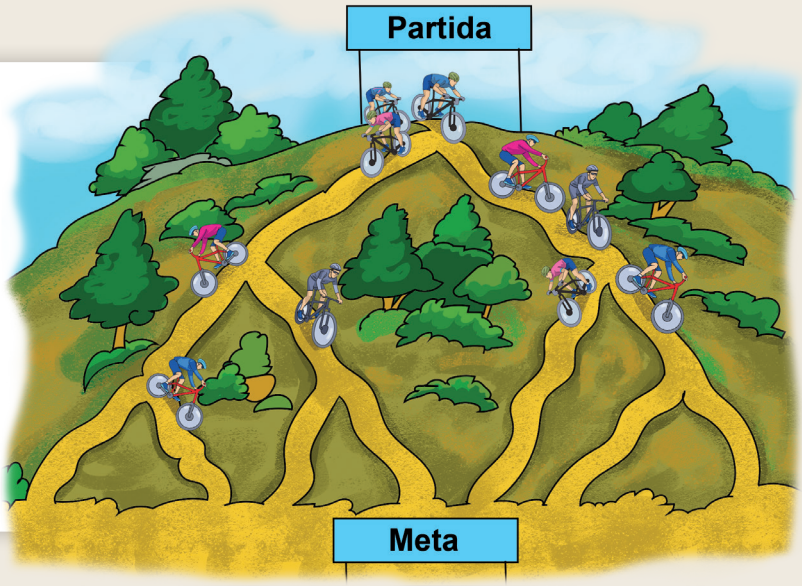
c. ¿Cuál es la respuesta a lo que se preguntó Josefina en términos de probabilidad empírica? (1 punto)

¿Qué aprendí? Evaluación final

8. Lee la información y responde.

De la cima de un cerro bajan 54 competidores de *mountain-bike*, los cuales pueden seguir varios senderos según sus preferencias, pero no todos llegan a la meta, como se muestra en la imagen.

Se sabe que en cada bifurcación un tercio de los competidores decide ir a su izquierda y dos tercios deciden ir a su derecha.



a. Anota en la representación la cantidad probable de competidores que habrá en cada uno de los diferentes caminos. (2 puntos)

b. ¿Cuántas personas probablemente llegarán a la meta? (1 punto)

c. ¿Cuál es la probabilidad de que un competidor llegue a la meta pasando por tres bifurcaciones? (2 puntos)

d. ¿Cuál es la probabilidad de que un competidor no llegue a la meta? (2 puntos)

Verifica tus respuestas en el solucionario y con ayuda de tu profesor o profesora completa la tabla.

Ítems	Conocimientos y habilidades	Tu puntaje	Tu desempeño
1 y 2	Registrar distribuciones de dos características distintas de una población en tablas de doble entrada o gráficos de dispersión. Comparar características de dos poblaciones.		**Logrado:** 23 puntos o más. **Medianamente logrado:** 19 a 22 puntos. **Por lograr:** 18 puntos o menos.
3, 4, 5 y 6	Aplicar las reglas de las probabilidades en la resolución de problemas.		
7 y 8	Comprender el concepto de azar usando frecuencias relativas o probabilidades.		
	Total		

Actividad de cierre

Resume lo que aprendiste en esta unidad. Para esto, confecciona un esquema con conceptos que consideres importantes y descripciones de cada uno. Si se relacionan los conceptos, únelos con líneas y escribe sobre ellas por qué se relacionan.



Reflexiona sobre tu trabajo

- ¿Usaste las estrategias que planteaste al comienzo de la unidad o de cada tema? ¿Te permitieron cumplir con las metas planteadas?

- ¿Fuiste crítico frente a la información que se presentaba? ¿Averiguaste cuando tuviste dudas? Explica.

- Cuando resolviste problemas, ¿justificaste tus pasos usando bases matemáticas o estadísticas? Describe la situación particular que más compleja fue de justificar.

- ¿Qué actitudes crees que debes mejorar y que te pueden servir en tu vida cotidiana?

Solucionario

Unidad 1: Números

¿Cuánto sé? Evaluación inicial (Páginas 12 y 13)

Multiplicación y división de números enteros

1. a. -3 **b.** 12 **c.** -1

2. a. $12\,°C$ **b.** $-11\,°C$ **c.** 6 m en cada etapa.

Fracciones y números decimales

3. a. $-\frac{10}{6}$; $-1,\overline{6}$ **b.** $-\frac{1}{6}$; $-0,1\overline{6}$ **c.** $\frac{3}{6}$; $0,5$

4. a. $-\frac{56}{27}$ **b.** $9\frac{5}{12}$ **c.** 5

5. a. 11 bolsas.

b. 6

c. El divisor es $-0,5$, o en forma equivalente $-\frac{1}{2}$.

6. a. Entre la mayor y menor temperatura hay una diferencia de 0,6°C.

b. El promedio es $-0,\overline{142857}\,°C$ o en forma equivalente $\left(-\frac{1}{7}\right)°C$; por lo que ninguno de los dos se encuentra en lo correcto.

Potencia y raíces

7. a. 25 **b.** 5 **c.** 64 **d.** 8

8. a. F, el valor de a es 81. **b.** F, es equivalente a 3^{5+4}. **c.** V

Tema 1: Operatoria en los números racionales

Recuerdo lo que sé (Página 14)

1. a.

Número decimal	Clasificación	Fracción
75,1	Finito	$\frac{751}{10}$
21,7	Finito	$\frac{217}{10}$

b. $\frac{1\,953}{10}$, y cualquier fracción equivalente a ella podría representar a 195,3.

c. Con el tamaño del dispositivo WinXP(C:), ya que $\frac{1\,953}{10} = 195,3$.

d. $195,3 + 97,7 + 97,7 + 75,1 = 465,8$

Los problemas que se pueden crear son variados, a continuación se muestran dos ejemplos.

Ejemplo 1: Al sumar el tamaño de los distintos dispositivos que se proponen, ¿cuántos GB resultan?

Ejemplo 2: ¿Cuál es el tamaño de los GB del computador?

Diseño mi estrategia (Página 15)

2. a. Es necesario modificar la estrategia propuesta por Julio, ya que lo que se debería hacer es multiplicar por un tercio, y luego sumar.

b. $\boxed{x+y}$ al sumar ambas cantidades se obtiene el espacio utilizado de WinXP (C:)

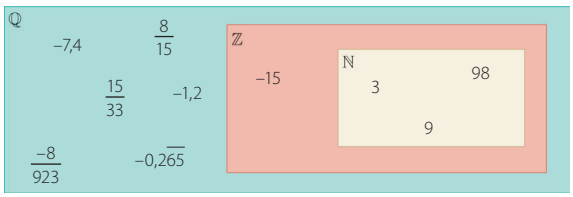
Números racionales (Página 16)

$\frac{8}{5}$; $1,6$

Página 17

1. a. $\notin$ **b.** $\notin$ **c.** $\in$ **d.** $\in$ **e.** $\notin$ **f.** $\in$

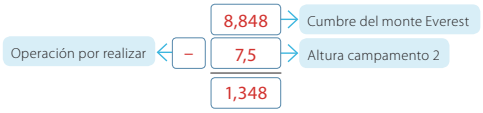
2.



3. a. La foca Baikal **b.** $\frac{19}{10}$

4. a. $x \in \mathbb{N}$ **b.** $x \in \mathbb{Z}$ **c.** $x \in \mathbb{Q}$ **d.** $x \in \mathbb{Q}$

Adición y sustracción de números racionales (Página 18)



La cumbre del monte Everest se encuentra a 1,348 km de distancia del campamento 2.

Página 20

1. a. $-\frac{5}{11}$ **b.** $-\frac{15}{2}$ **c.** $-\frac{3}{11}$ **d.** $\frac{29}{6}$ **e.** $\frac{119}{66}$ **f.** $\frac{41}{33}$

2. a. $60\frac{1}{4} + 13\frac{1}{5} + 45,93 + x = 200$

b. El cuarto grupo recolectó 80,62 kg.

c. El cuarto grupo recolectó más (80,62 kg).
El segundo grupo recolectó menos (13,2 kg).
La diferencia entre ambos grupos es de 67,42 kg.

d. El primer grupo recolectó 47,05 kg. más que el segundo.

3. a. $A = 0,5$ $B = -0,2$ $C = 0,4$ $D = 0,7$

b. $E = 0,55$ $F = 0$ $G = -0,175$ $H = 0,725$

4. a. 0,6 **b.** 1,45

Página 21

5. a. 1,87 m **b.** 2,14 m **c.** 0,08 m

6. a. 15 cm **b.** 13,74 cm

7. a. $A = -\frac{43}{8} = -5,375$ **b.** $B = \frac{643}{180} = 3,57\overline{2}$

Multiplicación y división de números racionales (Página 22)

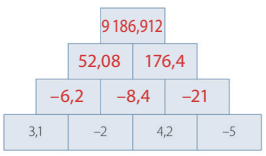
Es correcto, ya que $\frac{1 \text{ yarda}}{550 \text{ yarda}} = \frac{0,9144 \text{ m}}{x \text{ m}}$, luego $x = 502,92$ m.

Página 24

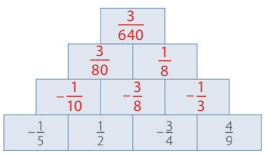
1. a. -3 **b.** $\frac{21}{46}$ **c.** $\frac{80}{21}$ **d.** $-\frac{13}{288}$

2. a. $\frac{2}{27} \to \frac{2}{9} \to -\frac{2}{45} \to \frac{2}{9}$ **b.** $-\frac{3}{5} \to -\frac{1}{2} \to \frac{5}{2} \to \frac{5}{16}$ **c.** $-1 \to -\frac{16}{5} \to -32 \to 320$

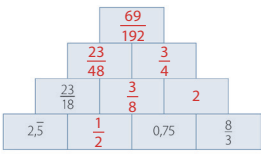
3. a.



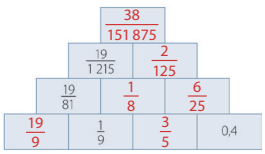
b.



c.



d.



Página 25

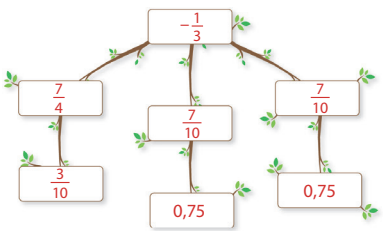
4. a. $(3+4) \cdot (7-9) = -14$ **c.** $(-10:5) - (4 \cdot 20) = -82$

b. $(5 \cdot (-4)) + (2:8) = -\frac{79}{4}$ **d.** $-10:\frac{1}{4} = -40$

5. a. Magdalena está en lo correcto, ya que, $6\frac{1}{2} : 0,25 = \frac{13}{2} : \frac{1}{4} = \frac{13}{2} \cdot 4 = 26$.

b. En el protector gastaron aproximadamente \$ 7 143.
En los pasajes en autobús gastaron aproximadamente \$ 20 455.
Cada almuerzo costó aproximadamente \$ 13 488.

6.



Propiedades de la adición y multiplicación de números racionales. (Página 26)

$$2 \cdot (42{,}85 + 28{,}29) = 2 \cdot 42{,}85 + 2 \cdot 28{,}29$$
$$= 85{,}7 + 56{,}58$$

El resultado es 142,28.
Si se hubiera sumado primero la cantidad entre paréntesis y luego aumentar al doble, el resultado es el mismo.
$2 \cdot (42{,}85 + 28{,}29) = 2 \cdot 71{,}14 = 142{,}28$

Página 28

1. a. = **b.** ≠ **c.** = **d.** = **e.** ≠ **f.** =

2. a. Distributiva, Elemento neutro, Conmutativa, Elemento neutro.
b. Asociativa, Conmutativa.

3. a. Sí
b. No siempre ya que el resultado puede ser una fracción o un número entero.
c. Sí
d. La multiplicación de 2 números naturales es siempre un número natural, sin embargo la división no, ya que si el divisor no es múltiplo del dividendo, el cociente será un número racional.
e. No siempre ya que, el resultado puede ser una fracción o un número entero.
f. Sí

4. a. F, $a + b \in \mathbb{Q}$ **b.** F, $a \cdot b \in \mathbb{Q}$ **c.** F, $a + b = b$ **d.** V

Página 29

5. Las respuestas son variadas, a continuación se muestran dos ejemplos a cada ejercicio.

a. $-\frac{9}{20}, -\frac{1}{2}, -\frac{11}{20}$ y −0,59; −0,5; −0,42
b. $\frac{1}{2}, \frac{7}{12}, \frac{1}{3}$ y $\frac{6}{12}, \frac{7}{12}, \frac{8}{12}$
c. $\frac{9}{16}, \frac{5}{8}, \frac{11}{16}$ y 0,6; 0,7; 0,71
d. $-\frac{3}{5}, -\frac{7}{15}, -\frac{8}{15}$ y −0,6; −0,5; −0,41
e. $-\frac{25}{168}, -\frac{13}{84}, -\frac{9}{56}$ y $-\frac{33}{200}, -\frac{3}{20}, -\frac{41}{280}$
f. $\frac{9\,899}{9\,900}, \frac{9\,901}{9\,900}$ y 0,999; 1; 1,005

6. No, porque los números naturales y enteros no son densos (es decir, entre dos números consecutivos no es posible encontrar tantos números como quisiera, dentro del mismo conjunto).

7. Si a y b son números racionales distintos de cero, tales que $a \cdot b = c$, hay que demostrar que c es un número racional. Sabemos que $a = \frac{x}{y}$ y $b = \frac{z}{w}$, con números enteros distintos de cero.
Su multiplicación es: $\frac{x}{y} \cdot \frac{z}{w} = \frac{xz}{yw} = c$.
Como la multiplicación de números enteros da como resultado un número entero, entonces xz e yw son números enteros distintos de cero. Por lo tanto, c es un número racional por ser cociente de números enteros.

Operaciones combinadas (Página 30)

$5 \cdot 200 + 6 \cdot 450 + 5\,400 + 1\,800$
$1\,000 + 2\,700 + 5\,400 + 1\,800$
$10\,900$
Los estudiantes gastaron $ 10 900

Página 32

1. a. $\frac{53}{75}$ **c.** $-\frac{392}{447}$ **e.** $1\frac{1\,906}{6\,305}$ **g.** 1
b. $9\frac{37}{102}$ **d.** $2\frac{2}{3}$ **f.** $-10\frac{2}{9}$ **h.** $5\frac{1}{3}$

2.

$(a - b \cdot [c + a])$	$([a - b] \cdot [c + a])$
$-\frac{1}{35}$	$-\frac{79}{560}$
$\frac{46\,021}{13\,500}$	$\frac{52\,039}{13\,500}$
$\frac{427}{330}$	$\frac{103\,831}{98\,010}$

3. a. $2 \cdot \left(\frac{3}{7} + \frac{9}{10}\right) - 5^2 = -\frac{782}{35}$
b. $\frac{(17-5)^2}{3 \cdot (5+3)} = 6$
c. $3 \cdot (0{,}7 + 2{,}3) - 4 \cdot (8{,}7 - 5{,}2) = -5$
d. $8 \cdot (9 + 10) + 3 \cdot (115{,}7 - 7{,}7) = 476$
e. $2 \cdot \frac{1}{5} - 3 \cdot \frac{4}{9} = -\frac{14}{15}$

4. La opinión correcta es la de Claudia, pues efectivamente en una gran cantidad de casos, la existencia de los paréntesis altera el resultado.

El ejemplo es variado, a continuación se muestran dos ejemplos:

Ejemplo 1	
0,2 + 0,3 • 0,4	(0,2 + 0,3) • 0,4
0,2 + 0,12	0,5 • 0,4
0,32	0,2

Ejemplo 2	
$\frac{2}{5} + \frac{3}{7} \cdot 2$	$\left(\frac{2}{5} + \frac{3}{7}\right) \cdot 2$
$\frac{2}{5} + \frac{6}{7}$	$\frac{29}{35} \cdot 2$
$\frac{44}{35}$	$\frac{58}{35}$

5. a. 750 m²
b. Área 1: $\frac{384}{5}$ m² Área 2: $\frac{768}{5}$ m² Área 3: $\frac{1\,504}{5}$ m² Área 4: $\frac{1\,094}{5}$ m²
Al sumarlas se obtiene, que es el área total que limpiaron los estudiantes.

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 1 (Páginas 34 y 35)

1. a. $0{,}025 \in \mathbb{Q}$ $450 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ $1{,}5 \in \mathbb{Q}$ $220 \in \mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$
b. Un saltamontes puede saltar 180 veces su tamaño.
c. Las distancias que alcanzan suman 4,83 m. (4,5 m. de saltamontes + 0,33 m. de pulga).
d. No, ya que es un número decimal, es decir, un número racional.
e. La I y la III, ya que están relacionadas mediante la propiedad distributiva.

2. Respuesta variada, a continuación se muestran dos posibles problemas.
Ejemplo 1: Juan me ha regalado 7 dólares y 75 centavos para cambiarlos a pesos chilenos. Además yo tenía guardados 3,5 dólares que también he decidido cambiar. Si un quarter equivale a $ 175, ¿cuánto dinero recibiré al efectuar el cambio?
Respuesta: $ 7 875
Ejemplo 2: Francisca junta un dinero que le regaló su tía de Estados Unidos con el de su hermano, para hacerle un regalo a su mamá. Si Francisca tiene 5 dólares 60 centavos y 6 quarter, y su hermano tiene el doble de dólares y la tercera parte de centavos que su hermana, ¿cuánto dinero lograrán juntar?
Respuesta: 17 dólares y 30 centavos.

Tema 2: Potencias

Recuerdo lo que sé (Página 36)

1. a. 1 048 576 bytes
b. 1 073 741 824 bytes
c. 1 099 511 627 776 bytes

2. a. 20 **b.** 30 **c.** 40

3. a. $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^0$
b. $1 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$
c. $1 \cdot 10^9 + 7 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^6 + 7 \cdot 10^5 + 4 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$
d. $1 \cdot 10^{12} + 9 \cdot 10^{10} + 9 \cdot 10^9 + 5 \cdot 10^8 + 1 \cdot 10^7 + 1 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 7 \cdot 10^3 + 7 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 6 \cdot 10^0$

4. El resultado es 2^{20} y equivale a la cantidad de bytes en 1 megabyte.

Diseño mi estrategia (Página 37)

5. Aproximadamente 23 veces más.

6. a. División.
b. Idealmente debió haber sido así, para no trabajar con números tan grandes.
c. Sí, pues la capacidad del *pendrive* es 2^{34} bytes, y la del CD es $700 \cdot 2^{20}$ bytes, luego el cociente es $\frac{1}{700} \cdot 2^{14}$ bytes.

Potencias de base y exponente entero (Página 38)

Si se multiplica una cantidad impar de veces el resultado es negativo, si se multiplica una cantidad par de veces el resultado es positivo.

$(-2)^5$	$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$	−32	Impar	−
$(-2)^6$	$(-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2) \cdot (-2)$	64	Par	+
$(-3)^4$	$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$	81	Par	+
$(-3)^5$	$(-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) \cdot (-3)$	−243	Impar	−
$(-1)^7$	$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$	−1	Impar	−
$(-1)^8$	$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1)$	1	Par	+

Página 40

- Se utilizó la propiedad de división de potencias con igual base para mostrar que $2^{-3} = \frac{1}{2^3}$.

Página 42

1. a. Negativo **b.** Positivo **c.** Positivo **d.** Negativo **e.** Positivo **f.** Positivo

2. a. $(-6)^8$ **b.** -4^6 **c.** $(-4)^6$ **d.** $(-8)^3$ **e.** -8^3 **f.** 2^9

3. a. $-(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)$ **b.** $(-11) \cdot (-11)$ **c.** $8 \cdot 8 \cdot 8 \cdot 8$ **d.** $2 \cdot 2 \cdot 2$ **e.** $-(7 \cdot 7 \cdot 7)$ **f.** $-(15 \cdot 15)$

4. a. -3 **b.** $-\frac{1}{5}$ **c.** -81

5. a. 625 **b.** -256 **c.** 1 **d.** 10 000 **e.** -243 **f.** -144

6. a. No, debe ser $-16\,807$. **b.** Sí **c.** Sí **d.** No, debe ser $\frac{1}{8}$. **e.** Sí **f.** No, debe ser 8.

7. Son incorrectas:
$-2^0 = 1$, pues $-2^0 = -1$
$-(-3)^0 = 1$, pues $-(-3)^0 = -1$
$(-3)^0 = -1$, pues $(-3)^0 = 1$

Página 43

8. a. 8^3 dm^3

b. • $2^0 + 2^1 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{31}$
• 4.294.967.295

c. Debe escoger a Marcos, por que el 2 solo eleva al 4 y no al (–4) como cree Daniela.

Potencias de base racional y exponente entero (Página 44)

- Los lados de los triángulos de la figura 1 miden 0,5 cm., los de la figura 2 miden 0,25 cm. y los de la figura 3 miden 0,125 cm.
- $0{,}5^1$ cm; $0{,}5^2$ cm; $0{,}5^3$ cm
- En la figura 1, 3 triángulos (3^1).
  En la figura 2, 9 triángulos (3^2).
  En la figura 3, 27 triángulos (3^3).
- Tendría 3^4 triángulos de color.

Página 48

1. a. $\left(\frac{2}{3}\right)^2$ **b.** $\left(-\frac{30}{13}\right)^8$ **c.** $\left(-\frac{9}{10}\right)^1$

2. a. 1 **b.** $-\frac{1}{216}$ **c.** $\frac{81}{4\,096}$ **d.** 0,16 **e.** 0,0009 **f.** 0,04

3. a. $\frac{2}{3}$ **b.** $\frac{107}{196}$ **c.** $-\frac{14}{3}$

4. a. 2 **b.** -4 **c.** 3

5. Beatriz tiene la razón, ya que la potencia $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$ al tener exponente negativo, su valor es igual al del inverso multiplicativo de la potencia cuyo exponente es positivo.

6. a. $\left(\frac{2}{3}\right)^0 = 1$ y $1^3 = 1$. Se cumple.

b. Cuando se tiene potencia de una potencia, los exponentes se multiplican, y como la multiplicación es conmutativa, entonces se cumple la igualdad.

7. a. $\frac{121}{225} \neq \frac{61}{225}$ **b.** $\frac{1}{4} \neq \frac{1}{2}$

8. a. 19,94 cm^2 **b.** 4,8 cm^2

Página 49

9. El virus de mayor tamaño es el del sida.

10. a. En la figura 0, el perímetro del triángulo blanco es: $\frac{1}{2}a$.
En la figura 1, el perímetro de cada uno de los triángulos blancos es: $\frac{1}{4}a$.
En la figura 2, el perímetro de cada uno de los triángulos blancos es: $\frac{1}{8}a$.

b. Considerando $n \in \mathbb{N}_0$, el perímetro de cada triángulo mide $\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} a$.

11. a. $\frac{1}{16}$ **b.** $\frac{1}{8}$ **c.** $\frac{1}{64}$

d. $\frac{1}{64}$ Corresponde a la parte inferior vertical del ojo.

e. $n = 1, 2, 3, 4, 5, 6$

Multiplicación y división de potencias de base racional (Página 50)

- El terreno de Paula tiene un área de $(3{,}5)^2$ m^2, y de la mitad de ello $\left(\frac{1}{2} \cdot (3{,}5)^2\right)$ el jardinero ocupó $\frac{1}{10}$, es decir $\left(\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3{,}5)^2\right)$. Y como por cada m^2 cobró \$4 500, esto se multiplica por ese valor.
- La primera expresión.
- El área del jardín construido es $\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{2} \cdot (3{,}5)^2$ m^2, y se quiere saber cuántos terrenos de área $(0{,}2)^2$ m^2 se pueden construir en él, por esto se divide.
- La primera expresión.
- Paula gastó aproximadamente \$2 756.
- Se pueden construir aproximadamente 15 terrenos con forma cuadrada de 0,2 m. de lado.

Página 54

1. a. $\frac{9}{49}$ **b.** 256 **c.** $\left(\frac{5}{4}\right)^{10} = \frac{9\,765\,625}{1\,048\,576}$ **d.** $\frac{1}{64}$

2. a. $\frac{1}{12}$ **b.** 1 **c.** $\frac{2}{5}$ **d.** $\frac{8}{27}$

3. a. $\left(\frac{6}{5}\right)^2 \cdot \left(\frac{6}{5}\right)^3 = \left(\frac{6}{5}\right)^{2+3} = \left(\frac{6}{5}\right)^5 = \frac{7\,776}{3\,125}$ **b.** $-\frac{1}{512}$

4. Error: Se utilizó la propiedad de multiplicación de potencias con igual base, siendo que lo propuesto es una suma de potencias.
Lo correcto es: $2^0 + 2^1 + 2^2 = 1 + 2 + 4 = 7$

5. a. $\frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = 1 : \frac{a^n}{b^n} = 1 \cdot \frac{b^n}{a^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$

b. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n} = \frac{a^n}{1} \cdot \frac{1}{b^n} = \frac{1}{a^{-n}} \cdot \frac{b^{-n}}{1} = \left(\frac{b}{a}\right)^{-n}$

6. $D = \frac{160}{9}$ m^2

Página 55

7. a. Superficie construida: $\left(\frac{1}{3}\right)^4 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{81} + \frac{1}{27} = \frac{1+3}{81} = \frac{4}{81}$ km^2

Superficie total: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}$ km^2 $= \frac{1}{8}$ km^2

Superficie sin construir: $\left(\frac{1}{8} - \frac{4}{81}\right)$ km^2 $= \frac{49}{648}$ km^2

Y como $\frac{49}{648} > \frac{4}{81}$, el terreno cumple con la condición solicitada por don José.

b. La mitad del cociente es 8.

c. En el caso propuesto por Danilo sí se cumple, pues $4 - 2 = 4 : 2$, pero esto no siempre es así, a continuación se muestran dos contraejemplos:

Contraejemplo 1:

$$\left(\frac{2}{3}\right)^6 : \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^{6:2} = \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}$$

Sin embargo: $\left(\frac{2}{3}\right)^6 + \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{2^6}{3^6} : \frac{2^2}{3^2} = \frac{64}{729} : \frac{4}{9} = \frac{16}{81}$, y ocurre que $\frac{8}{27} \neq \frac{16}{81}$

Contraejemplo 2:

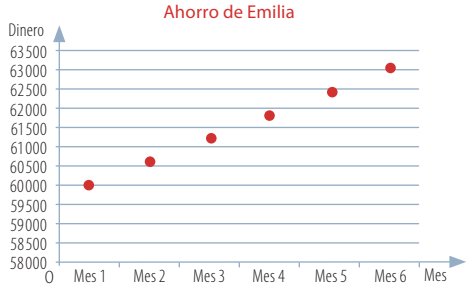
$$\left(\frac{1}{2}\right)^9 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \left(\frac{1}{2}\right)^{9:3} = \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8}$$

Sin embargo lo correcto es: $\left(\frac{1}{2}\right)^9 : \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1^9}{2^9} : \frac{1^3}{2^3} = \frac{1}{512} : \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$

Crecimiento y decrecimiento exponencial (Página 56)

Mes	Dinero \$
1	60 000
2	60 600
3	61 206
4	61 818,06
5	62 436,2406
6	63 060,60301

- Porque en términos de porcentaje: 1,01 = 100 % + 1 %
- En el mes 11: $60\,000 \cdot 1{,}01^{10}$
- En el mes n: $60\,000 \cdot 1{,}01^{n-1}$



Página 58

1. Si $x = 0{,}5$, entonces $y \approx 0{,}7071\ldots$
Si $x = 4$, entonces $y = 0{,}0625$

2. a. 1° lugar: $ 162 000; 2° lugar: $ 54 000; 3° lugar: $ 18 000; 4° lugar: $ 6 000

b. Sí, a ese ritmo logran hacer más de 400 vasijas.

c. Después de 3 días se han exterminado 1.250 conejos, por lo que quedan 8 750.

d. 6 veces en 6 horas (En 6 horas y 4 minutos aplaudiría una 7° vez).

e. Juan: $ 5 000; Diego: $ 6 105.

f. Este mes paga $ 25 920.

3. a. La población A tendrá 125 bacterias y la población B tendrá 576.

b. 701 bacterias

Página 59

4. a. $2 \cdot 2^5 = 2^6$ **b.** $2^2 \cdot 2^6 = 2^8$

5. a.

Etapa 5	Etapa 6	Etapa 7
5^4	5^5	5^6
625	3 125	15 625

b. 5^{29} **c.** 19 531 mensajes

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 2 (Página 60 y 61)

1. a.

Semana	Cocineros nuevos
0	10
1	20
2	60
3	180
4	540
5	1 620

b.

Semana	Cocineros nuevos
1	$20 \cdot 3^0$
2	$20 \cdot 3^1$
3	$20 \cdot 3^2$
4	$20 \cdot 3^3$
5	$20 \cdot 3^4$

El término general de los cocineros nuevos es $20 \cdot 3^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$.

c. El término general de los cocineros totales al finalizar la semana n es, $10 \cdot 3^n$, $n \in \mathbb{N}$.

2. a. $1{,}\overline{1} = \frac{10}{9}$ **b.** $0{,}\overline{9} = 1$

3. a. $5 \text{ ns} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ s} = 0{,}000000005 \text{ s}$
$0{,}34 \text{ Gs} = 0{,}34 \cdot 10^9 \text{ s} = 340\,000\,000 \text{ s}$

b. No es correcto, ya que $30 \text{ µm} = 3 \cdot 10^{-5} \text{ m}$

Actividades complementarias (Página 63)

1. $H_n = 4n, n \in \mathbb{N}_0$ y $V_n = \frac{4^{n+1} - 1}{3}$

2. a. En 1 día habrán 5^{25} nuevas bacterias; después de 2 días habrán 5^{49} nuevas bacterias y después de 10 días habrán 5^{241} nuevas bacterias.

b. Transcurridas n horas hay 5^{n+1} nuevas bacterias.

¿Qué aprendí? Evaluación final (Página 64 a la 66)

Operatoria en los números racionales

1. a. $\in \mathbb{Q}$ **b.** $\in \mathbb{Q}$ **c.** $\in \mathbb{Q}$ **d.** $\in \mathbb{Z}, \mathbb{Q}$ **e.** $\in \mathbb{Q}$ **f.** $\in \mathbb{Q}$

2. a. $\frac{511}{30}$ **b.** $\frac{121}{180}$ **c.** $\frac{797}{300}$

3. a. Conmutatividad

$$\frac{5}{3} - \frac{2}{5} = \left(-\frac{2}{5}\right) + \frac{5}{3}$$
$$\frac{25-6}{15} = \frac{-6+25}{15}$$
$$\frac{19}{15} = \frac{19}{15}$$

b. Asociatividad

$$\left[\left(-\frac{5}{3}\right) + \frac{7}{4}\right] + \frac{1}{2} = \left(-\frac{5}{3}\right) + \left(\frac{7}{4} + \frac{1}{2}\right)$$
$$\frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{5}{3} + \frac{9}{4}$$
$$\frac{7}{12} = \frac{7}{12}$$

4.

Número decimal	Fracción
$\left(5 + \frac{1}{3}\right) - (-2) \cdot 7$	La diferencia entre la suma de cinco y un tercio con el producto entre menos dos y siete.
$\frac{1}{4} - (10 - (-6))$	Un cuarto menos la resta entre diez y menos seis.
$7 : (-8) - \left(-6 + \frac{2}{5}\right)$	La diferencia entre el cociente de siete y menos ocho, con la suma entre menos seis y dos quintos.

5. a. $(c - b)$ debe ser divisible por a; $(c - b)$ y a deben tener signos opuestos.

b. $(c - b)$ no debe ser divisible por a; $(c - b)$ y a deben tener igual signo.

6. Se encuentra a $29\frac{5}{6}$ bajo el nivel del mar.

Potencias

7. $\frac{3}{2}$

8. a. $4^3 : 2^3 : 2^3$

b. $\left(\frac{4}{5}\right)^2 : \left(\frac{25}{16}\right)^{-1}$

c. $(-6)^2 : (-6)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-2}$

d. $\left(\frac{2}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{-4} : 4^4 \cdot (-5{,}23)^0$

9. a. $\frac{1}{3\,211\,264}$ **b.** 2 500 **c.** $\frac{46\,656}{15\,625}$

10. a. Falsa

$$\frac{2^3}{4^5} \neq 2^{3-5}$$

Contraejemplo: $\frac{8}{1\,024} \neq 256$

$$\frac{1}{128} \neq 256$$

b. Verdadera

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}} = a^{-n} \cdot \frac{1}{a^n} \cdot \frac{b^n}{1} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$$

11. a. 8 cm^2

b. Área $ABCD = 42 \text{ cm}^2 = 16 \text{ cm}^2$

Área $PSRQ = (2\sqrt{2})^2 \text{ cm}^2 = 8 \text{ cm}^2 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \text{ cm}^2$

Área $WXYZ = 2^2 \text{ cm}^2 = 4 \text{ cm}^2 = 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \text{ cm}^2$

c. Sexto cuadrado: Área $= 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \text{ cm}^2$

d. Décimo cuadrado: Área $= 16 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^9 \text{ cm}^2$

12. a. Disminuye aproximadamente en un 87 %.

b. $\left(\frac{3}{5}\right)^P$

c. $\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot 6 = \frac{3}{32}$

13. a. $2^9 \cdot \frac{13}{256} \text{ mn} = 2 \cdot 13 \text{ mn} = 26 \text{ mn}$

b. Es necesario doblarla al menos 8 veces.

c. $2^n \cdot \frac{13}{256} = 2^{n-8} \cdot 13, n \in \mathbb{N}$.

14. a. El vencedor es Cristian, pues en la 6° jugada, él deja un segmento de 0,78125 cm.

b. En la 1° jugada $= \frac{50}{2} = 50 \cdot \frac{1}{2}$

En la 2° jugada $= 50 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 50 \cdot \frac{1}{2^2}$

En la 5° jugada $= 50 \cdot \frac{1}{2^5} = 50 \cdot 2^{-5}$

Solucionario

Unidad 2: Álgebra y funciones

¿Cuánto sé? Evaluación inicial (Páginas 70 y 71)

Expresiones algebraicas

1. a. $-2a + 2b$
b. $xz - 2x$

2. a. $(2x^2 + 3xy - 2y^2)$ cm²
b. $(4x^2 + 10xy + 6y^2)$ cm²

Ecuaciones

3. a. $x = 8$
b. $z = 3$
c. $x = \frac{19}{30}$
d. $y = 2{,}1$
e. $y = 11$
f. $z = 0{,}\overline{3}$

4. a. $x = 6$
b. Inés tienes 14 años y su abuelo 70 años.

Inecuaciones

5. a. $\{x \in \mathbb{Q} / x > -2{,}2\}$ **b.** $\{x \in \mathbb{Q} / x > 2\}$ **c.** $\left\{x \in \mathbb{Q} / x < \frac{1}{29}\right\}$

6. No tiene solución en los naturales ya que $x < \frac{1}{20}$.

Funciones

7. a. No, pues 0 no tiene una imagen asociada.
b. No, 2 es pre imagen de 0 y 4.
c. No, –2 es pre imagen de 8 y 2.
d. Sí, cada pre imagen tiene una única imagen.

8. a.

x	–2,5	0	3,5
$f(x)$	–7,5	0	10,5

b.

x	–4,5	0	5,3
$g(x)$	1	0,1	–0,96

Tema 1: Productos notables

Recuerdo lo que sé (Página 72)

1. a.

a	b	$(a+b)^2$	$a^2+2ab+b^2$	$(a+b)^3$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$
3	2	25	25	125	125
1	5	36	36	216	216

b. Resolver $(a+b)^2$ es equivalente con $a^2+2ab+b^2$, y resolver $(a+b)^3$ también es equivalente a resolver $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
c. Sí, al reducir términos semejantes se relaciona con $(a+b)^2$ y $a^2+2ab+b^2$

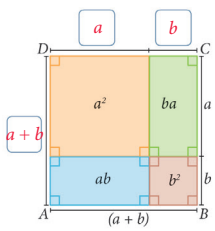
Diseño mi estrategia (Página 73)

2. a. Sí, pues $(a+b)(a+b) = a^2+ab+ab+b^2 = a^2+2ab+b^2$. Por ejemplo:

$(1+2)^2 = 1^2 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 2^2$
$9 = 1 + 4 + 4$
$9 = 9$

b. Es lo mismo ya que $(a+b)^2(a^2+2ab+b^2) = (a+b)(a+b)(a+b)$. Una buena estrategia sería utilizar la propiedad $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Cuadrado y cubo de un binomio (Página 74)



$(a+b)^2 = (a+b) \cdot (a+b)$
$= a \cdot (a+b) + b \cdot (a+b)$ — Propiedad distributiva.
$= a^2 + ab + ba + b^2$ — Multiplicas.
$= a^2 + ab + ab + b^2$ — Propiedad conmutativa.
$= a^2 + 2ab + b^2$ — Área cuadrado $ABCD$.

Página 76

1. a.

a	b	$(a+b)^2$	a^2+b^2	$a^2+2ab+b^2$	$(a-b)^2$	a^2-b^2	$a^2-2ab++b^2$
3	2	25	13	25	1	5	1
1	0	1	1	1	1	1	1

No, ya que se cumple que $(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$ y que $(a-b) = a^2-2ab+b^2$

b.

x	y	$(x+y)^3$	x^3+y^3	$(x-y)^3$	x^3-y^3
2	–4	–8	–56	216	72
1	0	1	1	1	1

No, ya que se cumple que $(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ y que $(a-b)^3 = a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

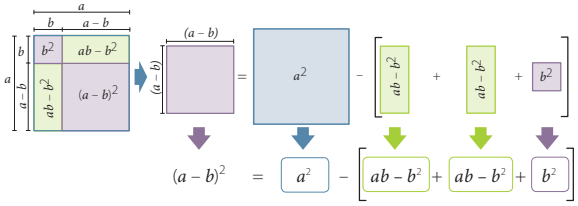
2. a. 25
b. $4-4y+y^2$
c. $27x^3+54x^2y^2+36xy^4+8y^6$
d. $64z^6-240z^4w^3+300z^2w^6-125w^9$

3. a. a ; 9
b. $9a^4$; $4b^2$
c. $3b$; $36a^2b$
d. $150x^4y^3$; $-8y^9$

4. a. $(x-5)^2+7$
b. $(y-7)^2-50$
c. $(z+1)^2+1$
d. $\left(w-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{21}{4}$

Página 77

5.



Por lo tanto, el área del cuadrado de lado $(a-b)$ es: $a^2-2ab^2+b^2$

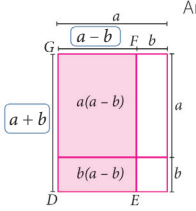
6. a. $A = \frac{9}{25}x^2 + \frac{63}{25}xy + \frac{441}{100}y^2$
b. $V = \frac{125}{8}a^3 + \frac{15}{4}a^2b + \frac{3}{10}ab^2 + \frac{1}{125}b^3$

7. a. $C + 2Cx + Cx^2$ **b.** $ 14 641 000

8. a. 10
b. Josefa, ya que:

$(a+b+c)(a+b+c) = a^2+ab+ac+ba+b^2+bc+ca+cb+c^2$
$= a^2+b^2+c^2+ba+2ab+2ac+2bc$

Suma por su diferencia (Página 78)



Área $DEFG = m(\overline{GD}) \cdot m(\overline{DE})$
$= (a+b) \cdot (a-b)$ — Remplazas.
$= a(a-b) + b \cdot (a-b)$ — Propiedad distributiva.
$= a^2 - ab + ba - b^2$ — Multiplicas.
$= a^2 - ab + ab - b^2$ — $ba = ab$.
$= a^2 - b^2$ — Reduces términos semejantes.

Página 80

1. a. x^2-81
b. $x^2-\frac{1}{4}$
c. x^2-121
d. $z^6-9{,}61$
e. $a^{2n}-1\frac{11}{25}z^6$
f. $x^{4p-6}-25z^6$

2. a. $(100+50)(100+110) = 100^2+160 \cdot 100+5\,500 = 31\,500$
b. $a^2+\frac{62}{45}a+\frac{7}{15}$
c. $y^4+\frac{21}{40}y^2-\frac{1}{16}$
d. w^4-12w^2+27
e. $b^{2n}+5ab^n+6a^2$
f. $y^{6(p+3)}+(z^2-10z^3)y^{3(p+3)}-10z^5$

3. a. $17y$
b. 144
c. b^2 ; b^2
d. $4b^5$; $4b^5$; $12b^5$
e. 15 ; 15 ; $4x^2$
f. 9 ; $9x^4$; 72

4. a. $z^2+10z+21$
b. $16x^2-25$
c. $9y^2+6y-8$
d. $81b^2-16$
e. y^2-9
f. $25a^2-55a+18$

Página 81

5. a. $x^2+27x+162$ **b.** $2x^2-4x-23$

6. A continuación se encierra el error y su corrección se muestra en rojo.

a. $(y + 9a)(y - 9a) = y^2 \oplus 9a^2$ / $y^2 - 81a$

b. $(a + 12)(a - 8) = a^2 + 4a \ominus 4$ / $4a - 96$

c. $(b - 5)(b + 5) = b^2 + 5b - 15$ / $b^2 - 25$

d. $(c - 13)(c + 1) = c^2 \ominus 14c \oplus 13$ / $c^2 - 12c - 13$

e. $(a^{2n} + 1)(a^{2n} - 3) = a^{4n} - 2a^{2n} \ominus 2$ / $a^{4n} - 2a^{2n} - 3$

f. $(x^3 - 5)(x^3 + 5) = x^{\otimes} - 25$ / $x^6 - 25$

g. $(10 - a^x)(10 + a^x) = 20 - 2a^{\otimes}$ / $100 - a^{2x}$

h. $(a^{2n+1} - 3)(a^{2n+1} - 4) = a^{\otimes 2n+1} - 7a^{2n \otimes 1} \ominus 12$ / $a^{4n+2} - 7a^{2n+1} + 12$

7. a. $a^2 + 2ab - 18a + b^2 - 18b + 81$, agrupando y aplicando cuadrado de binomio

b. $x^2 + 2xy - 8x + y^2 - 8y + 15$, agrupando y aplicando binomio con término común

c. $a^4 + 2a^2y^2 - 27a^2 + y^4 - 27y^2 + 180$, agrupando y aplicando binomio con término común

d. $4a^6 - 4a^3b^3 + 26a^3 + b^6 - 13b^3 + 40$, agrupando y aplicando binomio con término común

e. $2y^{2n}z^n - 3y^{2n} + y^{4n} + z^{2n} - 3z^n + 2$, agrupando y aplicando binomio con término común

f. $2a^{3n}b^{2n+3} - 9a^{3n} + a^{6n} - 9b^{2n+3} + b^{4n+6} + 20$, agrupando y aplicando binomio con término común

8. a. Área= $(25a^2 - 49)\text{m}^2$, si a = 2 entonces Área = 51m^2.

b. Área= $(4b^2 + 14b - 30)\text{m}^2$.

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 1 (Páginas 82 y 83)

1. a. $(20 - 2x)$ cm

b. $(20 - 2x)^2\ \text{cm}^2 = (400 - 8x + 4x^2)\ \text{cm}^2$

c. $400 - 4x^2\ \text{cm}^2$, se calcula el área del cuadrado y de los rectángulos que componen la red y luego se reducen términos semejantes.

d. Arista = $(50 - y)$ cm, volumen= $(50 - y)^3\ \text{cm}^3$.

2. a. No, miden $(x - 2z)$ cm e $(y - 2z)$ cm.

b. $(xy - 2xz - 2yz + 4z^2)\ \text{cm}^2$

3.

$(3x^2 + 5y^3)(3x^2 - 5y^3) = 3x^2 \cdot (3x^2 - 5y^3) + 5y^3 \cdot (3x^2 - 5y^3)$ (Distribuyes) $= 9x^4 - 15x^2y^3 + 15y^3x^2 - 25y^{\otimes}$ (Multiplicas) $= 9x^4 - 25y^{\otimes}$ (Reduces términos semejantes)

$25y^6 = 9x^4 - 25y^6$

Tema 2: Factorización

Recuerdo lo que sé (Página 84)

1. a. $(24x + 4y)$ m , se repite el factor 4 en ambos términos.

b. Ambos, son expresiones equivalentes.

c.

Expresión algebraica	Coeficientes numéricos	Factores literales
$24x + 4y$	24, 4	x, y
$35x^2 + 10xy$	35, 10	x^2, xy

2 coeficientes numéricos y 2 factores literales cada uno. Sí se pueden clasificar como binomios, ya que cada uno se compone de 2 términos algebraicos.

Diseño mi estrategia (Página 85)

2. a. No, la expresión correcta es $4(6x + 5)$. Otra estrategia es multiplicar por 2 el ancho y luego el largo, sumando estas expresiones. $2 \cdot 5x + 2 \cdot (7x + 2y)$.

b. $(35 + y)100\ \text{m}^2$, esta expresión es la única equivalente a $(3\,500 + 100y)\ \text{m}^2$.

Factorización por un factor en común (Página 86)

- No, ya que r también es un factor común.

Página 88

1. a. Sí, $3(3x + 1)$

b. No

c. Sí, $b(7a + 1)$

d. Sí, $19(x + y)$

e. Sí, $2(4z^2 - 5z - w)$

f. No

g. No

h. Sí, $(x + y)(3 - 5y)$

i. No

2. a. 5

b. $x^2(1 + x)$

c. $(a - b)$

d. b

e. $(c^2 + b)$

f. $2bc$

g. xyz

h. $-xw$

i. $-4a^2b^2c^3$

3. a. $xy(5xy - 2)$

b. $3(pq - cd)$

c. $(1 - b)(1 + 2a)$

d. $(b^2 - 3a)(2x - 1)$

e. $(x - 3y)(w - z)$

f. $2w^2z^2(x^2w + 2z - 3x^3)$

g. $(3a - 2b)(x + y - 2)$

h. $(a + 1)(11 - 3a)$

i. $6x^2y^2(2xy^3 + 7xy^2 - xy - 5)$

4. a. m

b. $I = m(v_f - v_i)$

c. $I = 7{,}5$

Página 89

5. a. $\frac{p}{4IK}$

b. Sí, existe otro factor común. La expresión resulta: $V = \frac{p}{4IK}(R^2 - r^2)$

6. a. $(5x+4)\ \text{cm} = DE = GF$

b. $(2y + 10)\ \text{m} = LR = MR$

7. $50 \cdot 25 \cdot 3(x + y)^2$

Factorización de binomios (Página 90)

- $3^2 = 9$ y $(x)^2 = x^2$.
- La forma 1, en la forma 2 se comete error al factorizar.

Página 92

1. a. $3w$

b. $\frac{p^4}{6}$

c. $2p^4q$

d. $13q^3rs^2$

e. $11a^2w$

f. $4x^2y^4w^5$

2. a. Suma de cubos

b. Diferencia de cuadrados

c. Diferencia de cuadrados

d. Suma de cubos

e. Diferencia de cuadrados

f. Diferencia de cubos

3. a. $(1 - 2w)(1 + 2w + 4w^2)$

b. $(2w - 3)(2w + 3)$

c. $(1 + q^3)(1 - q^3 + q^6)$

d. $(9w^2z^3 - 11q^2)(9w^2z^3 + 11q^2)$

e. $(w^2n^3 - 2z^4)(w^2n^3 + 2z^4)$

f. $(7m + 4)(49m^2 - 28m + 16)$

g. $x^3(3 + 2y^2x^2)(9 - 6x^2y^2 + 4y^4x^4)$

h. $(5m^2 - 8a)(25m^4 + 40am^2 + 64a^2)$

i. $b^6(10 - 9a^3b^2)(100 + 90a^3b^2 + 81a^6b^4)$

4. a. $27m^3 - 1\,000n^3$

b. $81x^2 - 64$

c. $2\,197z^3 + 1\,331w^3$

d. $343b^{12} + 1$

e. $125a^9 - 64b^3$

f. $225x^6 - 16y^4$

5. a. $1 - 512m^3 = (1 - 8m)(1 \ominus 8m \ominus 64m^2)$ / $(1 + 8m + 64m^2)$

b. $4a^2 - 9b^4 = (2a - 3b)(2a + 3b)$ / $(2a - 3b^2)(2a + 3b^2)$

c. $y^3 + 1\,728 = (y + 12)(y^2 + 243 + 144)$ / $(y^2 - 12y + 144)$

d. $16c^4 - 4 = (4c^2 - 4)(4c^2 + 4)$ / $(4c^2 - 2)(4c^2 + 2)$

e. $64 - 125n^6 = (5n^2 - 4)(25n^4 + 20n^2 + 16)$ / $(4 - 5n^2)(25n^4 + 20n^2 + 16)$

f. $216m^3 + 1\,331 = (6m \ominus 11)(36m^2 \oplus 66m + 121)$ / $(6m + 11)(36m^2 - 66m + 121)$

Página 93

6. a. 97

b. $(27 + 8z)$ o $(27 - 8z)$ metros.

7. a. $(4x^2 - 6x + 9)\ \text{cm}^2$

b. $(7b + 8z)$ cm

c. $(25x^2 - 20x + 16)\ \text{cm}^2$

d. $(7y + 5)$ cm

Factorización de trinomios (Página 94)

- Cuadrado de binomio.
- $\neq$; $=$
- La medida de cada lado es: $(x + y)$ cm.

Página 96

1. a. No

b. Sí, $(y + 5)^2$

c. No

d. Sí, $(x - 9)^2$

e. No

f. Sí, $(b + 6)^2$

g. No

h. No

i. Sí, $(3m^2 - 4)^2$

2. a. 36 y la factorización es $(x + 6)^2$

b. 18z y la factorización es $(9 - z)^2$

c. p^2 y la factorización es $(p + 3z)^2$

d. $40xz$ y la factorización es $(5z + 4x)^2$

e. b^4 y la factorización es $(a^2 + b^2)^2$

f. $\frac{1}{25}$ y la factorización es $\left(w^3 + \frac{1}{5}\right)^2$

3. a. -49 **b.** 42 **c.** $-2\,205$ **d.** 49

4.

$p + q$	$p \cdot q$	p	q
-5	6	-3	-2
6	8	2	4
-3	-10	-5	2
3	-18	6	-3
4	4	2	2

$p + q$	$p \cdot q$	p	q
5	-24	8	-3
-6	-40	-10	4
-11	28	-7	-4
1	-380	-19	20
2	-120	12	-10

Página 97

5. a. $(y-4)^2$
b. $(p+3q)^2$
c. $(z+7)(z-4)$
d. $\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x+\frac{1}{5}\right)$
e. $(q+12)(q-11)$
f. $(1-3w)^2$
g. $(1-3a)(3a+2)$
h. $\left(2b+\frac{1}{4}\right)^2$
i. $(k-14)(k-10)$

6. a. $(p+9)$ m **b.** $(4x+8)$ m

7. a. $(x-6)(x-3)$
b. x debe ser menor que 1 y mayor que 0, por ejemplo 0,8 cm.

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 2 (Páginas 98 y 99)

1. a. $(2y^4+8)$ cm $= 2(y^4+4)$ cm
b. $\overline{AR} = \overline{JR} = (2y^3+4y)$ cm $= 2y(y^2+2)$ m

2. a. $(16b^2-4b+1)$ m^2
b. $(10a+11)$ m

3. A **4.** D **5.** B **6.** D **7.** C

Tema 3: Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas

Recuerdo lo que sé (Página 100)

1. a. $0{,}125 + x + 0{,}75 = 1$, en esta ecuación se suman todas las expresiones que representan cada metal de la aleación para igualar a 1.
b. $\{x \in \mathbb{Q} / 0 \leq x < 0{,}75\}$

Diseño mi estrategia (Página 101)

2. La estrategia es plantear una ecuación, $0{,}2 + y + 0{,}75 = 1$; luego se necesitan 0,05 kg de plata fina.
b. $x + y + 0{,}75 = 1$

Página 102

- $2x + 2y = 270$
- Son infinitos los valores para x e y, por ejemplo $x = 10$ cm, $y = 125$ cm o $x = 60$, $y = 75$

Página 104

1. a. $y = -3x + 5$
b. $y = -2x - 7$
c. $y = -2x - 3$
d. $y = -\frac{x}{3}$
e. $y = 2x - 16$
f. $y = -2{,}4x + 2{,}4$

2.

a.

x	y	(x, y)
-2	$\frac{14}{5}$	$\left(-2, -\frac{14}{5}\right)$
$\frac{1}{4}$	-1	$\left(\frac{1}{4}, -1\right)$
$\frac{3}{2}$	0	$\left(\frac{3}{2}, 0\right)$
1	$-\frac{2}{5}$	$\left(1, -\frac{2}{5}\right)$
$\frac{21}{4}$	3	$\left(\frac{21}{4}, 3\right)$
4,2	2,16	(4, 2; 2, 16)

b.

x	y	(x, y)
2	-1	$(2, -1)$
$\frac{7}{2}$	-2	$\left(\frac{7}{2}, -2\right)$
$\frac{1}{2}$	0	$\left(\frac{1}{2}, 0\right)$
3	$-\frac{5}{3}$	$\left(3, -\frac{5}{3}\right)$
7	$-\frac{13}{3}$	$\left(7, -\frac{13}{3}\right)$
$-4{,}75$	3,5	$(-4{,}75; 3{,}5)$

c.

x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
$\frac{16}{7}$	-2	$\left(\frac{16}{7}, -2\right)$
0,5	$-\frac{7}{16}$	$\left(0{,}5, -\frac{7}{16}\right)$
$\frac{76}{7}$	$-9{,}5$	$\left(\frac{76}{7}, -9{,}5\right)$
10	$-\frac{35}{4}$	$\left(10, -\frac{35}{4}\right)$
$-\frac{8}{7}$	1	$\left(-\frac{8}{7}, 1\right)$

3. Respuesta variada.
a. (0, 6) ; (1, 4) ; (–3, 12) ; (4, –2) ; (–2, 10)
b. (0, 7) ; (7, 0) ; (–1, 8); (3, 4) ; (2, 5)
c. (0, –11); (1, –4) ; $\left(\frac{11}{7}, 0\right)$; (2, 3) ; (–1, –18)
d. (–3, 14); (6, 20); (–9, 10); (0, 16); (–24, 0)
e. (0, –7) ; (14, 0); (6, –4); (-6, –10); (8, –3)
f. (0, 0); (5, –18); (10, –36); $\left(1, \frac{18}{5}\right)$; $\left(-1, \frac{18}{5}\right)$

4. a. $3x + y = 925$
b. La masa de una sandía es 550 g.

Página 105

5. a. Al eje X en (–3, 0) y al eje Y (0, –1)
b. $x + 3y = -3$, $y = -\frac{x}{3} - 1$
c. La ecuación tiene infinitas soluciones, por ejemplo: (–6, 1); (–3, 0); (0, –1); (3, –2).

6. a. $x + y = 50$

x: número 1	y: número 2
25	25
0	50
2	48
20	30

b. $x + 2y = 8$

x: número 1	y: número 2
0	4
–2	5
2	3
4	2

c. $x - y = 15$

x: número 1	y: número 2
20	5
0	–15
10	–5
3	–12

d. $x + y = 30$

x: largo	y: ancho
18	12
20,5	9,5
16	14
29,5	0,5

e. $x + y = 180°$

x: ángulo 1	y: ángulo 2
90	90
0	180
30	150
42	138

Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas. (Página 106)

- Sí es correcto, ya que debe cumplir ambas condiciones a la vez.

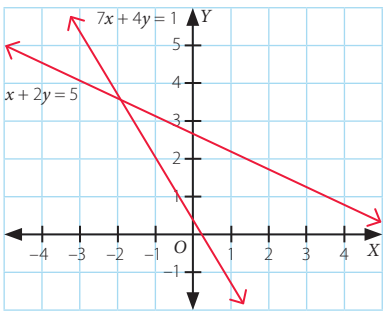
$y = -x + 66$		
x	y	(x, y)
22	44	(22, 44)
66	0	(66, 0)
4	62	(4, 62)

$y = 2x$		
x	y	(x, y)
0	0	(0, 0)
12	24	(12, 24)
22	44	(22, 44)

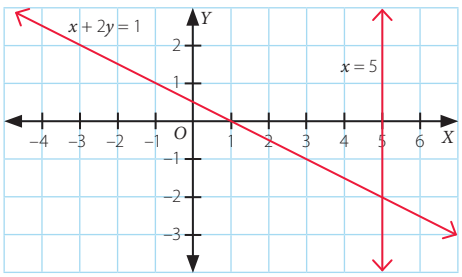
- Se repite el par ordenado (22, 44), el ancho del rectángulo es 22 cm y el largo es 44 cm.

Página 110

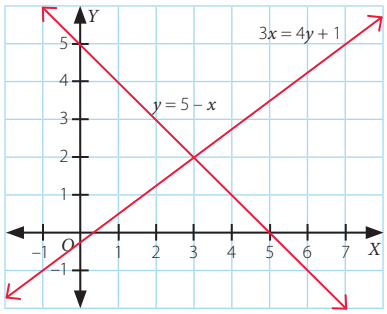
1. a.



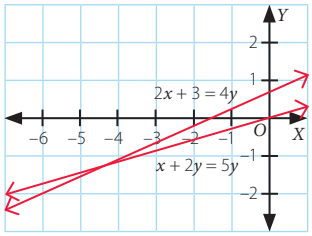
b.



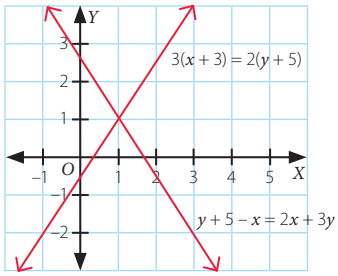
c.



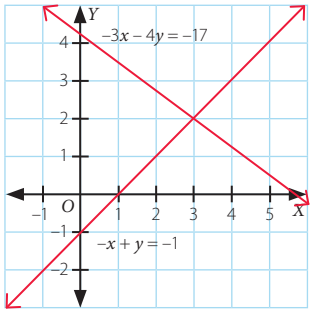
d.



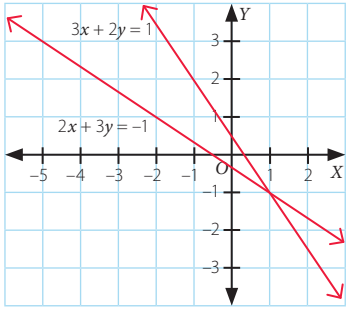
e.



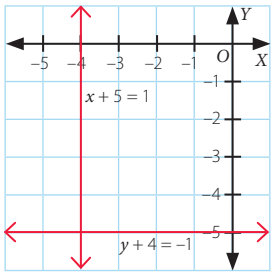
f.



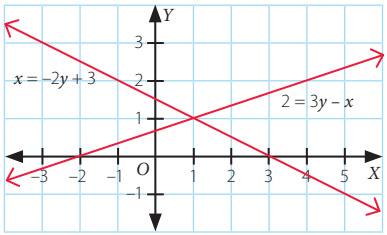
2. a. Solución $x = 1, y = -1$



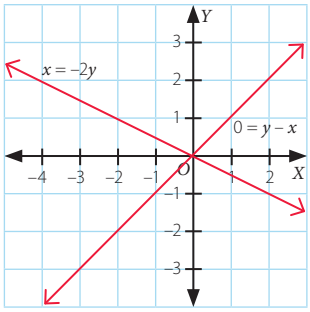
b. Solución $x = -4, y = -5$



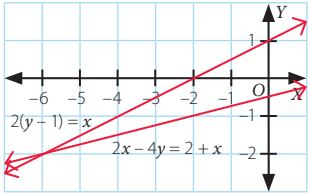
c. Solución $x = 1, y = 1$



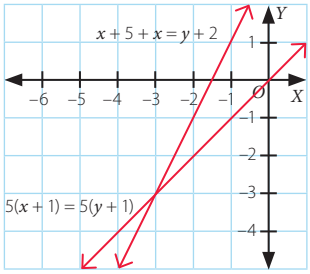
d. Solución $x = 0, y = 0$



e. Solución $x = -6, y = -2$



f. Solución $x = -3, y = -3$



3. a. $\begin{matrix} x + 2y = 0 \\ x + y = 1 \end{matrix}$ **b.** $\begin{matrix} 2x + y = -4 \\ -x + 2y = -3 \end{matrix}$

4. a. $k \neq 2$ **b.** $k \neq \frac{10}{3}$ **c.** $k \neq \frac{3}{2}$ **d.** $k \neq \frac{1}{2}$

Página 111

5. a. $\begin{matrix} x + y = 77 \\ x + 2 = 2(y + 2) \end{matrix}$ **b.** $\begin{matrix} x - y = 85 \\ x - 2y = 20 \end{matrix}$ **c.** $\begin{matrix} x - y = 20 \\ x + y = 180 \end{matrix}$ **d.** $\begin{matrix} x + y = 61 \\ -x + y = 11 \end{matrix}$ **e.** $\begin{matrix} x + y = 250\,000 \\ x - y = 70\,000 \end{matrix}$

6. a. Compatible

$$\begin{cases} -x + 2y = 1 \\ x + y = -1 \end{cases}$$

b. Incompatible

$$\begin{cases} x + 2y = 0 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$$

Métodos de resolución: igualación (Página 112)

- Demanda $y = \frac{x+8}{2}$, Oferta $x = \frac{5x+12}{6}$

$\frac{x+8}{2} = \frac{5x+12}{6}$

$\frac{6}{2}(x+8) = (5x+12)$

$3x + 24 = 5x + 12$ El punto de equilibrio es (6, 7).

$12 = 2x$

$6 = x$

luego, $y = 7$

Herramientas tecnológicas (Página 117)

a. $x = \frac{49}{92}$ $y = \frac{77}{92}$

b. $x \approx -2{,}98667$ $y \approx 9{,}73333$

c. $x \approx -0{,}53664$ $y \approx 1{,}06284$

Página 118

1. a. $x = 8$ $y = \frac{21}{2}$

b. $x = -11$ $y = \frac{-23}{2}$

c. $x = -\frac{129}{55}$ $y = -\frac{16}{11}$

d. $x = \frac{89}{45}$ $y = \frac{14}{45}$

e. No tiene solución.

f. $x = 2$ $y = 8$

g. $x = -\frac{43}{46}$ $y = \frac{5}{46}$

h. $x = -\frac{1}{7}$ $y = -\frac{16}{35}$

i. $x = -5$ $y = 30$

2. a. Cubo 1 kg y el cilindro 2 kg.

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ 5x - 4y = -3 \end{cases}$$

b. Cubo 1,5 kg y el cilindro 0,75 kg.

$$\begin{cases} 3x - 8y = -1{,}5 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

3. a. $A = 2, B = 4$

b. $A = \frac{23}{4}, B = \frac{27}{8}$

c. $A = 3, B = 4$

d. $A = \frac{27}{47}, B = \frac{59}{94}$

e. $A = 1, B = 1$

f. $A = 1, B = 1$

Página 119

4. $v_0 = 10$ m/s y $a = 2$ m/s^2

5. a. Los números son 196 y 70.

b. Los lados miden 25 cm, 36 cm y 36 cm.

c. Gaspar tiene 47 años y Paula 21.

d. Manuel ganó $ 75 500 y Alberto ganó $ 50 500.

e. 56 y 48 apartamentos.

6. Respuesta variada, dos problemas pueden ser:

La suma de dos números (x e y) es 8 y el resultado de multiplicar por 10 el número menor (y) aumentado en el número mayor (x) es 35, ¿cuáles son los números?

Entre Aurora (x) y Aldo (y) tienen 8 bolitas. Si se multiplica por 10 la cantidad de bolitas que tiene Aldo (y) más la cantidad de bolitas que tiene Aurora (x) se obtienen 35 bolitas, ¿cuántas bolitas tienen Aldo y Aurora?

En ambos la solución al sistema de ecuaciones es $x = 5$ e $y = 3$.

7. a.

$$\begin{cases} x - y = -1 \\ x + 5y = 8 \end{cases}$$

b. $\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right)$

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 3 (Páginas 120 y 121)

1. a. $2x + y = 790$

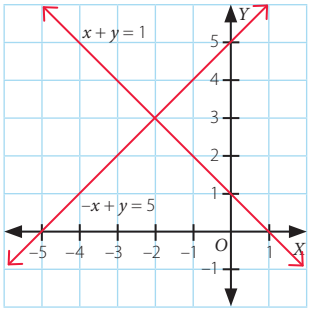
$y = -2x + 790$

b. La masa de un melón es 430 gr.

2.

$$\begin{cases} x - 2y = -6 \\ 2x + y = -2 \end{cases}$$

3.



4. a. $x = -\frac{37}{70}$ $y = -\frac{1}{70}$

b. $x = \frac{17}{38}$ $y = -\frac{20}{19}$

5. 80 litros de leche con 70 % de grasa, y 120 litros de leche con 20 % de grasa.

Tema 4: Relación entre dos variables

Recuerdo lo que sé (Página 122)

1. a. Eje X en (8, 0) y Eje Y en (0, 8)

b. $m = -1$; $n = 8$, m se relaciona con la pendiente de la recta y n es el punto en donde la recta interseca al eje Y.

c. $h(x) = -x + 8$; es una función afín, ya que es una recta en donde $m \neq 0$ y $n \neq 0$.

Diseño mi estrategia (Página 123)

2. a. **Respuesta** ▸ Constanza tiene la razón, ya que por tener distinta inclinación en algún momento se intersecarán.

Estrategia ▸ La estrategia es variada, a continuación se muestran dos posibles estrategias, una es prolongar las rectas y determinar que en un punto se cortan, otra es calcular la pendiente de cada recta y determinar que son distintas, por lo que no serían paralelas.

Relaciones lineales de la forma $f(x, y) = ax + by$ (Página 124)

- $m_{\overline{AB}} = -0{,}04$ $m_{\overline{CD}} = -0{,}04$
- $y = -0{,}04x + 7$
- $y = -0{,}04x + 4{,}4$, ya que tienen la misma pendiente que la recta $\overleftrightarrow{AB}$ y la recta $\overleftrightarrow{CD}$ corta al eje Y en el punto (0; 4,4)

Página 128

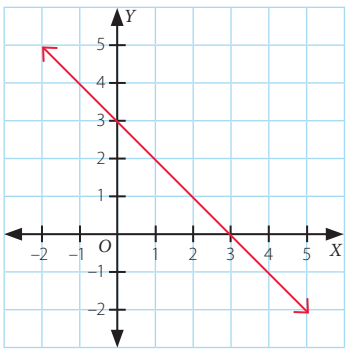
1. a.

x	y	$f(x, y) = 4x + 2y$
−3	2	−8
7	4	36
2	−5	−2

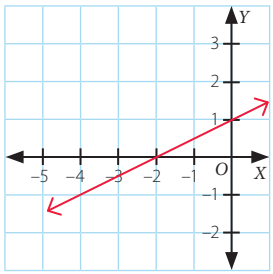
b.

x	y	$f(x, y) = -0{,}1x + 2y$
3	−0,5	−1,3
6	1,3	2
−82	−2,1	4

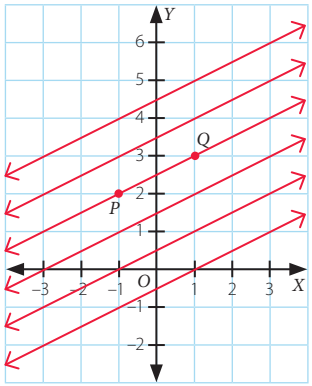
2. a.



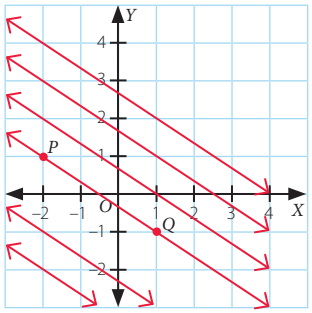
b.



3. a. La recta que pasa por los puntos $P(-1, 2)$ y $Q(1, 3)$ es: $-x + 2y = 5$. La gráfica de las rectas paralelas depende de cada estudiante, se muestran algunas a continuación.



b. La recta que pasa por los puntos $P(-2, 1)$ y $Q(1, -1)$ es: $2x + 3y = -1$. La gráfica de las rectas paralelas depende de cada estudiante, se muestran algunas a continuación.



Página 129

4. a. $f(x, y) = -3x - 2y \Rightarrow -3x - 2y = 7$

b. $f(x, y) = -4x + y \Rightarrow -4x + y = 5$

5. a. Perfil del techo A.

b. Respuesta variada, algunas respuestas pueden ser:
Mientras menor sea la pendiente el perfil del techo será más inclinado.
Mientras mayor sea la pendiente el perfil del techo será menos inclinado.

6. a. No, da como resultado 11.

b. $a = -1$ y $b = 2$

Variación de parámetros (Página 130)

a.

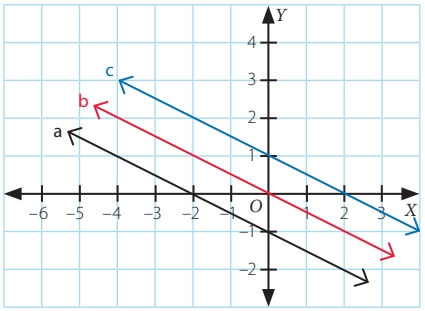
$0{,}5x + y = -1$	
x	y
−5	1,5
−2	0
0	−1
2	−2
4	−3

b.

$0{,}5x + y = 0$	
x	y
−6	3
−2	1
0	0
2	−1
4	−2

c.

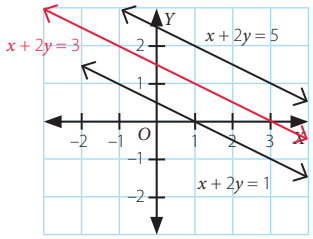
$0{,}5x + y = 1$	
x	y
−5	3,5
−2	2
2	0
2	0
4	−1



- No se intersecan, ya que son paralelas entre sí.

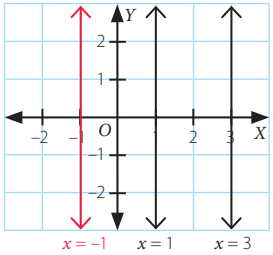
Página 132

1. a.



- a y b no varía, c sí varía.

b.



- a no varía; $b = 0$ y c sí varía.

2. a. En 3 **b.** En 1 **c.** En 4 **d.** En 2

Página 133

3. Las ecuaciones son: $y = 16$; $y = 12$; $y = 10$. El término que varía en ellas es c, $a = 0$ y $b = 1$.

4. a. En todas las rectas la pendiente es igual a −1. Son rectas paralelas.

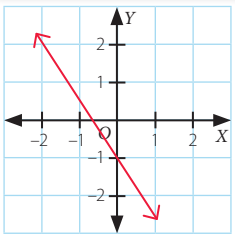
b. En este caso, al reemplazar los valores dados queda:
$0 \cdot x + 0 \cdot y = c \Rightarrow c = 0$. Por lo tanto c no puede tomar cualquier valor.

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 4 (Páginas 134 y 135)

1.

a.

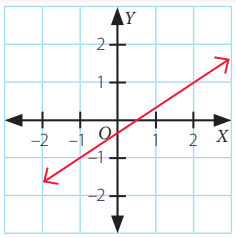
x	y	$f(x, y) = 3x + 2y$
−2	2	−2
0	−1	−2



$m = -\frac{3}{2}$

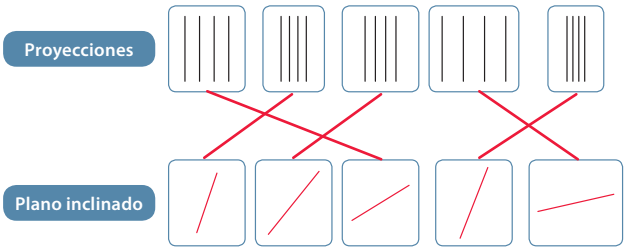
b.

x	y	$f(x, y) = -2x + 3y$
−1	−1	−1
2	1	−1



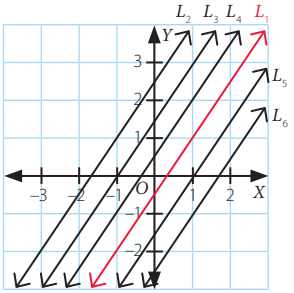
$m = \frac{2}{3}$

2.



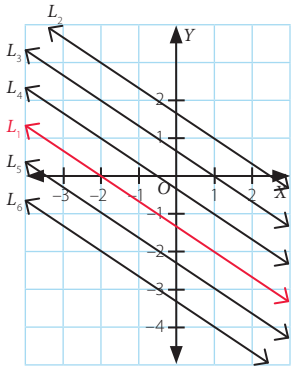
3. La gráfica depende de cada estudiante, a continuación se muestran 5 posibles rectas paralelas a la recta de color rojo.

a.



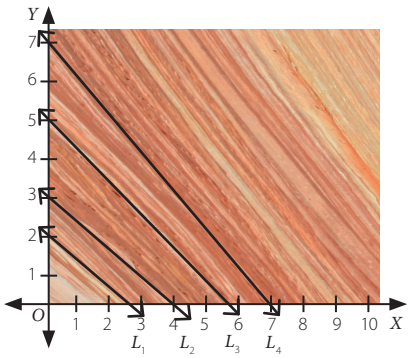
- L_1: $-3x + 2y = -1$, la función afín que se representa se relaciona con $f_1: A \to B, f_1(x) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$.
- L_2: $-3x + 2y = 5$, la función afín que se representa se relaciona con $f_2: A \to B, f_2(x) = \frac{3}{2}x + \frac{5}{2}$.
- L_3: $-3x + 2y = 3$, la función afín que se representa se relaciona con $f_3: A \to B, f_3(x) = \frac{3}{2}x + \frac{3}{2}$.
- L_4: $-3x + 2y = 1$, la función afín que se representa se relaciona con $f_4: A \to B, f_4(x) = \frac{3}{2}x + \frac{1}{2}$.
- L_5: $-3x + 2y = -3$, la función afín que se representa se relaciona con $f_5: A \to B, f_5(x) = \frac{3}{2}x - \frac{3}{2}$.
- L_6: $-3x + 2y = -5$, la función afín que se representa se relaciona con $f_6: A \to B, f_6(x) = \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}$.

b.



- L_1: $2x + 3y = -4$, la función afín que se representa se relaciona con $f_1: A \to B, f_1(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{4}{3}$.
- L_2: $2x + 3y = 5$, la función afín que se representa se relaciona con $f_2: A \to B, f_2(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$.
- L_3: $2x + 3y = 2$, la función afín que se representa se relaciona con $f_3: A \to B, f_3(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{2}{3}$.
- L_4: $2x + 3y = -1$, la función afín que se representa se relaciona con $f_4: A \to B, f_4(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{1}{3}$.
- L_5: $2x + 3y = -7$, la función afín que se representa se relaciona con $f_5: A \to B, f_5(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{7}{3}$.
- L_6: $2x + 3y = -10$, la función afín que se representa se relaciona con $f_6: A \to B, f_6(x) = -\frac{2}{3}x - \frac{10}{3}$.

4. Respuesta variada, a continuación se muestran 4 posibles rectas.



- Para L_1, asumimos que pasa por $A(0, 2)$ y $B(2{,}2; 0)$, $f(x, y) = 2x + 2{,}2y$, con $f(x, y) = 4{,}4$.
- Para L_2, asumimos que pasa por $C(0, 3)$ y $D(4, 0)$, $f(x, y) = 3x + 4y$, con $f(x, y) = 12$.
- Para L_3, asumimos que pasa por $E(0, 5)$ y $F(5{,}5, 0)$, $f(x, y) = 5x + 5{,}5y$, con $f(x, y) = 27{,}5$.
- Para L_4, asumimos que pasa por $G(0, 7)$ y $H(7, 0)$, $f(x, y) = x + y$, con $f(x, y) = 7$.

Actividades complementarias (Página 137)

1. Se requiere 4,2525π cm^3, considerando $\pi \approx 3{,}14$, se obtiene 13,35285 cm^3.
2. Se multiplica el volumen de 1 CD por 100, obteniendo 425,25π cm^3, considerando $\pi \approx 3{,}14$, se obtiene Es 1.335,285 cm^3.
3. Se obtienen esos resultados ya que ambas son equivalentes; una se encuentra sin factorizar y la otra se encuentra factorizada.

¿Qué aprendí? Evaluación final (Página 138 a la 140)

Productos notables

1. a. $A = a^2 + 2ab + b^2 = (a + b)^2$. Se suman las áreas de los rectángulos y cuadrados que se forman dentro de la figura. Esta área se relaciona con el cuadrado de binomio.

b. $A = 100 - z^2 = (10 + z) \cdot (10 - z)$. Se determinan los lados del rectángulo sombreado considerando los datos que proporciona la figura. Esta área se relaciona con la suma por diferencia.

c. $A = (x + 2y)^3 = x^3 + 6x^2y + 12xy^2 + 8y^3$. Se multiplican las medidas del largo, ancho y alto del cubo. Esta área se relaciona con el cubo de binomio.

2. a. $4x^2$; $9y^2$ **b.** $-3z$; -180 **c.** $9x^4$; $25x^2y^4$ **d.** $-25w$; 144

Factorización

3. a. $(x - 15)(x + 8)$

b. $(w^2 - 20)(w^2 + 20)$

c. $(15 - 4q)^2$

d. $(t + 4s)^2$

e. $(9a^2 - 8b^2)(9a^2 + 8b^2)$

f. $(0{,}5r - 5s)^2$

4. a. $-2\,240$ **b.** 656 100

Sistemas de ecuaciones lineales con dos incógnitas

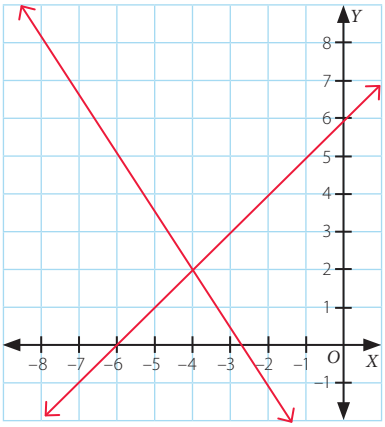
5. a. $y = -2x + 4$. Algunos pares ordenados que son solución de esta ecuación son: (0, 4); (2, 0); (1, 2); (–1, 6).

b. $y = 3x + 6$. Algunos pares ordenados que son solución de esta ecuación son: (0, 6); (–2, 0); (1, 9); (–1, 3).

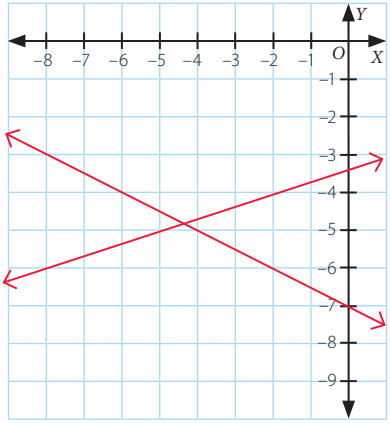
c. $y = -\frac{5}{4}x + 2$. Algunos pares ordenados que son solución de esta ecuación son: (0, 2); $\left(\frac{8}{5}, 0\right)$; (4, –3); (8, –8).

En cada recta, 'm' representa a la pendiente, y 'n' al coeficiente de posición.

6. a. La solución del sistema es: (–4, 2).



b. La solución del sistema es: $\left(-\frac{22}{5}, -\frac{24}{5}\right)$



7. Cubo 1,5 kg. y Esfera 2 kg.

8. a. Antonia tiene 10 años y Emilia 20 años.

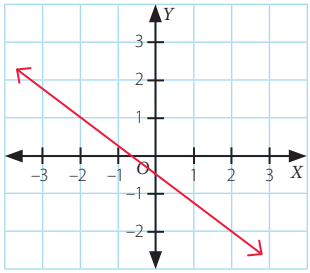
b. 12 libros que cuestan \$ 8 000 y 8 libros que cuestan \$ 12 000.

Relación entre dos variables

9.

$f(x, y) = -2$	
x	y
0	$-\frac{1}{2}$
–2	1
2	–2
1	$-\frac{5}{4}$

$m = -\frac{3}{4}$



10. La alternativa correcta es la **B**, la justificación depende de cada estudiante, a continuación se muestran 2 posibles justificaciones:

- Se le asignan valores según la condición, $ax + by = c$, con $a = -2$, $b = 0$, $c = 2$, se tiene $x = -1$, es decir se ubica al lado izquierdo del eje Y.
- Al observar el gráfico se observa que la recta es paralela al eje Y, por lo que necesariamente $b = 0$ y a, c es distinto de cero, al ubicarse a la izquierda del eje Y, debe ocurrir que $a < 0$ y $c > 0$.

Solucionario

Unidad 3: Geometría

¿Cuánto sé? Evaluación inicial (Páginas 144 y 145)

Área y perímetro del círculo

1. a. $A = 2{,}25\pi$ cm^2; $P = 3\pi$ cm
b. $A = \pi$ cm^2; $P = 2\pi$ cm
c. $A = 2{,}89\pi$ cm^2; $P = 3{,}4\pi$ cm

2. a. Se necesitaría como mínimo 100π cm^2 de papel, considerando $\pi = 3{,}14$; se necesitarían como mínimo, 314 cm^2 de papel para cubrirla.
b. $A = 144\pi$ cm^2

Teorema de Pitágoras

3. a. $m(\overline{CA}) = 13$ cm **b.** $m(\overline{DE}) = 6$ cm **c.** $m(\overline{JG}) = 12$ cm

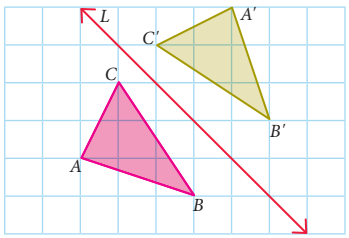
4. a. $\sqrt{34}$ m
b. La diagonal del paralelepípedo mide 13 cm.

Área y volumen de un cilindro

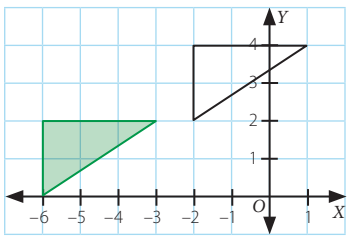
5. a. $A = 2\,731{,}8$ cm^2; $V = 9\,891$ cm^3
b. $A = 172{,}7$ cm^2; $V = 166{,}8125$ cm^3
c. $A = 942$ cm^2; $V = 2\,147{,}76$ cm^3

Transformaciones isométricas

6. a.



b.



Tema 1: Sectores y segmentos circulares

Recuerdo lo que sé (Página 146)

1. a. $m(\overline{OC}) = 1{,}2$ m Diámetro del círculo = 2,4 m
b. Sí, ya que el diámetro es la cuerda de mayor longitud.
c. $m(\measuredangle AOB) = 90°$; $m(\measuredangle AOD) = 270°$
d. 7,536 m
e. 4,5216 m^2

Diseño mi estrategia (Página 147)

2. a. El arco $\overset{\frown}{BC}$ corresponde a la cuarta parte del círculo.
b. Para calcular el área del sector del círculo relacionado con el arco $\overset{\frown}{BC}$ se puede calcular el área del círculo y luego el resultado dividirlo por 4. Para calcular el perímetro del sector del círculo relacionado con el arco $\overset{\frown}{BC}$ se puede calcular el perímetro del círculo completo, dividir el resultado por 4 y al resultado sumar 2 veces el radio.

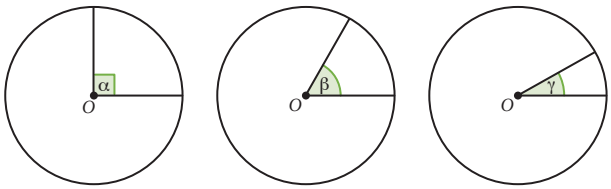
Elementos de la circunferencia y del círculo (Página 148)

- 40 cm
- 45°
- 360°. Se deben calcular las medidas de los ángulos que faltan, y luego se suman todos.

Página 150

1. a. Corona circular. **c.** Trapecio circular.
b. Segmento circular. **d.** Sector circular.

2. a. $\alpha = 90°$ **b.** $\beta = 60°$ **c.** $\gamma = 30°$



3. a. $\delta = 72°$ **b.** $\phi = 120°$ **c.** $\lambda = 40°$

4. a. Sí, ya que 90° es la cuarta parte de 360°.
b. Sí, ya que 36° es la décima parte de 360°.
c. Sí, con $\alpha = 180°$.

Página 151

5. a. 60° **b.** 30°

6. a. Corresponde a la mitad del círculo.
b. Corresponde a la doceava parte del círculo.
c. Corresponde a las tres cuartas partes del círculo.

7. a. No, ya que es la octava parte.
b. Sí, ya que 360° : 12 = 30°.

Perímetro de un sector y segmento circular (Página 152)

- 10 m
- Mitad
- La reja mide 31,4 m. Se calcula el perímetro total y se divide en 2.

Página 154

1.

Ángulo central	Parte del ángulo completo	Parte del círculo	Largo del arco con el radio r
270°	$\frac{270°}{360°}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} \cdot 2\pi r$
180°	$\frac{180°}{360°}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot 2\pi r$
90°	$\frac{90°}{360°}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot 2\pi r$
60°	$\frac{60°}{360°}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot 2\pi r$
45°	$\frac{45°}{360°}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} \cdot 2\pi r$
α	$\frac{\alpha}{360°}$	$\frac{\alpha}{360°}$	$\frac{\alpha}{360°} \cdot 2\pi r$

2. a. Corresponde a $5{,}2\overline{3}$ cm.
b. Corresponde a 3,14 cm.
c. Corresponde a 6,28 cm.

3. a. $(7\pi + 14)$ cm **b.** $\left(\frac{12}{5}\pi + 12\right)$ cm **c.** $\left(\frac{49}{6}\pi + 14\right)$ cm

Página 155

4. a. La longitud de dicho arco es aproximadamente 2,407 cm.
b. El radio de la circunferencia mide 3 cm.
c. El ángulo central de dicho arco mide 90°.

5. Ambos están en lo correcto, y el perímetro es $(6\pi + 15{,}6)$ cm.

6. a. 180°
b. 12π cm

Área de un sector y segmento circular (Página 156)

- 120°
- Se calcula el área total y se divide en 3.

Página 158

1.

Ángulo central	Parte del ángulo completo	Parte del círculo	Área del sector con el radio r
270°	$\frac{270°}{360°}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{4} \cdot \pi r^2$
180°	$\frac{180°}{360°}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \cdot \pi r^2$
120°	$\frac{120°}{360°}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3} \cdot \pi r^2$
90°	$\frac{90°}{360°}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4} \cdot \pi r^2$
60°	$\frac{60°}{360°}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6} \cdot \pi r^2$
45°	$\frac{45°}{360°}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8} \cdot \pi r^2$
α	$\frac{\alpha}{360°}$	$\frac{\alpha}{360°}$	$\frac{\alpha}{360°} \cdot \pi r^2$

2. a. Aproximadamente 25,12 cm².
b. Aproximadamente 10,902 cm².
c. Aproximadamente 2,565 cm².
d. Aproximadamente 1,841 cm².
e. Aproximadamente 9,8125 cm².
f. Aproximadamente 37,68 cm².

Página 159

3. a. Ya que el triángulo es equilátero, el ángulo central mide 120°, es decir, el área del sector circular corresponde a la tercera parte del círculo de centro O. Por lo tanto el área del sector circular corresponde a $\frac{\pi r^2}{3}$.

b. El polígono inscrito corresponde a un cuadrado, por lo que el ángulo del centro mide 90° lo cual corresponde a la cuarta parte del círculo de centro O, entonces el área del segmento circular corresponde a calcular:

Área sector circular − Área del triángulo $= \frac{\pi r^2}{4} - \frac{r^2}{2}$.

c. El hexágono que se encuentra inscrito es regular, por lo que el ángulo del centro mide 60°, es decir, corresponde a la sexta parte, entonces el área del segmento circular corresponde a calcular:

Área sector circular − Área del triángulo $= \frac{\pi r^2}{6} - \frac{r^2\sqrt{3}}{4}$.

4. No es correcto, el error está en que en las 3 caras laterales solo 2 son rectángulos congruentes de medidas 7 cm y 10 cm y la otra parte corresponde al manto del cilindro cuya área es de 35π cm². Por lo tanto, la superficie del trozo es $(140 + 85\pi)$ cm².

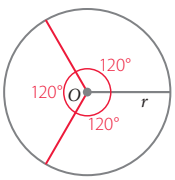
¿Cómo voy? Evaluación de proceso 1 (Páginas 160 y 161)

1. a. El perímetro corresponde a $\left(33 + \frac{45\pi}{4}\right)$ m y el área corresponde a $\left(\frac{1\,215\pi}{8} - \frac{35\,343}{100}\right)$ m².

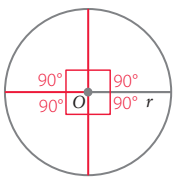
b. El perímetro corresponde a $\left(28 + \frac{49}{18}\pi\right)$ m y el área corresponde a $\frac{343}{18}\pi$ m².

c. El perímetro corresponde a $\left(26 + \frac{287}{36}\pi\right)$ m y el área corresponde a $\frac{3\,731}{72}\pi$ m².

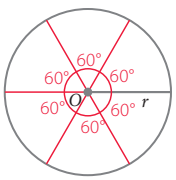
2. a. Cada ángulo del centro mide 120°.



b. Cada ángulo del centro mide 90°.



c. Cada ángulo del centro mide 60°.



d. Respuesta variada, algunas pueden ser: Depende del ángulo del centro qué parte del perímetro o área se considera para cada sector circular. En el cálculo del área del sector circular, $\pi \cdot r^2$ se debe multiplicar por el valor de la razón entre el ángulo del centro y 360°.
En el cálculo del perímetro, a la suma de los radios se debe sumar el del arco, que se calcula como $2 \cdot \pi \cdot r$, multiplicado por el valor de la razón entre α y 360°.

Tema 2: Área y volumen del cono

Recuerdo lo que sé (Página 162)

1. a. Radio de la base = 15 cm Altura del cilindro = 45 cm
b. Son necesarios la medida del radio de la base y altura del cilindro.
c. $A_{\text{cilindro}} = 1\,800\pi$ cm²
d. $V_{\text{cilindro}} = 10\,125\pi$ cm³

Diseño mi estrategia (Página 163)

2. a. Sí, es posible construir una red de cuerpo geométrico que las represente, y para ello se necesita conocer la medida del radio de la base, la medida de la generatriz, y la medida del ángulo del sector circular.
b. Se necesita calcular el volumen y se calcula: Área de la base por su altura, y dicho producto dividido en 3.

3. Cilindro, si el volumen del cono es la 3° parte.

Área de un cono (Página 164)

- Se relaciona con el radio de la base del cono.
- Es el perímetro de la base del cono, que es una circunferencia.

Página 166

1. a. 1 884 cm² **b.** 678,24 cm² **c.** 301,44 cm²

2.

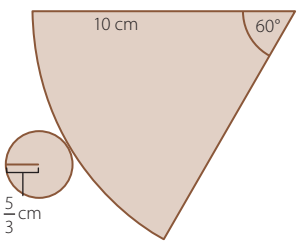
Radio (r)	Generatriz (g)	Área del cono ($A = \pi r(r + g)$)
5 cm	7 cm	60π cm²
7 cm	8 cm	105π cm²
8 cm	15 cm	184π cm²
12 cm	20 cm	384π cm²
10 cm	15 cm	250π cm²

3. a. Con el perímetro.
b. 12π cm²
c. Con el manto
d. 2 cm
e. 16π cm²

Página 167

4. a. $\frac{50}{3}\pi$ cm² **b.** $\frac{5}{3}$ cm **c.** $\frac{25}{9}\pi$ cm² **d.** $\frac{175}{9}\pi$ cm²

e.



5. a. 4,5 cm **b.** $\frac{\sqrt{145}}{2}$ cm
c. Sandra se encuentra en la razón ya que se necesitan aproximadamente 85,06 m².

6. a. Aproximadamente 257,1° **b.** $\sqrt{24}$ cm
c. No, ya que en un cono recto la generatriz debe ser mayor al radio.

Volumen de un cono (Página 168)

- Con 3 conos.
- Se puede afirmar que es la tercera parte. Se puede calcular con la fórmula $V = \frac{\text{Volumen cilindro}}{3}$.

Página 170

1. a. $\frac{1}{3}$ del volumen del cilindro.
b. 432π cm³, se divide por 3 el volumen del cilindro.

2. a. 80π cm³ **c.** $37{,}5\pi$ cm³ **e.** 100π cm³
b. $\frac{6\,321\pi}{8}$ cm³ **d.** $\frac{2\,009\pi}{60}$ cm³ **f.** $\frac{6\,727\pi}{150}$ cm³

3. a. La expresión que corresponde al volumen del cono es $V = \frac{2\pi r^2 h}{3}$.
b. El volumen disminuye en un 50 %.
c. No. El volumen del cono es $\frac{\pi r^2 h}{3}$, con los valores aumentados corresponde a $9\pi r^2 h$, es decir, aumenta 27 veces.

Página 171

4. a. El volumen es 125π cm^3, considerando $\pi \approx 3{,}14$, se tiene que se pueden verter 292,5 cm^3.
b. La altura de la carpa es 1,75 m.
c. Puede llenar 9 copas.

5. a. No, porque no es un cono de radio r.
b. $V_{cono} = 144\pi$ cm^3, $V_{cono\ truncado} = \frac{320}{3}\pi$ cm, disminuye en un $25,\overline{925}$%.

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 2 (Páginas 172 y 173)

1. a. El volumen es 300π cm^3, considerando $\pi \approx 3{,}14$ corresponde a 942 cm^3.
b. El volumen es 100π cm^3, considerando $\pi \approx 3{,}14$ es 314 cm^2.
c. $V_{cono} = \frac{\text{Volumen del cilindro}}{3} = \frac{\pi r^2 h}{3}$

2. 384π cm^2

3. a. $A = 200\pi$ cm^2
$V = 320\pi$ cm^3
b. $A = 810\pi$ cm^2
$V = 2\,700\pi$ cm^3

4. a. El área es 98,3448 cm^2.
b. El volumen es: 94,2 cm^3

Tema 3: Homotecia y teorema de Tales

Recuerdo lo que sé (Página 174)

1. a. $\frac{10\text{ cm}}{5\text{ cm}} = 2$, $\frac{5\text{ cm}}{10\text{ cm}} = 0{,}5$
b. Largo 20 cm, ancho 10 cm.
c. No es proporcional, la otra medida debe ser 50 cm.

Diseño mi estrategia (Página 175)

2. a. El valor de la razón se mantiene.
b. 12 cm, ya que $\frac{m(\overline{OB})}{\text{ancho foto 2}} = \frac{m(\overline{OA})}{\text{ancho foto 1}}$.

Homotecia (Página 176)

- OA' = Distancia entre la cámara y la parte más alta del globo.
  OB' = Distancia entre la cámara y la base del globo.
- $\frac{OA'}{OA} = \frac{20}{0{,}1} = 200$ $\quad$ $\frac{OB'}{OB} = \frac{20}{0{,}1} = 200$
- $\frac{OA'}{OA} = \frac{OB'}{OB}$

Página 180

1. a.
- 3 : 2
- 2,5 cm.
- 3,3 cm.
- 72°

b.
- −5 : 2
- 16,6 cm.
- 15 cm.
- 70°

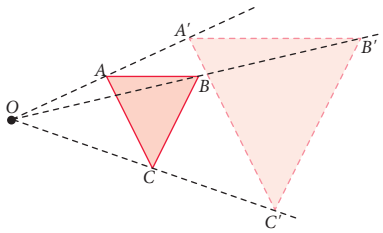
c. Los ángulos internos de la figura original y de la homotética son congruentes.
La homotecia en **a.** es directa y la realizada en **b.** es inversa.

2. a. Homotecia inversa.
b. −0,25
c. 2,5 cm.
d. 17,7 cm.

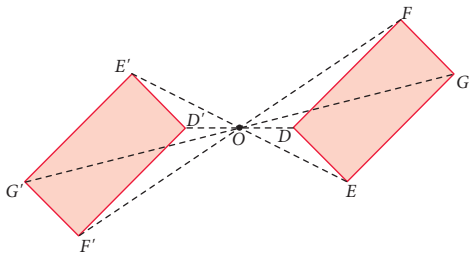
3. a. F
b. V

Página 181

4. a.



b.



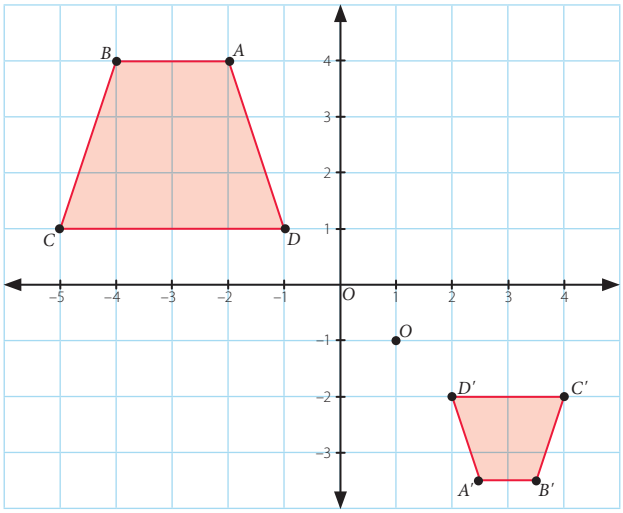
5. a. La pupila es el centro de homotecia, ya que por ahí entra la luz reflejada por los objetos.
b. Negativo, ya que el centro de homotecia se encuentra entre el objeto y la imagen.
c. 2,5 cm.

6. a. Los segmentos que demarcan la orilla del camino y la línea central.
b. Dibujo queda a cargo del estudiante.

Homotecia de forma vectorial (Página 182)

- $2\vec{v} = (4, 2)$ $\quad$ $2\vec{w} = (4, 6)$
- Con el gráfico 2, pues los vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ se hallan correctamente representados.

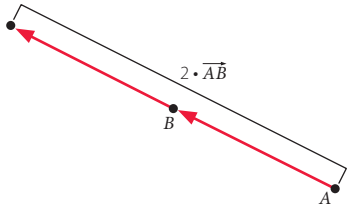
Herramientas tecnológicas (Página 185)



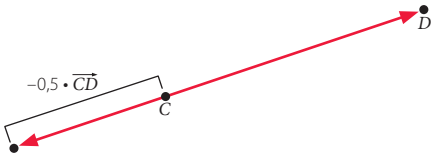
$A'(2{,}5; -3{,}5)$, $B'(3{,}5; -3{,}5)$, $C'(4, -2)$, $D'(2, -2)$

Página 186

1. a. Como el escalar es mayor a cero, se mantiene la dirección y sentido, por lo que con una regla se traza un segmento de línea en sentido del vector. Con un compás, se replica la medida de $\overrightarrow{AB}$ para obtener $2\overrightarrow{AB}$.

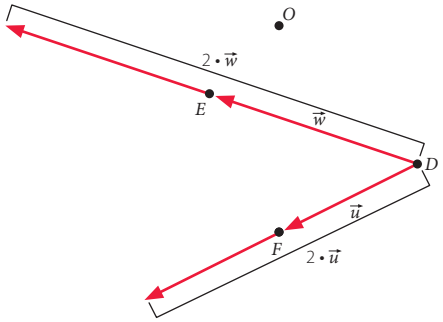


b. Como el escalar es menor que cero, con una regla se traza un segmento de línea en sentido contrario del vector. Con un compás, se mide la amplitud de $\overrightarrow{CD}$ y se replica la mitad de este



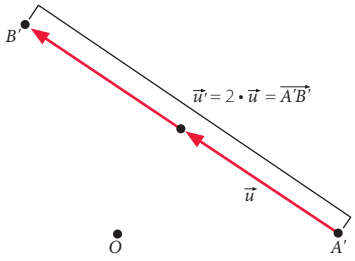
2. a. $\vec{u} = \overrightarrow{DF}$ $\vec{w} = \overrightarrow{DE}$

b.

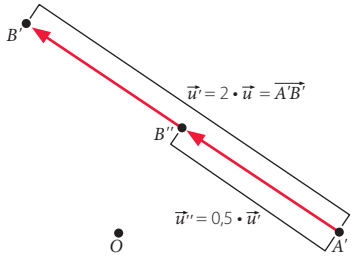


c. Se concluye que $\vec{u}' = 2\vec{u}$ y que $\vec{w}' = 2\vec{w}$.

3. a.



b.



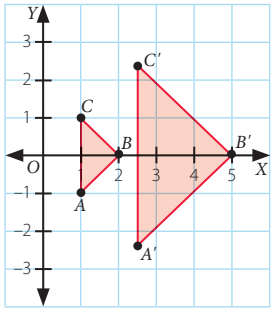
c. Corresponden a los mismos puntos y vectores que se tenían en un inicio.

Página 187

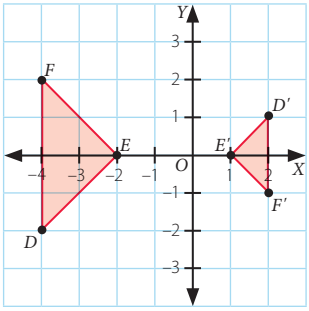
4. a. El signo es negativo.

b. 0,025 cm = 0,25 mm

5. a.



b.



6. a. (0, 4)

b. $k = -2$

Teorema de Tales (Página 188)

- 1 : 1 1 : 2
- $FD = (40 + x)$ cm.
- $x = 40$ cm. Para que las igualdades entre las razones constituyan una proporción, es necesario que las rectas sean paralelas.

Página 192

1. a. $x = 5$ cm.

b. $BC = 2$ cm.

c. $DF = 10{,}5$ cm.

d. $EF = \frac{35}{3}$ cm.

2. a. $\frac{AC'}{AC} = \frac{3}{2}$

b. Que las rectas son paralelas.

c. Con el teorema particular de Tales, ya que se tiene $\overleftrightarrow{BC} \parallel \overleftrightarrow{B'C'}$.

Página 193

3. Actividad a cargo del estudiante, se espera que lo relacionen con el teorema de Tales.

4. a. El edificio mide 16 m.

b. La altura de la torre es $\frac{300}{37}$ m.

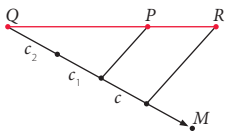
División proporcional de trazos (Página 194)

- - Falso, ya que $\frac{QP}{PR} = \frac{3}{12} = 0{,}25$.
- - Falso, ya que $\frac{QP}{QR} = \frac{3}{15} = 0{,}2$.

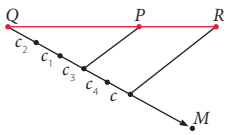
Página 196

1. a. $\frac{1}{5}$ **b.** $\frac{5}{2}$ **c.** $\frac{11}{3}$ **d.** $\frac{1}{5}$

2. a.



b.



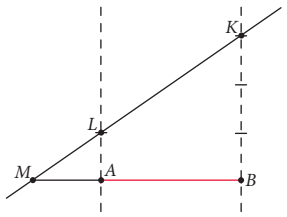
Página 197

3. a. $QP = 36$ cm; $SP = 81$ cm

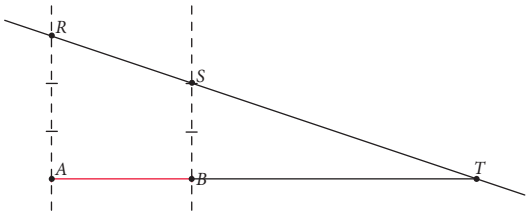
b. $QP = 90$ cm; $PS = 60$ cm

c. $r = \frac{3}{10}$

4. a.



b.



¿Cómo voy? Evaluación de proceso 3 (Páginas 198 y 199)

1. a. El centro de homotecia sería A, pues es un punto compartido entre el triángulo imagen y el original.

b. De A al trabajo son $\frac{5}{3}$ km.; de la casa hasta B son 4,5 Km.

2. C **3.** D **4.** B

Tema 4: Semejanza

Recuerdo lo que sé (Página 200)

1. a. Quiere decir que 1 cm en el mapa equivale a 500 cm en la realidad.

b. Debería caminar 10 000 cm, es decir, 100 metros.

c. 32 000 cm, 320 m o 0,32 km. La distancia en el mapa es 12.000 cm.

Diseño mi estrategia (Página 201)

2. a. Sí, ya que sus medidas son proporcionales en razón de 2 : 1. Las medidas de la fotografía grande son 6 cm de largo y 4 cm de ancho, mientras que la fotografía más pequeña mide 3 cm de largo y 2 cm de ancho.

Semejanza de figuras (Página 202)

- 8 cm, ya que debe cumplirse la proporcionalidad entre sus lados.

Página 204

1. a. Los trapecios son semejantes ya que tienen sus ángulos correspondientes congruentes y sus lados correspondientes proporcionales a razón de 2 : 1.

b. No, ya que sus lados correspondientes no son proporcionales.

2. a. $FE = \frac{15}{2}$ cm

b. $SD = \frac{41}{15}$ cm $\quad ND = 3$ cm

3. a. No, ya que sus lados correspondientes no son proporcionales.

b. Sí, ya que sus medidas se obtienen a través de una amplificación de la medida de los lados originales, por lo tanto sus lados correspondientes serán proporcionales.

Página 205

4. a. Sí, sus ángulos correspondientes son proporcionales y sus lados correspondientes estarán en una razón determinada.

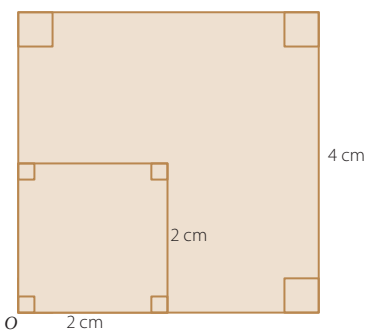
b. La intersección de las diagonales del centro del cuadrado $ABCD$.

c. El valor de la razón de homotecia es 2,1. Para calcular el valor de la razón de homotecia respecto a los otros cuadrados, considerando como O la intersección de las diagonales, se puede calcular la distancia desde O a uno de los vértices de los otros cuadrados y esa medida dividirla por la medida desde O hasta uno de los vértices del cuadrado $ABCD$.

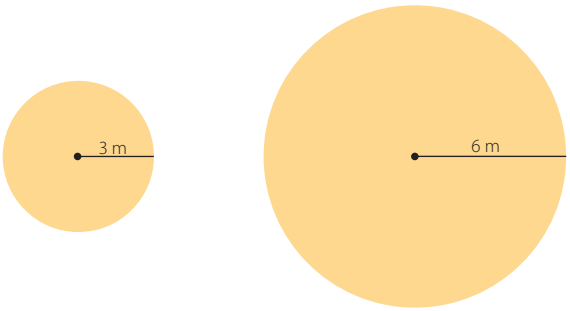
d. El dibujo del siguiente cuadrado exterior queda a cargo del estudiante. La explicación depende del valor de la razón considerado.

5. a. Razón = 2 : 1

b.



6. Dibujo a cargo del estudiante, los radios deben ser 3 m y 6 m.



Criterios de semejanza (Página 206)

- Sí, son proporcionales ya que al calcular el valor de la razón entre las medidas dadas correspondientes se tiene: $\frac{1,65}{2}$ y $\frac{1,98}{2,4} = 0,825$.
- Sin utilizar el teorema de Pitágoras se necesita saber la distancia entre B y C.

Página 208

1. a. LLL, pues $\frac{4}{2} = \frac{5}{2,5} = \frac{6}{3}$.

b. LAL, pues $\frac{12}{6}$ y $\frac{16}{8}$ y $\measuredangle PQN \cong \measuredangle RQS$ ya que son opuestos por el vértice.

c. LLL o LAL, obteniendo el lado que falta por medio del Teorema de Pitágoras.

d. AA, ángulo recto y ángulos opuestos por el vértice, $\measuredangle PRQ$ y $\measuredangle TRS$.

2. a. $x = 4$ cm; $y = 12$ cm.

b. $x = 3$ cm; $y = 8$ cm.

3. Medida de $\overline{EF}$ es 4 cm y la medida de $\overline{DF}$ es 5 cm.

Página 209

4. a. La altura del edificio es 7,2 m.

b. La altura del árbol es 3 m.

c. Se tiene que $\measuredangle CBA \cong \measuredangle FDC$ pues ambos son rectos. Además como

- $m(\measuredangle FCA) = 90°$, entonces $\measuredangle ACB \cong \measuredangle CFD$. Luego por AA, se tiene que $\Delta ABC \sim \Delta FDC$. La medida de m es 30 cm y la de n es 60 cm.

Teoremas de Euclides (Página 210)

- Sí, es correcto, la medida de p es igual a la medida de q.
- Área cuadrado verde es p^2; Área cuadrado rojo es $h \cdot q$.
- $p^2 = h \cdot q$, ya que los dos cuadrados son congruentes.

Página 212

1. a. $AD = \frac{49}{16}$ cm

b. $HF = \frac{16}{5}$ cm

2. a. $c = 32$ cm

b. $q = \frac{81}{4}$ cm

c. $b = \sqrt{150}$ cm

c. $AM = 6$ cm

d. $p = \frac{27}{5}$ cm $\quad q = \frac{48}{5}$ cm $\quad h = \frac{36}{5}$ cm

d. $p = \frac{16}{5}$ cm, $q = \frac{9}{5}$ cm, $h = \frac{12}{5}$ cm

e. $a = 12$ cm, $b = 5$ cm, $c = 13$ cm

f. $p = \frac{225}{17}$ cm, $q = \frac{64}{17}$ cm, $h = \frac{120}{17}$ cm

Página 213

3. a. $a = \sqrt{25,5}$ cm, $b = \frac{9\sqrt{25,5}}{17}$ cm

b. $AB = \frac{81}{4}$ cm y $BC = 4$ cm

4. a. Ya que $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ por el cumplimiento del criterio AA, se tiene que: $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Leftrightarrow \frac{c}{b} = \frac{b}{q}$, de donde se obtiene que $b^2 = c \cdot q$.

b. Ya que $\Delta CDA \sim \Delta BDC$ por el cumplimiento del criterio AA, se tiene que: $\frac{CD}{DA} = \frac{BD}{DC} \Leftrightarrow \frac{h}{q} = \frac{p}{h}$, de donde se obtiene que $h^2 = p \cdot q$.

c. Ya que $\Delta ABC \sim \Delta ACD$ por el cumplimiento del criterio AA, se tiene que: $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CD} \Leftrightarrow \frac{c}{a} = \frac{b}{h_c}$, de donde se obtiene que $a \cdot b = c \cdot h$.

d. Ya que $a \cdot b = c \cdot h \Rightarrow \frac{a \cdot b}{h} = c \Rightarrow \frac{1}{h_c} = \frac{c}{a \cdot b}$, si se eleva al cuadrado la expresión se obtiene: $\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{a^2 \cdot b^2}$, luego como $c^2 = a^2 + b^2$ la igualdad queda como: $\frac{1}{h^2} = \frac{a^2 + b^2}{a^2 \cdot b^2}$, de donde se obtiene: $\frac{1}{h^2} = \frac{a^2}{a^2 \cdot b^2} + \frac{b^2}{a^2 \cdot b^2} \Rightarrow \frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

5. Melissa tiene la razón, ya que efectivamente el ΔACD no es rectángulo, porque no se cumple el teorema de Pitágoras, es decir, $6^2 + 17^2 \neq 25^2$.

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 4 (Páginas 214 y 215)

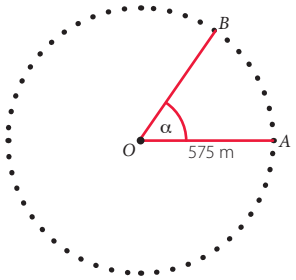
1. a. El largo original es de 150 cm.
b. 7 : 25, se establece la razón entre la medida del ancho de la pintura original y con la medida de la recreación.
c. Respuesta variada, algunas son: Largo = 84 cm, ancho = 42 cm, se obtienen multiplicando por 2 las medidas del recuadro.
Largo = 126 cm, ancho = 63 cm, se obtienen multiplicando por 3 las medidas del recuadro.

2. La altura del faro es de 24 metros.

3. La altura máxima del camión es de $\sqrt{10}$ metros.

Actividades complementarias (Página 217)

1.



2. Perímetro del sector circular es $\left(1\,150 + \frac{1\,150\,\pi\alpha}{360°}\right)$ m.
Área del sector circular es $\frac{330\,625\,\pi\alpha}{360°}$ m^2.

3. Si el ángulo del centro mide 45°, se tiene:
Perímetro del sector circular es $\left(1\,150 + \frac{575\,\pi}{4}\right)$ m.
Área del sector circular es $\frac{330\,625\,\pi}{8}$ m^2.

4. Medida arco $\widehat{AB} = \frac{575\,\pi}{4}$ m, Medida arco $\widehat{BA} = \frac{4\,025\,\pi}{4}$ m.

¿Qué aprendí? Evaluación final (Páginas 218 a la 220)

Sectores y segmentos circulares.

1. a. $\frac{1}{6}$ **b.** $\frac{3}{4}$ **c.** $\frac{1}{3}$

2. a. π cm^2 **b.** $(\pi + 4)$ cm **c.** $(\pi - 2)$ cm^2 **d.** $(\pi + \sqrt{8})$ cm

Área y volumen del cono

3. a. Tienen forma de cono.
b. Tiene una capacidad de 80π cm^3.
c. Uso $4\sqrt{241}\pi$ cm^3 de cartón.
d. No, pues la capacidad es lo que logra contener el envase, independiente de que tenga tapa o no.
e. Sí, se necesitaría más cartón, pues se amplía la superficie.

4. a. Escoge la copa de diámetro 6 cm. y altura 7 cm.
b. $ 900

Homotecia y teorema de Tales

5. $\frac{AC}{CD} = \frac{BF}{FE}$ $\frac{AD}{AC} = \frac{BE}{BF}$ $\frac{AD}{CD} = \frac{BE}{FE}$

6. a. $x = 5$ cm, $y = \frac{20}{7}$ cm.
b. $x = 8$ cm

7. a. $k = 2$
b. $k = -2$
c. $k = \frac{1}{2}$

8. a. F
b. V
c. V

Semejanza

9. a. 5 cm de largo y 4 cm de ancho.
b. 500 cm de largo y 400 cm de ancho, o en forma equivalente, 5 m de largo y 4 m de ancho.
c. 20 m^2
d. Las medidas de la cocina en el mapa son de 5 cm de largo por 3 cm de ancho, que en la realidad expresada en metros corresponde a 5 m de largo y 3 m de ancho, lo que hace un área de 15 m^2. Por lo que necesitará $ 22 500.

10. a. $\Delta ABC \sim \Delta ACD$, pues $\measuredangle ACB \cong \measuredangle CDA$ y $\measuredangle BAC \cong \measuredangle DAC$, y con ello se cumple el criterio AA. De igual manera, por el cumplimiento de AA, se tiene que $\Delta ABC \sim \Delta CBD$.
b. $\frac{AB}{AC} = \frac{BC}{CD} = \frac{AC}{AD}$
c. Como $\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{b}{q} \Rightarrow b^2 = c \cdot q$.

Solucionario

Unidad 4: Probabilidad y estadística

¿Cuánto sé? Evaluación inicial (Páginas 224 y 225)

Medidas de tendencia central y posición

1. a. $\bar{x} = 29 \quad M_O = 22 \quad M_e = 26$

Interpretación:

- Si todos los niños hubieran obtenido el mismo puntaje, este sería de 29 puntos.
- El puntaje con mayor frecuencia es 22 puntos.
- Bajo los 26 puntos se encuentra el 50 % de los puntajes que se obtuvieron.

b. 2

c. 38

d. $Q_1 = 22 \quad Q_2 = 26 \quad Q_3 = 30$

Interpretación:

- Bajo los 22 puntos se encuentra el 25% de los datos.
- Bajo los 26 puntos se encuentra el 50% de los datos.
- Bajo los 30 puntos se encuentra el 75% de los datos.

Probabilidad de un evento

2. a. $\Omega = \begin{Bmatrix} (c, c, c, c), (c, c, c, s), (c, c, s, c), (c, s, c, c) \\ (s, c, c, c), (s, s, c, c), (s, c, s, c), (s, c, c, s) \\ (c, c, s, s), (c, s, c, s), (c, s, s, c), (s, s, c, c) \\ (s, s, c, s), (s, c, s, s), (c, s, s, s), (s, s, s, s) \end{Bmatrix}$

b. $\frac{1}{16}$ **c.** $\frac{15}{16}$

Tema 1 : Comparación de muestras

Recuerdo lo que sé (Página 226)

1. a. Hombres: 61 – 60 – 61 – 61 – 62 – 62 – 63 – 62,5 – 61,5 – 64
Mujeres: 62 – 63 – 62 – 64 – 65 – 64 – 64 – 65 – 66 – 67

b. Con mayor pulso mujer y menor pulso hombre.

c.

	Hombres	Mujeres
$\bar{x}$	61,8	64,2
M_e	62	64
M_O	61	64

En promedio las mujeres tienen un mayor pulso que los hombres, esto se refleja en las 3 medidas de tendencia central.

Interpretación:

- Si todas las mujeres escogidas tuvieran el mismo pulso, este sería de 64,2. Asimismo, si todos los hombres tuvieran el mismo pulso, este sería de 61,83.
- Bajo un pulso de 64 se encuentra el 50 % de las mujeres, y bajo un pulso de 62 el 50 % de los hombres.
- El pulso con mayor frecuencia en las mujeres es de 64, y en los hombres de 61.

Diseño mi estrategia (Página 227)

2. a. Mientras más años tiene la persona, mayor es el pulso. Los hombres de menor edad presentan el menor pulso, mientras que el mayor pulso lo presentan las mujeres mayores de 60 años.

b. En general sí, en ambos casos se observa que a medida que las personas tienen más edad su pulso es más alto. Sin embargo, el de la mujer siempre es más alto que el del hombre.

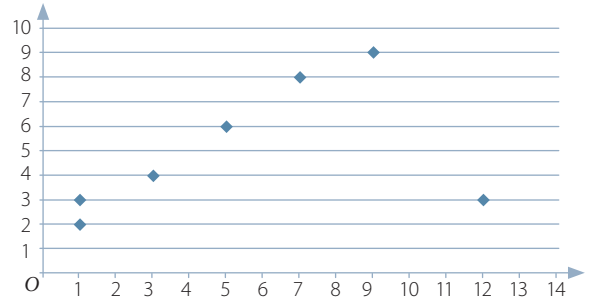
c. Para una persona de 63 años, se podría calcular el promedio entre el pulso habitual de una persona de 60 y otra de 65 años, y para la persona de 42 años calcular el promedio entre el pulso habitual de una persona de 40 y otra de 45 años.(Resultados aproximados)

Relación entre dos variables cuantitativas (Página 228)

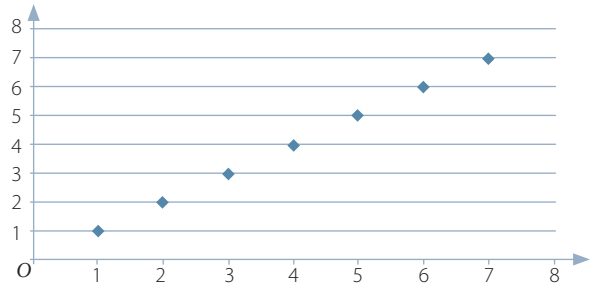
- La mayoría están agrupadas en la punta de la hoja.
- En la punta de la hoja.
- No, solo predecir basándose en el comportamiento de las demás.

Página 232

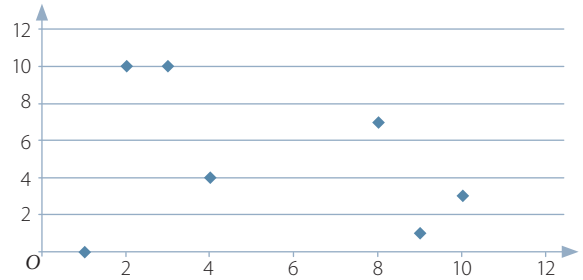
1. a.



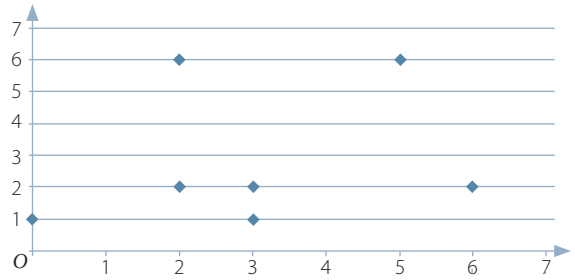
b.



c.



d.



2. En el grafico a y b se sigue una tendencia lineal. Sin embargo, en los gráficos c y d no se observa patrón, más bien parecen distribuidos al azar.

3. a. Sí, hay una relación lineal. Existen 2 puntos atípicos cercanos al eje X.

b. Sí, hay una relación lineal. En este caso la recta es decreciente y se pueden observar 3 puntos atípicos cercanos al eje X.

c. Sí, hay una relación lineal. Se observan aproximadamente 10 puntos atípicos.

d. No se observa ninguna relación.

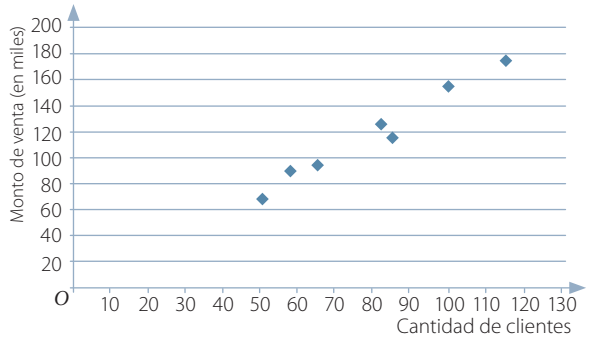
e. Si bien la relación no es lineal, se agrupan en 2 sectores claramente marcados, y 4 puntos atípicos.

f. Si bien la relación no es lineal, se agrupan formando una curva la gran mayoría de los puntos. Se observan 3 puntos atípicos.

4. Por ejemplo, un par de variables que se podrían analizar con tus compañeros son: La nota obtenida en la última prueba de matemática y el número de horas de estudio destinadas a la prueba.

Página 233

5. a.



b. La mayoría de los puntos está cerca de una recta que se puede trazar en forma ascendente, entonces las variables están correlacionadas linealmente.

c. Sí, a mayor cantidad de clientes mayor venta (comportamiento lineal).

d. No.

e. No, son pocos datos para poder concluir.

f. No, pues en general a más clientes más monto de venta.

g. Analizaría las mismas variables, pero con datos obtenidos de un periodo más largo de tiempo. Además, se podría investigar sobre estudios que se hayan realizado con estas variables anteriormente.

Relación entre dos variables cualitativas (Página 234)

-

	Padres fumadores	Padres no fumadores
Hijo con asma	280	32
Hijo sin asma	45	143

- Por los valores analizados en la 'tabla de contingencia', se observa que efectivamente es más probable que un niño tenga asma si tiene padres fumadores.
- Una de las diferencias es la cantidad de variables y categorías de estas. Además, la 'tabla de frecuencia' solo entrega números, pero la 'tabla de contingencia' cruza las variables pudiendo observar de mejor forma el comportamiento entre ellas.

Página 236

1. a. $\frac{6}{40}$ **b.** $\frac{2}{40}$ **c.** $\frac{21}{40}$ **d.** $\frac{17}{40}$

2. a. **Variables:** Zona de la región metropolitana y medio de transporte.

b.

	Zona norte	Zona sur
A	8	7
M	12	10
T	12	15
B	8	8

c. Metro y transantiago.

d. Transantiago. Sí, uno de ellos coincide.

e. $\frac{8}{40}$, la probabilidad es la misma en ambas zonas de la región metropolitana.

f. Transantiago.

Página 237

3. a. Para poder resumirla y ser presentada de forma clara y ordenada.

b. A través de los organismos gubernamentales encargados de recopilar la información. Por ejemplo, el Registro Civil.

c. Aproximadamente el 3,4 %.

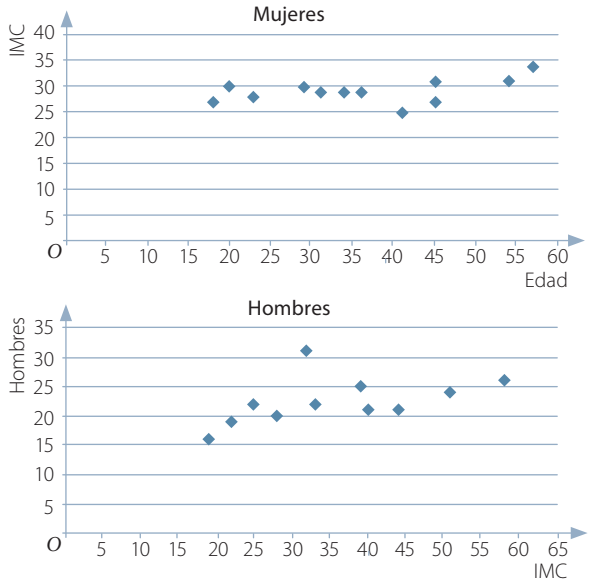
d. Mujeres de 80 o más años.

e. En un gráfico de puntos, donde se identificará con un color a los hombres y con otro a las mujeres.

f. La probabilidad es $\frac{35\,071}{97\,930}$.

g. Sí, en general los hombres presentan mayor mortalidad a lo largo de la vida, excepto después de los 80 años.

Comparación de dos poblaciones (Página 238)



Página 239

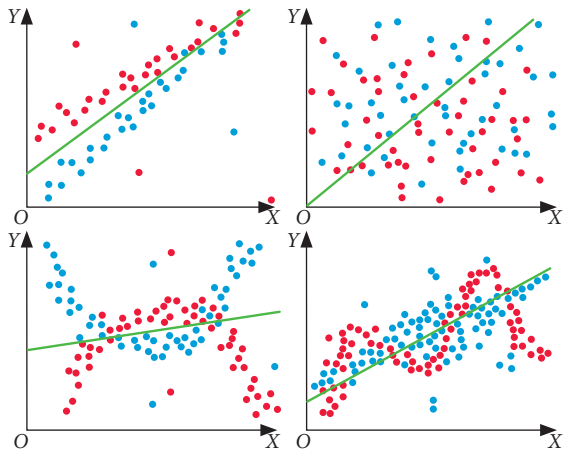
Hombres: Se observa una clara relación lineal con solo 1 punto aislado.

Mujeres: La dispersión de los puntos es mayor en este caso, aunque la mayoría de los puntos pudiera estar cerca de una recta.

- Se observa que en general el IMC es menor en hombres que en mujeres, para personas de igual edad.
- Son demasiados números presentados sin un orden, por lo que suelen confundir.
- En un mismo gráfico (nube de puntos) ubicar los datos de hombres y mujeres.

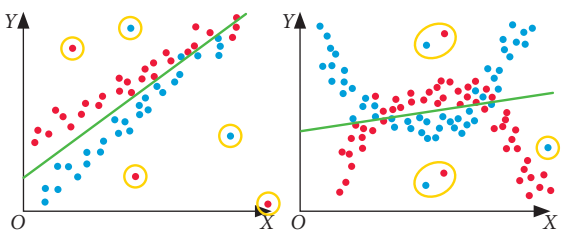
Página 241

1. a.

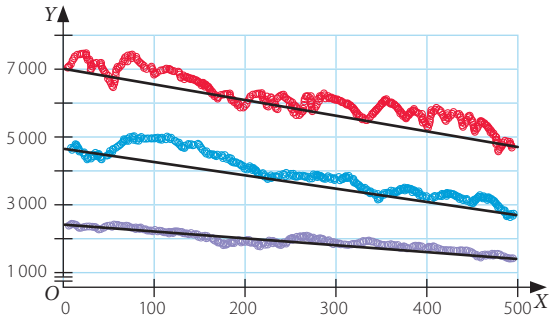


b. La correlación lineal se da en la medida que haya relación lineal entre las variables. En el gráfico 1, tanto puntos negros como rojos muestran una tendencia lineal, por lo tanto correlación lineal. En el gráfico 2 y 3 no se observa una tendencia lineal en los puntos, y en el gráfico 4 solo en los puntos negros se observa una tendencia más o menos lineal.

c.

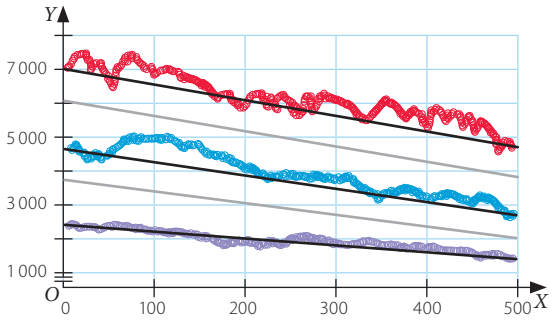


2. a.



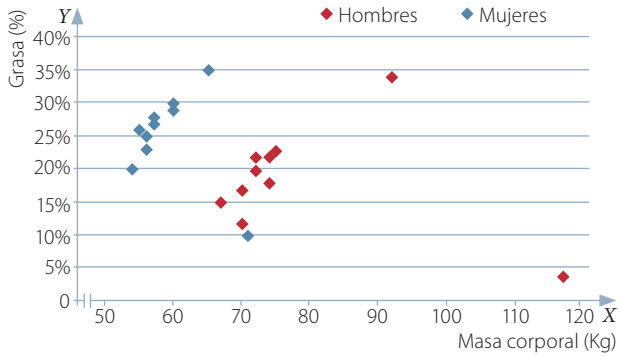
b. Decreciente

c.



¿Cómo voy? Evaluación de Proceso 1 (Páginas 242 y 243)

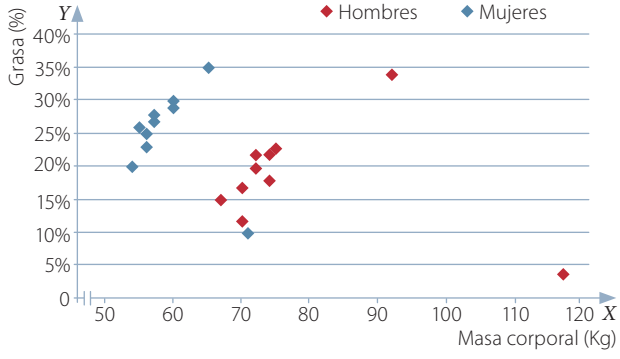
1. a.



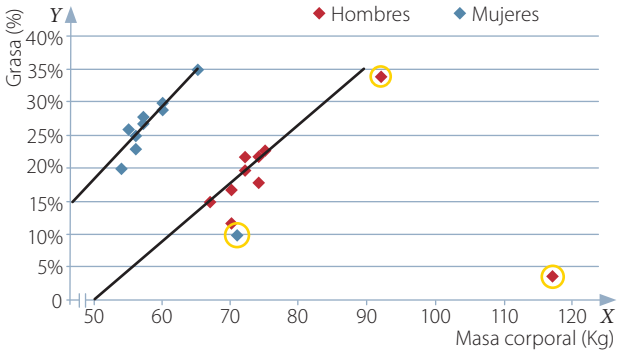
Página 243

b. Tanto para hombres como para mujeres, se observa una correlación lineal y puntos atípicos.

c.

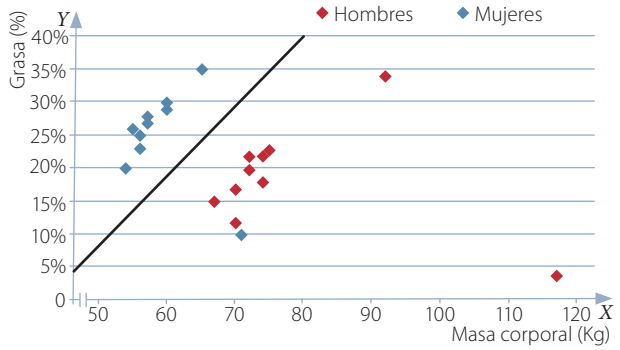


d.



Para que una persona de peso bastante mayor que el regular mantenga la misma talla que los de peso menor, es porque el % de grasa que tienen es muy pequeño (son casos atípicos en la realidad).

e.



f. Sí, a menor peso igual tienen mayor porcentaje de grasa que los hombres. En general, los puntos que representan a las mujeres en el gráfico están ubicados en la parte superior de la línea que se ha trazado para poder compararlos.

g. No, porque hay 3 variables involucradas.

Tema 2: Propiedades de la probabilidad

Recuerdo lo que sé (Página 244)

1. E = {1, 2, 3, 4, 5, 6}

2. a. $\frac{1}{6}$ **b.** $\frac{1}{6}$ **c.** $\frac{1}{6}$ **d.** $\frac{1}{6}$ **e.** $\frac{1}{6}$ **f.** $\frac{1}{6}$

3. a. $\frac{1}{21}$ **b.** 5 **c.** 4

4. a. $\frac{1}{36}$

Diseño mi estrategia (Página 245)

5. $\frac{12}{21} = \frac{4}{7}$. Estrategia: Sumar las probabilidades de obtener un número par.

6. a. Que hay que considerar caso a caso para poder determinar la probabilidad, pues el dado de Natalia no tiene resultados equiprobables.

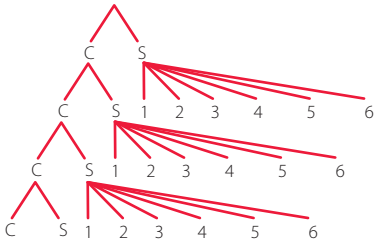
b. $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$, se considera casos favorables versus casos probables.

Unión e intersección de eventos (Página 246)

- $\Omega = \{(0, (1, c), (1, s), (2, c, c), (2, c, s), (2, s, c), (2, s, s), (3, c, c, c), (3, c, c, s), (3, c, s, c), (3, s, c, c), (3, s, s, c), (3, s, c, s), (3, c, s, s), (3, s, s, s)\}$ tiene 15 elementos.
- (2, c, c), (3, c, c, c), (3, c, c, s), (3, c, s, c), (3, s, c, c)
- Evento A = {(3, c, c, c)} y evento B = {(3, s, s, s)}.
  Evento A o B = {(3, c, c, c), (3, s, s, s)}, se consideran los elementos del evento A y los del evento B.

Página 250

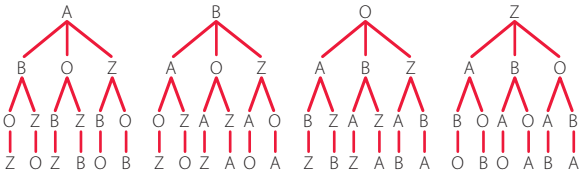
1.



a. $\frac{6}{20}$ **c.** 0 **e.** $\frac{6}{20}$ **g.** $\frac{4}{14}$

b. $\frac{1}{20}$ **d.** $\frac{3}{20}$ **f.** $\frac{7}{20}$ **h.** $\frac{3}{8}$

2. a.



b. $E_1 = \{(B, A, Z, O), (B, Z, A, O), (B, Z, O, A), (B, O, Z, A), (B, A, O, Z), (B, O, A, Z)\}$

c. $E_2 = \{(A, B, O, Z), (A, O, B, Z), (B, A, O, Z), (B, O, A, Z), (O, A, B, Z), (O, B, A, Z)\}$

d. $E_1 \cup E_2 = \{(B, A, Z, O), (B, Z, A, O), (B, Z, O, A), (B, O, Z, A), (A, B, O, Z), (A, O, B, Z), (B, A, O, Z), (B, O, A, Z), (O, A, B, Z), (O, B, A, Z)\}$

e. $E_1 \cap E_2 = \{(B, A, O, Z), (B, O, A, Z)\}$

f. $P(E_1)\ \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$, $P(E_2)\ \frac{6}{24} = \frac{1}{4}$, $P(E_1 \cup E_2) = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$, $P(E_1 \cap E_2) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$

g. La probabilidad de la unión de los eventos corresponde a sumar la probabilidad del evento 1 y 2 y restarle la intersección de los eventos.

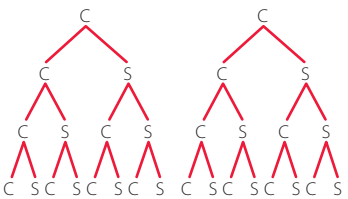
Página 251

3. a. 60% **c.** 10% **e.** 95% **g.** 50%

b. 45% **d.** 5% **f.** 65%

Reglas aditivas de la probabilidad (Página 252)

- 1ᵉʳᵃ moneda
- 2ᵈᵃ moneda
- 3ʳᵃ moneda
- 4ᵗᵃ moneda



- 16 elementos, y son equiprobables porque las monedas son honestas.
- $P(A) = \frac{1}{16}$ $P(B) = \frac{1}{16}$ $P(A \cup B) = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$ $P(A \cap B) = \frac{0}{16} = 0$
- La unión de las probabilidades corresponde a la suma de las probabilidades de los eventos A y B, menos la probabilidad de la intersección.
- Sí, $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Página 256

1. a. $\frac{5}{36}$ **d.** $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ **g.** $\frac{28}{36} = \frac{7}{9}$

b. $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$ **e.** $\frac{10}{36} = \frac{5}{18}$ **h.** $\frac{20}{36} = \frac{5}{9}$

c. $\frac{8}{36} = \frac{2}{9}$ **f.** $\frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ **i.** $\frac{32}{36} = \frac{8}{9}$

2. a.

- La probabilidad es $\frac{12}{25}$.
- La probabilidad es 1

- La probabilidad es $\frac{15}{25}$.
- La probabilidad es $\frac{9}{25}$.

b. La probabilidad es 1.

c. La probabilidad es $\frac{11}{16}$.

Página 257

3. Ω = {(Juana, José, Bastián), (Juana, José, Rodrigo), (Juana, José, Gabriela), (Juana, Bastián, Rodrigo), (Juana, Bastián, Gabriela), (Juana, Rodrigo, Gabriela), (José, Bastián, Rodrigo), (José, Bastián, Gabriela), (José, Rodrigo, Gabriela), (Bastián, Rodrigo, Gabriela)}

a. $\frac{1}{10}$ **b.** $\frac{9}{10}$ **c.** $\frac{3}{10}$

4. a. $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ **b.** $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ **c.** $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ **d.** $\frac{5}{6}$

Reglas multiplicativas de la probabilidad (Página 258)

- $\Omega = \{(A, 3), (A, 7), (3, A), (7, A), (3, 7), (7, 3)\}$
- $A \cap B = \{(A, 7)\}$ • $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ • $P(A) = \frac{1}{3}$ • $P(B) = \frac{1}{2}$
- La probabilidad de la intersección coincide con el producto de las probabilidades.

Página 262

1. a. Por ejemplo, que en la primera extracción salga una bolita roja y en la segunda, una blanca.

b. $\frac{83}{225}$ **c.** $\frac{142}{225}$

d. La probabilidad de que las bolitas sean del mismo color es $\frac{34}{105}$ y de que sean de distinto color, $\frac{71}{105}$.

e. No, pues la segunda extracción queda condicionada a los resultados de la primera.

2. a. No, porque las probabilidades están condicionadas.

b. La probabilidad es de 0,51.

3. a. Sí, cada lanzamiento no depende del anterior.

b. $\frac{1}{8}$ **c.** 0 **d.** $\frac{5}{28}$

e. Es probable, dado que muchos de los resultados alejan a la persona de su casa o la mantienen yendo y viniendo a tres pasos de la casa.

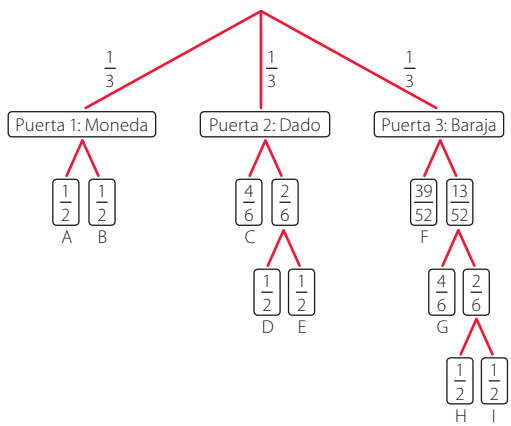
Página 263

4. a. No **b.** $\frac{11}{25}$ **c.** $\frac{4}{15}$ **d.** $\frac{9}{100}$

5. Los intervalos $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ y $\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]$ no se intersecan por eso son independientes.

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 2 (Páginas 264 y 265)

1. a.



b. $P(D) = \frac{1}{18}$ $P(F) = \frac{1}{4}$ $P(H) = \frac{1}{72}$

$P(E) = \frac{1}{18}$ $P(G) = \frac{1}{18}$ $P(I) = \frac{1}{72}$

c. Que gane $\frac{17}{72}$ y que pierda $\frac{55}{72}$.

d. $\frac{1}{72}$ **e.** $\frac{5}{18}$

Tema 3: Comportamiento aleatorio

Recuerdo lo que sé (Página 266)

1. a. Sí, ya que cada camino se obtiene mediante un experimento aleatorio.

b. Hay 5 caminos posibles.



c. No, cada camino tiene distinta probabilidad dada por los resultados del lanzamiento de la moneda y la cantidad de veces que se lanza en cada camino.

d. Dos caminos tienen probabilidad 0,125 y los otros tres, 0,25.

e. Los tres caminos de la izquierda de Mauricio tienen mayor probabilidad.

Diseño mi estrategia (Página 267)

2. Las probabilidades, en orden ascendente, son $\frac{1}{27}, \frac{2}{27}, \frac{6}{27}, \frac{6}{27}$ y $\frac{12}{27}$.

3. a. No, porque los caminos no tienen la misma probabilidad de ser escogidos.

b. El camino que se encuentra por la izquierda de Mauricio.

Paseos aleatorios y frecuencias relativas (Página 268)

- Se pueden formar 16 caminos, es decir 2^4 (hay 4 filas de clavos).
- X_3
- No, porque es un experimento aleatorio.
- $X_1 = 0, X_2 = 3, X_3 = 4, X_4 = 3$ y $X_5 = 0$. Siempre los casilleros X_2, X_3, X_4 se ocuparán con mayor frecuencia, porque hay más caminos que llegan a ellos.
- 512 caminos, es decir 2^9.

Herramientas tecnológicas (Página 269)

- La tabla es actividad para los estudiantes (respuestas variadas).
- 2^{21}, pues tiene 21 filas.
- En los centrales, principalmente en x_{11}.
- Sí, se cumple.

Página 272

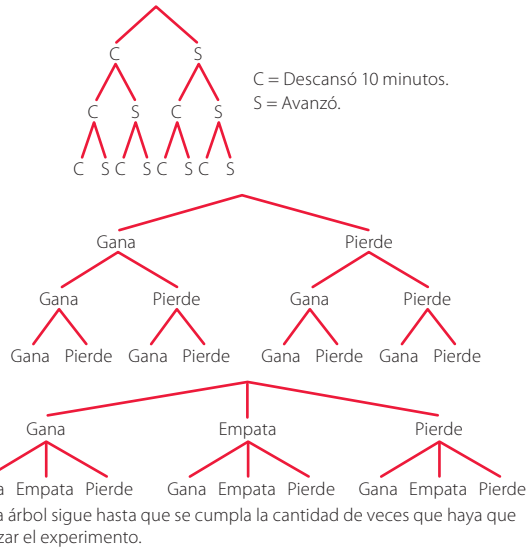
1. a.

Cantidad de hijos	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
0	9	$\frac{1}{6}$
1	6	$\frac{1}{9}$
2	18	$\frac{1}{3}$
3	12	$\frac{2}{9}$
4	9	$\frac{1}{6}$

b. $\frac{1}{2}$

2. a. No **b.** Sí **c.** Sí **d.** Sí **e.** No

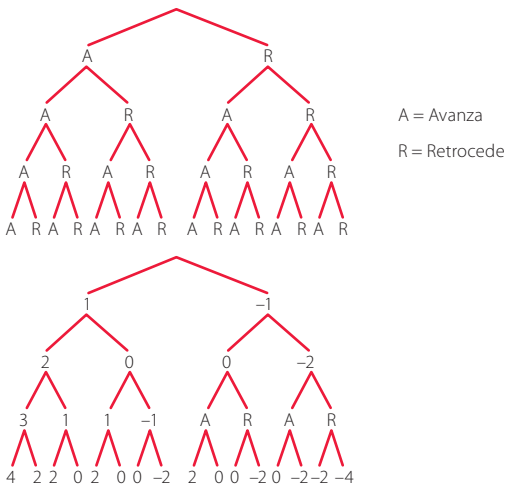
3.



Cada árbol sigue hasta que se cumpla la cantidad de veces que haya que realizar el experimento.

Página 273

6. a.

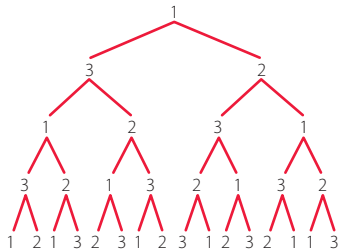


b. La posición inicial.

c. Sí, las posiciones las define un experimento aleatorio.

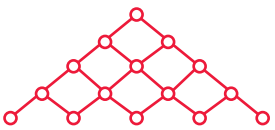
7. Actividad a cargo del estudiante.

Paseos aleatorios y probabilidad (Página 274)

- Que son eventos equiprobables.
- 
- Denotando que cada camino que se escoja tenga 0,5 de probabilidad.

Página 276

1. a.

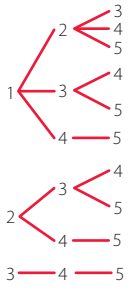


b. Cada camino tiene probabilidad $(0{,}5)^4$.

c. Los caminos tienen la misma probabilidad, pero muchos caminos llegan al mismo destino, por lo que se podría comparar la probabilidad de llegar a un destino a partir de la suma de las probabilidades.

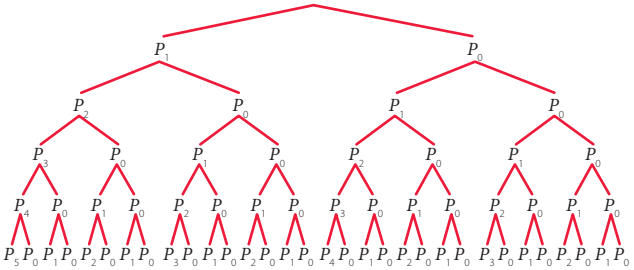
d. La casilla central tiene mayor probabilidad, porque hay más caminos que llegan a ella.

2. a.



b. $\frac{3}{10}$

3. a. Se define P_0 si vuelve al punto inicial, P_n como la cantidad de n pasos.



b. $\frac{2}{32} = \frac{1}{16}$

c. La probabilidad de obtener varias caras seguidas (avanzar) cada vez es menor que $\frac{1}{2}$. La probabilidad de obtener 15 caras es $\left(\frac{1}{2}\right)^{15}$. La probabilidad de obtener 20 caras es $\left(\frac{1}{2}\right)^{20}$. La probabilidad de obtener 30 caras es $\left(\frac{1}{2}\right)^{30}$.

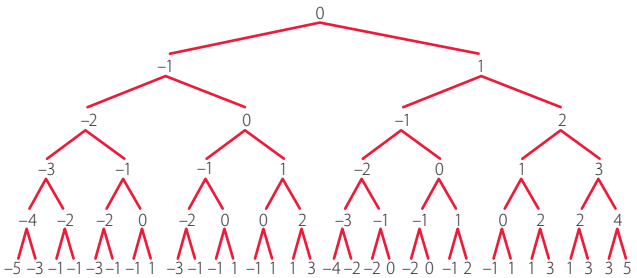
d. El comportamiento debería ser volver al punto inicial (P_0).

e. Si la moneda no es honesta, la tendencia que se va a seguir depende de si 'cara' tiene más posibilidades de salir que 'sello', o viceversa. Por ejemplo, si es más probable que salga sello, seguirá quedándose en la posición inicial, pero si es más probable que salga cara, es más probable que solo avance.

f. La probabilidad de avanzar es mayor.

g.

a. Cada número representa la cantidad de pasos que avanza, retrocede o mantiene.

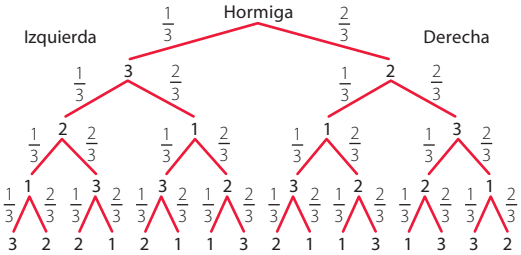


b. $\frac{8}{32}$ considerando que pueden ser 3 pasos delante o detrás del punto inicial.

c. Las probabilidades de avanzar se mantienen, cambian las probabilidades de retroceder.

Página 277

4. a.



b. En la posición 2.

c. No, antes la posición 1 tenía mayor probabilidad.

5. Respuesta a cargo del estudiante.

¿Cómo voy? Evaluación de proceso 3 (Páginas 278 y 279)

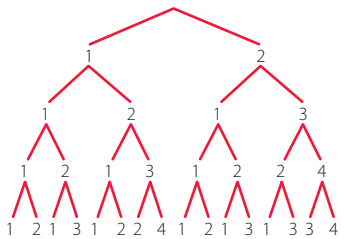
1. a. 3 monedas.

b. Resultado relativo, depende de cada estudiante

c. Poco probable

d. Mayor frecuencia el 1 y menor frecuencia el 4.

e.



Siendo una moneda honesta, cada rama tiene una probabilidad de 0,5

f. La mayor probabilidad es que el hombre quede en el cuadrado inicial, mientras que la menor probabilidad es que llegue al último cuadrado.

g. $\frac{6}{16} = \frac{3}{8}$

h. $\frac{3}{8}$

i. Deberían tender a parecerse.

Actividades complementarias (Páginas 280 y 281)

El error del duque de Toscana

a. No considerar los distintos ordenamientos que se pueden dar.

b. $6^3 = 216$ combinaciones.

E = {(1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), ….. , (6, 5, 6), (6, 6, 5), (6, 6, 6)}

c. Que la suma sea 9 es $\frac{18}{216}$ y que sea 10 es $\frac{18}{216}$.

d. Son eventos equiprobables.

Juegos de azar

a. No, cada bolita tiene la misma probabilidad de salir.

b. Sí, pero la complejidad de este análisis estará en el número de bolitas que hay en total y las que se extraerán. Sin embargo, siempre cada combinación debe tener igual probabilidad.

Lanzamiento de un dado

a. – Sumar las probabilidades.
– No considerar que podría ser (1, 2) o (2, 1).
– Sumar las probabilidades.

b. $\frac{2}{36} = \frac{1}{18}$

El problema del sorteo discutido

El alumno está en la razón, en la primera opción tienen todos la misma posibilidad, en cambio en la opción que propone el profesor se va achicando el espacio muestral, por lo tanto aumentando la probabilidad.

Problema de la apuesta interrumpida

Beatriz debería recibir más por llegar más lejos. Una posibilidad sería hacerlo proporcionalmente.

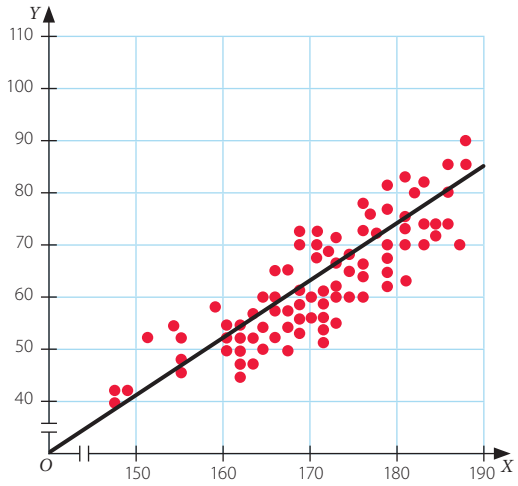
Por otro lado, usando probabilidad y si consideramos que quedan 2 jugadas más, Beatriz debería tener $\frac{3}{8}$ de las opciones de ganar y Andrés solo $\frac{1}{8}$.

¿Qué aprendí? Evaluación final (Páginas 282 a la 284)

Comparación de muestras

1. a. Sí, presentan una tendencia lineal.

b.



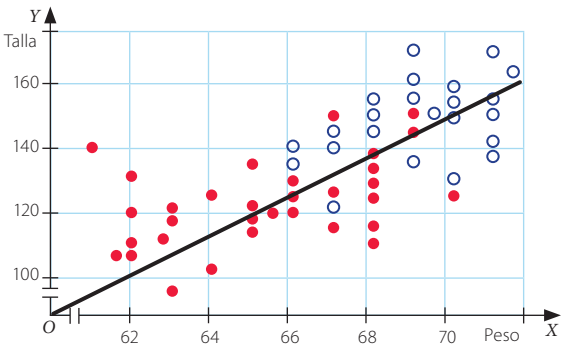
c. No.

d. Las variables están correlacionadas linealmente.

2. a. Sí, en ambos casos.

b. No con tanta claridad.

c.



d. Para las mujeres se nota que su peso aumenta más que en los hombres a medida que la talla aumenta.

e. Tanto para los hombres como para las mujeres, el peso aumenta en la medida que aumenta la talla. Asimismo, los hombres por lo general mantienen un peso y talla mayor que el de las mujeres.

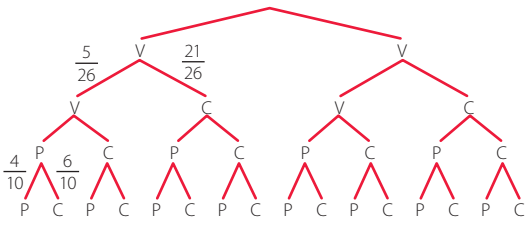
Propiedades de la probabilidad

3. Si las letras consideradas fueran 27, no se pueden repetir (al igual que los números) y el orden siempre es de 2 letras primero y luego los 3 números, entonces:

a. $26 \cdot 26 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 676\,000$

b. La mitad de los cartones son pares, por lo tanto, su probabilidad es 0,5.

c. Se puede construir un diagrama de árbol.

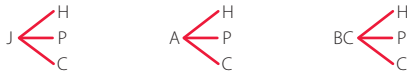


Las combinaciones que nos interesan del árbol son las siguientes:

VVPP	VCPP	CVPP
VVPc	VCPc	CVPc
VVcP	VCcP	CVcP

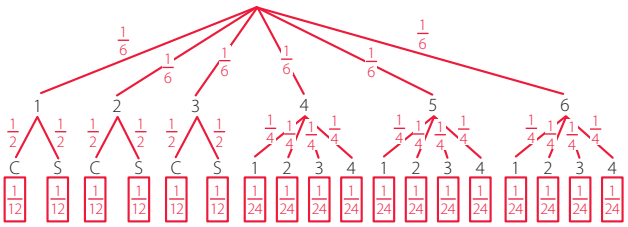
$$\frac{5}{26}\cdot\frac{5}{26}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}+2\cdot\frac{5}{26}\cdot\frac{5}{26}\cdot\frac{21}{26}\cdot\frac{4}{10}+2\cdot\frac{5}{26}\cdot\frac{21}{26}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{4}{10}$$
$$+4\cdot\frac{5}{26}\cdot\frac{21}{26}\cdot\frac{4}{10}\cdot\frac{6}{10}=\frac{18\,040}{27\,600}.$$

4. a.



b. $\frac{1}{3}$ **c.** $\frac{2}{3}$

5.



6. a. $A \cup B$ = el perro sube al árbol o el niño toma un helado.
$B \cup C$ = el niño toma un helado o la niña salta la cuerda.
$A \cup C$ = el perro sube al árbol o la niña salta la cuerda
$A \cap B$ = el perro sube al árbol y el niño toma un helado.
$B \cap C$ = el niño toma un helado y la niña salta la cuerda.
$A \cap C$ = el perro sube al árbol y la niña salta la cuerda.

b. $A \cup B = \frac{7}{12}$ $A \cup C = \frac{1}{2}$ $B \cap C = \frac{1}{24}$
$B \cup C = \frac{5}{12}$ $A \cap B = \frac{1}{12}$ $A \cap C = \frac{1}{18}$

c. No, pues la unión no se asociaría solo a la suma ni la intersección solo a la multiplicación.

Comportamiento aleatorio

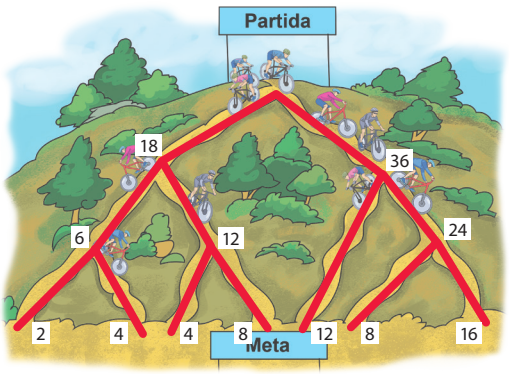
7. a. En que cada vez, todas las canciones tienen la misma probabilidad de ser reproducidas.

b.

Tipo de música	Frecuencia absoluta
R	10
P	6
M	7
T	7

c. $\frac{1}{3}$

8. a.



b. 28 **c.** $\frac{8}{27}$ **d.** $\frac{13}{27}$

Glosario

A

Abscisa: valor que se representa en el eje horizontal o eje X en el plano cartesiano.

Altura: cada uno de los segmentos perpendiculares trazados desde un vértice de una figura al lado opuesto o a una prolongación de este.

Ángulo interior: es el formado por dos lados contiguos de un polígono y se encuentra dentro de este.

Arco de una circunferencia: parte de la circunferencia comprendida entre dos puntos de ella.

Área: medida de una superficie.

B

Base de una potencia: corresponde al factor que se repite en una potencia.

C

Círculo: región o área del plano delimitada por una circunferencia.

Circunferencia: es el lugar geométrico de todos los puntos del plano que están a una distancia r de un punto O.

Coeficiente numérico: constante que multiplica la parte literal de un término algebraico.

Constante de proporcionalidad: valor de la razón entre dos variables proporcionales.

Cuadrado: cuadrilátero cuyos cuatro ángulos interiores miden 90° y sus lados tienen la misma medida.

Cuadrado perfecto: es el resultado de multiplicar un número por sí mismo.

Cuadrilátero: región del plano limitada por cuatro segmentos, entre los cuales no hay tres colineales.

Cuerda: segmento trazado entre dos puntos cualesquiera de una circunferencia.

D

Decimal finito: numero decimal con una cantidad finita de cifras decimales.

Diámetro: cuerda de mayor longitud en una circunferencia.

E

Ecuación: igualdad entre expresiones algebraicas que solo se cumple para algunos valores de la incógnita.

Eje de simetría: recta que divide una figura en dos partes de igual forma y tamaño.

Evento: subconjunto del espacio muestral.

Experimento aleatorio: experimento en el que no se tiene certeza de lo que pasara. Por lo tanto, no se puede predecir su resultado.

Expresión algebraica: términos algebraicos relacionados entre sí mediante operaciones de adición o sustracción.

Exponente: término de una potencia que indica cuantas veces se repite la base.

F

Factor literal: parte no numérica de un término algebraico.

Frecuencia absoluta: número de veces que se repite un determinado valor en la variable estadística que se estudia.

I

Inecuación: desigualdad en la que aparecen una o más incógnitas.

L

Longitud: distancia entre dos puntos.

M

Media aritmética ($\bar{x}$): promedio entre todos los datos de una distribución estadística.

Mediana (M_e): valor que ocupa el lugar central en una distribución de datos.

Medidas de tendencia central: valores alrededor de los cuales tienden a concentrarse los datos de una distribución estadística.

Medidas de posición: indican el valor de la variable que divide a un conjunto ordenado de datos en una cantidad determinada de partes.

Moda (M_o): valor que tiene la mayor frecuencia absoluta en una distribución estadística.

Muestra: subconjunto de la población a partir de la cual se pretende realizar inferencias para dicha población.

N

Números enteros ($\mathbb{Z}$): conjunto numérico formado por los números naturales ($\mathbb{N}$), el cero y los inversos aditivos de los números naturales.

Número decimal: está formado por una parte entera y una parte decimal separada por una coma decimal.

Número mixto: número representado por un número entero y por una fracción.

O

Ordenada: valor que se representa en el eje vertical (eje Y) en el plano cartesiano.

Origen: punto en el que se intersecan los ejes del plano cartesiano. Se representa con el punto (0, 0).

P

Paralelógramo: cuadrilátero que tiene dos pares de lados paralelos.

Paralelepípedo: es un cuerpo geométrico formado por seis caras que son paralelogramos, las caras opuestas tienen iguales características y son paralelas entre sí.

Par ordenado: en el plano cartesiano corresponde a una dupla de elementos, el primero indica la abscisa y el segundo la ordenada.

Perímetro (P): longitud del borde de una figura. En un polígono se calcula como la suma de las medidas de sus lados.

Pi (π): número irracional que corresponde a la razón entre el perímetro (P) y el diámetro de un círculo.

Plano cartesiano: es el plano euclidiano provisto de un sistema de coordenadas en el que se distinguen dos ejes perpendiculares (rectas numéricas) que determinan cada punto en el plano.

Población: conjunto de individuos, objetos o fenómenos de los cuales se quiere estudiar una o varias características.

Polígono: figura plana formada por una línea poligonal cerrada y su interior.

Porcentaje: razón cuyo consecuente es 100. Se representa por el símbolo %.

Probabilidad: posibilidad de ocurrencia de un evento. Toma valores entre 0 y 1, pero también se puede escribir como porcentaje.

Producto notable: son multiplicaciones entre expresiones algebraicas con características determinadas y cuyo resultado puede obtenerse de manera simple.

Proporción: igualdad de dos razones.

R

Radio: segmento de recta que une el centro de una circunferencia con un punto de ella.

Razón: comparación de dos números mediante el cociente entre ellos.

Rectángulo: paralelogramo en el que sus ángulos interiores miden 90° y sus lados opuestos tienen la misma medida.

Reflexión: transformación isométrica en el plano que consiste en reflejar una figura a partir de una recta llamada eje de reflexión.

Regla de Laplace: forma de calcular la probabilidad de un evento, determinando el cociente entre los casos favorables y los casos posibles, en un experimento aleatorio, cuando sus resultados son equiprobables.

Rombo: paralelogramo cuyos lados son todos de igual medida y sus ángulos interiores opuestos son iguales (dos ángulos son agudos y los otros dos obtusos).

Romboide: paralelogramo en el que sus lados opuestos miden lo mismo y la medida de sus ángulos interiores opuestos es la misma.

S

Sector circular: corresponde a la porción del círculo limitada por un arco y los dos radios que lo conforman.

Segmento circular: corresponde a la porción del círculo limitada por una cuerda y el correspondiente arco.

T

Término algebraico: cada uno de los sumandos que aparecen en una expresión algebraica.

Trapecio: cuadrilátero que tiene un par de lados paralelos.

V

Vector: segmento orientado determinado por su origen y su extremo. Se caracteriza por tener magnitud, dirección y sentido.

Índice temático

A

Adición de números racionales, **18**

Altura de un cono, **164**

Ángulo del centro, **148**

Arco de circunferencia, **148**

Área,
- de un cilindro, **162**
- de un círculo, **146**
- de un cono, **164**
- de un sector circular, **156**
- de un segmento circular, **156**
- de un triángulo, **157**

B

Base de un cono, **164**

C

Categorías, **234**

Centro de homotecia, **176**

Círculo, **149**

Cociente entre números racionales, **23**

Congruente, **177**

Corolario del teorema de Tales, **190**

Correlacionadas, **230**

Crecimiento exponencial, **57**

Criterio de semejanza, **206**
- ángulo, ángulo, **207**
- lado, ángulo, lado, **206**
- lado, lado, lado, **207**

Cuadrado de un binomio, **74**

Cubo de un binomio, **75**

D

Decrecimiento exponencial, **57**

Diagrama,
- de árbol, **252**, **255**, **260**
- de Venn, **247**

Diferencia de,
- cuadrados, **90**
- de cubos, **91**

Dirección del vector, **182**

Disjuntos, **253**

Dividir,
- exteriormente un segmento, **195**
- interiormente un segmento, **194**
- potencia de igual base, **52**
- potencias de igual exponente, **52**

E

Ecuación lineal,
- con coeficientes racionales, **100**
- en dos variables, **102**, **124**
- en dos variables, **124**

Eventos independientes, **259**

Experimento aleatorio, **270**

Expresión algebraica, **84**

F

Factor,
- común monomio, **86**
- común polinomio, **87**

Factorizar, **86**
- un trinomio cuadrado perfecto, **94**

Figuras,
- homotéticas, **176**
- semejantes, **202**

Francis Galton, **269**

Frecuencia,
- absoluta, **271**
- relativa de un evento, **271**

Función, **122**
- afín, **102**, **122**
- lineal, **122**

G

Generatriz de un cono, **164**

Gráfica de una relación lineal de dos variables, **126**

H

Homotecia, **176**
- directa, **177**
- inversa, **177**
- ampliación, **177**
- reducción, **177**

I

Inecuación lineal con coeficientes racionales, **100**

Intersección de eventos, **248**, **249**

Inverso multiplicativo, **23**

L

Línea de nivel, **127**

Longitud de un arco, **152**

M

Máquina de Galton, **269**

Medidas de tendencia central, **226**
- media, **226**
- mediana, **226**
- moda, **226**

Método de resolución de un sistema de ecuaciones,
- Cramer, **116**
- igualación, **112**
- reducción, **115**
- sustitución, **114**

Multiplicación de potencias de igual base, **51**

Multiplicar números racionales, **22**

N

Nube de puntos, **228**

Números,
- enteros ($\mathbb{Z}$), **16**
- naturales ($\mathbb{N}$), **16**
- racionales ($\mathbb{Q}$), **16**

O

Operación combinada, **31**

Outlier, **231**

P

Paseo aleatorio, **270**, **275**

Perímetro de,
- un círculo, **146**
- un sector circular, **153**
- un segmento circular, **153**

Potencia,
- con exponente cero, **46**
- de base racional, **45**
- de una potencia, **47**
- base entero negativo, **39**
- con exponente entero negativo, **40**
- con exponente natural, **36**

Probabilidad,
- condicional, **259**
- de la intersección, **259**
- de la unión, **253**
- empírica, **271**

Índice temático

Producto de binomio con un término en común, **79**

Propiedad,

- asociativa, **26**
- clausura, **26**
- conmutativa, **26**
- distributiva, **26**
- elemento neutro, **26**
- fundamental de las proporciones, **174**
- inverso aditivo, **26**
- inverso multiplicativo, **26**
- neutro aditivo, **26**
- neutro multiplicativo, **26**

Proporción, **200**

Punto atípico, **231**

R

Razón, **200**

- de homotecia, **176**

Rectas,

- con pendiente negativa, **131**
- con pendiente positiva, **131**
- paralelas al eje X, **131**
- paralelas al eje Y, **131**

Reducir expresión algebraica, **72**

Regla,

- aditiva de la probabilidad, **253**
- de Laplace, **244**
- multiplicativa de la probabilidad, **259**

Relación lineal, **230**

- de dos variables, **124**

S

Sistema de ecuaciones lineales, **106**

- compatible, **108**
- compatible indeterminado, **108**
- incompatible, **108**

Software Geogebra, **179**, **185**

Solución gráfica de un sistema de ecuaciones, **108**

Srinivasa Ramanujan, **91**

Suma,

- de cubos, **91**
- por diferencia, **78**

Sustracciones de números racionales, **18**

T

Tabla de,

- contingencia, **234**
- doble entrada, **234**

Tales de Mileto, **191**

Teoremas de Euclides, **210**

- referente a la altura, **210**
- referentes a los catetos, **210**

Teorema,

- de Pitágoras, **165**
- de Tales, **188**
- particular de Tales, **190**

Términos algebraicos, **84**

Trinomio cuadrado perfecto, **94**

U

Unión de eventos, **247**, **249**

V

Variable,
- cualitativa, **228**
- cuantitativa, **228**

Vector, **182**

Vector ponderado, **182**

Vértice de un cono, **164**

Volumen, **169**
- de un cilindro, **162**
- de un cono, **168**

W

Waclaw Sierspinski, **45**

Wolfram Alpha, **117**, **133**

Bibliografía y webgrafía

Bibliografía

- Arenas, F. y equipo (1993). *Geometría elemental*. Santiago, Chile: Ediciones Universidad Católica de Chile.
- Bell, e.t. (1948). *Los grandes matemáticos*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Losada S. A.
- Brousseau, Guy. *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Traducción realizada por Dilma Fregona. (FaMAF), Universidad de Córdoba, y Facundo Ortega, Centro de Estudios Avanzados, UNC, Argentina, 1993.
- Cantoral, R., Montiel, G. (2001). *Funciones: visualización y pensamiento matemático*. Pearson Educación México.
- Chevallard Y. *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Aique, Buenos Aires, 1991.
- Chevallard, Y., Bosch, M. y Gascón, J. *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Horsori, Barcelona, 1997.
- Cortés, C. (1994). *Rectas: software de apoyo al aprendizaje*.
- *Memoria de la VIII reunión centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en matemática educativa*. Costa Rica, 1994.
- Coxeter, H. S. M.; Greitzer, S. L. (1967). *Geometry Revisited. EEUU: The Mathematical Association of America*.
- Dickson, L., Brown, M. y Gibson, O. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Barcelona, España: Editorial Labor.
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano, Capítulo V*. Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía, Grupo de Educación Matemática. Peter Lang S. A. Editions scientifiques européennes, 1995.
- Duval, R. (1998). *Gráficas y ecuaciones: la articulación de dos registros*. Traducción del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV-IPN, México.
- Figueroa, L. (2001). *Para qué sirve medir*. España: Cuadernos de Pedagogía, n° 302.
- Guedj, D. (1998). *El imperio de las cifras y los números*. Barcelona, España: Ediciones B S. A.
- Gustafson, D. (1997). *Álgebra intermedia*. México: International Thomson Editores.
- Guzman, I. (2002). *Didáctica de la matemática como disciplina experimental*. Chile: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Linares, S. (1988). *Fracciones, la relación parte-todo*. Madrid, España: Editorial Síntesis.
- Mateos, M. (2001). *Metacognición y educación*. Buenos Aires, Argentina: Editorial Aique.
- Mena, A. (2002). *Elementos de matemática: grupos*. Valparaíso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Matemática, *Programa de Estudios, Primer Año Medio*. Ministerio de Educación, República de Chile. Santiago de Chile, 2016.
- Novak, J. (1988). *Aprendiendo a aprender*. Barcelona, España: Ediciones Martínez Roca S. A.
- Ontoria, A. (1993). *Mapas conceptuales*. España: Editorial Nancea, 2ª edición.
- Piaget, J. (1963). *Las estructuras matemáticas y las estructuras operatorias de la inteligencia; la enseñanza de las matemáticas*. Madrid: Aguilar.
- Saavedra Gallardo, E. (2005). Contenidos básicos de estadística y probabilidades. Chile: Editorial Universidad de Santiago.
- Sternberg, R., Apear-Swerling L. (1996). *Enseñar a pensar*. España: Aula XXI, Santillana.
- Stewart, Ian (1990). *Ingeniosos encuentros entre juegos y matemáticas*. Barcelona, España: Editorial Gedisa.
- Vygotski, L. (1995). *El desarrollo de los procesos psicológicos superiores*. Barcelona, España: Editorial Libergraf, S. A.
- Winston, H., Elphick, D. y equipo. (2001). *101 actividades para implementar los Objetivos Fundamentales Transversales*. Santiago, Chile: LOM Ediciones.

Webgrafía

- Comisión Nacional de Energía:
  http://www.cne.cl/
- El paraíso de las matemáticas:
  http://www.matematicas.net
- El portal de las matemáticas:
  http://www.sectormatematica.cl
- Elige vivir sano:
  http://www.eligevivirsano.cl/mueve-tucuerpo/indice-masa-corporal/
- Fundación Futuro:
  http://www.fundacionfuturo.cl/
- Gobierno de Chile:
  http://www.gob.cl/
- Homotecias:
  http://www.disfrutalasmatematicas.com/geometria/reescala.html
- Instituto Nacional de Estadísticas:
  http://www.ine.cl/
- Máquina de Galton:
  https://tube.geogebra.org/m/10276
- Ministerio de Educación:
  http://www.mineduc.cl
- Ministerio de Salud:
  http://www.minsal.cl/
- Multiplicación de números racionales:
  http://www.vitutor.com/di/r/a_12.html
- Ojo científico:
  www.ojocientifico.com
- OECD-Pisa:
  http://www.oecd.org
- Profesor en línea:
  http://www.profesorenlinea.cl/matematica/Decimalafraccion.htm
- Propiedad de las probabilidades:
  http://www.hrc.es/bioest/Probabilidad_14.html
- Recursos matemáticos Redemat:
  http://www.recursosmatematicos.com/redemat.html
- Recursos matemáticos Eduteka:
  http://www.eduteka.org
- Real Academia Española de la lengua:
  http://www.rae.es
- Simce:
  http://www.simce.cl/
- Sociedad Chilena de Educación Matemática:
  http://www.sochiem.cl
- Sociedad de Matemática de Chile:
  http://www.somachi.cl
- *Software* geométrico:
  http://www.geogebra.org
- *Software* Regla y Compás.
  http://db-maths.nuxit.net/CaRMetal/index_es.html
- Teorema de Pitágoras:
  http://mimosa.pntic.mec.es/clobo/geoweb/trian9.htm
- Wolfram alpha:
  http://www.wolframalpha.com/

Actualizaciones

Actualización, Unidad 1, página 57.

Para determinar la cantidad de cesio 137 en un año t determinado se debe calcular la expresión $10 \cdot 0{,}9773^{t-1}$.

Cuando $t = 80$, se tiene:

$$10 \cdot 0{,}9773^{80-1}$$

Usando una calculadora científica como la de la imagen, se obtiene que la cantidad de cesio 137 en 80 años es de 1,63 g, aproximadamente.

Actualización, Unidad 1, página 62.

En general, la cantidad de personas del nivel n es 3^n, es decir, $H_n = 3^n$, $n \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Actualización, Unidad 2, página 79.

¿Cuál es el resultado de $(y^3 - 5)(y^3 + 8)$?

$$(y^3 - 5)(y^3 + 8) = (y^3)^2 + (-5 + 8)y^3 + (-5) \cdot 8$$

$$= y^6 + 3y^3 - 40$$

Respuesta:
El resultado de $(y^3 - 5)(y^3 + 8)$ es $y^6 + 3y^3 - 40$.

Actualización, Unidad 3, página 169.

$$V_2 = \frac{1}{3}\pi \cdot (2r)^2 \cdot (2h) = \frac{8}{3}\pi r^2 h$$

3 Para calcular la variación porcentual, se tiene que:

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{\frac{1}{3}\pi r^2 h}{\frac{8}{3}\pi r^2 h} = \frac{1}{8} = 0{,}125$$

Actualización, Unidad 3, página 177.

Si $-1 < k < 0$, la figura resultante es una **reducción** de la figura original y el centro de homotecia (O) está ubicado entre ambas figuras.

Actualización, Unidad 3, página 195.



Actualización, Unidad 4, página 235.

Para saber más, ingresa al siguiente *link*:

http://www19.iadb.org/intal/intalcdi/PE/2011/08534.pdf

Actualización, Solucionario, página 286.

b. $\boxed{x - y}$ al restar ambas cantidades se obtiene el espacio utilizado de WinXP (C:)

Actualización, Glosario, página 312.

Círculo: región del plano delimitada por una circunferencia.

Experimento aleatorio: experimento en el que no se tiene certeza de lo que pasará aunque se conocen todos los casos posibles. Por lo tanto, no se puede predecir el caso que se obtendrá.

Exponente entero: término de una potencia que indica cuántas veces se repite la base.

Texto del estudiante

Matemática 1º Medio

Bastián Galasso Díaz
Lesly Maldonado Rodríguez
Vivian Marambio Fuentes

SANTILLANA

9 789561 530386

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

Edición especial para el Ministerio de Educación
Prohibida su comercialización