

TEXTO DEL ESTUDIANTE

# Matemática

# 8



## BÁSICO

Daniel Catalán Navarrete  
Bernardita Pérez Ureta  
Camila Prieto Córdoba  
Pedro Rupin Gutiérrez



EDICIÓN ESPECIAL PARA EL  
MINISTERIO DE EDUCACIÓN  
PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN



TEXTO DEL ESTUDIANTE

# Matemática

**Daniel Catalán Navarrete**

Ingeniero Civil Químico  
Licenciado en Ciencias de la Ingeniería  
Universidad de Chile

**Bernardita Pérez Ureta**

Profesora de Matemática  
Magíster en Didáctica de la Matemática  
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

**Camila Prieto Córdoba**

Profesora de Matemática  
Magíster en Educación Matemática  
Universidad de Santiago de Chile

**Pedro Rupin Gutiérrez**

Profesor de Matemática  
Licenciado en Matemática  
Pontificia Universidad Católica de Chile

# 8

BÁSICO



Los ascensores de Valparaíso son un medio de transporte muy usado, debido a las características del emplazamiento de la ciudad, entre las cuales encontramos la pendiente de sus cerros. Algunos de los ascensores son tan característicos, que fueron declarados Monumentos Históricos Nacionales.



Texto del estudiante

## Matemática 8.º básico

El Texto del estudiante Matemática 8.º básico es una creación del Departamento de Estudios pedagógicos de Ediciones SM, Chile.

Dirección editorial  
**Arlette Sandoval Espinoza**

Dirección de arte  
**Carmen Gloria Robles Sepúlveda**

Coordinación editorial  
**María José Martínez Cornejo**

Coordinación de diseño  
**Gabriela de la Fuente Garfías**

Coordinación área Matemática  
**Carla Frigerio Cortés**

Diseño y diagramación  
**Yanira Fuentes Pérez**

Edición  
**Daniel Catalán Navarrete**

Diseño de portada  
**Estudio SM**

Ayudantía de edición  
**María Patricia Romante Flores**

Ilustraciones  
**Archivo editorial**

Autoría  
**Daniel Catalán Navarrete**  
**Bernardita Pérez Ureta**  
**Camila Prieto Córdoba**  
**Pedro Rupin Gutiérrez**

Producción fotográfica  
**Carlos Johnson Muñoz**  
**Archivo editorial**

Asesoría didáctica  
**Guadalupe Álvarez Pereira**

Gestión de derechos  
**Loreto Ríos Melo**

Corrección de estilo  
**María Paz Contreras Aguirre**  
**Loreto Navarro Loyola**

Jefatura de producción  
**Andrea Carrasco Zavala**

Desarrollo de solucionario  
**María de los Ángeles Tapia González**  
**Pablo León Velasco**

Este texto corresponde al Octavo año de Educación Básica y ha sido elaborado conforme al Decreto Supremo N° 614/2013, del Ministerio de Educación de Chile.

©2015 – Ediciones SM Chile S.A. – Coyuncura 2283 piso 2 – Providencia

ISBN: 978-956-349-952-0 / Depósito legal: 260990

Se terminó de imprimir esta edición de xxx.xxx ejemplares en el mes de xx 2017.

Impreso por A Impresores

Quedan rigurosamente prohibidas, sin la autorización escrita de los titulares del "Copyright", bajo las sanciones establecidas en las leyes, la reproducción total o parcial de esta obra por cualquier medio o procedimiento, comprendidos la reprografía y el tratamiento informático, y la distribución en ejemplares de ella mediante alquiler o préstamo público.

# Presentación

El texto que tienes en tus manos es una herramienta elaborada pensando en ti.

Tú serás el protagonista de tu propio aprendizaje y el texto será el vehículo que, junto al profesor o profesora, te oriente y te acompañe en la adquisición de los contenidos, el desarrollo de las habilidades, los procedimientos y las actitudes propios de la Matemática.

## 1 ¿Qué es la Matemática?

Es una herramienta fundamental que explica la mayoría de los avances de nuestra sociedad y les sirve de soporte científico. La matemática es dinámica, creativa, utiliza un lenguaje universal y se ha desarrollado como medio para aprender a pensar y para resolver problemas. Así es capaz de explicar los patrones y las irregularidades, la continuidad y el cambio.

## 2 ¿Qué aprenderé?

Aprenderás a resolver operaciones con números positivos y negativos, representarás, calcularás e interpretarás potencias y raíces cuadradas, comprenderás la multiplicación y factorización de expresiones algebraicas, modelarás situaciones mediante ecuaciones e inecuaciones, funciones lineales y afines, determinarás el área y el volumen de prismas y cilindros, aplicarás el Teorema de Pitágoras, organizarás e interpretarás datos y comprenderás las medidas de posición y la probabilidad. Además, aprenderás a utilizar estrategias de resolución de problemas para que te desenvuelvas en tu vida diaria.

## 3 ¿Cómo aprenderé?

Desarrollando tus habilidades de argumentación y comunicación de ideas, conclusiones y fundamentos, de selección y aplicación de modelos, de representación de conceptos en distintas modalidades y de resolución de problemas en distintos contextos de la vida diaria.

## 4 ¿Para qué?

Para desarrollar y confiar en tu propio razonamiento y para que seas capaz de aplicar los conceptos, los procedimientos y las habilidades propios de la matemática a la resolución de los problemas de tu vida cotidiana en contextos personales, profesionales y sociales.

## 5 ¿Qué espero yo?

---

---

---

---

Te invitamos a protagonizar tu aprendizaje y a tomar un lugar activo para construir un mundo cada vez mejor.

## Unidad 1 Números ..... 6

Sección 1 Operaciones con números positivos y negativos ..... 8	
¿Qué debo saber?..... 10	
<b>Lección 1</b> ¿Cómo multiplicar números enteros?..... 12	
Mural ..... 16	
<b>Lección 2</b> ¿Cómo dividir números enteros? ..... 18	
<b>Lección 3</b> ¿El cociente de dos números enteros es siempre entero? ..... 22	
<b>Lección 4</b> ¿Cómo sumar y restar fracciones y decimales negativos? ..... 26	
<b>Lección 5</b> ¿Cómo multiplicar números decimales y fracciones? ..... 30	
<b>Lección 6</b> ¿Cómo dividir números decimales y fracciones? ..... 34	
¿Cómo voy? ..... 38	
Resolución de problemas..... 40	
Vuelvo a mis procesos ..... 41	
Sección 2 Potencias y raíces cuadradas..... 42	
¿Qué debo saber?..... 44	
<b>Lección 7</b> ¿Cómo calcular una potencia de base y exponente naturales?..... 46	
Mural ..... 50	
<b>Lección 8</b> ¿Cómo multiplicar potencias de igual base?, ¿y de igual exponente? ..... 52	
<b>Lección 9</b> ¿Cómo dividir potencias de igual base?, ¿y de igual exponente? ..... 56	
<b>Lección 10</b> ¿Cuál es el valor de una potencia de exponente 0?..... 60	
<b>Lección 11</b> ¿Cómo se calcula una raíz cuadrada? ..... 62	
<b>Lección 12</b> ¿Cómo ubicar raíces cuadradas en la recta numérica? ..... 66	
¿Cómo voy? ..... 68	
Resolución de problemas..... 70	
Vuelvo a mis procesos ..... 71	
Sección 3 Variaciones porcentuales ..... 72	
¿Qué debo saber? ..... 74	
<b>Lección 13</b> ¿Cómo calcular una variación porcentual? ..... 76	
<b>Lección 14</b> ¿Cómo hacer cálculos usando variaciones porcentuales? ..... 80	
Mural ..... 84	
¿Cómo voy? ..... 86	
Resolución de problemas..... 88	
Vuelvo a mis procesos ..... 89	
Sintetizo mis aprendizajes..... 90	
Refuerzo mis aprendizajes ..... 91	
¿Qué aprendí? ..... 93	

## Unidad 2 Álgebra y funciones ..... 96

Sección 4 Expresiones algebraicas ..... 98	
¿Qué debo saber?..... 100	
<b>Lección 15</b> ¿Qué representa una expresión algebraica? ..... 102	
<b>Lección 16</b> ¿Cómo multiplicar expresiones algebraicas? ..... 106	
<b>Lección 17</b> ¿Cómo factorizar expresiones algebraicas? ..... 110	
Mural ..... 114	
¿Cómo voy? ..... 116	
Resolución de problemas..... 118	
Vuelvo a mis procesos ..... 119	
Sección 5 Ecuaciones e inecuaciones ..... 120	
¿Qué debo saber?..... 122	
<b>Lección 18</b> ¿Cómo modelar situaciones con ecuaciones? ..... 124	
<b>Lección 19</b> ¿Cómo resolver ecuaciones? ..... 128	
<b>Lección 20</b> ¿Cómo modelar situaciones con inecuaciones? ..... 132	
<b>Lección 21</b> ¿Cómo representar la solución de una inecuación? ..... 136	
Mural ..... 138	
<b>Lección 22</b> ¿Cómo resolver inecuaciones? ..... 140	
¿Cómo voy? ..... 146	
Resolución de problemas..... 148	
Vuelvo a mis procesos ..... 149	
Sección 6 Función lineal y función afín ..... 150	
¿Qué debo saber?..... 152	
<b>Lección 23</b> ¿Cómo relacionar la proporcionalidad directa y la función lineal? ..... 154	
<b>Lección 24</b> ¿Cómo representar y analizar una función lineal? ..... 158	
<b>Lección 25</b> ¿Cómo definir una función afín? ..... 164	
<b>Lección 26</b> ¿Cómo interpretar los parámetros de una función afín? ..... 168	
<b>Lección 27</b> ¿Cómo analizar y graficar una función afín? ..... 172	
<b>Lección 28</b> ¿Cómo modelar situaciones usando las funciones afín o lineal? ..... 176	
Mural ..... 180	
¿Cómo voy? ..... 182	
Resolución de problemas..... 184	
Vuelvo a mis procesos ..... 185	
Sintetizo mis aprendizajes ..... 186	
Refuerzo mis aprendizajes ..... 187	
¿Qué aprendí? ..... 189	

### Más allá de tu texto

Para descubrir nuevas actividades, pídele ayuda a tu profesor(a) para acceder a los recursos digitales que se sugieren en el Texto.



A lo largo de tu Texto también encontrarás códigos que podrás ingresar en la página <http://codigos.auladigital.cl> para visitar los sitios web sugeridos.

## Unidad 3 Geometría ..... 192

Sección 7 Área y volumen de prismas y cilindros .....	194
¿Qué debo saber?.....	196
<b>Lección 29</b> ¿Cómo estimar el volumen de prismas y cilindros?.....	198
<b>Lección 30</b> ¿Cómo calcular el volumen de prismas y cilindros?.....	200
<b>Lección 31</b> ¿Cómo estimar el área de prismas y cilindros?.....	204
<b>Lección 32</b> ¿Cómo calcular el área de prismas y cilindros?.....	206
<b>Lección 33</b> ¿Qué aplicaciones tiene el cálculo del volumen y área de prismas y cilindros?.....	210
Mural .....	214
¿Cómo voy? .....	216
Resolución de problemas.....	218
Vuelvo a mis procesos .....	219
Sección 8 Teorema de Pitágoras .....	220
¿Qué debo saber?.....	222
<b>Lección 34</b> ¿Qué es y cómo se verifica el teorema de Pitágoras? .....	224
<b>Lección 35</b> ¿Qué aplicaciones tiene el teorema de Pitágoras? .....	232
Mural .....	236
¿Cómo voy? .....	238
Resolución de problemas.....	240
Vuelvo a mis procesos .....	241
Sección 9 Transformaciones isométricas .....	242
¿Qué debo saber?.....	244
<b>Lección 36</b> ¿Qué es y cómo se realiza una traslación? .....	246
<b>Lección 37</b> ¿Qué es y cómo se realiza una reflexión? .....	250
<b>Lección 38</b> ¿Qué es y cómo se realiza una rotación? .....	254
<b>Lección 39</b> ¿Cómo realizar transformaciones isométricas en un <i>software</i> ? .....	258
<b>Lección 40</b> ¿Cómo componer transformaciones isométricas?.....	264
<b>Lección 41</b> ¿Cómo realizar teselaciones? .....	270
Mural .....	274
¿Cómo voy? .....	276
Resolución de problemas.....	278
Vuelvo a mis procesos .....	279
Sintetizo mis aprendizajes.....	280
Refuerzo mis aprendizajes .....	281
¿Qué aprendí? .....	283

## Unidad 4 Estadística y probabilidad .....286

Sección 10 Interpretación y comparación de gráficos.....	288
¿Qué debo saber?.....	290
<b>Lección 42</b> ¿Cómo interpretar la información de un gráfico? .....	292
<b>Lección 43</b> ¿Cómo comparar gráficos? .....	296
<b>Lección 44</b> ¿Cómo escoger el gráfico más adecuado para un requerimiento? .....	300
Mural .....	304
¿Cómo voy? .....	306
Resolución de problemas.....	308
Vuelvo a mis procesos .....	309
Sección 11 Medidas de posición .....	310
¿Qué debo saber?.....	312
<b>Lección 45</b> ¿Qué es un percentil?.....	314
<b>Lección 46</b> ¿Qué es un cuartil? .....	316
<b>Lección 47</b> ¿Cómo representar gráficamente los cuartiles?.....	318
<b>Lección 48</b> ¿Cómo construir diagramas de cajón usando un <i>software</i> ?.....	322
<b>Lección 49</b> ¿Cómo comparar muestras usando medidas de posición? .....	326
Mural .....	328
¿Cómo voy? .....	330
Resolución de problemas.....	332
Vuelvo a mis procesos .....	333
Sección 12 Probabilidades.....	334
¿Qué debo saber?.....	336
<b>Lección 50</b> ¿Qué es el principio multiplicativo?.....	338
<b>Lección 51</b> ¿Cuál es la cardinalidad de un espacio muestral? .....	340
<b>Lección 52</b> ¿Cómo calcular probabilidades usando el principio multiplicativo?.....	344
Mural .....	348
¿Cómo voy? .....	350
Resolución de problemas.....	352
Vuelvo a mis procesos .....	353
Sintetizo mis aprendizajes.....	354
Refuerzo mis aprendizajes .....	355
¿Qué aprendí? .....	357
Glosario.....	360
Bibliografía .....	362
Solucionario .....	363

▶ **Sección 1**

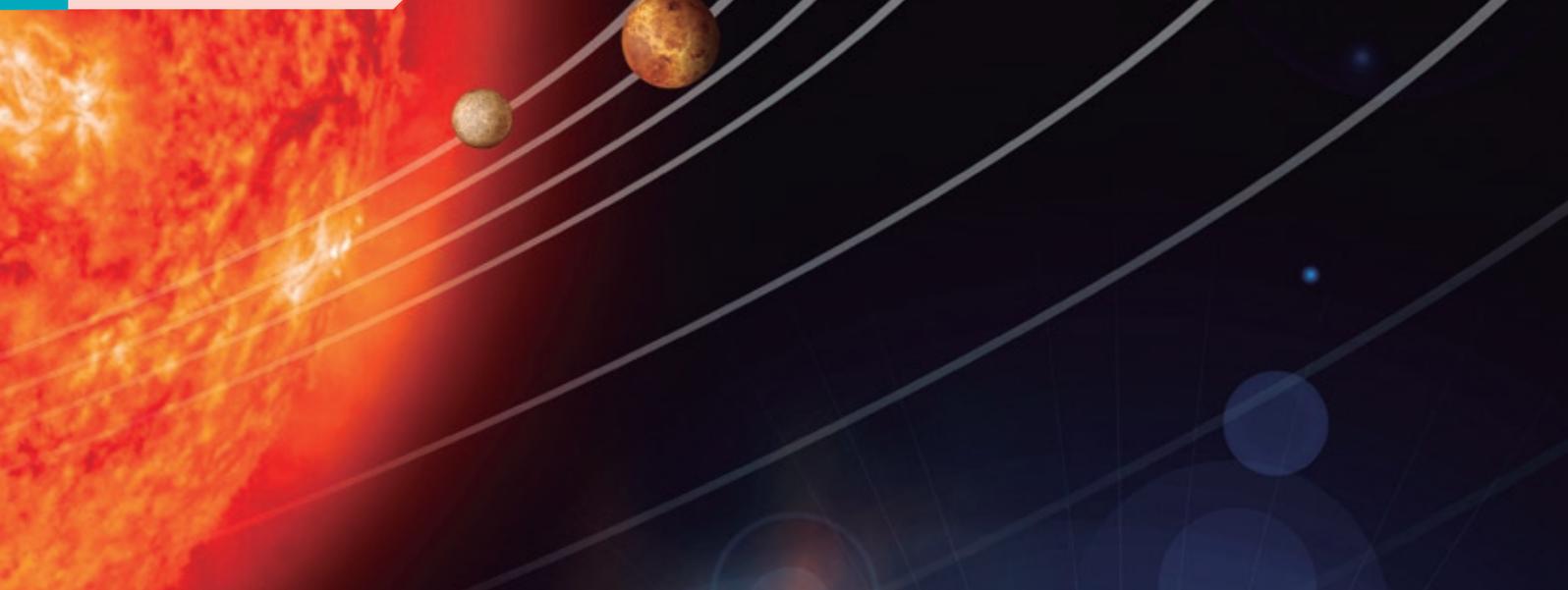
Operaciones con números positivos y negativos

▶ **Sección 2**

Potencias y raíces cuadradas

▶ **Sección 3**

Variaciones porcentuales



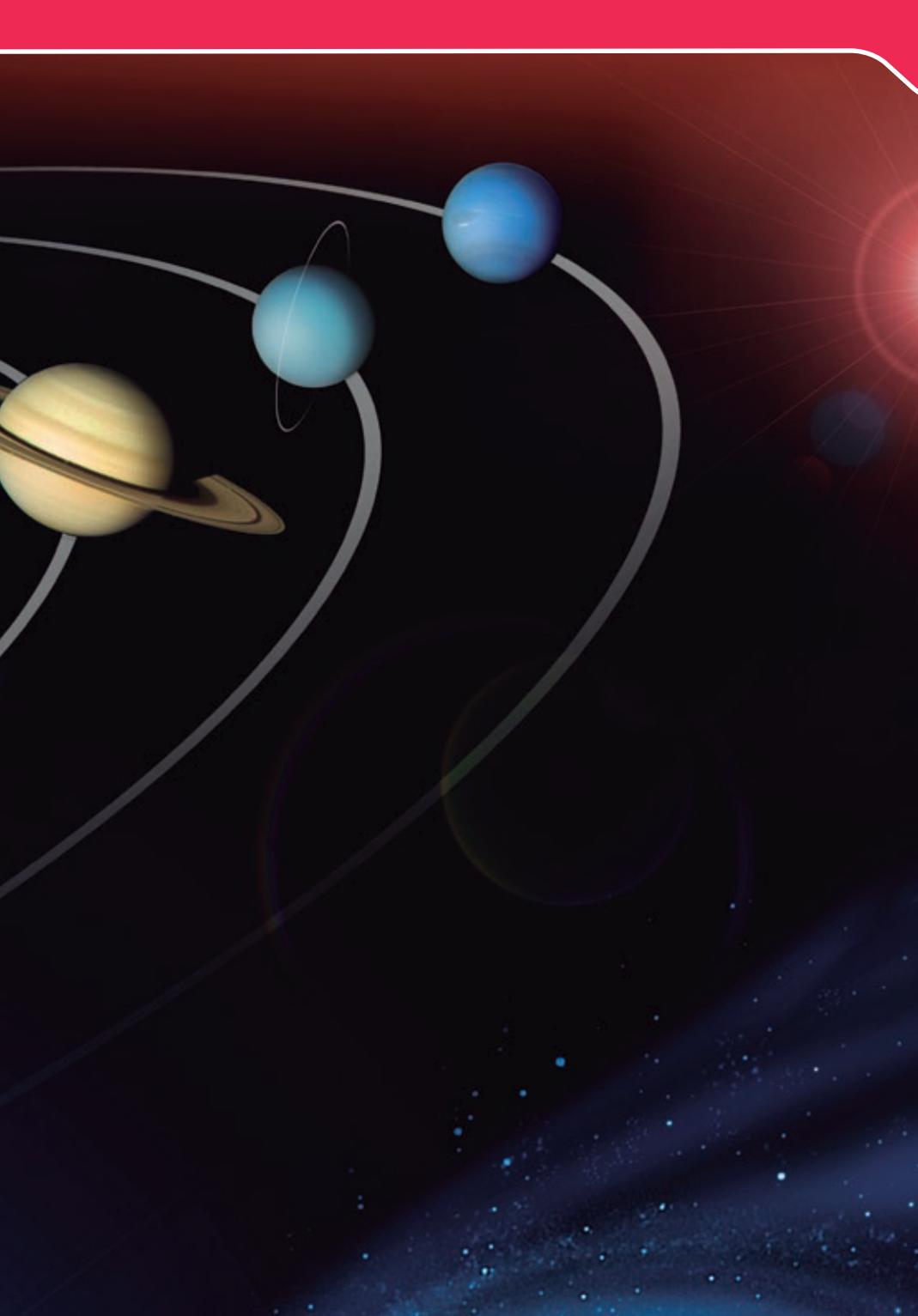
## Los números como herramienta descriptiva

Una virtud de los números es su capacidad para representar la realidad a partir de modelos simples y, muchas veces, intuitivos. Un caso notable es la predicción de las posiciones de los planetas del sistema solar respecto del Sol realizada a través de la ley conocida como Titius-Bode. La ley dice que si sumamos 4 unidades a cada término de la secuencia 0, 3, 6, 12, 24, 48, ..., y luego dividimos los resultados por 10, obtenemos los siguientes números:

0,4   0,7   1,0   1,6   2,8   5,2   ...

Y, precisamente, estos números se acercan a los valores de las distancias aproximadas al Sol de los principales cuerpos masivos de su entorno (medidas en UA, unidades astronómicas). Es así como Mercurio, Venus, la Tierra y Marte se encuentran a 0,38; 0,72; 1 y 1,52 UA del Sol, respectivamente.

¿Qué regularidad existe entre los términos de la secuencia inicial, a partir del segundo? Descríbela y calcula el séptimo término.



### ¿Qué aprenderé?

- Comprender la multiplicación y la división de números enteros, números decimales y fracciones.
- Explicar la multiplicación y la división de potencias de base y exponente natural.
- Comprender las raíces cuadradas.
- Reconocer y representar variaciones porcentuales.

### ¿Para qué?

- Resolver problemas de tu vida diaria usando números enteros, números decimales y fracciones.
- Representar operaciones y números de diferentes maneras.
- Usar las potencias para simplificar situaciones numéricas y resolverlas.
- Estimar medidas usando raíces cuadradas.
- Comprender situaciones cotidianas en que hay variaciones porcentuales y resolver problemas relacionados.

### Actitudes

- Abordar creativamente la resolución de problemas.
- Demostrar interés y rigurosidad en la resolución de problemas.
- Trabajar en equipo.

¿Qué temas de la unidad te parecen interesantes?, ¿por qué?

¿En qué siglo se formuló la ley de Titius-Bode? ¿Cuál era la profesión de sus descubridores? Investiga.

¿A cuántos kilómetros equivale 1 UA? ¿Existen cuerpos masivos a aproximadamente 2,8 y 5,2 UA del Sol? ¿Cuáles? Investiga.

¿Es aplicable la ley de Titius-Bode a todos los cuerpos masivos del Sistema Solar? ¿Qué opinas de su capacidad predictiva? Investiga.

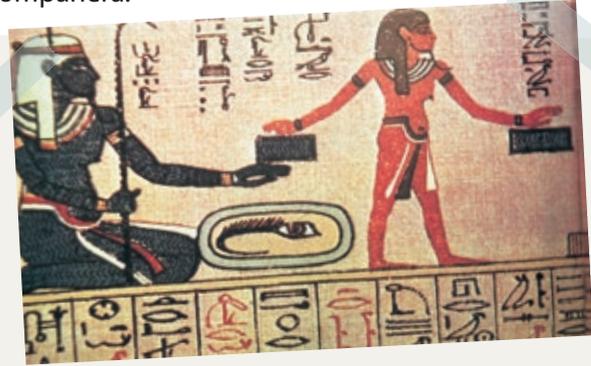
# Operaciones con números positivos y negativos

## Activo ideas previas

1. Lee la información y coméntala con un compañero o compañera.

Los números han surgido a lo largo de la historia por la necesidad del ser humano de contar, medir y repartir, entre otras. Los primeros números que se utilizaron fueron los naturales, sin embargo, estos no son suficientes para representar todas las situaciones cotidianas. Por esta razón, surgieron otros números como los enteros, las fracciones, los números decimales, etc.

El primer documento en que se hace referencia a las fracciones es un papiro egipcio que data de 1900 a. C. (¡hace casi 4000 años!) y fue escrito por un escriba llamado Ahmes. Este papiro muestra las serias dificultades que tuvieron los antiguos egipcios para darles significado a las fracciones con numerador distinto de 1. Los griegos, inicialmente, tuvieron esta misma dificultad.



Los babilonios trabajaron con fracciones sin imponerse ninguna limitación para el numerador, pero como ya estaban influidos por el uso de instrumentos de medición cuya base era 60, tuvieron tendencia a usar fracciones cuyo denominador fijo era 60.

## Responde las preguntas junto a tu compañero o compañera.

- a. ¿En qué situación cotidiana han usado fracciones? Expliquen.
- b. Los griegos representaban fracciones mediante la suma de fracciones de numerador 1. ¿Cuál sería la representación griega de cinco sextos?
- c. ¿Qué civilizaciones antiguas trabajaron con fracciones negativas? Investiguen y expongan sus resultados.

## Activo conceptos clave

2. A continuación, se presentan algunos conceptos clave de esta sección. Úsalos para responder las preguntas.

números enteros  
adición

multiplicación  
sustracción

división  
regla de los signos

- a. ¿Conoces algunos de ellos?, ¿cuáles?
- 
- b. ¿Cuáles conceptos están asociados a conjuntos numéricos y cuáles a operaciones?
- 
- c. ¿Qué concepto es nuevo para ti? y ¿qué características crees que tiene?
-

## Pienso mis procesos

Responde de acuerdo a lo que conoces.

¿Qué número te permitiría expresar la cantidad de pizza que se representa en la imagen?

¿Qué operación debes resolver para calcular a cuántos pesos equivalen 12 euros?

1 euro (€) = 703,56 pesos



¿Qué operaciones con fracciones y decimales has resuelto en cursos anteriores?

¿Qué operaciones con números negativos no sabes resolver?

¿Cuáles son las metas que esperas alcanzar al finalizar esta sección?

¿Qué conocimientos previos crees que usarás en esta sección?

Activa tus conocimientos previos respondiendo las preguntas laterales y luego resuelve las actividades. Para terminar, registra tus logros.

¿Qué procedimiento aplicas para sumar y restar números enteros?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
14 correctas o más	menos de 14 correctas

¿Qué errores cometiste?

### Resolver adiciones y sustracciones de números enteros

1 Resuelve las adiciones y sustracciones. (10 puntos)

- |                 |                        |
|-----------------|------------------------|
| a. $5 + (-3)$   | f. $19 + (-32)$        |
| b. $-12 + (-5)$ | g. $27 - (-24)$        |
| c. $-15 + 6$    | h. $-31 - (-17)$       |
| d. $-4 + 9$     | i. $-7 + (-5) - (-12)$ |
| e. $8 - 14$     | j. $-12 - (-4) + 9$    |

2 Escribe el número que completa correctamente cada operación. (8 puntos)

- |                                    |                                       |
|------------------------------------|---------------------------------------|
| a. $-3 + \underline{\quad} = -3$   | e. $18 + \underline{\quad} = 8$       |
| b. $2 - \underline{\quad} = -4$    | f. $\underline{\quad} - 4 = -11$      |
| c. $-5 - (-5) = \underline{\quad}$ | g. $4 - \underline{\quad} + (-4) = 4$ |
| d. $\underline{\quad} + (-7) = 7$  | h. $-2 - \underline{\quad} + 4 = 7$   |

3 Indica el signo del resultado de cada operación. (6 puntos)

- |             |                 |                |
|-------------|-----------------|----------------|
| a. $4 - 7$  | c. $-2 - (-3)$  | e. $-6 + (-1)$ |
| b. $-8 + 3$ | d. $15 + (-20)$ | f. $-3 - 9$    |

¿Qué haces para transformar una fracción en un número decimal?

¿Y un número decimal en fracción?

### Relacionar fracciones y decimales positivos

4 Completa la tabla con las fracciones o números decimales equivalentes, según corresponda. (8 puntos)

Fracción	Número decimal
$\frac{8}{5}$	
	1,4
$\frac{13}{4}$	
	0,01
$\frac{3}{8}$	
	5,25
$\frac{41}{10}$	
	0,625

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
5 correctas o más	menos de 5 correctas

¿Qué errores cometiste?

¿Cómo sumas dos fracciones de distinto denominador?

¿Qué relación existe entre las operaciones de multiplicación y división?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
12 correctas o más	menos de 12 correctas

¿Qué errores cometiste?

¿Qué pasos sigues para resolver un problema?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
3 correctas o más	menos de 3 correctas

¿Qué errores cometiste?

¿Por qué crees que los cometiste?

### Resolver operaciones con fracciones y decimales positivos

5 Calcula el resultado de las operaciones con fracciones. (8 puntos)

a.  $\frac{1}{3} + \frac{5}{6}$

e.  $\frac{1}{2} \cdot \frac{15}{11}$

b.  $\frac{3}{8} + \frac{7}{12}$

f.  $\frac{12}{35} \cdot \frac{10}{9}$

c.  $\frac{15}{8} - \frac{5}{4}$

g.  $\frac{24}{17} \cdot \frac{16}{3}$

d.  $\frac{23}{30} - \frac{17}{18}$

h.  $\frac{42}{25} \cdot \frac{35}{2}$

6 Calcula el resultado de las operaciones con decimales. (12 puntos)

a.  $1,07 + 2,5$

g.  $5,5 : 0,25$

b.  $0,5 - 1,8$

h.  $2,4 : 0,08$

c.  $2,01 + 2,1 + 2,001$

i.  $0,2 \cdot 2,8 : 2$

d.  $3 - 1,5 - 0,5$

j.  $(0,4 + 0,1) \cdot 0,3$

e.  $1,5 \cdot 0,5$

k.  $(2,5 - 1,1) : 2$

f.  $0,001 \cdot 150$

l.  $0,8 \cdot (1,4 + 0,6 - 0,2)$

### Resolver problemas

7 Resuelve los problemas con números enteros. (3 puntos)

- El precio de un producto baja \$ 200 y luego vuelve a bajar otros \$ 400. ¿Cuántos pesos ha bajado en total?
- Un submarino que está a 2000 m de profundidad debe ascender 1450 m por una alerta. Cuando finaliza esta alerta, vuelve a descender 730 m. ¿A qué profundidad se encuentra ahora el submarino?
- A las 5:00 se registró una temperatura de  $-3^{\circ}\text{C}$ . A las 7:00 la temperatura había bajado  $4^{\circ}\text{C}$ , y a las 12:00 subió  $9^{\circ}\text{C}$ . Si a las 16:00 bajó  $1^{\circ}\text{C}$ , ¿cuál era la temperatura a esa hora?

8 Resuelve los problemas con fracciones. (2 puntos)

- Un agricultor cosechó 300 000 choclos, de los cuales  $\frac{2}{5}$  los vendió en distintas ferias de Santiago y el resto a una cadena de supermercados. ¿Cuántos choclos vendió a la cadena de supermercados?
- La prueba semestral que rindió Carmen constaba de 36 preguntas. Ella está segura de que contestó correctamente cuatro sextos del total. ¿Cuántas preguntas cree que contestó correctamente?

# Lección 1

► **Propósito**  
Comprender la multiplicación de números enteros.

## ¿Para qué?

Muchas situaciones cotidianas pueden representarse mediante números enteros negativos. Por ejemplo, los saldos negativos en cuentas bancarias, la disminución constante de temperaturas, la profundidad del hábitat de diversos animales marinos, etc.

## Palabras clave

Multiplicación

Números enteros

## Ayuda

La multiplicación de dos números enteros puede representarse en la recta numérica considerando que el primer factor indica el número de veces que se repite el segundo factor en la suma reiterada.

¿Cómo resolverías la multiplicación  $-4 \cdot 5$ ?

¿Obtendrías el mismo resultado que  $5 \cdot (-4)$ ?

¿Qué propiedad de la multiplicación podrías aplicar para responder?

## ¿Cómo multiplicar números enteros?

Dos biólogos marinos, simulando en el laboratorio las condiciones climáticas de la Antártica, aplicaron a una muestra de flora marina un descenso de  $4^\circ\text{C}$  por hora entre las 15:00 y las 20:00.

### Situación 1 Representando en la recta numérica

#### ¿Cuál fue la variación total de temperatura durante la simulación?

Para responder, podemos representar los descensos de temperatura usando números negativos. Así, el número  $-4$  indicará un descenso de  $4^\circ\text{C}$ .

**Paso 1** Observa que, como entre las 15:00 y las 20:00 transcurren 5 horas, entonces se generan 5 descensos consecutivos de 4 grados cada uno. Por lo tanto, debes resolver la multiplicación:

$$5 \cdot (-4)$$

**Paso 2** Dibuja una recta numérica y ubica la posición del 0. Desde ahí, traza una flecha de 4 unidades de longitud que apunte hacia la izquierda, para evidenciar que el número que se repetirá en la suma reiterada es negativo.



**Paso 3** Repite 5 veces esta flecha, poniendo una flecha a continuación de la otra. Señala la posición en la recta numérica a la que apunta la última flecha.



Como la posición señalada con verde es el resultado de la multiplicación, entonces:

$$5 \cdot (-4) = \underline{\hspace{2cm}}$$

Y como una variación negativa de temperatura indica un descenso, la respuesta a la pregunta es:

**R:** El descenso de temperatura durante la simulación fue de  $20^\circ\text{C}$ .

Escribe para completar el enunciado:

Al multiplicar un número positivo, como \_\_\_\_\_, por un número negativo, como \_\_\_\_\_, (o viceversa), obtengo el número \_\_\_\_\_, que es \_\_\_\_\_.

**Situación 2 Representando de manera concreta**

¿Cuál es el resultado de la multiplicación  $-6 \cdot (-3)$ ?

Para representar la multiplicación de números negativos usaremos tarjetas rectangulares, cada una con un 1 escrito en una cara y un  $-1$  escrito en la otra. Además, para usar las tarjetas daremos una regla para la multiplicación por el factor 1 y por el factor  $-1$ :

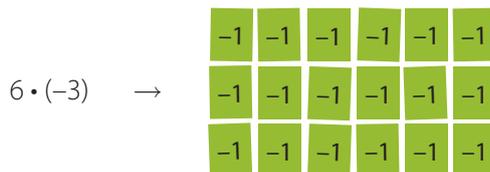


- Si hay que multiplicar por 1 un ordenamiento dado de tarjetas, las tarjetas involucradas permanecen tal y como se encuentran sobre la mesa.
- Si hay que multiplicar por  $-1$  un ordenamiento dado de tarjetas, las tarjetas involucradas se invierten dejando a la vista las caras que estaban ocultas.

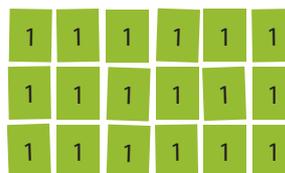
**Paso 1** Aplica la regla de multiplicación obtenida en la situación 1 para establecer que  $-6 = -1 \cdot 6$ . Por lo tanto, puedes escribir:

$$-6 \cdot (-3) = -1 \cdot 6 \cdot (-3)$$

**Paso 2** Representa el producto  $6 \cdot (-3)$  construyendo un ordenamiento rectangular de 6 tarjetas por 3 tarjetas, todas con el  $-1$  en su cara superior.



**Paso 3** Aplica la regla definida para multiplicar por el factor  $-1$ . En este caso, se invierten las tarjetas del ordenamiento.



**Paso 4** Suma los valores de las caras visibles de las tarjetas.

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 = 18$$

Por lo tanto:

**R:** El resultado de la multiplicación  $-6 \cdot (-3)$  es 18.

Escribe para completar el enunciado:

Al multiplicar un número negativo, como \_\_\_\_\_, por otro número negativo, como \_\_\_\_\_, obtengo el número \_\_\_\_\_, que es \_\_\_\_\_.

**Ayuda**

Para multiplicar números enteros en forma aritmética, puedes multiplicar los valores absolutos de los números y aplicar la regla de signos que has ido deduciendo en estas aplicaciones.

**Ampliando**

Algunas propiedades de la multiplicación son:

- Conmutatividad  
 $a \cdot b = b \cdot a$
- Asociatividad  
 $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
- Existencia de neutro  
 $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$
- Existencia de absorbente  
 $a \cdot 0 = 0 \cdot a = 0$

¿Cuál es el resultado de la multiplicación  $6 \cdot (-3)$ ?  
¿Coincide con la suma de los valores de las tarjetas del ordenamiento?

**Ampliando**

El valor absoluto de un número  $a$  se indica como  $|a|$  y se define por:

$$|a| = a, \text{ si } a \geq 0$$

$$|a| = -a, \text{ si } a < 0$$

Por lo tanto, siempre se cumple que  $|a| \geq 0$ .

También puede considerarse  $|a|$  en la recta numérica como la distancia entre el punto  $a$  y el 0.

**Para concluir**

Para **multiplicar números enteros** puedes usar representaciones concretas, la recta numérica o aplicar las reglas de multiplicación de números naturales y determinar el signo del producto a partir de la siguiente regla de signos:

$$\begin{array}{l} + \cdot + \\ - \cdot - \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} + \cdot + \\ - \cdot - \end{array}} \right\} +$$

$$\begin{array}{l} + \cdot - \\ - \cdot + \end{array} \left. \vphantom{\begin{array}{l} + \cdot - \\ - \cdot + \end{array}} \right\} -$$

**Argumenta y comunica**

- Explica a un compañero o a una compañera cómo resolverías la multiplicación  $-1 \cdot (-1)$  con las tarjetas usadas en la situación 2.
- ¿Cuál es el resultado de  $-1 \cdot (-1) \cdot (-1)$ ? Piénsalo y redacta el desarrollo completo del cálculo de este producto en tu cuaderno.

Repaso

- Calcula los productos de números naturales.
  - $5 \cdot 2$
  - $8 \cdot 9$
  - $23 \cdot 4$
  - $16 \cdot 9$
  - $12 \cdot 15$
  - $43 \cdot 60$
- Resuelve las adiciones y sustracciones de números enteros.
  - $-1 + 5 + (-2)$
  - $-67 - (-98 - 12)$
  - $5 + (-2) + (-5)$
  - $-23 - (-12 - 19)$
  - $-[34 + (-5) + (-3)]$
  - $-12 + (-3) + 26 + (-1)$
  - $-[-1 - 2 - 3 - (-5)]$
  - $25 + (-30) - (-4)$
  - $-8 - [37 - (-3)] - (-2)$

3. Resuelve los problemas.

- Una persona tiene una deuda de \$44870 por un préstamo que pidió a su banco. Cierta día pagó \$30000, pero al día siguiente volvió a pedir otro préstamo, ahora de \$50000. ¿Cuál es el nuevo monto total de su deuda?
- Un buzo profesional se sumerge a 40 m de profundidad. Desde aquí, sube 10 m para observar un cardumen y luego vuelve a descender 60 m más. ¿A cuántos metros de profundidad se encuentra el buzo?

Práctica guiada

4. Resuelve las multiplicaciones representando con las tarjetas de valor -1.

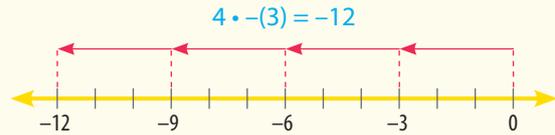
$$2 \cdot (-4) = -8 \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline -1 & -1 & -1 & -1 \\ \hline \end{array}$$

- $4 \cdot (-3)$
- $8 \cdot (-2)$
- $7 \cdot (-6)$
- $9 \cdot (-2)$

5. Completa la tabla.

Número	-9	5	4	-2
Doble	-18	10		-4
Triple	-27			
Cuádruple	-36		16	

6. Representa las multiplicaciones en la recta numérica.



- $4 \cdot 3$
- $5 \cdot (-2)$
- $3 \cdot (-5)$
- $2 \cdot (-4)$
- $2 \cdot (-10)$
- $5 \cdot (-8)$

7. Completa con los factores correctos.

$$9 \cdot (-3) = -27$$

- $\square \cdot 1 = -3$
- $\square \cdot (-15) = -90$
- $12 \cdot \square = 36$
- $\square \cdot (-7) = 28$
- $5 \cdot \square = -100$
- $-8 \cdot \square = -8$
- $2 \cdot \square = -144$
- $2 \cdot \square = -70$
- $\square \cdot (-12) = 540$
- $-3 \cdot \square \cdot 6 = 630$
- $2 \cdot \square \cdot 1 = -2$
- $\square \cdot (-1) \cdot 5 = 0$

8. Resuelve las operaciones combinadas respetando su prioridad.

$$45 - 2 \cdot (-1) - 4 = 45 - (-2) - 4 = 45 + 2 - 4 = 47 - 4 = 43$$

- $12 \cdot (-8) + 5$
- $3 \cdot (-1) - 5 \cdot 1$
- $-7 \cdot (-1) - [4 \cdot (-8) + 1]$
- $-(23 - 8 \cdot 5) \cdot (-2)$
- $-3 \cdot \{51 - [40 \cdot 5 - 2 \cdot (-4)] + 6\}$
- $-12 - 2 + 5 \cdot 25 \cdot (-3) + 5 \cdot (-1)$

9. En cada caso, identifica tres factores que tengan como producto el número señalado.

$$-28 = 2 \cdot 7 \cdot (-2)$$

- 6
- 18
- 14
- 24
- 39
- 45
- 81
- 45
- 0
- 1500
- 1
- 65000

10. Determina, sin calcular, el signo de cada producto.

$$-2 \cdot (-2)$$

El producto de dos números negativos tiene signo positivo.

- $-1 \cdot 7$
- $-4 \cdot 9$
- $-8 \cdot (-12)$
- $2 \cdot (-10)$
- $3 \cdot 6 \cdot 2$
- $7 \cdot (-4) \cdot 1$

## Aplica

## 11. Resuelve los problemas.

- a. Una cámara de frío que contiene bacterias se encuentra a  $-45^{\circ}\text{C}$ . Un día muy caluroso la temperatura de la cámara asciende  $2^{\circ}\text{C}$  cada 20 minutos que transcurren, ya que presenta fallas en su funcionamiento.
- ¿Cuál será la temperatura de la cámara de frío tras 80 minutos?
  - ¿Cuál será la temperatura de la cámara de frío tras 2 horas?
  - Si a las 16:00 del día siguiente, tras reparar la falla, la temperatura de la cámara es  $5^{\circ}\text{C}$  y desde ese momento empieza a descender  $3^{\circ}\text{C}$  por cada 10 minutos transcurridos, ¿cuál será la temperatura de la cámara a las 17:20?
  - ¿Qué estrategia usaste para resolver los problemas anteriores? ¿Podrías usar otra?, ¿cuál?
- b. Durante 5 días el nivel de agua de una represa disminuyó 7 cm diariamente. Después llovió por 6 días y el nivel de agua subió 4 cm diarios.
- ¿Cómo podrías determinar la diferencia del nivel de agua de la represa entre el primer y el último día de los 11 considerados? ¿Cuál es esa diferencia?
  - Si el nivel de agua de la represa antes de los días de lluvia era 100 cm, ¿cuál es el nivel después de esos 6 días?
- c. De una cuenta de un banco se descontaron 5 cuotas de \$ 22 000. A partir del sexto mes, el dueño de la cuenta abonó \$ 30 000 durante 7 meses. Finalmente, debido a una emergencia, el cliente retiró los \$ 140 000 que quedaban de saldo. ¿Cuánto dinero había inicialmente en la cuenta?

- d. Martina y Javier compraron un frigorífico para mantener sus quesos a una temperatura constante. Cuando eran las 15:00 se enchufó por primera vez a la corriente eléctrica y el frigorífico estaba a temperatura ambiente ( $23^{\circ}\text{C}$ ). Luego, la temperatura fue descendiendo  $3^{\circ}\text{C}$  por cada hora.
- ¿A qué temperatura estaba el frigorífico a las 19:00?
  - La temperatura ideal para mantener fríos los quesos es  $5^{\circ}\text{C}$ . ¿Cuántas horas debieron transcurrir para que se alcanzara dicha temperatura?

12. Describe el procedimiento. Describe paso a paso el procedimiento que puedes seguir para resolver el ejercicio de operaciones combinadas:

$$21 - 65 \cdot 7 - \{5 - 81 \cdot (-9)\}$$

13. Argumenta. María dice que el producto entre dos números enteros es siempre un número natural. ¿Es correcto lo que afirma María?, ¿por qué? Justifica tu respuesta usando un ejemplo o un contraejemplo, según corresponda.

14. Descubre el error. Observa el cálculo que realizó Ana:

$$-21 \cdot (-5) \cdot 3 = -(21 \cdot 5 \cdot 3) = -315$$

¿Cuál fue el error que cometió Ana? Explica.

15. Crea. Inventa un problema que involucre la multiplicación de enteros de distinto signo, utilizando un contexto de puntos a favor o en contra. Propón a un compañero o a una compañera que lo resuelva y describe la estrategia que ocupó. ¿Fue la estrategia más adecuada?, ¿por qué?

## Reflexiono

1. ¿Es suficiente con establecer que  $-1 \cdot (-1) = 1$  para demostrar que el producto de cualquier par de números negativos es positivo? Piénsalo y calcula otros productos de números negativos, como  $-3 \cdot (-2)$  y  $-7 \cdot (-10)$ .
2. ¿Conoces situaciones cotidianas que puedan representarse mediante la multiplicación de números negativos? Enuméralas y explícalas.
3. ¿Qué diferencias y qué semejanzas tienen la regla de los signos de la multiplicación de números enteros y la regla de signos que se puede asociar a la adición de números enteros? Piénsalo y haz un listado.

## Refuerzo

1. ¿Cómo multiplicas un número entero negativo por un número entero negativo? Explica usando alguno de los métodos estudiados.
2. ¿Cuál es la regla de los signos en la multiplicación? Escríbela en tu cuaderno y memorízala.
3. Resuelve el ejercicio eliminando los paréntesis:  

$$-[-(-1)]$$
 Explica cada paso.
4. Resuelve la multiplicación  $5 \cdot (-6)$  usando la recta numérica. Describe el procedimiento paso a paso.

# Discos matemáticos

## Jugando con los signos

Sabemos que al multiplicar dos números de igual signo el resultado es un número positivo, pero ¿qué signo tendría el resultado de multiplicar 20 números de igual signo?, ¿o el de multiplicar 91 veces el mismo número? Las respuestas son claras si el número es positivo, pero ¿qué sucede si el número es negativo? El siguiente experimento te ayudará a responder estas preguntas.

### Materiales

- 4 discos de cartón corrugado.
- 4 broches con patas o alfileres.
- Cartón rectangular para fijar los 4 discos.

Paso  
**1**



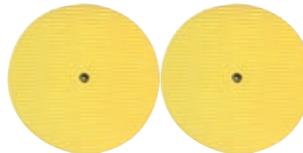
Con un broche, fija uno de los discos en el cartón rectangular. El broche debe quedar en el centro del disco, de manera que pueda girar.



Paso  
**2**



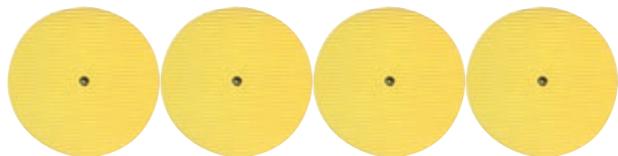
Fija otro disco en el cartón de tal manera que quede en contacto con el anterior.



Paso  
**3**



Coloca los otros discos de la misma forma.

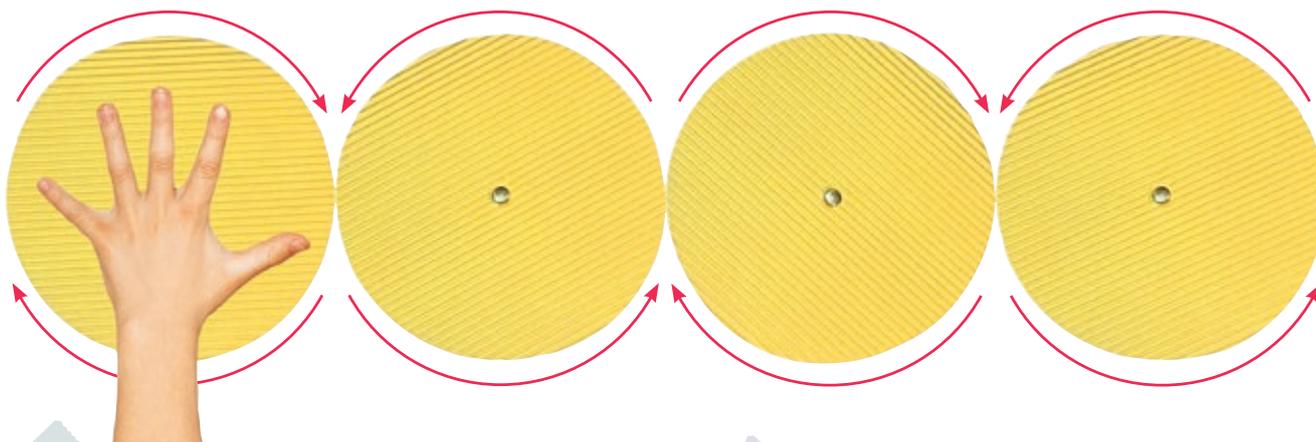


Paso  
**4**



Haz girar el primer disco, ya sea en sentido antihorario u horario, y considera la convención de signos que aparece en el recuadro.

Por ejemplo, si hacemos girar el primer disco en sentido negativo, es decir, en sentido horario, debido al contacto, el segundo disco se moverá en sentido contrario al primero, es decir, en sentido positivo. Luego, el segundo disco provocará que el tercer disco gire en sentido negativo, y así sucesivamente.



### Actividad grupal

Reúnanse en grupos de 3 o 4 integrantes para realizar las actividades propuestas. Luego, comuniquen sus respuestas al curso.

1. Si el giro del primer disco es en sentido negativo, ¿qué signo tendrá el giro del quinto disco? ¿Y el del sexto?
2. ¿Cómo afecta el sentido del giro del primer disco al de los restantes?
3. ¿Qué relación hay entre la posición del disco y el sentido del giro?

Ahora, asocien el entero  $-1$  a cada contacto entre discos y relacionen la acción de girar el primer disco con la operación de multiplicación. Por ejemplo, si hay 4 discos conectados, tenemos 3 contactos y, por lo tanto, tres factores  $-1$  y se cumple que:

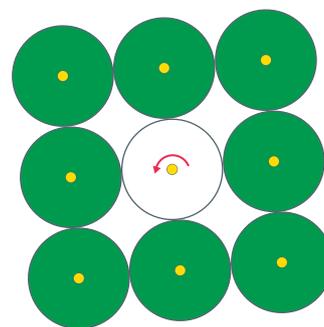
$$-1 \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$$

Como la aplicación de cierto giro al primer disco provoca un giro en sentido contrario en el cuarto disco, asociamos a este producto el signo negativo.

4. Si se alinean 7 discos y se gira el primero en sentido positivo, ¿en qué sentido girará el séptimo disco? ¿Cómo relacionan esto con el producto de factores  $-1$ ?
5. ¿Qué relación tiene el uso de estos discos con la multiplicación de  $-1$  por sí mismo una cantidad par o impar de veces? Redacten una regla general.
6. Si en una fila de discos conectados el que está en la posición 25 gira en sentido negativo, ¿en qué sentido girará el disco que está en la posición 129?

### ¡DESAFÍO!

¿Cuál sería el sentido del giro de los discos verdes si el blanco se gira en sentido positivo?



# Lección 2

## ► Propósito

Comprender la división de números enteros.

### ¿Para qué?

En Ciencias, así como en otras ramas del conocimiento, se definen muchas relaciones en las que es necesario resolver divisiones de números enteros. Por ejemplo, al calcular la velocidad media, la aceleración media, etc.

### Palabras clave

División

Cociente

Números enteros

## ¿Cómo dividir números enteros?

Los científicos están preocupados por la disminución de la población de pez payaso, probablemente debido a la contaminación de su hábitat. Durante el primer mes de observaciones la población bajó en 2 individuos, el segundo mes en 4 y el tercer mes en 6.

Representando estas variaciones con números negativos, podemos afirmar que durante los tres meses la población de peces payaso ha disminuido en:

$$n = -2 + (-4) + (-6) \\ n = -12$$

Donde el signo negativo indica que la población disminuyó en 12 individuos.



### Situación 1 Representando de manera concreta

¿Cuál fue la variación promedio de la población de pez payaso en los 3 meses?

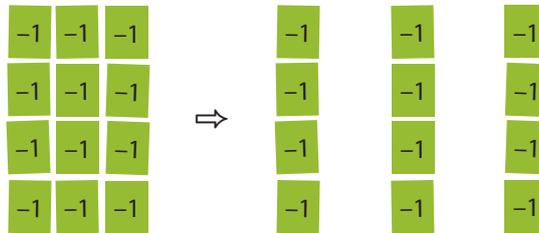
Usaremos las tarjetas de valor  $-1$  para responder.

**Paso 1** Escribe la fórmula del promedio  $\bar{x} = n : 3$ , usando los datos conocidos,  $n = -12$ .

$$\bar{x} = -12 : 3$$

¿Qué signo piensas que tendrá el cociente de esta división?

**Paso 2** Usa las tarjetas de valor  $-1$  para resolver la división  $-12 : 3$ . Para ello, divide el grupo de 12 fichas en tres grupos con la misma cantidad de fichas:



**Paso 3** Determina el cociente de la división. Cada grupo quedó compuesto por cuatro tarjetas, y si sumas sus valores, obtienes que el cociente de la división es  $-4$ .

¿Coincide el signo del resultado con tu predicción?

**R:** La variación promedio de la población de pez payaso fue de  $-4$  peces por mes.

¿Cómo interpretas este resultado?

Escribe para completar el enunciado:

En una división, si el dividendo es negativo y el divisor es positivo, el cociente es \_\_\_\_\_.

### Ayuda

El promedio mensual  $\bar{x}$  se calcula dividiendo la variación total de la población de pez payaso, que podemos llamar  $n$ ; por el número de meses en que ocurrió esa variación, que podemos llamar  $t$ .

$$\bar{x} = n : t$$

**Situación 2 Representando en la recta numérica**

¿Cuál es el resultado de la división  $-12 : 3$ ?

Ahora resolveremos en la recta numérica la división que permitió calcular la velocidad media de la situación 1.

**Paso 1** Dibuja una recta numérica y ubica la posición del 0. Luego, dibuja a partir de ella una flecha de 12 unidades de longitud que apunte hacia la izquierda, para evidenciar que se trata de un valor negativo.



**Paso 2** Divide la flecha de 12 unidades en 3 flechas de igual longitud. Señala con verde la posición de la recta numérica a la que apunta la primera flecha.



Como la posición señalada con verde indica el cociente, entonces:

**R:** El resultado de la división  $-12 : 3$  es  $-4$ .

**Ayuda**

El divisor en una división indica la cantidad de partes iguales en que hay que dividir el dividendo. Por ejemplo, en la división  $-12 : 3$ , el 3 (divisor) indica que hay que dividir  $-12$  (dividendo) en 3 partes iguales.

¿Por qué debes dividir la flecha mayor en 3 flechas iguales?

**Situación 3 Aplicando la operación inversa**

¿Cuál es el signo del cociente de la división  $-48 : (-6)$ ?

Para resolver, usaremos la operación inversa de la división, la multiplicación.

**Paso 1** Plantea la pregunta, ¿qué número multiplicado por  $-6$  da  $-48$ ?

$$? \cdot (-6) = -48$$

**Paso 2** Aplica la regla de los signos para la multiplicación de números enteros para determinar el número desconocido.

Completa el enunciado: Como  $8 \cdot (-6) = -48$ , entonces  $-48 : (-6) = \underline{\hspace{2cm}}$ .

¿Cuál es el producto de  $-8 \cdot (-6)$ ?

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial: **R:**

Completa el enunciado:

Al dividir un número negativo como  $\underline{\hspace{1cm}}$ , por otro número negativo como  $\underline{\hspace{1cm}}$ , obtengo el número  $\underline{\hspace{1cm}}$ , que es  $\underline{\hspace{2cm}}$ .

**Ayuda**

Para dividir números enteros, puedes dividir los valores absolutos de los números y aplicar la regla de los signos usada en la multiplicación.

**Para concluir**

Para **dividir números enteros** puedes usar representaciones concretas, la recta numérica o aplicar la operación inversa de la división, y determinar el signo del cociente aplicando una regla de signos similar a la usada en la multiplicación de números enteros:

$$\begin{array}{l} + : + \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right. \\ - : - \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} + : - \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right. \\ - : + \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right. \end{array}$$

**Argumenta y comunica**

Observa la siguiente igualdad:

$$8 : (-2) = -8 : 2$$

¿Es correcta? ¿Existe alguna diferencia entre las dos divisiones?, ¿y entre sus cocientes? Piénsalo y coméntalo con un compañero o una compañera. Respondan en conjunto y expliquen al curso.

Repaso

1. Calcula el cociente.

- a.  $15 : 5$
- b.  $81 : 9$
- c.  $549 : 9$
- d.  $192 : 12$
- e.  $1288 : 56$
- f.  $12789 : 21$

2. Resuelve los problemas.

- a. La temperatura en cierta ciudad a las 7:00 era de  $-5^{\circ}\text{C}$ . A las 9:00 aumentó  $2^{\circ}\text{C}$  y luego a las 11:00 disminuyó en  $3^{\circ}\text{C}$ . ¿Cuál era la temperatura en la ciudad a las 11:00?
- b. El ascensor de un edificio de oficinas se encuentra en el piso 10. Primero sube un piso, luego baja seis pisos, luego baja 2 pisos y, por último, sube tres pisos más. ¿A cuántos pisos de donde estaba en un comienzo se encuentra el ascensor?

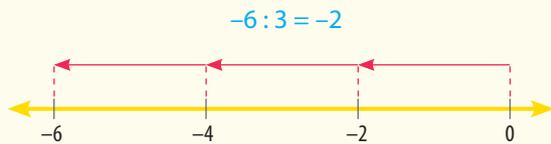
Práctica guiada

3. Calcula las divisiones representándolas con las tarjetas de valor  $-1$ .



- a.  $-14 : 7$
- b.  $-18 : 9$
- c.  $-15 : 3$
- d.  $-24 : 6$
- e.  $-30 : 10$
- f.  $-25 : 5$

4. Representa y resuelve las divisiones en la recta numérica.



- a.  $10 : 2$
- b.  $18 : 9$
- c.  $-12 : 4$
- d.  $-15 : 5$
- e.  $-22 : 11$
- f.  $-39 : 13$
- g.  $-21 : 7$
- h.  $-33 : 3$

5. Completa la tabla.

Número	-60	24		
Mitad	-30		-18	
Tercera parte	-20	8		
Cuarta parte	-15			-42

6. Completa con el término que falta.

$3 : (-1) = -3$

- a.  $\square : 2 = -2$
- b.  $-15 : \square = 5$
- c.  $\square : 7 = 3$
- d.  $\square : (-8) = -7$
- e.  $-24 : \square = -4$
- f.  $-20 : \square = -5$
- g.  $\square : (-9) = -9$
- h.  $\square : (-1) = 1$
- i.  $0 : \square = 0$
- j.  $\square : (-3) = -9$
- k.  $-50 : \square = 5$
- l.  $\square : (-8) = -9$
- m.  $-14 : \square = 7$
- n.  $\square : 3 = 0$

7. Resuelve las operaciones combinadas respetando su prioridad.

$$\begin{aligned}
 &45 - 2 : (-1) - 5 : (-5) - (8 - 35 : 7) + 2 \\
 &= 45 - 2 : (-1) - 5 : (-5) - (8 - 5) + 2 \\
 &= 45 - 2 : (-1) - 5 : (-5) - 3 + 2 \\
 &= 45 + 2 + 1 - 3 + 2 \\
 &= 47 + 1 - 3 + 2 \\
 &= 48 - 3 + 2 \\
 &= 45 + 2 \\
 &= 47
 \end{aligned}$$

- a.  $8 : (-4) + 1$
- b.  $8 - 10 : (-5)$
- c.  $12 : (-3) + 5$
- d.  $14 : (-2) - 7$

- e.  $8 - 6 : (-3)$   
 f.  $-5 + 18 : (-9)$   
 g.  $-1 - 1 : (-1)$   
 h.  $4 : 3 + 8 : (-2)$   
 i.  $-20 \cdot 3 - 80 : 20$   
 j.  $-21 : (-3) - [4 \cdot (-8) + 1]$   
 k.  $-(23 - 8 \cdot 5) : (-17)$   
 l.  $-3 \cdot \{51 - [40 : 5 - 80 : (-10)] + 6\}$   
 m.  $-12 - 2 + 5 \cdot 25 \cdot (-3) + 25 : (-5)$   
 n.  $81 : (-9) + 100 : (-5) - 32 \cdot 5$   
 ñ.  $- \{ - [ (-1) \cdot 1 - 1 : (-1) - 1 ] + 1 : (-1) \}$   
 o.  $-85 : 5 + 9 \cdot 2 : (-2) - 36 : (-1) - 15$   
 p.  $1 - 2 : [2 - 3 \cdot 15 - 16 : (-4)] - 2$

**8. Señala si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).**

F Al dividir dos números enteros, siempre se obtiene como cociente un número natural.

- a. \_\_\_\_ Al dividir un número entero por cero, se obtiene como cociente un número natural.  
 b. \_\_\_\_ Al dividir dos números enteros negativos se obtiene un número negativo.  
 c. \_\_\_\_ Al dividir dos números enteros positivos, siempre se obtiene un número positivo.  
 d. \_\_\_\_ Al dividir dos números enteros de distinto signo se obtiene un resultado con signo positivo.

**Aplica**

**9. Resuelve los problemas.**

- a. Un juego tiene tres etapas y en cada etapa se pueden obtener puntos a favor o en contra. El puntaje total del juego corresponde a la suma de los puntajes de todas las etapas. Si al final del juego un participante tiene un total de  $-1800$  puntos y en las tres etapas obtuvo el mismo puntaje, ¿cuántos puntos consiguió en cada etapa?

- b. Un contenedor para petróleo mide  $30$  m de altura. En  $3$  horas se puede llenar completamente.
- Si el nivel de petróleo fue subiendo en forma uniforme, ¿cuántos metros subió cada hora hasta llenar el contenedor?
  - Si más tarde se extrae el petróleo del contenedor, de manera que el nivel disminuye  $6$  m cada hora, ¿en cuántas horas se vaciará completamente?
- c. Un avión que se encontraba a  $1800$  metros de altura desciende  $660$  metros en  $30$  segundos.
- ¿A qué altura quedó el avión?
  - ¿Cuál fue la variación de altura por segundo?
  - Si el piloto del avión, luego del descenso, decide aterrizar y disminuye en  $20$  metros su altura por cada segundo que transcurre, ¿en cuántos segundos más aterrizará el avión?

**10. Describe el procedimiento.** Describe paso a paso el procedimiento para calcular la siguiente operación:

$$-4 - 21 : 7 - [3 - 35 : (-5)]$$

- 11. Argumenta.** Eva dice que el cociente entre dos números enteros puede ser un número decimal. ¿Es correcto lo que afirma Eva?, ¿por qué?
- 12. Descubre el error.** Diego escribe en su cuaderno: "Si el cociente entre dos números enteros es igual a cero, entonces los números enteros son opuestos aditivos". ¿Cuál es el error que cometió Diego?
- 13. Crea.** Inventa un problema que se resuelva con la operación  $-15 : 3$ . Relaciónalo con variaciones en el precio de los combustibles. Describe los pasos que seguirías para resolverlo y la estrategia que más convendría utilizar.

**Reflexiono**

1. ¿Cómo podrías demostrar que  $-1 : (-1) = 1$  utilizando solo la regla de los signos para la multiplicación de números enteros? Desarrolla la demostración.
2. ¿Conoces alguna situación que pueda representarse usando una división de números negativos? Explícala.

**Refuerzo**

1. Describe cómo calcularías el cociente de  $108 : (-6)$  usando la operación inversa de la división.
2. ¿Cuál es la prioridad de las operaciones al resolver un ejercicio que contiene las cuatro operaciones básicas?
3. Describe paso a paso cómo resolverías la división  $-12 : 4$  usando la recta numérica.

► **Propósito**  
Explorar el cociente de números enteros.

### ¿Para qué?

En muchos cálculos de la vida cotidiana es importante considerar que el cociente de dos números enteros podría no ser entero. Por ejemplo, al repartir equitativamente una cierta cantidad de dinero a un grupo de personas, ¿podemos darle a una de ellas un número no entero de pesos? ¿Qué podemos hacer en este caso?

### Palabras clave

Número decimal periódico

Número decimal semiperiódico

Fracción

## ¿El cociente de dos números enteros es siempre entero?

El mercurio (Hg) es un elemento químico que puedes encontrar dentro de los termómetros comunes. La temperatura de fusión del mercurio a presión atmosférica es de  $-39\text{ }^{\circ}\text{C}$ . En un laboratorio se enfriará una muestra de mercurio que está a  $-29\text{ }^{\circ}\text{C}$  hasta su fusión. La disminución de temperatura se realizará en forma uniforme durante 4 minutos.



### Situación 1 Representando en la recta numérica

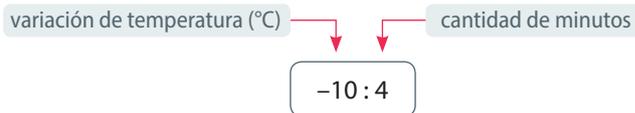
Si se controla que la disminución de temperatura de la muestra sea uniforme, ¿cuál será la variación de su temperatura en 1 minuto?

El descenso de temperatura medido en grados Celsius podemos calcularlo como la diferencia entre la temperatura final y la inicial:

$$-39 - (-29) = -10$$

¿Cuál sería tu desarrollo para resolver  $-39 - (-29)$  y encontrar la diferencia?

Y, para responder la pregunta, resolveremos en la recta numérica la siguiente división:



**Paso 1** Con una regla dibuja una recta numérica y señala la posición de los números enteros desde el 0 hasta el  $-10$ .

**Paso 2** Dibuja una flecha de 10 unidades de longitud con origen en 0 y que apunte hacia la izquierda.

**Paso 3** Divide la flecha dibujada en el paso 2 en 4 flechas de la misma longitud y determina el punto de la recta donde apunta la primera flecha.



Si observas la línea segmentada verás que cae sobre la posición de  $-2,5$  en la recta numérica. Por lo tanto:

**R:** Durante el enfriamiento, la temperatura de la muestra de mercurio variará  $-2,5\text{ }^{\circ}\text{C}$  por minuto.

¿El resultado de la división es un número entero?

Escribe para completar el enunciado:

En esta actividad, el cociente de la \_\_\_\_\_ de los números enteros  $-10$  y  $4$  es un número decimal negativo.

## Situación 2 Resolviendo aritméticamente una división

Otro de los experimentos diseñados es bajar  $-14\text{ }^{\circ}\text{C}$  la temperatura de otra muestra de mercurio uniformemente durante 3 minutos. ¿Cuál fue el descenso por minuto, si en cada minuto la variación fue la misma?

**Paso 1** Escribe la división usando la simbología conocida.

$$-14 : 3$$

**Paso 2** Resuelve la división usando el algoritmo y los valores absolutos de los números:

	1	4	:	3	=	4,	6	6	6	...
		2	0							
			2	0						
				2	0					
					...					

¿Qué indican los puntos suspensivos en el cociente?

**Paso 3** Antes de terminar siempre aplica la regla de los signos para la división de números enteros. Esta regla indica que el cociente es negativo.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

### Ampliando

El número decimal infinito periódico  $-4,666\dots$  se expresa como  $-4,\overline{6}$ , donde la línea superior indica los dígitos que se repiten indefinidamente. En este caso, se dice que el 6 es el período del número.

## Situación 3 Resolviendo aritméticamente otra división

¿Qué tipo de número es el cociente de la división  $7 : (-30)$ ?

**Paso 1** Resuelve la división usando el algoritmo y los valores absolutos de los números.

	7	:	3	0	=					

¿Cuál es el primer dígito del cociente dado que  $7 < 30$ ?

**Paso 2** Aplica la regla de los signos para la división de números enteros. Esta regla indica que el cociente es negativo.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

### Ampliando

El número decimal infinito semiperiódico  $-0,233\dots$ , se expresa como  $-0,2\overline{3}$ , donde 2 es el anteperíodo y 3 es el período.

### ► Para concluir

Al dividir dos números enteros podemos obtener un **número entero** o un **número decimal positivo** o **negativo**, que también podemos expresar como **fracción**.

### Argumenta y comunica

¿De qué depende que el cociente de la división de dos números enteros sea o no entero? Ejemplifica resolviendo por escrito  $-12 : 4$  y  $-16 : 5$ . Comparte y compara tu respuesta con las del resto del curso.

Repaso

1. Relaciona las columnas.

Número		Magnitud
a. -7,5%	_____	A. Temperatura
b. -15,9 V	_____	B. Nivel del mar
c. -416,5 m	_____	C. Rebaja de precio
d. -5,7°C	_____	D. Voltaje

2. Ordena los números enteros en forma decreciente.

- a. -4, 0, 5, 9, -9, -1
- b. 3, 5, 1, -7, 10, -3
- c. -1, 1, -2, 2, -3, 3
- d. 18, -25, -67, 95, 10

3. Señala qué operaciones tienen como resultado un número entero y su signo.

- a.  $-3 : 3$
- b.  $-8 \cdot 1$
- c.  $5 \cdot 0$
- d.  $-45 : (-9)$
- e.  $\frac{0}{5}$
- f.  $-18 : 2$
- g.  $23 : 2$
- h.  $-1 : 5$
- i.  $0,2 \cdot 2$

Práctica guiada

4. A partir de las divisiones, determina las fracciones irreducibles o números mixtos.

La división  $75 : (-6)$  se puede representar con el número  $\frac{25}{-2} = \frac{-25}{2} = -\frac{25}{2} = -12\frac{1}{2}$ .

- a.  $12 : 10$
- b.  $-15 : 25$
- c.  $-21 : 14$
- d.  $18 : (-4)$
- e.  $-24 : (-32)$
- f.  $15 : (-6)$
- g.  $105 : (-70)$
- h.  $-512 : (-384)$

5. Escribe cada fracción como un número decimal.

$$\frac{23}{100} = 0,23$$

- a.  $\frac{1}{5}$
- b.  $\frac{1}{8}$
- c.  $\frac{-1}{4}$
- d.  $\frac{-1}{3}$
- e.  $\frac{-1}{9}$
- f.  $\frac{14}{9}$
- g.  $\frac{7}{-12}$
- h.  $\frac{5}{27}$
- i.  $\frac{7}{-36}$

6. Ubica los números decimales en la recta numérica y responde las preguntas.



- a. 0,5 y 1,2
- b. -0,3 y -0,6
- c. 0,7 y -0,4
- d. -1,2 y 0,1
- e. -1,5 y -0,1
- f. -2 y 0,3
- g. ¿Cómo determinas la relación de orden entre los números decimales de distinto signo?
- h. ¿Cómo determinas la relación de orden entre los números decimales de igual signo?
- i. ¿Qué puedes concluir de lo anterior?

7. Ubica las fracciones en la recta numérica y responde.



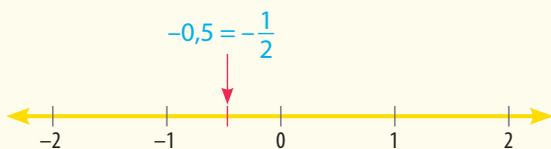
Entonces,  $-\frac{15}{2} < -\frac{13}{2}$ .

- a.  $\frac{2}{7}$    $-\frac{2}{5}$
- b.  $-\frac{10}{7}$    $\frac{1}{4}$
- c.  $-\frac{11}{3}$    $-\frac{12}{3}$
- d.  $\frac{1}{3}$    $-\frac{5}{4}$
- e.  $-\frac{7}{6}$    $-1,1$
- f.  $-5$    $\frac{1}{2}$

- g. ¿Cómo determinas la relación de orden entre las fracciones de distinto signo?
- h. ¿Cómo determinas la relación de orden entre las fracciones de igual signo?
- i. ¿Qué puedes concluir de lo anterior?

**8. Ubica en una misma recta numérica las fracciones y decimales que aparecen en la tabla.**

-0,125	-0,5	$\frac{1}{5}$	$-\frac{11}{10}$	-1,8
$-\frac{9}{5}$	0,2	$-\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{2}$	-1,1



¿Qué números se ubican en el mismo lugar?

**Aplica**

**9. Resuelve los problemas.**

- a. Un corredor desea completar la prueba de 5 km en 24 minutos. Actualmente tarda 30 minutos en recorrer esa distancia. ¿Cuántos metros por minuto es capaz de correr actualmente? ¿Cuántos metros por minuto deberá recorrer para cumplir con su meta?
- b. Una aeronave experimental en movimiento va a una rapidez de 15,5 m/s y 20 segundos después va a una rapidez de 3,4 m/s. Si la variación se mantuvo constante:
- ¿Cuál fue la variación de rapidez por cada segundo?
  - ¿Cuál fue su rapidez después de 15 segundos?
  - Aproximadamente, ¿cuántos segundos demorará en detenerse?
  - Representa los números decimales obtenidos como fracciones.

- c. Una buceadora nada a una profundidad de 10,5 metros y decide descender hasta una profundidad de 26,1 metros. Si su descenso es constante:
- Representa las profundidades entre las que se mueve la buceadora usando fracciones negativas.
  - ¿Cuántos metros descendió la buceadora?
  - ¿Cuántos metros por segundo recorre si demora 60 segundos en completar su descenso?
  - ¿En qué posición se encuentra la buceadora a los 6 segundos si demora 60 segundos en completar su descenso?
  - ¿Cuántos metros por segundo recorrería si demorara 100 segundos en completar su descenso?

**10. Descubre el error.** Una estudiante ordenó un grupo de números en orden decreciente de la siguiente manera:

$$0,125 > 0,041\bar{6} > \frac{1}{2} > \frac{1}{16} > \frac{1}{24}$$

¿Cuál fue el error que cometió la estudiante? Descríbelo y ordena correctamente los números.

- 11. Crea.** Inventa un problema cuya solución se pueda obtener resolviendo la operación  $-128 : 6$ . Resuélvelo y describe la estrategia que ocupaste. ¿Puedes resolverlo aplicando otra estrategia?, ¿cuál?
- 12. Describe el procedimiento.** Marisol debe resolver la división  $-22 : 24$  y, como el valor absoluto del dividendo es menor que el valor absoluto del divisor, no sabe cómo hacerlo. Describe el procedimiento que seguirías tú para obtener este producto.

**Reflexiono**

1. ¿Qué condiciones se deben cumplir para que el cociente de una división de números enteros sea un número entero? Piénsalo y luego escribe en tu cuaderno algunos ejemplos.
2. ¿Un número decimal siempre se puede representar como una fracción? Piensa y luego discútelo con tus compañeros y compañeras.

**Refuerzo**

1. Explica el procedimiento que se realiza en la recta numérica para dividir un número entero negativo por un número entero positivo.
2. Indica el tipo de número que se puede obtener como resultado de la división de dos números enteros.
3. Señala las diferencias y semejanzas que existen entre un número decimal periódico y uno semiperiódico.

# Lección 4

## ► Propósito

Representar adiciones y sustracciones de fracciones y decimales positivos y negativos.

## ¿Para qué?

Las fracciones y sus equivalentes decimales se pueden ocupar para indicar intervalos de tiempo. Así,  $\frac{1}{2}$  h representa media hora,  $\frac{1}{4}$  h representa un cuarto de hora, 0,75 h representa tres cuartos de hora, etc. Y, por ejemplo, para representar atrasos o momentos anteriores a una hora dada, podemos usar fracciones y números decimales negativos, y sus operaciones aritméticas.

## Palabras clave

Adición

Sustracción

Fracciones negativas

Número decimales negativos

¿Cómo puedes confirmar que la posición indicada con verde es la que ocupa el número  $-\frac{5}{12}$ ?

## ¿Cómo sumar y restar fracciones y decimales negativos?

Felipe asiste a un taller de Lenguaje. Como se han producido reiterados atrasos, la profesora ideó una manera de registrarlos y dar la posibilidad de recuperar las horas perdidas. Ella anota un atraso como tiempo negativo y las recuperaciones, como tiempo positivo. Felipe lleva dos atrasos, que pueden representarse como  $-\frac{1}{4}$  h y  $-\frac{1}{6}$  h.

¿A cuántos minutos equivalen  $\frac{1}{4}$  y  $\frac{1}{6}$  h?

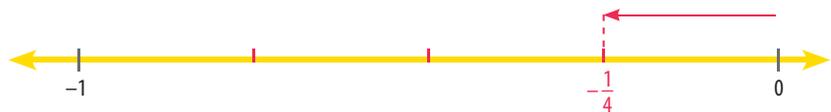
### Situación 1 Representando en la recta numérica

#### ¿Cuántos minutos de atraso ha acumulado Felipe?

Para responder, resolveremos en la recta numérica la adición de fracciones negativas:

$$-\frac{1}{4} + \left(-\frac{1}{6}\right)$$

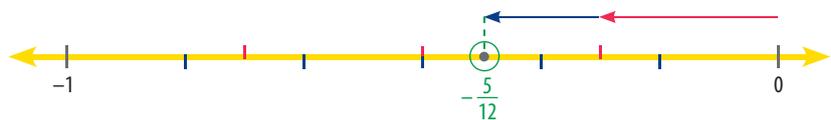
**Paso 1** Con tu regla dibuja una recta numérica, señala las posiciones del 0 y del  $-1$  y divide este intervalo en cuatro partes iguales. Señala las divisiones con color rojo y dibuja una flecha para representar el número  $-\frac{1}{4}$ .



**Paso 2** Divide el mismo intervalo en seis partes iguales, señala las divisiones con color azul y dibuja una flecha para representar el número  $-\frac{1}{6}$ .



**Paso 3** Ubica las flechas definidas, una después de la otra, e indica con color verde la posición señalada por la segunda flecha.



La posición destacada con verde indica el resultado de la adición.

**R:** Felipe ha acumulado un atraso que puede representarse como  $-\frac{5}{12}$  h, tiempo que equivale a 25 minutos.

¿Cómo transformas  $\frac{5}{12}$  de hora en 25 minutos?

**Situación 2** Sumando números de distinto signo en la recta numérica

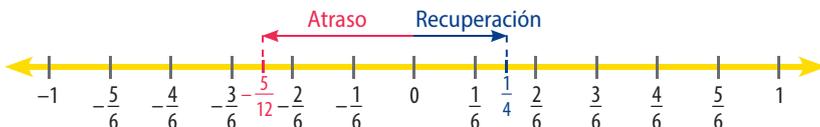
Considerando los atrasos de Felipe, ¿alcanza a recuperar el tiempo total si un día se queda 0,25 horas extras?

Para responder, primero transformaremos el número 0,25 en fracción:

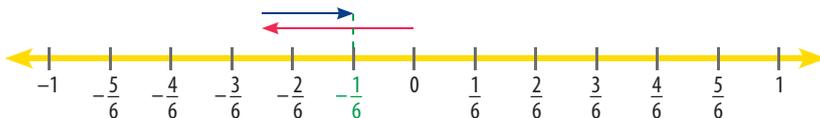
$$0,25 = \frac{1}{4}$$

**Paso 1** Dibuja una recta numérica y señala la posición de los números  $-1$ ,  $0$  y  $1$ . Luego, divídela en sextos.

**Paso 2** Representa el tiempo de recuperación con una flecha apuntando a la derecha, y el de atraso, con una flecha apuntando a la izquierda.



**Paso 3** Traslada la flecha de menor longitud, ubícala a continuación de la flecha de mayor longitud, y señala en la recta la posición a la que apunta.



La posición destacada con verde indica el resultado de la adición.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

¿Qué operación es necesario resolver para responder esta pregunta?

¿Cómo transformas 0,25 en  $\frac{1}{4}$ ?

¿Qué cálculos realizaste para responder?

**Situación 3** Resolviendo aritméticamente una diferencia

¿Cuál es la diferencia entre  $-\frac{3}{4}$  y  $-0,375$ ?

**Paso 1** Transforma el número  $-0,375$  en fracción y escribe la sustracción.

$$-\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{8}\right)$$

**Paso 2** Resuelve aplicando el algoritmo. No olvides que:  $a - b = a + (-b)$ , por lo que,  $a - (-b) = a + [ -(-b) ] = a + b$ , ya que,  $-(-b) = b$ .

$$-\frac{3}{4} - \left(-\frac{3}{8}\right) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{8} = -\frac{6}{8} + \frac{3}{8} = \frac{-6+3}{8} = -\frac{3}{8}$$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

¿Cómo transformas  $-0,375$  en  $-\frac{3}{8}$ ?

¿Cómo transformas  $-\frac{3}{4}$  en  $-\frac{6}{8}$ ? ¿Para qué se hace esta transformación?

**Para concluir**

**Adición:** si los sumandos tienen igual signo, se suman los valores absolutos y se conserva el signo de los sumandos. Si tienen distinto signo, se restan los valores absolutos y se conserva el signo del sumando de mayor valor absoluto.

**Sustracción:** se suman el minuendo y el inverso aditivo del sustraendo.

**Argumenta y comunica**

Cuando adicionas dos números de distinto signo, ¿puedes saber de antemano cuál es el signo de la suma?, ¿cómo? Explica y compara tu respuesta con la de un compañero o una compañera.

Repaso

1. Calcula las operaciones con números decimales.

- a.  $0,75 + 1,1$
- b.  $14,63 - 8,86$
- c.  $6,5 - 4,91$
- d.  $12,23 - 12,2$
- e.  $2,65 + 1,6$
- f.  $0,015 + 0,15$

2. Calcula las operaciones con fracciones.

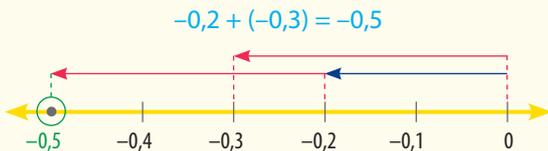
- a.  $\frac{1}{4} + \frac{1}{3}$
- b.  $\frac{6}{4} + \frac{1}{7}$
- c.  $\frac{8}{7} + \frac{3}{4} - \frac{1}{4}$
- d.  $\frac{6}{5} + \frac{2}{5} + \left(-\frac{5}{6}\right)$
- e.  $\frac{8}{3} - \frac{2}{9} + \frac{5}{6}$
- f.  $\frac{9}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \left(-\frac{2}{6}\right)$

3. Resuelve el problema.

Además de nitrógeno y oxígeno, la atmósfera contiene otros gases como el argón, el dióxido de carbono y el vapor de agua. Considerando las capas de la atmósfera más cercanas a la Tierra, el nitrógeno ocupa el 78,084% del espacio y el oxígeno, el 20,946%. ¿Cuál es el porcentaje del espacio que en conjunto ocupan el nitrógeno y el oxígeno?

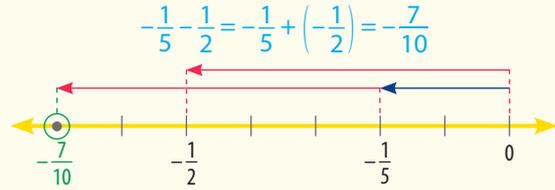
Práctica guiada

4. Usa la recta numérica para resolver las adiciones y sustracciones de números decimales.



- a.  $0,9 - 1,1$
- b.  $7,2 + (-9,4)$
- c.  $-1,4 + (-0,2)$
- d.  $-1,2 - 2,1$
- e.  $-0,2 - (-0,3)$
- f.  $2,2 + (-1,3)$

5. Representa las adiciones y sustracciones de fracciones en la recta numérica.



- a.  $\frac{4}{5} - \frac{3}{10}$
- b.  $-\frac{1}{2} - \frac{3}{4}$
- c.  $-\frac{9}{4} + \frac{1}{5}$
- d.  $-\frac{1}{2} - \left(-\frac{4}{5}\right)$
- e.  $-\frac{6}{5} + \left(-\frac{7}{10}\right)$
- f.  $\frac{3}{5} + \left(-\frac{3}{4}\right)$

6. Señala si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

F Las fracciones  $-\frac{2}{3}$  y  $-\frac{2}{3}$  son equivalentes.

- a.  La suma de dos números decimales siempre da como resultado un número decimal positivo.
- b.  Para cada número decimal existe otro número decimal tal que al sumarlos el resultado es 0.
- c.  Todas las fracciones pueden representarse como números decimales.
- d.  La desigualdad de fracciones  $\frac{-4}{5} \neq \frac{4}{-5}$  es correcta.

Aplica

7. Resuelve los problemas.

- a. Un submarino se encuentra a  $\frac{1}{5}$  de la profundidad máxima que puede alcanzar. Luego de unas horas se decide cambiar su profundidad a  $\frac{3}{4}$  de la profundidad máxima que puede alcanzar. ¿Cómo podrías calcular la distancia que recorrió en su descenso si la profundidad máxima que puede alcanzar es 2400 m? ¿Qué estrategia utilizarías para escribir el resultado como una fracción?

- b. El valor del dólar en agosto fue \$ 511,65 y en el mes de septiembre, \$ 502,97. ¿Qué número decimal representa la variación que tuvo el precio del dólar de agosto a septiembre?
- c. Arturo construyó una vara añadiendo una tras otra, tres cañas de bambú de 0,75 m, 0,45 m y 0,95 m de longitud, respectivamente. Si sumerge su vara en una laguna en forma perpendicular a la superficie del agua, ¿qué profundidad máxima puede alcanzar? Expresa tus resultados usando números enteros.
- d. La masa corporal de Javier a principios de enero era de 70,45 kg. La siguiente tabla muestra el aumento o disminución de su masa durante seis meses:

Mes	Masa (kg)
Enero	0,045
Febrero	-0,023
Marzo	-0,012
Abril	0,078
Mayo	0,004
Junio	-0,092

- ¿Qué significa que la variación de la masa de Javier haya sido de  $-0,023$  kg?
- ¿Cuál fue su masa al final de cada mes?
- ¿En cuántos kilogramos debe variar su masa en julio si quiere terminar ese mes con 65,5 kg?
- ¿En cuántos kilogramos varió su masa durante los tres primeros meses?
- ¿En cuántos kilogramos varió su masa durante los tres últimos meses?
- ¿Cuál fue la variación total de la masa corporal de Javier en los seis meses considerados?

- e. Una perforadora petrolera debía llegar a una profundidad de 1245 m, respecto de la superficie de la Tierra. El primer día de perforación la broca llegó a una profundidad de 408 m, el segundo día descendió verticalmente 635 m y el tercer día completó su tarea y llegó al punto final proyectado. ¿Cuántos metros recorrió la broca el tercer día?
- f. Un grupo de investigadores instaló equipos para medir la temperatura en cuatro puntos a diferentes profundidades de la Tierra. El punto A está a  $-22$  m respecto de la superficie, el punto B está a  $-58$  m, el punto C está a  $-101$  m y el punto D está a  $-118$  m.
- ¿Qué distancia separa los puntos A y C?
  - ¿Qué distancia separa los puntos B y D?
  - ¿Qué distancia separa los puntos A y D?

8. **Describe el procedimiento.** Explica paso a paso el procedimiento que seguirías para resolver las adiciones y sustracciones de fracciones y números decimales del siguiente ejercicio:

$$-\left(-\frac{7}{6} + (-0,2)\right) - \left(-\frac{3}{2} + (-0,1)\right)$$

9. **Argumenta.** Considera la sustracción de dos números decimales negativos. ¿El resultado siempre es un número decimal positivo? Justifica tu respuesta y ejemplifica.
10. **Crea.** Inventa un problema relacionado con profundidades en una piscina y que se pueda resolver con la operación  $-1\frac{1}{2} + (-0,75)$ . Destaca los datos relevantes de tu problema, resuélvelo y finalmente comprueba tu resultado.

### Reflexiono

1. Considera la suma de dos números fraccionarios negativos. ¿El resultado siempre se puede expresar como un número mixto? Ejemplifica y explica las condiciones que debe cumplir la fracción de la suma para poder ser expresada como número mixto.
2. Para resolver una adición que involucra fracciones y números decimales negativos, ¿qué estrategia de las que aprendiste utilizarías? Piénsalo, responde y justifica tu respuesta.

### Refuerzo

1. Describe detalladamente los pasos que debes seguir para sumar fracciones positivas y negativas usando la recta numérica.
2. Explica paso a paso cómo se resuelve la adición y la sustracción de números decimales positivos y negativos usando la recta numérica.
3. Escribe la regla de los signos que debes aplicar para resolver operaciones combinadas de fracciones y decimales positivos y negativos.

► **Propósito**  
Multiplicar números decimales y fracciones.

### ¿Para qué?

Existen fenómenos que pueden describirse usando multiplicaciones de números decimales o fraccionarios negativos y positivos. Estos fenómenos están relacionados con magnitudes continuas, tales como: posiciones en relación a un nivel de referencia (por ejemplo, el nivel del mar o de la superficie terrestre) o temperaturas en relación a un nivel 0 convencional.

### Palabras clave

Multiplicación  
Fracción  
Número decimal  
Regla de los signos

## ¿Cómo multiplicar números decimales y fracciones?

El pingüino papúa vive en la Antártica chilena y se alimenta principalmente de krill, calamares y peces pequeños. Para obtener su comida puede sumergirse en el mar hasta una profundidad de 0,25 km.

Un pingüino papúa se sumerge 0,05 km y descansa, luego avanza 0,05 km más y descansa, y finalmente 0,05 km hasta dar con su alimento.



### Situación 1 Usando la recta numérica para multiplicar

#### ¿A qué profundidad el pingüino encontró su alimento?

Para responder, representaremos las sumersiones mediante números negativos y usaremos la recta numérica para resolver la multiplicación:

cantidad de sumersiones  $\rightarrow$  posición alcanzada en cada sumersión

$$3 \cdot -0,05$$

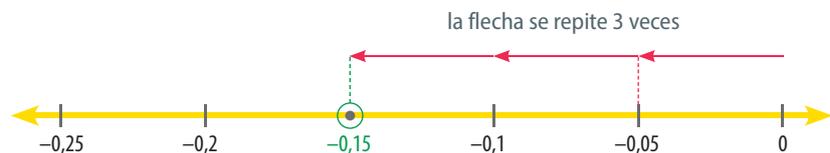
**Paso 1** Dibuja una recta numérica y señala la posición del 0 y del  $-0,25$ .

¿Por qué se ha señalado la ubicación de  $-0,25$  en la recta numérica?  
¿Qué representa?

**Paso 2** Dibuja una flecha de 0,05 unidades de longitud que apunte hacia la izquierda, para evidenciar que hablamos de un valor negativo.

**Paso 3** Ubica esta flecha en el origen y repítela 3 veces.

**Paso 4** Determina el punto final de la sucesión de flechas.



El punto final de la sucesión de flechas nos indica la posición alcanzada por el pingüino, es decir, la profundidad a la que encontró su alimento. Entonces:

**R:** El pingüino encontró su alimento a una profundidad de  $-0,15$  km, es decir, a 0,15 km bajo el nivel del mar.

¿A cuántos metros equivalen 0,15 km?  
¿Cómo lo calculas?

**Situación 2** Calculando aritméticamente un producto de decimales

¿Cuál es el resultado de la multiplicación de  $-0,2$  y  $-1,3$ ?

**Paso 1** Calcula el producto usando el algoritmo conocido para multiplicación de números decimales, considerándolos como valores positivos.

		0, 2	•	1, 3		
		0 6				
+	0 2					
	0, 2	6				

¿Cómo resolverías la multiplicación si uno de los factores fuera un número decimal y el otro fuera una fracción?

**Paso 2** Determina el signo del producto. En este caso, aplicando la regla de los signos para números enteros, el signo del producto será positivo.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Ampliando**

Para transformar una fracción en número decimal, debes dividir su numerador por su denominador. Es así como la expresión decimal de la fracción  $\frac{3}{8}$  es:  
 $3 : 8 = 0,375$

**Situación 3** Calculando aritméticamente un producto de fracciones

¿Cuál es el resultado de la multiplicación  $\frac{2}{5} \cdot \left(-\frac{7}{4}\right)$ ?

**Paso 1** Calcula el producto usando el algoritmo de la multiplicación de fracciones, considerándolas como números positivos. Simplifica si es posible.

Escribe para completar la multiplicación de fracciones:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{7}{4} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$$

**Paso 2** Determina el signo del producto. En este caso, aplicando la regla de los signos para números enteros, el signo del producto será negativo.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

¿Cuál sería el signo del producto si ambas fracciones fueran negativas?

**Para concluir**

Para **multiplicar números decimales y fracciones** puedes usar la recta numérica o el algoritmo de la multiplicación para esta clase de números. Al usar el algoritmo, debes aplicar la regla de los signos que aprendiste para los números enteros.

$$\begin{matrix} + \cdot + \\ - \cdot - \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} + \cdot + \\ - \cdot - \end{matrix}} \right\} + \qquad \begin{matrix} + \cdot - \\ - \cdot + \end{matrix} \left. \vphantom{\begin{matrix} + \cdot - \\ - \cdot + \end{matrix}} \right\} -$$

**Argumenta y comunica**

Observa estas multiplicaciones:

$$3 \cdot \left(\frac{-2}{3}\right) \qquad 3 \cdot \left(\frac{2}{-3}\right) \qquad 3 \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)$$

¿Cuál es el resultado de cada una de ellas? ¿Es el mismo? Piénsalo y discúte con un compañero o una compañera.

Repaso

1. Resuelve las operaciones con fracciones y decimales positivos.

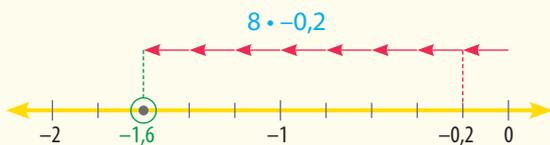
- a.  $0,15 \cdot 4$
- b.  $4,21 \cdot 0,07$
- c.  $3,6 \cdot \frac{3}{5}$
- d.  $\frac{7}{4} \cdot \frac{10}{21}$
- e.  $1\frac{7}{4} \cdot \frac{10}{21}$
- f.  $3,14 \cdot 3\frac{1}{4}$
- g.  $3\frac{1}{2} \cdot \left(2\frac{4}{5}\right)$
- h.  $5\frac{1}{4} \cdot 0,18 \cdot \frac{1}{2}$

2. Resuelve los problemas.

- a. Una motociclista avanza  $\frac{3}{5}$  de su recorrido por cada hora. ¿Qué fracción representa lo que llevará recorrido la motociclista en 1,5 horas de viaje? ¿Cuántas horas demorará en completar su recorrido?
- b. A un estacionamiento llegan alrededor de 20 automóviles por hora. ¿Cuántos automóviles habrán llegado al estacionamiento luego de  $3\frac{3}{4}$  h?
- c. Un vaso tiene una capacidad de 0,22 litros de líquido. Durante un paseo, Alejandra tomó 3 vasos de jugo de arándano, Felipe 2,5 vasos de jugo de pera, Federico 4 vasos de jugo de uva y Leticia medio vaso de jugo de naranja. ¿Cuántos litros de jugo tomó cada uno?

Práctica guiada

3. Representa y resuelve cada multiplicación en una recta numérica.



- a.  $7 \cdot -0,3$
- b.  $4 \cdot (-0,6)$
- c.  $3 \cdot -0,75$
- d.  $2 \cdot -\frac{3}{2}$
- e.  $4 \cdot \left(-\frac{4}{10}\right)$
- f.  $3 \cdot \left(-3\frac{3}{5}\right)$

4. Resuelve las multiplicaciones con decimales.

$$-2,15 \cdot 0,5 = -1,075$$

- a.  $4 \cdot (-0,75)$
- b.  $0,4 \cdot (-2,2)$
- c.  $-0,6 \cdot (-3,2)$
- d.  $-0,125 \cdot (-0,2) \cdot (-4)$

5. Resuelve las multiplicaciones con fracciones. Cuando corresponda, simplifica tachando factores del numerador y del denominador.

$$\frac{5}{6} \cdot \left(-\frac{9}{35}\right) = -\left(\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{35}\right) = -\frac{5 \cdot 9}{6 \cdot 35} = -\frac{\cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 3}{2 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{3} \cdot 7} = -\frac{3}{14}$$

- a.  $-\frac{14}{15} \cdot \frac{2}{3}$
- b.  $-\frac{6}{7} \cdot \left(-\frac{7}{12}\right)$
- c.  $\frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{6}{7}\right)$
- d.  $-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{5}{3}$

6. Resuelve las operaciones con números mixtos y fracciones. Cuando corresponda, simplifica tachando factores del numerador y del denominador.

$$4\frac{2}{3} \cdot \left(-4\frac{1}{2}\right) = \frac{14}{3} \cdot \left(-\frac{9}{2}\right) = -\left(\frac{14}{3} \cdot \frac{9}{2}\right) = -\frac{\cancel{2} \cdot 7 \cdot \cancel{3} \cdot 3}{\cancel{3} \cdot 2} = -21$$

- a.  $-4\frac{3}{5} \cdot \left(-\frac{10}{3}\right)$
- b.  $-\frac{4}{7} \cdot \left(-2\frac{1}{10}\right)$
- c.  $-4\frac{3}{8} \cdot \left(-\frac{24}{45}\right)$
- d.  $-2\frac{1}{3} \cdot \left(-3\frac{2}{5}\right) \cdot \left(-\frac{3}{2}\right)$

7. Resuelve las operaciones combinadas.

$$-\frac{1}{5} \cdot \left(-3\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot 7 = -\frac{1}{5} \cdot \left(-\frac{11}{3}\right) + \left(-\frac{1 \cdot 7}{4}\right) = \frac{1 \cdot 11}{5 \cdot 3} + \left(-\frac{7}{4}\right) = \frac{11}{15} - \frac{7}{4} = \frac{44 - 105}{60} = -1\frac{1}{60}$$

- a.  $-2\frac{4}{5} \cdot \frac{15}{2} \cdot \left(-\frac{1}{49}\right)$
- b.  $-0,3 \cdot \frac{9}{20} \cdot \left(-3\frac{1}{3}\right)$
- c.  $\left(-2\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) \cdot \left(-\frac{2}{5} - 0,2\right)$

8. Señala si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

**V** El producto de dos fracciones de distinto signo es negativo.

- a. \_\_\_\_ El producto de un decimal negativo y una fracción positiva es positivo.
- b. \_\_\_\_ La regla de los signos para la multiplicación y división se aplica para números enteros, decimales y fracciones.
- c. \_\_\_\_ El producto de dos números decimales negativos siempre es un número entero.
- d. \_\_\_\_  $-\frac{1}{2} \cdot [0,6 + (-2,1)] = -\frac{1}{2} \cdot 0,6 + \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (-2,1)$

#### Aplica

9. Resuelve los problemas.

- a. Una máquina excava un agujero avanzando 0,12 km cada hora.
- ¿Cómo podrías calcular la profundidad del agujero luego de  $\frac{7}{2}$  horas? ¿Cuál es esa profundidad?
  - Si se desea cavar un agujero de 0,5 km de profundidad, ¿se podrá terminar el trabajo en 4,45 horas?
- b. Un avión se encuentra a 11,5 km de altura y el piloto decide descender cambiando la altura en  $-0,2$  km por minuto.
- ¿Cuánto habrá cambiado la altura después de  $3\frac{2}{5}$  minutos?
  - ¿Cuál será la altura del avión luego de 12,5 minutos?
  - ¿El avión habrá aterrizado luego de  $57\frac{1}{2}$  minutos?

#### Reflexión

1. ¿Qué similitudes y qué diferencias existen entre los procedimientos usados con la recta numérica para multiplicar un número entero positivo por un número entero negativo y un número decimal positivo por un número decimal negativo? Piénsalo y haz esquemas para ejemplificar cada caso.
2. Considera la multiplicación de un número fraccionario negativo por un número entero negativo. ¿De qué manera la resolverías en la recta numérica? Piénsalo y ejemplifica a partir de la multiplicación de  $-\frac{3}{4}$  por  $-6$ .

10. **Conecta con la Física.** Cuando un cuerpo frena, lo que hace es disminuir su velocidad en el tiempo. En este caso, decimos que el cuerpo posee una aceleración negativa o desaceleración. La fuerza que hay que aplicar para provocar esta desaceleración debe oponerse al movimiento del cuerpo y se puede calcular mediante la fórmula establecida por Isaac Newton en 1687:

$$\text{fuerza} = \text{masa} \cdot \text{aceleración}$$

Donde “masa” es la masa del cuerpo medida en kg y “aceleración” es su aceleración medida en  $\text{m/s}^2$ .

Usa esta información para calcular la fuerza que es necesario aplicar para conseguir que un cuerpo frene de acuerdo a la aceleración indicada.

- a. Un automóvil de 702,5 kg y una aceleración de  $-9,81 \text{ m/s}^2$ .
- b. Una roca de 12,4 kg y una aceleración de  $-\frac{1}{2} \text{ m/s}^2$ .
- c. Una bicicleta de  $4\frac{3}{5}$  kg y una aceleración de  $-1,6 \text{ m/s}^2$ .
11. **Argumenta.** ¿Qué signo tienen las fuerzas que calculaste en la actividad 10?, ¿por qué? Explica.
12. **Argumenta.** Considera la multiplicación de dos números enteros, a y b. ¿Es correcto afirmar que su producto es  $ab$ ?, ¿o puede ser  $-ab$ ? ¿Cómo justificas una o la otra opción? Explica.
13. **Crea.** Inventa un problema cuya solución se obtenga a partir de la operación  $-3,5 \cdot 4$  y que esté relacionado con excavaciones arqueológicas.

#### Refuerzo

1. Describe el procedimiento seguido en la recta numérica para resolver la multiplicación de un número decimal negativo por un número entero positivo.
2. Explica por escrito y paso por paso cómo resolverías la multiplicación de una fracción positiva por una fracción negativa usando el algoritmo de la multiplicación de fracciones positivas.
3. Enuncia la regla de los signos e indica cómo determinas el signo del producto de una cantidad par de factores negativos y el de una cantidad impar de factores negativos.

► **Propósito**  
Resolver problemas dividiendo números decimales y fracciones.

### ¿Para qué?

Algunas situaciones que involucran números decimales o fraccionarios negativos y positivos también pueden modelarse usando divisiones. Por ejemplo, en la descripción de situaciones de disminución regular de alguna magnitud física en el tiempo: la disminución de la temperatura, la disminución del combustible de una nave espacial o el descenso bajo el nivel mar o bajo el nivel de la superficie terrestre, entre otras.

### Palabras clave

División  
Fracción  
Número decimal  
Regla de los signos

## ¿Cómo dividir números decimales y fracciones?

Carlos cambió su alimentación por orden de su médico. Siguiendo sus indicaciones, moderó el consumo de productos grasosos y muy condimentados y agregó cantidades variables de frutas y verduras, además de incluir legumbres dos o tres veces a la semana. La meta que se propuso es disminuir su masa corporal en 4,2 kg a razón de 0,6 kg por mes.



### Situación 1 Resolviendo una división de decimales en la recta numérica

¿En cuántos meses Carlos podrá alcanzar su meta?

Para responder, representaremos las disminuciones de masa usando números negativos y resolveremos en la recta numérica la división:

disminución total de masa      disminución mensual de masa

$$-4,2 : (-0,6)$$

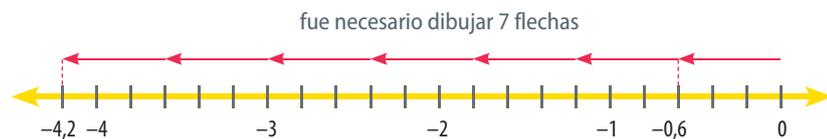
**Paso 1** Dibuja una recta numérica y señala la posición del 0 y del  $-4,2$ .

Si aplicas la regla de los signos a esta división, ¿qué signo tendrá el cociente?

**Paso 2** Dibuja una flecha de 0,6 unidades de longitud que apunte hacia la izquierda, ya que se trata de un valor negativo.

**Paso 3** Ubica esta flecha en el origen y repítela las veces que sea necesario para alcanzar la posición del número  $-4,2$ .

**Paso 4** Determina el número de flechas que fue necesario dibujar.



Como fue necesario dibujar 7 flechas de 0,6 unidades de longitud, concluimos que  $-0,6$  cabe 7 veces en  $-4,2$ . Entonces:

**R:** Carlos alcanzará su meta de bajar 4,2 kg de su masa corporal después de estar 7 meses a dieta.

¿Cuál es el resultado de multiplicar 7 por  $-0,6$ ? ¿Para qué te serviría calcular este producto?

**Ayuda**  
Observa que tanto las flechas de 0,6 unidades de longitud como la flecha de 4,2 unidades de longitud apuntan hacia la izquierda. De este hecho se deduce que el cociente es positivo.

## Situación 2 Resolviendo aritméticamente una división de decimales

¿Cuál es el resultado de la división  $-8,4 : (-1,4)$ ?

**Paso 1** Calcula el cociente usando el algoritmo conocido de la división de números decimales, considerándolos como números positivos. En este caso, podemos multiplicar por 10 el divisor y el dividendo para trabajar con números enteros.

	8	4	:	1	4	=	6
-	8	4					
	0	0					

¿Se obtiene el mismo cociente al dividir  $84 : 14$  y  $8,4 : 1,4$ ?, ¿por qué? Compruébalo con una calculadora.

**Paso 2** Determina el signo del cociente. En este caso, aplicando la regla de los signos para números enteros, el signo del cociente será positivo.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

### Ampliando

Para  $a, b \in \mathbb{Z}$  y distintos de 0, el inverso multiplicativo del número fraccionario  $\frac{a}{b}$  es  $\frac{b}{a}$ , ya que se verifica:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$$

## Situación 3 Calculando aritméticamente un cociente de fracciones

¿Cuál es el resultado de la división  $\frac{4}{7} : \left(-\frac{3}{2}\right)$ ?

**Paso 1** Calcula el cociente usando el algoritmo de la división de fracciones, considerándolas como números positivos.

Escribe para completar la división de las fracciones:

$$\frac{4}{7} : \frac{3}{2} = \underline{\quad} \cdot \underline{\quad} = \underline{\quad}$$

**Paso 2** Determina el signo del cociente. En este caso, aplicando la regla de los signos para números enteros, el signo del cociente será negativo.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

¿Cuál es el algoritmo que se aplica para dividir dos fracciones? ¿Qué cambios debes realizar al transformar la división en multiplicación?

### Para concluir

Para **dividir números decimales** y **fracciones** puedes usar la recta numérica o el algoritmo de división correspondiente. Al usar el algoritmo, debes aplicar la regla de los signos que aprendiste para los números enteros.

$$\begin{array}{l} + : + \quad \left\{ \right. + \\ - : - \quad \left\{ \right. + \end{array} \quad \begin{array}{l} + : - \quad \left\{ \right. - \\ - : + \quad \left\{ \right. - \end{array}$$

### Argumenta y comunica

El cociente de las divisiones  $2,4 : 1,85$  y  $24 : 185$  es el mismo. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación?, ¿por qué? Reflexiona y coméntalo con un compañero o una compañera. Luego, compruébalo usando una calculadora.

Repaso

1. Calcula las operaciones. Aproxima el resultado a la milésima.

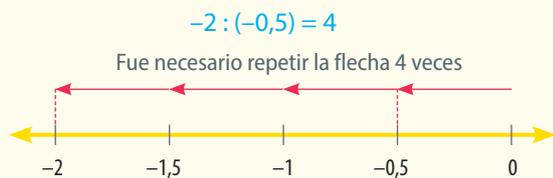
- a.  $3,14 : 7$
- b.  $2 : 0,25$
- c.  $1,5 : 3,2$
- d.  $\frac{5}{3} : 0,7$
- e.  $\frac{15}{16} : \frac{21}{8}$
- f.  $0,125 : \frac{3}{5}$
- g.  $4\frac{1}{2} : 5$
- h.  $0,3 : 3\frac{1}{3}$
- i.  $7\frac{1}{5} : 3\frac{1}{6}$
- j.  $\frac{5}{8} : \frac{15}{2} + 3\frac{1}{4} : 2\frac{1}{2}$
- k.  $0,25 + \frac{1}{5} : 1\frac{3}{4}$
- l.  $0,4 : 0,25 + 0,1 : \frac{1}{8}$

2. Resuelve los problemas.

- a. Un ciclista recorre una ruta de 49,5 km a una rapidez de  $\frac{3}{5}$  km por minuto. Si mantiene la rapidez, ¿cuántos minutos demorará en completar la ruta?
- b. Una profesora les pide a sus estudiantes que realicen un informe de 5,5 páginas en grupos de 7 alumnos. Si un grupo decide dividir el trabajo en partes iguales, ¿cuántas páginas debe escribir cada integrante del grupo?

Práctica guiada

3. Representa en la recta numérica y resuelve las divisiones.



- a.  $-3 : (-0,75)$
- b.  $-1,5 : 0,25$
- c.  $-5\frac{1}{2} : (-1,1)$
- d.  $-1,4 : (-\frac{1}{5})$
- e.  $-4\frac{3}{5} : 2\frac{3}{10}$
- f.  $-8\frac{4}{5} : (-2\frac{1}{5})$

4. Resuelve las divisiones con números decimales.

$$-7,2 : (-0,9) = +(7,2 : 0,9) = 8$$

- a.  $-0,05 : (-4)$
- b.  $-0,21 : 0,15$
- c.  $-0,8 : 0,3$
- d.  $-0,55 : 6,6 : (-\frac{1}{2})$

5. Resuelve las operaciones con fracciones. Cuando corresponda, simplifica tachando factores del numerador y del denominador.

$$-\frac{6}{35} : (-\frac{4}{21}) = -\frac{6}{35} \cdot (-\frac{21}{4}) = +(\frac{6}{35} \cdot \frac{21}{4})$$

$$= \frac{\cancel{2} \cdot 3 \cdot \cancel{3} \cdot \cancel{7}}{5 \cdot \cancel{7} \cdot \cancel{2} \cdot 2} = \frac{9}{10}$$

- a.  $7 : (-\frac{14}{3})$
- b.  $\frac{5}{7} : (-\frac{25}{21})$
- c.  $-\frac{2}{5} : (-\frac{2}{10})$
- d.  $-\frac{1}{2} : (-\frac{35}{18}) + (-\frac{2}{3}) : \frac{10}{9}$

6. Resuelve las divisiones con números mixtos, decimales y fracciones. Cuando corresponda, simplifica tachando factores del numerador y del denominador.

$$\frac{4}{5} : (-7\frac{1}{3}) = \frac{4}{5} : (-\frac{22}{3}) = -(\frac{4}{5} \cdot \frac{3}{22}) =$$

$$= -\frac{\cancel{2} \cdot 2 \cdot 3}{5 \cdot \cancel{2} \cdot 11} = -\frac{6}{55}$$

- a.  $-2\frac{1}{7} : \frac{6}{7}$
- b.  $-2\frac{1}{6} : (-3\frac{2}{5})$
- c.  $-4\frac{2}{5} : (-0,125)$
- d.  $\frac{1}{4} : (-2\frac{1}{3}) : (-0,4)$

7. Resuelve las operaciones combinadas.

$$-\frac{2}{3} : \frac{5}{6} - (-\frac{11}{4}) : (-4\frac{2}{5}) = -(\frac{2}{3} : \frac{5}{6}) - [ +(\frac{11}{4} : \frac{22}{5}) ]$$

$$= -(\frac{2}{3} \cdot \frac{6}{5}) - (\frac{11}{4} \cdot \frac{5}{22})$$

$$= -\frac{4}{5} - \frac{5}{8} = \frac{-32-25}{40} = -1\frac{17}{40}$$

- a.  $(-7\frac{2}{3} : (-4\frac{1}{2})) : (-\frac{1}{5})$
- b.  $-\frac{5}{6} : (-1\frac{3}{4}) - \frac{15}{7} : (-\frac{14}{25})$
- c.  $2\frac{4}{5} : (-\frac{2}{7}) + 0,2 : (-1\frac{1}{2})$

## Aplica

## 8. Resuelve los problemas.

- a. Se desea analizar el transvase del contenido de un bidón con 10 litros de aceite a envases con diferentes niveles de llenado.

- Completa el siguiente esquema:



- ¿Cuántos envases de capacidad  $\frac{1}{n}$  litros se necesitan para vaciar 10 litros?
- ¿Cuántos envases se necesitan si deseamos vaciar k litros en envases de  $\frac{1}{n}$  litros?
- ¿Cuántos envases se necesitan si deseamos vaciar k litros en envases de  $\frac{m}{n}$  litros?

- b. En una bodega hay 12,4 kg de lentejas envasadas en bolsas de 0,4 kg. Si cuatro de estas bolsas se rompen y se vacían 0,15 kg de cada una de ellas, ¿Cuántos kg de lentejas quedan envasados?

9. **Conecta con la Química.** La densidad es una magnitud que indica la cantidad de masa de una sustancia contenida en un determinado volumen. Esta magnitud se calcula como el cociente entre la masa y el volumen:

$$\text{densidad} = \frac{\text{masa}}{\text{volumen}}$$

¿Podría el cálculo de la densidad involucrar números negativos? ¿Pueden la masa o el volumen de una sustancia expresarse mediante números negativos? Piénsalo, responde y justifica tu respuesta.

10. **Investiga.** Busca en internet tres magnitudes físicas que puedan tener valores negativos y descríbelas por separado. Confirma esta información en algún libro o manual confiable. Luego, inventa problemas que involucren las magnitudes que seleccionaste y la división de números positivos y negativos.

11. **Crea.** Inventa un problema cuya solución se obtenga a partir de la operación  $-4 : 1,5$  y que esté relacionado con pérdidas de combustible de un vehículo motorizado.

12. **Argumenta.** Cuando dividimos dos números no enteros podemos hacerlo expresándolos como números decimales o como fracciones. Por ejemplo, es equivalente resolver  $0,4 : 0,25 = 1,6$  a resolver  $\frac{2}{5} : \frac{1}{4} = \frac{8}{5}$ . ¿Cuál de estas dos formas es más sencilla para ti?, ¿por qué? Explica y justifica.

## Reflexiono

1. ¿Qué similitudes y qué diferencias existen en los procedimientos usados con la recta numérica para dividir dos números decimales positivos y para dividir dos números decimales negativos? Piénsalo y ejemplifica tu explicación.
2. Observa el siguiente desarrollo:

$$\frac{9}{16} \cdot \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$$

¿Qué fracción  $\frac{a}{b}$  comprueba la igualdad anterior?

Piénsalo y descubre la fracción mediante ensayo y error. ¿Existe otra fracción que también la compruebe?, ¿cuál? Piénsalo y concluye una regla general.

## Refuerzo

1. ¿Tienen el mismo signo el producto y el cociente de dos números decimales negativos? Ejemplifica tu respuesta resolviendo las operaciones  $-3,5 \cdot (-0,7)$  y  $-3,5 : (-0,7)$ .
2. ¿Cuál es el resultado de dividir un número decimal por  $-1$ ? Apoya tu respuesta ejemplificando con las divisiones  $3,2 : (-1)$  y  $-0,8 : (-1)$ . ¿Se obtiene el mismo resultado si multiplicas un número por  $-1$  que si lo divides por  $-1$ ?
3. ¿Cuál es el signo de la fracción  $\frac{-3}{8}$ ? Piénsalo e indica si esta fracción es mayor, menor o igual a  $\frac{3}{8}$ .

**Lección 1: ¿Cómo multiplicar números enteros?**

- 1 Resuelve las operaciones.
 

a. $4 \cdot (-3)$	e. $-7 \cdot (-12)$
b. $-6 \cdot 7$	f. $2 \cdot 3 \cdot (-4)$
c. $-8 \cdot (-11)$	g. $-5 \cdot 2 \cdot (-3)$
d. $4 \cdot (-5)$	h. $-2 \cdot (-5) \cdot (-9)$
- 2 Determina el valor que va en cada recuadro.
 

a. $\square \cdot (-5) = 45$	d. $3 \cdot \square = -42$
b. $8 \cdot \square = -72$	e. $-15 \cdot \square = 60$
c. $\square \cdot 7 = -7$	f. $\square \cdot (-2) = -10$
- 3 Determina los valores enteros que podrían tener A y B en las igualdades.
 

a. $A \cdot B = 17$	d. $A \cdot B = 4$
b. $A \cdot B = -15$	e. $A \cdot B = 20$
c. $A \cdot B = -9$	f. $A \cdot B = -32$
- 4 El producto de tres números enteros consecutivos es  $-210$ . ¿Cuáles son los números?
- 5 ¿Es posible que el producto de cuatro números enteros consecutivos sea un número negativo? Justifica.

**Lección 2: ¿Cómo dividir números enteros?**

- 6 Resuelve las operaciones.
 

a. $-36 : 4$	e. $42 : (-7)$
b. $32 : (-8)$	f. $-100 : (-5)$
c. $-40 : (-5)$	g. $-30 : 3$
d. $-63 : 9$	h. $[9 \cdot (-8)] : (-4)$
- 7 Determina el valor que va en cada recuadro.
 

a. $\square : 18 = 3$	d. $-48 : \square = 12$
b. $\square : 12 = -5$	e. $35 : \square = -7$
c. $-81 : \square = 27$	f. $\square : (-6) = 9$

- 8 Determina los valores enteros que podrían tener A y B en las igualdades.
 

a. $A : B = -15$	d. $-10 : A = B$
b. $A : 4 = B$	e. $A : -6 = B$
c. $A : B = -36$	f. $38 : B = -2$

**Lección 3: ¿El cociente de dos números enteros es siempre entero?**

- 9 Determina la expresión fraccionaria de los números decimales.
 

a. 3,2	d. 7,0
b. -8,2	e. 2,45
c. 9,777...	f. -0,001
- 10 Determina la expresión decimal de las fracciones y los números mixtos.
 

a. $\frac{7}{2}$	d. $-2\frac{2}{5}$
b. $-6\frac{5}{24}$	e. $-\frac{14}{9}$
c. $\frac{5}{3}$	f. $-\frac{56}{13}$
- 11 Determina, en cada caso, una fracción que cumpla con las condiciones dadas.
  - a. Su numerador es 5 y representa un número menor que 0.
  - b. Su numerador es 13 y su valor representa una unidad.
  - c. Su denominador es 12 y es equivalente al número decimal 0,2.
  - d. Su denominador es 27 y representa un número decimal periódico.
- 12 Ordena de menor a mayor los números de cada listado.
 

a. 0,35; 0,335; 0,3535.	e. $4\frac{1}{2}; \frac{37}{9}; 4,75; 4,25.$
b. 4,78; 5,28; 4,28.	f. $-3,8; \frac{18}{-5}; \frac{-39}{9}; -3,8.$
c. $\frac{7}{5}; \frac{9}{11}; \frac{8}{13}; \frac{21}{10}.$	
d. $\frac{13}{15}; \frac{24}{5}; \frac{19}{10}; \frac{43}{30}.$	

13 En una etapa del Rally Dakar, los competidores A, B y C obtuvieron los tres primeros lugares. A registró un tiempo de 4,375 horas, B uno de  $4\frac{7}{12}$  horas y C uno de  $\frac{97}{20}$  horas. ¿Cuántos minutos tardó el corredor que llegó en segundo lugar?

14 Identifica, en cada caso, los números representados en la recta numérica.



Lección 4: ¿Cómo sumar y restar fracciones y decimales negativos?

15 Calcula el resultado de las operaciones.

a.  $\frac{7}{3} - \frac{37}{24} + \frac{21}{16}$

b.  $6,13 - \frac{1}{5} + 2,708$

c.  $-\frac{7}{2} + 9,5 - 0,35 + 5\frac{1}{4}$

d.  $4,8 - 5\frac{5}{8} - (-3,245) + 7\frac{2}{3}$

e.  $12 - 4,1 + \frac{19}{5} + (-8,4) - 7 \cdot 3,25$

16 Determina, en cada caso, los menores valores posibles de A y B.

a.  $\frac{12}{5} - \frac{41}{A} = \frac{B}{20}$

b.  $\frac{3}{A} + \frac{B}{5} = \frac{7}{10}$

17 Determina lo que se pide en cada caso.

a. Una fracción cuya diferencia con  $-\frac{7}{8}$  sea igual a  $\frac{17}{12}$ .

b. Dos fracciones cuyo promedio sea 9,2.

c. Una fracción tal que, si a su numerador y a su denominador se les resta 7, se obtiene la fracción invertida. ¿Hay más de una solución? Justifica.

Lección 5: ¿Cómo multiplicar números decimales y fracciones?

18 Calcula el resultado de las operaciones.

a.  $5,34 \cdot (-4)$

d.  $\frac{15}{4} \cdot \frac{12}{35}$

b.  $6,21 \cdot 3,6$

e.  $\frac{17}{3} \cdot -\frac{9}{34}$

c.  $-4,16 \cdot (-0,14)$

f.  $2\frac{3}{16} \cdot (-4,8)$

Lección 6: ¿Cómo dividir números decimales y fracciones?

19 Calcula el resultado de las operaciones.

a.  $7,25 : (-2)$

d.  $-\frac{15}{24} : 2\frac{7}{12}$

b.  $2,56 : 0,5$

e.  $5\frac{1}{2} : \left(\frac{-9}{4}\right)$

c.  $-18,5 : 8$

f.  $-5,525 : \frac{125}{6}$

### Desafíos de integración

- Una piscina contiene 2500 litros de agua. En un momento, comienza a perder líquido debido a una fisura provocada por el desgaste del material. La pérdida de agua se produce en la razón de 19,8 litros por hora. Transcurridas 4 horas:
  - ¿Cuánta fue el agua que perdió la piscina?
  - ¿Cuánta agua quedará en la piscina?
- El dueño de un almacén tiene \$ 150 000 en la máquina que hace recargas a celulares. Si durante el día van 8 personas que recargan \$ 3500 cada una, 12 que recargan \$ 5000 cada una y 15 que hacen recargas de \$ 1500 cada una, ¿cuánto dinero quedará en la máquina al finalizar el día?
- Una alpinista se encuentra en el cerro El Plomo, a 4820 metros sobre el nivel del mar (msnm). Luego de 5 horas, está a 2105 msnm.
  - ¿Cuántos metros por hora recorrió la alpinista?
  - ¿Realizó un ascenso o un descenso? Justifica.
- Un frigorífico se encuentra a  $-\frac{13}{2}$  °C. Si cada 6 minutos hay un descenso de 1,8 °C, ¿qué temperatura tendrá el frigorífico luego de 42 minutos?

### Estrategia alternativa

Selecciona uno de los desafíos y resuélvelo nuevamente, pero usando otra estrategia. Compara los resultados e indica cuál de las estrategias es la más conveniente.

## Construir un diagrama

Cuando una situación está relacionada con distancias o posiciones puedes hacer un diagrama que muestre los datos y las relaciones entre ellos.

### Algunas estrategias

- Usar un proceso de ensayo y error.
- Aplicar procesos reversibles.
- Destacar información relevante.
- Usar un problema similar pero más sencillo.
- **Construir un esquema, diagrama o tabla.**
- Encontrar un patrón.
- Usar modelos matemáticos.
- Usar razonamiento lógico.
- Identificar submetas.

Un grupo de oceanógrafos desea estudiar el ecosistema marino que existe en el lugar más profundo del planeta, esto es, la fosa de las Marianas. Esta fosa se ubica en el océano Pacífico noroccidental entre las costas de Indonesia y China. Para llevar a cabo el estudio, utilizarán un robot submarino que se detendrá cada 1,8 km para realizar mediciones

instantáneas de la concentración de oxígeno existente a distintas profundidades del océano. Los científicos saben que el robot demora 20 minutos en recorrer verticalmente los 1,8 km. Si el robot tardará aproximadamente 2 horas en llegar al punto más profundo, ¿cuál es la profundidad estimada de la fosa de las Marianas?

¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema?

El punto más profundo de la fosa de las Marianas.

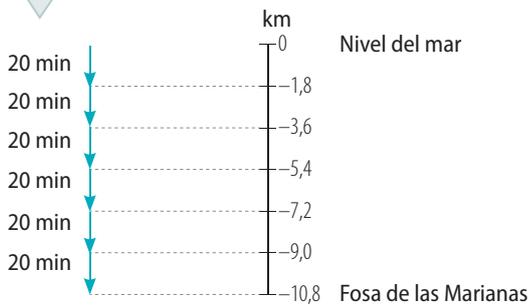
¿Qué datos tengo para resolver?

Escribe tú

Crea un plan para resolver

Para resolver este problema, puedes usar la estrategia **Construir un diagrama** para representar la posición en la que se encuentra el robot cada 20 minutos.

Aplica la estrategia y resuelve



Dado que el robot se demora 2 horas en llegar al punto más profundo de la fosa, es decir, 120 minutos; se dibujaron en el diagrama 6 flechas. Cada una representa 20 minutos y un descenso de 1,8 km.

La última flecha (inferior) que puedes ver en el diagrama apuntando a la posición  $-10,8$  km señala la profundidad de la fosa. Este diagrama nos permitió resolver la multiplicación:

$$-1,8 \cdot 6 = -10,8$$

Verifica la respuesta

Considerando la profundidad calculada de la fosa y la cantidad de intervalos de tiempo representados por las flechas, podemos comprobar el resultado mediante la división:

$$-10,8 : 6 = -1,8$$

El cociente 1,8 indica, precisamente, el número de kilómetros que descenderá el robot para hacer las mediciones.

Además, para corroborar el resultado aproximado que se obtuvo puedes averiguar en sitios web de carácter científico la profundidad real de la fosa de las Marianas.

Comunica la respuesta

Escribe tú

¿De qué otra forma resolverías este problema? Explica.

### Vuelvo a mis procesos

Responde de acuerdo a tu apreciación.

¿Cómo te sentiste realizando el trabajo de esta sección?, ¿por qué?

¿Aprendiste todo lo que esperabas al inicio de la sección?  
¿Cómo lo puedes comprobar?

¿Qué fue lo que más te gustó?, ¿por qué?

¿Tuviste suficiente tiempo para realizar las tareas encomendadas?

De las metas que te propusiste al inicio de esta sección, ¿cuáles cumpliste? y ¿cuáles no?

¿Qué fue lo más difícil del trabajo realizado?

¿Qué hiciste para resolver esta dificultad?



## Potencias y raíces cuadradas

## Activo ideas previas

1. Lee la información y coméntala con un compañero o una compañera.



La creciente necesidad de almacenar información ha generado la aparición de dispositivos electrónicos cada vez más pequeños y con mayor capacidad de almacenaje. La unidad mínima de almacenamiento de información es el bit (del inglés *binary digit*, dígito binario). El sistema binario se basa solo en dos dígitos, 0 y 1, y con él podemos representar dos valores cualesquiera, por ejemplo: encendido (1) y apagado (0). Por lo tanto, 1 bit puede almacenar 2 valores; 2 bits, 4 valores; 3 bits, 8 valores, y así sucesivamente.

Los dispositivos actuales tienen capacidades de almacenamiento en bytes (1 B = 8 bits), en megabytes (1 MB = 1 000 000 B), en gigabytes (1 GB = 1 000 000 000 B) e incluso en terabytes (1 TB = 1 000 000 000 000 B).

Responde las preguntas junto con tu compañero o compañera.

- a. Compáren con otras parejas los dispositivos electrónicos que poseen y sus capacidades de almacenamiento. ¿Cuáles son el de menor y el de mayor capacidad? ¿Cuál es la diferencia de capacidad entre ellos?

- b. Construyan una tabla que relacione el número de bits y la cantidad de valores que pueden almacenar. ¿Qué regularidad identifican en la cantidad de valores almacenados al aumentar el número de bits? Anótenla y comuníquenla al curso.

- c. Expresen el número de bytes que equivalen a 1 MB y a 1 GB usando potencias. ¿Qué base usaron?

## Activo conceptos clave

2. El listado contiene algunos conceptos clave de esta sección. Úsalos para completar las afirmaciones.

potencia  
multiplicación  
exponente

exponente cero  
número natural  
división

diagrama de árbol  
raíz cuadrada  
base

- a. En  $4^{0,1}$ , la \_\_\_\_\_ es un número natural.
- b. El valor de  $2^4$  se puede calcular resolviendo una \_\_\_\_\_ iterada del factor 2.
- c. El concepto de \_\_\_\_\_ es nuevo para mí.
- d. En  $(3,5)^5$ , el \_\_\_\_\_ es un número natural.
- e. El símbolo  $\sqrt{\quad}$  representa una \_\_\_\_\_.

## Pienso mis procesos

Responde de acuerdo a lo que conoces.

¿Qué es y para qué se usa cada objeto?

¿Qué potencia te permite expresar el número de casillas del segundo objeto?, ¿y el número aparente de cubitos del primero?

¿Tienes objetos como estos en tu casa?  
¿Los usas?



¿Qué sabes sobre los temas que se verán en esta sección?

¿Qué estrategias para trabajar con potencias, que conoces de 7.º básico, podrían servirte en esta sección?

¿Qué dificultades crees que enfrentarás durante el trabajo en esta sección?

Activa tus conocimientos previos respondiendo las preguntas laterales y luego resuelve las actividades. Para terminar, registra tus logros.

¿Cuáles son las partes de una potencia?

¿Qué pasos sigues para calcular el valor de una potencia?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
19 correctas o más	menos de 19 correctas

¿Qué errores cometiste?

¿Qué puedes hacer para no volver a cometerlos?

### Expresar e interpretar potencias

**1** Representa las multiplicaciones como potencias. (6 puntos)

- a.  $2 \cdot 2 \cdot 2$
- b.  $3 \cdot 3$
- c.  $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5$
- d.  $7 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7$
- e.  $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1$
- f.  $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

**2** Desarrolla las potencias y calcula su valor. (9 puntos)

- a.  $2^3$
- b.  $5^2$
- c.  $1^3$
- d.  $4^2$
- e.  $9^3$
- f.  $7^2$
- g.  $6^3$
- h.  $12^2$
- i.  $8^3$

**3** Señala si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). (6 puntos)

- a.  Si se intercambian la base y el exponente de una potencia, su valor no cambia.
- b.  Todo número natural elevado a 0 es igual a 1.
- c.  Si una potencia tiene exponente 2, leemos "al cuadrado".
- d.  Si en un número natural no hay escrito un exponente, se puede asumir que es igual a cero.
- e.  El exponente corresponde al valor que se repite como factor.
- f.  Si una potencia tiene exponente 3, leemos "al cubo".

**4** Escribe cada número como una potencia. Luego, responde las preguntas. (11 puntos)

- a. 8
- b. 25
- c. 27
- d. 36
- e. 49
- f. 64
- g. 81
- h. 100
- i. 125
- j. En cada caso, ¿existe una única respuesta?
- k. Si cada número anterior representa el área de un cuadrado expresada en unidades cuadradas, ¿en qué casos el lado de dicho cuadrado mediría un número natural de unidades?

¿Cómo determinas el exponente de la potencia de base 10 que representa 1000?

¿En qué sería diferente tu respuesta anterior si el número representado fuera 2000?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
7 correctas o más	menos de 7 correctas

¿Qué errores cometiste?

### Utilizar potencias de base 10

**5** Expresa estos números como potencias de base 10. (6 puntos)

- |                  |           |
|------------------|-----------|
| a. 100           | d. 0,1    |
| b. 10 000        | e. 0,001  |
| c. 1 000 000 000 | f. 0,0001 |

**6** Expresa en notación científica los números que se señalan. (6 puntos)

- La distancia de Venus al Sol es mayor que 100 000 000 km.
- Saturno está aproximadamente a 1 429 400 000 km del Sol.
- La luz viaja a una velocidad aproximada de trescientos millones de metros por segundo.
- El radio medio de la Tierra mide cerca de 6 370 000 m.
- Nuestro satélite natural, la Luna, tiene una masa aproximada de 73 600 000 000 000 000 toneladas.
- El diámetro de un glóbulo rojo mide aproximadamente 0,000007 m.

¿Cuál es el primer paso que realizas para resolver un problema?

¿En qué casos te conviene construir un diagrama para resolver un problema?

### Resolver problemas

**7** Resuelve. (3 puntos)

- Natalia está tejiendo una manta a crochet. En el anillo central usa 4 estrellas y en cada uno de los siguientes anillos usa tres veces más estrellas que en el anterior. ¿Cuántas estrellas usa en el cuarto anillo? Utiliza una potencia para encontrar la respuesta. ¿Podrías haber utilizado otra estrategia?, ¿cuál?
- Un tipo de bacteria duplica su número cada 2 horas. Si originalmente había 1 bacteria, ¿cuántas habrá en 2 días, en 3 días y en  $n$  días?
- Se estima que en el universo existen más de 100 000 000 000 de galaxias. Una de ellas es la Vía Láctea, conglomerado que contiene nuestro Sistema Solar. Esta galaxia consta de al menos 200 000 000 estrellas. Si suponemos que cada galaxia tiene esta cantidad de estrellas en promedio, ¿cuántas estrellas habría aproximadamente en el universo? ¿Cómo se expresa este número en notación científica?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
3 correctas	menos de 3 correctas

¿Qué errores cometiste?

► Propósito

Calcular una potencia de base y exponente naturales.

¿Para qué?

Las potencias están implícitas en los desarrollos teóricos de una multitud de avances técnicos y tecnológicos modernos. Por ejemplo, los teléfonos celulares inteligentes, los computadores y otros dispositivos electrónicos basan su funcionamiento en el almacenamiento de información que se fundamenta en el uso de potencias de base 2.

Palabras clave

Potencia

Exponente

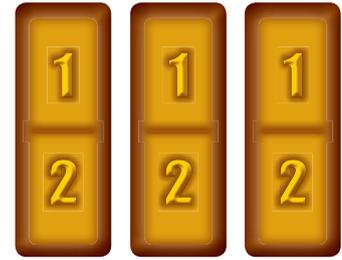
Base

Número natural

Diagrama de árbol

## ¿Cómo calcular una potencia de base y exponente naturales?

Antonio desea realizar un viaje y para asegurar su maleta compró un candado de claves. El candado tiene tres casillas y en cada una de ellas puede escoger entre los dígitos 1 y 2.



**Situación 1** Representando en una tabla

¿Cuántas son las posibles combinaciones de claves numéricas que puede hacer Antonio?

Para responder la pregunta, representaremos las posibles combinaciones en una tabla.

**Paso 1** Construye una tabla que muestre los dígitos que puedes colocar en cada una de las casillas y las claves que pueden formarse, esto es:

Dígito 1.ª casilla	Dígito 2.ª casilla	Dígito 3.ª casilla	Clave formada
-----------------------	-----------------------	-----------------------	------------------

**Paso 2** Escribe todas las claves diferentes que es posible escribir. Agrega a la tabla las filas que sean necesarias para escribir las claves.

Dígito 1.ª casilla	Dígito 2.ª casilla	Dígito 3.ª casilla	Clave formada
1	1	1	111
1	1	2	112

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

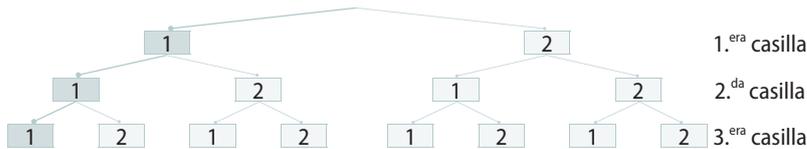
¿Cuántas filas tendrá esta tabla? ¿Cómo se relaciona esta cantidad con la cantidad de claves distintas?

¿Qué operación te permitiría encontrar el número de combinaciones en forma directa?

**Situación 2 Representando en un diagrama de árbol**

¿Cómo puedes calcular la cantidad de claves que es posible formar en el candado usando un diagrama de árbol?

**Paso 1** Construye un diagrama de árbol que muestre las diferentes combinaciones de claves que se pueden formar.



**Paso 2** Identifica las combinaciones que puedes observar en el diagrama. Para ello, guíate con las ramas del árbol. Por ejemplo, la que se destaca es 111.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Ampliando**

El sistema de numeración binario representa las cantidades mediante la combinación de unos y ceros y se basa en el uso de potencias de base 2 y exponente natural.

¿Coincide el número de combinaciones obtenido con el de la situación 1?, ¿por qué?

**Situación 3 Usando un algoritmo**

¿Qué expresión te permite representar el número de claves que puede formar Antonio?

Para responder, usaremos el concepto de potencia.

**Paso 1** Considera la cantidad de casillas que tiene el candado y la cantidad de posibles valores que se pueden ingresar en cada una de ellas.



**Paso 2** Multiplica la cantidad de valores posibles por casilla, es decir:

$$2 \cdot 2 \cdot 2$$

**Paso 3** Escribe esta expresión como potencia.

Completa la afirmación para responder la pregunta inicial:

R: El número de claves que se pueden formar está determinado por la potencia \_\_\_\_\_, donde \_\_\_\_\_ es la base y \_\_\_\_\_ es el exponente.

**Ayuda**

Recuerda que una potencia está definida por la expresión  $a^b$ , donde  $a$  es la base y  $b$  es el exponente.

**Para concluir**

Una **potencia de base y exponente naturales** se define, para  $a$  y  $b \in \mathbb{N}$ , como el producto en el que aparecen  $b$  factores  $a$ :

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot \dots \cdot a}_{b \text{ veces}}$$

**Argumenta y comunica**

Considera un candado que tiene 4 casillas, pudiéndose escoger en cada una de ellas uno de los dígitos: 1, 2 y 3. ¿Cuántas posibles combinaciones numéricas existen para abrirlo? Responde por escrito en tu cuaderno y comunica tu respuesta al curso.

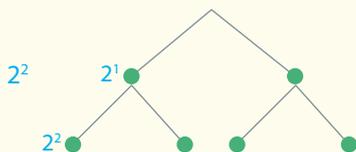
Repaso

- Representa como potencias las multiplicaciones iteradas.
  - $5 \cdot 5$
  - $10 \cdot 10 \cdot 10$
  - $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
  - $3 \cdot 3 \cdot 3$
  - $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$
  - $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$
- Representa como una multiplicación iterada las siguientes potencias y calcula su resultado.
 

a. $6^3$	d. $7^3$
b. $4^2$	e. $8^2$
c. $2^7$	f. $10^9$

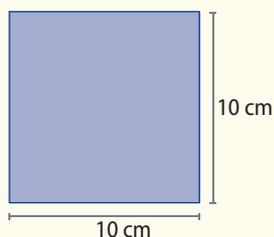
Práctica guiada

- Representa cada potencia con un diagrama de árbol.



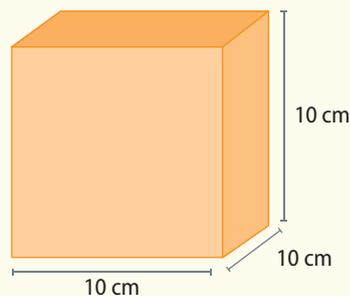
- |          |          |
|----------|----------|
| a. $3^2$ | c. $5^3$ |
| b. $4^2$ | d. $6^2$ |
- Calcula el área de cada cuadrado a partir de la medida del lado y luego responde las preguntas.

a: medida del lado.  
 A: área del cuadrado.  
 $A = a^2$   
 $A = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}$   
 $A = 100 \text{ cm}^2$



- |  |
|--|
| a. 2 cm  |
| b. 3 cm  |
| c. 5 cm  |
| d. 7 cm  |
| e. 12 cm   |
| f. 16 cm   |
| g. Si el área de un cuadrado es $64 \text{ cm}^2$ , ¿cuál es la medida de su lado? |
| h. Si el área de un cuadrado es $81 \text{ cm}^2$ , ¿cuál es la medida de su lado? |

- Calcula el volumen de cada cubo a partir de la medida de su arista y luego responde las preguntas.

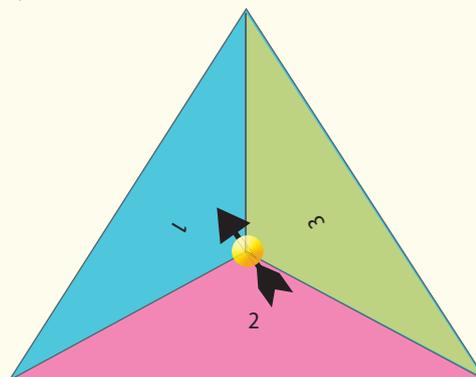


a: medida de la arista.  
 V: volumen del cubo.  
 $V = a^3$   
 $V = 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm} \cdot 10 \text{ cm}$   
 $V = 1000 \text{ cm}^3$

- |  |
|--|
| a. 2 cm  |
| b. 3 cm  |
| c. 4 cm  |
| d. 5 cm  |
| e. 6 cm  |
| f. 7 cm  |
| g. Si el volumen de un cubo es $512 \text{ cm}^3$ , ¿cuál es la medida de su arista? |
| h. Si el volumen de un cubo es $729 \text{ cm}^3$ , ¿cuál es la medida de su arista? |

Aplica

- Observa la ruleta con forma de triángulo equilátero y responde.



¿Cuántos diferentes números de 3 dígitos se pueden obtener al hacer girar la ruleta tres veces consecutivas? Considera que los dígitos pueden repetirse en un mismo número. Expresa el resultado como una potencia y calcula su valor.

- 7. Representa las situaciones y resuélvelas.**
- En un almacén se venden dos tipos de leche: las que tienen lactosa y las que no. Estas, además, pueden ser semidescremadas o descremadas. ¿Cuántas variedades de leche ofrece el almacén si además pueden ser con o sin sabor?
  - Un restaurante ofrece a sus clientes el siguiente menú del día: sopa (espárragos o choclos), plato de fondo (lasaña o puré con pescado frito), ensaladas (tomate o lechuga), postre (flan o frutas) y algo para beber (bebida o jugo). ¿Cuántos menús distintos se pueden armar en este restaurante?
  - Una empresa inmobiliaria construyó un condominio de 4 edificios de 4 pisos cada uno con 4 departamentos por piso. Si cada departamento fue pensado para ser habitado por 4 personas:
    - ¿Cuántos departamentos hay en cada edificio?
    - ¿Cuántos departamentos hay en el condominio?
    - ¿Cuántas personas podrían vivir en el condominio?
- 8. Resuelve los problemas utilizando potencias.**
- En una caja caben 3 tarros de pelotas de tenis, y en cada tarro hay 3 pelotas. Si se venden 3 cajas diariamente:
    - ¿cuántas pelotas se venden en un día?
    - ¿cuántas pelotas se venden en 3 días?
    - ¿Cómo calculaste lo anterior? ¿Existe otra estrategia para hacerlo?, ¿cuál?
  - Camila necesita avisar a 30 bailarines que no habrá clases de cueca y, para esto, hace una cadena de mensajes instantáneos. Envía mensajes a dos bailarines y les pide que cada uno le envíe mensajes a dos bailarines más, y así sucesivamente, hasta que todos estén enterados. Si ningún bailarín recibe dos mensajes, ¿cuántos serán los últimos en enterarse y no tendrán que avisar a otros? ¿Cómo lo resolviste?
- 9. Claudio debe repartir 4 cajas con 4 paquetes de galletes cada uno, durante 4 días a la semana, en 4 almacenes de un barrio. ¿ Cuántos paquetes de galletas reparte en una semana? Expresa el resultado como una potencia.**
- 10. Analiza.** ¿Cómo varía el área de un cuadrado si la medida del lado se reduce a la mitad? Da un ejemplo para justificar tu respuesta y compara el resultado con el de un compañero o una compañera.
- 11. Crea.** Inventa un problema que esté relacionado con la propagación de un virus informático y cuya solución se pueda obtener con la potencia  $3^5$ . Resuélvelo y, con respecto a tu procedimiento de resolución, responde:
- ¿Cuáles son los datos relevantes del problema?
  - ¿Se te ocurre otra forma de resolverlo?, ¿cuál?

### Reflexiono

- ¿Cómo determinarías la cifra de la unidad del valor de la potencia  $4^{21}$ ? ¿Habrá una estrategia que puedas utilizar? Piénsalo, justifica tu respuesta y escribe la cifra en tu cuaderno.
- El desarrollo tecnológico de los chips ha permitido que cada vez que un nuevo chip sale al mercado (aproximadamente cada 2 años) su capacidad sea cuatro veces mayor que la del modelo anterior. ¿Cómo se relaciona esta información con las potencias? Responde y ejemplifica.

### Refuerzo

- Describe cómo representas la potencia  $2^3$  en un diagrama de árbol.
- Indica por escrito cómo calculas una potencia de base y exponente naturales.
- Escribe dos potencias de base 4 y exponente natural y calcula su valor.

# El mensaje de Arecibo

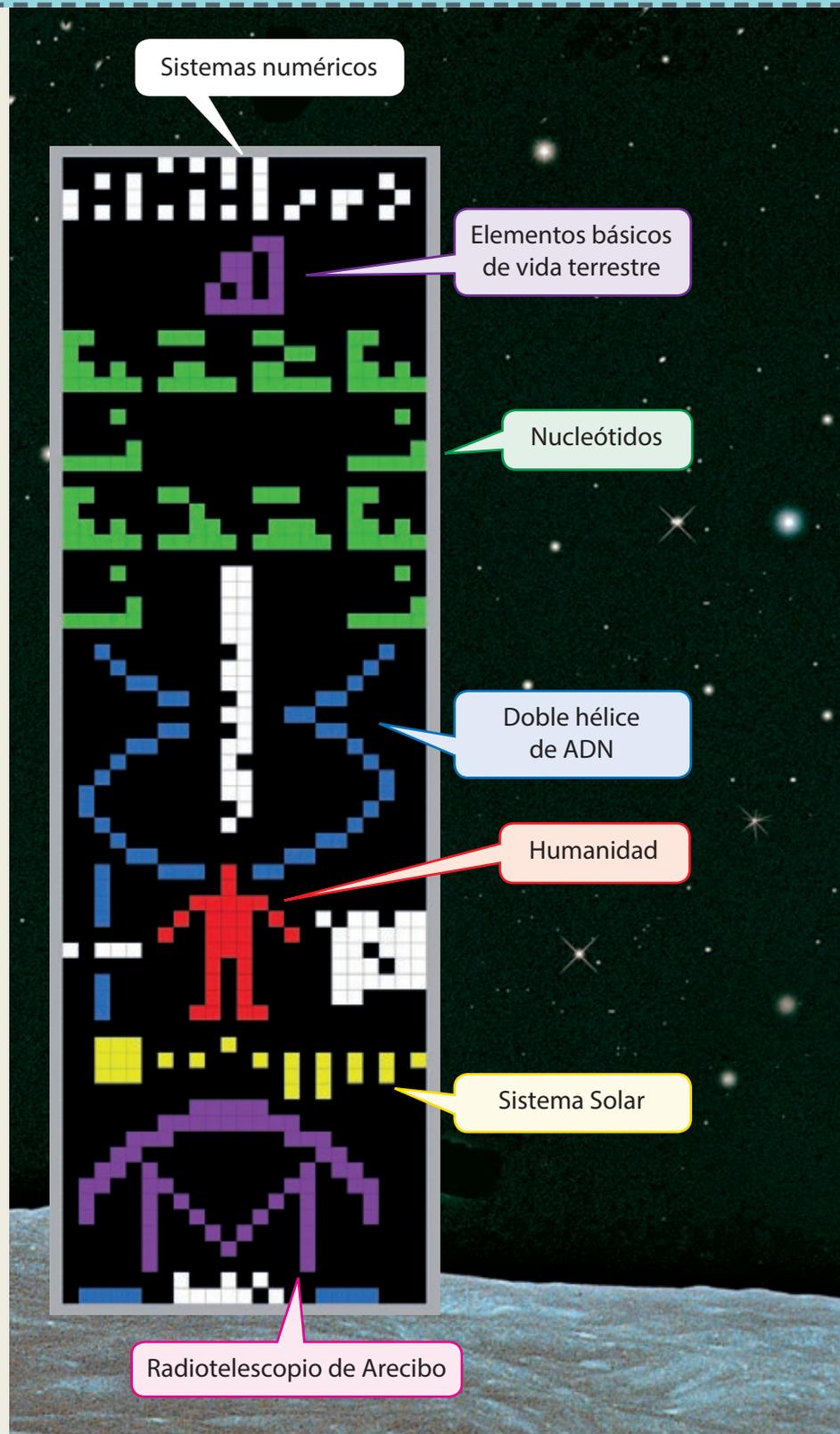
## Un viaje al espacio

El mensaje de Arecibo es un mensaje escrito en código binario que fue enviado al espacio el año 1974, desde el observatorio de Arecibo en Puerto Rico, con la intención de establecer comunicación con habitantes de otras galaxias.

Contiene una secuencia de 1679 cuadraditos (equivalentes a 1679 bits) blancos o negros que, al ordenarse para formar un cuadrilátero, muestran dibujos que entregan información sobre la especie humana. El mensaje está dispuesto en 23 columnas y 73 filas y está dividido en 7 bloques temáticos, como se muestra en la imagen (los colores fueron añadidos después).



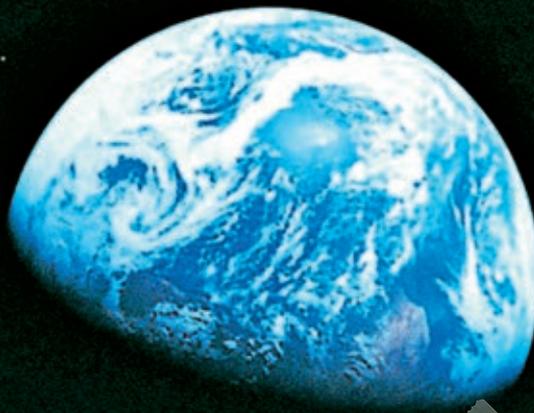
Radiotelescopio de Arecibo



### Sabías que...

El proyecto ALMA es una instalación astronómica internacional (Europa, América del Norte y Asia Oriental en colaboración con Chile) ubicada en el desierto de Atacama (llano de Chajnantor, en el norte de nuestro país). Está compuesto por 66 antenas radiotelescopicas de alta precisión y es el más poderoso que existe para observar el universo y detectar galaxias en formación.

Fuente: [www.eso.org](http://www.eso.org)



### Actividad grupal

Reúnanse en grupos de 3 o 4 integrantes para realizar las actividades. Luego, comuniquen sus respuestas al curso.

1. Expresen en forma de potencia la cantidad de valores posibles que están almacenados en el mensaje de Arecibo. ¿Pueden calcular ese valor?, ¿por qué? Justifiquen sus respuestas.
2. Inventen una secuencia de cuadraditos con los colores blancos y negros y formen un cuadrilátero en el que aparezca alguna figura que exprese un mensaje. Intercambien su trabajo con otro grupo y descubran el mensaje que hay en la secuencia que les corresponda analizar.
3. En el año 2001 apareció en los alrededores del observatorio de Chilbolton, Inglaterra, un mensaje de características similares a las del de Arecibo. Investiguen críticamente en internet sobre este caso y señalen las diferencias y semejanzas entre este mensaje y el de Arecibo. ¿Qué opinan acerca del suceso de Chilbolton? ¿Se trató de contacto con inteligencia extraterrestre? Justifiquen sus respuestas a partir de la información recopilada.

### ¡NO LO OLVIDES!

Recuerda que el bit es la unidad mínima de información que puede almacenar un dispositivo electrónico.

1 bit  $\rightarrow$  2 valores

2 bits  $\rightarrow$   $2^2$  valores

3 bits  $\rightarrow$   $2^3$  valores

Etcétera.

► **Propósito**  
Explicar y representar la multiplicación de potencias.

### ¿Para qué?

Existen regularidades que te ayudarán a calcular multiplicaciones de potencias y, de esta manera, podrás resolver muchos problemas que involucran el cálculo de diversas magnitudes físicas, como áreas y volúmenes.

### Palabras clave

Multiplicación

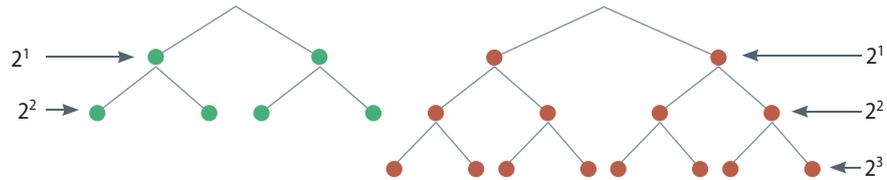
Potencia

Diagrama de árbol

Número natural

## ¿Cómo multiplicar potencias de igual base?, ¿y de igual exponente?

Como ya sabes, las potencias se pueden representar usando diagramas de árbol. Así,  $2^2$  y  $2^3$  pueden representarse como sigue:



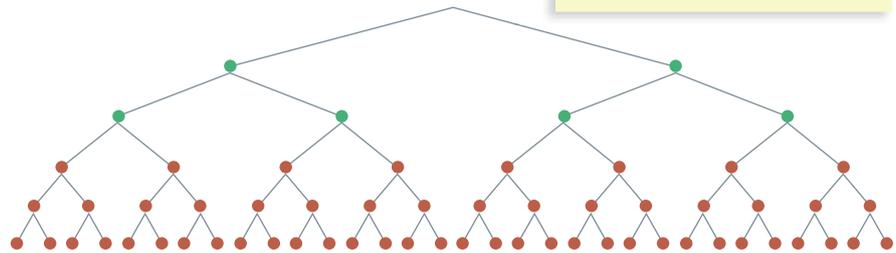
### Situación 1 Representando en un diagrama

¿Cómo puedes calcular el producto de  $2^2 \cdot 2^3$  usando diagramas de árbol?

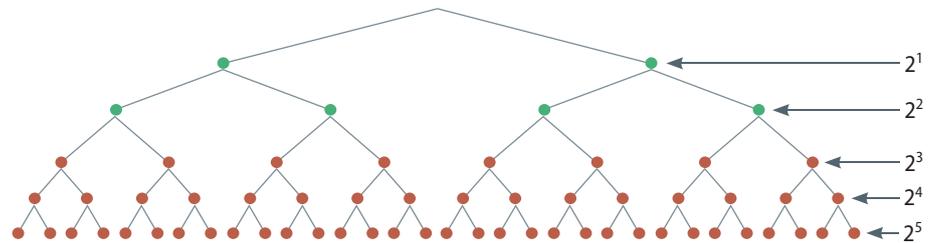
Para responder, usaremos los diagramas ya dibujados para  $2^2$  y  $2^3$ .

**Paso 1** Dibuja el diagrama que representa a  $2^2$  y en cada hoja terminal, dibuja el diagrama completo de  $2^3$ .

¿Qué tienen en común las potencias  $2^2$  y  $2^3$ , la misma base o el mismo exponente?



**Paso 2** Identifica la potencia que representa la fila inferior de hojas del árbol. Escríbela tú.



Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

Completa el enunciado:

El resultado de la multiplicación  $2^2 \cdot 2^3$  es 32. Puedo observar que si mantengo la \_\_\_\_\_ de las potencias y sumo sus \_\_\_\_\_, obtengo la potencia  $2^5$ , cuyo valor también es 32.

### Ayuda

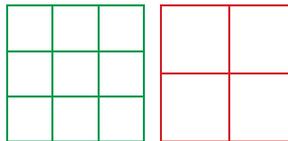
Puedes comprobar el resultado contando la cantidad de hojas que posee la fila inferior del árbol o multiplicando  $4 \cdot 8$ .

¿Cambiaría la respuesta si hubieras dibujado primero el diagrama de  $2^3$  y, después, el de  $2^2$ ?

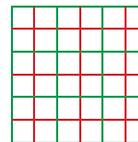
### Situación 2 Representando en una figura 2D

¿Cómo puedes calcular el producto de  $3^2 \cdot 2^2$  usando cuadrados?

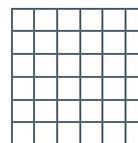
**Paso 1** Dibuja un cuadrado verde de 3 por 3 y uno rojo de 2 por 2. El verde representa la potencia  $3^2$  y el rojo, la potencia  $2^2$ .



**Paso 2** Dibuja en cada casilla del cuadrado verde una miniatura del cuadrado rojo.



**Paso 3** Cuenta las casillas que hay en cada lado del nuevo cuadrado. Puedes ver en la figura que hay 6 casillas en cada lado.



Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

Completa el enunciado:

El producto de multiplicación  $3^2 \cdot 2^2$  es 36. Puedo observar que si mantengo el \_\_\_\_\_ de las potencias y multiplico sus \_\_\_\_\_, obtengo la potencia  $6^2$ , cuyo valor también es 36.

#### Ayuda

Recuerda que las áreas de un cuadrado de 3 por 3 y de uno 2 por 2 se pueden expresar como  $3^2$  y  $2^2$ , respectivamente.

¿A qué potencia representa un cuadrado de 6 por 6?

¿Qué propiedad de la multiplicación puedes verificar si dibujas en cada casilla del cuadrado rojo una miniatura del cuadrado verde y calculas la cantidad de casillas?

### Situación 3 Resolviendo aritméticamente

¿Cuál es el valor de los productos de  $4^3 \cdot 2^3$  y de  $3^2 \cdot 3^3$ , si resuelves aplicando las reglas deducidas en la situación anterior?

**Paso 1** En la primera multiplicación, multiplica las bases y mantén el exponente. En la segunda, mantén la base y suma los exponentes.

Primera multiplicación

$$4^3 \cdot 2^3 = (4 \cdot 2)^3$$

Segunda multiplicación

$$3^2 \cdot 3^3 = 3^{2+3}$$

**Paso 2** Resuelve las operaciones y calcula el valor de las potencias obtenidas.

Primera multiplicación

$$(4 \cdot 2)^3 = 8^3 = 8 \cdot 8 \cdot 8 = 512$$

Segunda multiplicación

$$3^{2+3} = 3^5 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243$$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

#### Para concluir

Para  $a, b \in \mathbb{N}$  y  $n, m \in \mathbb{N}$ , se cumple que:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

Multiplicación de potencias de igual base.

$$a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$$

Multiplicación de potencias de igual exponente.

#### Argumenta y comunica

¿Cómo resolverías las multiplicaciones  $10^2 \cdot 10^0$  y  $5 \cdot 5^3$ ? ¿Qué particularidad observas en la primera? ¿Cuál es el exponente del primer factor en la segunda, si lo consideras como una potencia? Escribe el desarrollo de estas multiplicaciones y comunica tus resultados a tu curso.

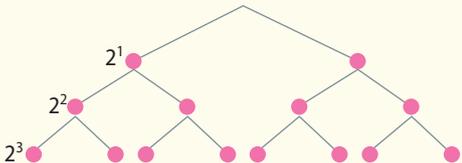
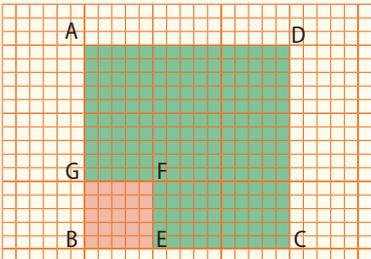
Repaso

- Representa cada potencia con un diagrama de árbol.
  - $2^2$
  - $3^3$
  - $4^2$
  - $5^2$
- Escribe la potencia representada por cada cuadrado.
  - 
  - 
  - 

Práctica guiada

- Representa en un diagrama de árbol cada multiplicación y expresa el producto como una sola potencia.
 

$2^2 \cdot 2^1 = 2^3$


  - $2^2 \cdot 5^2$
  - $3^2 \cdot 4^2$
- Analiza y responde las preguntas. Considera que el lado de los cuadraditos más pequeños mide 1 mm.
 
  - ¿Cuántos milímetros mide el lado del cuadrado ABCD?
  - ¿Cuántos cuadraditos hay en el cuadrado ABCD? Expresa esta cantidad como potencia.
  - ¿Cuántos milímetros mide el lado del cuadrado BEFG?
  - ¿Cuántos cuadraditos rojos hay en total? Expresa esa cantidad como una potencia.
  - ¿Cuántos cuadrados BEFG se necesitan para formar el cuadrado ABCD? Expresa el resultado como un producto de potencias.
  - ¿Cómo puedes relacionar la expresión  $a^2 \cdot b^2$  con los resultados obtenidos?

- Expresa cada producto como una sola potencia y luego calcula.
 

$10^3 \cdot 10^2 = 10^{3+2} = 10^5 = 100\,000$

  - $5^3 \cdot 5^2$
  - $2^3 \cdot 2^4$
  - $4^3 \cdot 4^2$
  - $7^3 \cdot 7^2$
  - $6^2 \cdot 7^2$
  - $45^1 \cdot 2^1$
  - $2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2$
  - $4^2 \cdot 5^2 \cdot 3^2$

- Determina el exponente desconocido para que se cumplan cada igualdad.
 

$8^2 \cdot 8^4 = 8^6$

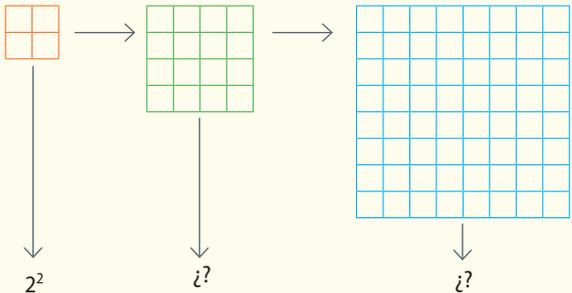
  - $2^{\square} \cdot 2^3 = 2^5$
  - $9^1 \cdot 9^{\square} = 9^7$
  - $4^2 \cdot 3^{\square} = 12^2$
  - $2^{\square} \cdot 3^3 = 6^3$

- Aplica las propiedades de las potencias para expresar cada producto como una sola potencia.
 

$4 \cdot 32 \cdot 2 = 2^2 \cdot 2^5 \cdot 2^1 = 2^{2+5+1} = 2^8$

  - $4 \cdot 2 \cdot 8$
  - $36 \cdot 6$
  - $25 \cdot 25 \cdot 5$
  - $27 \cdot 9 \cdot 9$
  - $2 \cdot 32 \cdot 64$
  - $25 \cdot 5 \cdot 125$
  - $10 \cdot 100$
  - $32 \cdot 64 \cdot 8$

Aplica

- Analiza la figura junto con un compañero o una compañera y luego desarrollen las actividades. El dibujo muestra tres cuadrados cuadrícula. El primer cuadrado representa la potencia  $2^2$ .
 
  - Considerando la subdivisión del cuadrado verde en 4 cuadrados naranjos, ¿qué potencia de exponente 2 representa el cuadrado verde?
  - Considerando la subdivisión del cuadrado celeste en 4 cuadrados verdes, ¿qué potencia de exponente 2 representa el cuadrado celeste?

- c. Determinen el número de cuadraditos del cuadrado verde y del cuadrado celeste.
- d. Basándose en los resultados anteriores señalen, ¿qué regla se puede utilizar para potenciar una potencia?
- e. Comuniquen la regla a otra pareja de trabajo y comparen los resultados obtenidos.

**9. Aplica la regla deducida en el ejercicio anterior para calcular cada potencia de potencia.**

$$(2^2)^2 = 2^{2 \cdot 2} = 2^4$$

- a.  $(1^3)^3$
- b.  $(3^2)^3$
- c.  $(4^2)^3$

**10. Resuelve cada problema expresando el resultado como una sola potencia.**

- a. Un portadiscos tiene 8 separaciones y en cada una de ellas caben 16 discos. ¿Cuántos discos caben en el portadiscos?
- b. Fabián tiene 14 años. ¿Cuál es el cuadrado del doble de la edad que tendrá dentro de 2 años?
- c. Un estadio de fútbol tiene 144 filas de 12 asientos cada una. ¿Cuántos espectadores pueden estar sentados en el estadio?
- d. Una persona dedicada a la chocolatería ofrece 8 tipos de chocolates. Si además tiene de 4 marcas diferentes, ¿cuántas variedades de chocolate ofrece esta persona?
- e. Una biblioteca está dividida en 9 repisas y cada una de ellas está subdividida en 3 espacios para guardar 27 libros. ¿Cuántos libros se pueden guardar en la biblioteca?
- f. Un edificio de 25 pisos tiene 5 departamentos por piso. Si cada departamento fue pensado para que vivieran a lo más 5 personas, ¿cuál es la capacidad máxima de residentes del edificio?
- g. Al lanzar un dado normal puedes obtener cualquiera de estos seis resultados: 1, 2, 3, 4, 5 o 6. Si lanzas dos dados, uno rojo y uno verde, obtienes pares de valores  $(r, v)$ , donde  $r$  es el número del dado rojo y  $v$  es el número del dado verde. ¿Cuántos pares de valores  $(r, v)$  te pueden salir al lanzar los dos dados? Expresa este resultado como una potencia y compáralo con el de tus compañeros o compañeras.
- h. ¿Cuál es el área de un cuadrado cuyo lado mide  $3^2 \cdot 5^2$  cm?
- i. ¿Cuál es la medida del lado de un cuadrado cuya área es  $16$  cm<sup>2</sup>?
- j. ¿Cuál es la medida de la arista de un cubo cuyo volumen es  $(7^2)^3$  m<sup>3</sup>?

**11. Describe el procedimiento.** Explica paso a paso en tu cuaderno el procedimiento que realizarías para expresar la multiplicación  $8 \cdot 5^3$  mediante una sola potencia.

**12. Crea.** Inventa un problema relacionado con una población de bacterias, y cuya solución pueda ser obtenida resolviendo la multiplicación  $2^3 \cdot 2^4$ . Además, respecto a este problema:

- a. Describe una estrategia para resolverlo.
- b. Comprueba tu respuesta.

### Reflexión

1. Considera las potencias con base negativa y exponente par e impar  $(-4)^2$  y  $(-4)^3$ . ¿Cuál es el signo del valor de cada una? ¿Qué relación tiene este signo con que el exponente sea par o impar? Calcula el valor de ambas potencias, piénsalo y escribe una conclusión al respecto.
2. ¿Podrías representar la multiplicación de potencias de igual exponente y distinta base usando los diagramas de árbol? Piénsalo, construye un diagrama de árbol para resolver la multiplicación  $2^3 \cdot 3^3$  y valida tu respuesta mostrándosela a un compañero o a una compañera.

### Refuerzo

1. Explica por escrito el procedimiento desarrollado con los diagramas de árbol para multiplicar potencias de igual base.
2. Describe paso a paso cómo resolverías la multiplicación de potencias de igual exponente usando la propiedad asociativa de la multiplicación.
3. Usando lenguaje algebraico, escribe la regularidad descubierta para multiplicar potencias de igual base y potencias de igual exponente.

► **Propósito**  
Explicar y representar la división de potencias.

### ¿Para qué?

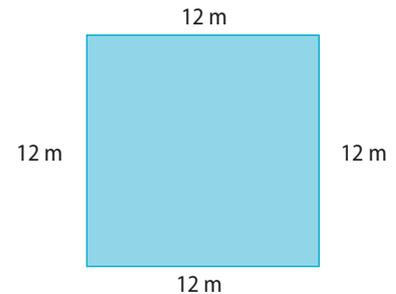
La división de potencias puede aparecer en cálculos geométricos, tanto en 2D como en 3D. Así, esta operación nos permite determinar, por ejemplo, la cantidad de azulejos que se necesitan para cubrir una pared y el número de vehículos que caben en un estacionamiento.

### Palabras clave

Número natural  
División  
Potencia  
Base  
Exponente

## ¿Cómo dividir potencias de igual base?, ¿y de igual exponente?

Como parte de las actividades de aniversario de un colegio, el alumnado ha decidido revestir el fondo de la piscina con un material antideslizante de cristal plano. Este material se vende en piezas cuadradas de 3 metros de lado y la base de la piscina tiene forma cuadrada con las medidas que se indican en el dibujo.



### Situación 1 Representando en una figura 2D

¿Cuántas piezas del revestimiento tendrán que comprar los alumnos y las alumnas para cubrir el fondo de la piscina?

Primero, es necesario que determinemos cuántas piezas del revestimiento de  $3^2 \text{ m}^2$  de área son necesarias para cubrir por completo el fondo de la piscina, cuya área es  $12^2 \text{ m}^2$ . Esto lo haremos resolviendo gráficamente la división de potencias:

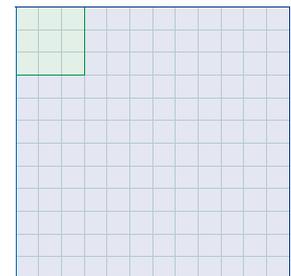
¿Qué tienen en común las potencias  $12^2$  y  $3^2$ , la misma base o el mismo exponente?

$$12^2 : 3^2$$

**Paso 1** Representa la piscina mediante un cuadrado azul de 12 cuadraditos por lado y, dentro de él, dibuja la pieza de revestimiento como un cuadrado verde de 3 cuadraditos por lado.

**Paso 2** Dibuja la cantidad de cuadrados verdes que sea necesaria para cubrir por completo el cuadrado azul.

**Paso 3** Cuenta los cuadrados verdes que dibujaste en el paso 2 y expresa este número como una potencia de exponente 2. Como los cuadrados verdes son 16, esta potencia es  $4^2$ .



1	5	9	13
2	6	10	14
3	7	11	15
4	8	12	16

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

Completa el enunciado:

El resultado de la división  $12^2 : 3^2$  es 16. Puedo observar que si divido las \_\_\_\_\_ de las potencias y mantengo el \_\_\_\_\_, obtengo la potencia  $4^2$ , cuyo valor también es 16.

¿Qué similitudes tiene esta regla de división de potencias de igual exponente con la regla de multiplicación de potencias de igual exponente?

## Situación 2 Simplificando factores

¿Qué potencia obtienes al calcular el cociente de  $4^3 : 4^2$ ?

Para responder, observa que las bases de los términos de la división son iguales.

**Paso 1** Escribe la división como una fracción y desarrolla las potencias según la definición.

$$\frac{4^3}{4^2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4}$$

**Paso 2** Simplifica la misma cantidad de factores en el numerador que en el denominador. Hazlo tú.

$$\frac{4^3}{4^2} = \frac{4 \cdot 4 \cdot 4}{4 \cdot 4}$$

¿Cuántos factores quedan en el numerador tras la simplificación?

**Paso 3** Expresa el resultado como potencia.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

Completa el enunciado:

El resultado de la división  $4^3 : 4^2$  es la potencia \_\_\_\_\_. Observo que para obtener rápidamente este resultado, puedo mantener la \_\_\_\_\_ de las potencias y restar sus \_\_\_\_\_.

### Ampliando

Las reglas deducidas en estas páginas para multiplicar y dividir potencias son válidas para exponentes naturales, fraccionarios y decimales.

¿Qué relación tiene el exponente de la potencia que obtuviste con los exponentes de las potencias que se dividieron?

## Situación 3 Aplicando propiedades

¿Cuál es el valor de los cocientes de  $18^3 : 3^3$  y de  $7^3 : 7^1$ , si resuelves aplicando las reglas deducidas en las situaciones anteriores?

**Paso 1** En la primera división, divide las bases y mantén el exponente. En la segunda, mantén la base y resta los exponentes.

Primera división

$$18^3 : 3^3 = (18 : 3)^3$$

Segunda división

$$7^3 : 7^1 = 7^{3-1}$$

**Paso 2** Resuelve las operaciones y calcula el valor de las potencias obtenidas.

Primera división

$$(18 : 3)^3 = 6^3 = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$$

Segunda división

$$7^{3-1} = 7^2 = 7 \cdot 7 = 49$$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

### ► Para concluir

Para  $a, b \in \mathbb{N}$  y  $n, m \in \mathbb{N}$ , se cumple que:

$$a^n : a^m = a^{n-m} \quad \text{División de potencias de igual base.}$$

$$a^n : b^n = (a : b)^n \quad \text{División de potencias de igual exponente.}$$

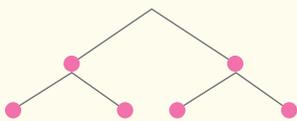
### Argumenta y comunica

¿Qué ocurre con el cociente de dos potencias de igual base e igual exponente? ¿Cuál es el resultado? Resuelve una división de potencias como  $4^2 : 4^2$  o  $9^3 : 9^3$ , comparte tu resultado con un compañero o una compañera y expongan sus resultados conjuntos al curso.

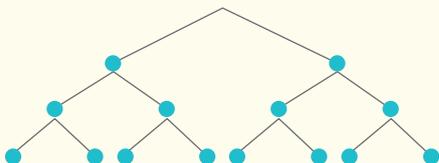
Repaso

- Calcula las potencias.
  - $3^2$
  - $2^3$
  - $4^3$
  - $5^4$
  - $10^3$
  - $11^5$
- Identifica las potencias desarrolladas en los diagramas de árbol.

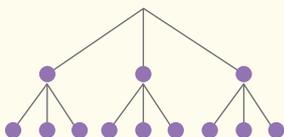
a.



b.



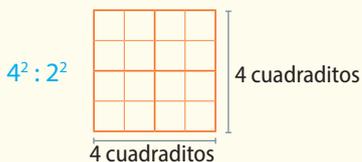
c.



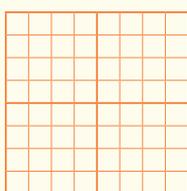
- Escribe cada expresión como una sola potencia.
  - $2^2 \cdot 2^3$
  - $7^2 \cdot 49^2$
  - $(2^2)^3$
  - $7^2 \cdot 7^3 \cdot 7^2$
  - $3^4 \cdot 9^3 \cdot 27$
  - $9^1 \cdot 9^1 \cdot 9^2$
  - $25 \cdot 5 \cdot 125$
  - $8^2 \cdot 2^4 \cdot 16^2$

Práctica guiada

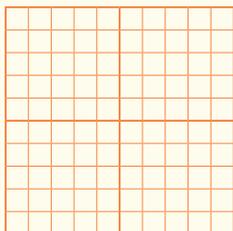
- Representa los cuadrados cuadriculados como una división de potencias de igual exponente.



a.



b.



- Escribe cada cociente como una sola potencia y luego calcula su valor.

$$90^4 : 18^4 = (90 : 18)^4 = 5^4 = 625$$

- $8^3 : 2^3$
- $450^2 : 50^2$
- $500^1 : 125^1$
- $4^6 : 2^6$
- $(30^6 : 5^6) : 3^6$
- $(50^2 : 10^2) : 5^2$

- Escribe cada cociente como una sola potencia y luego calcula su valor.

$$10^5 : 10^3 = 10^{5-3} = 10^2 = 100$$

- $5^3 : 5^2$
- $2^4 : 2^3$
- $100^3 : 100^2$
- $125^3 : 125^2$
- $(6 : 3)^4 : 2^4$
- $(15 : 5)^8 : 3^4$

- Expresa el resultado de cada división mediante una potencia.

$$121 : 11 = 11^2 : 11^1 = 11^{2-1} = 11^1$$

- $7^3 : 49$
- $8 : 2$
- $64 : 16$
- $81 : 27$

- Expresa cada resultado con una sola potencia.

$$\frac{8^2 \cdot 8 \cdot 8^3}{8^3 \cdot 8} = \frac{8^{2+1+3}}{8^{3+1}} = \frac{8^6}{8^4} = 8^{6-4} = 8^2$$

- $\frac{2^2 \cdot 2}{2}$
- $\frac{3^2 \cdot 3^4}{3^5}$
- $\frac{5^2 \cdot 5^2 \cdot 5^4}{5^5}$
- $\frac{3^3 \cdot 3^1 \cdot 3^7}{3^2 \cdot 3^2 \cdot 3^5}$
- $\frac{2^2 \cdot 5^3 \cdot 2^4 \cdot 5^3}{2^5 \cdot 5^5}$
- $\frac{7^2 \cdot 7^6}{7^5 \cdot 7^1}$

- Determina el exponente desconocido para se cumplan las igualdades.

$$8^5 : 8^{\square} = 8^2$$

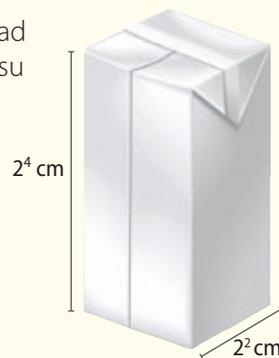
- $5^{\square} : 5^4 = 5^2$
- $8^7 : 8^{\square} = 8^5$
- $8^{10} : 2^{\square} = 4^{10}$
- $4^{\square} : 2^3 = 2^3$
- $15^2 : 3^{\square} = 5^2$
- $36^{\square} : 12^4 = 3^4$
- $18^3 : 3^{\square} = 6^3$
- $54^{\square} : 6^3 = 9^3$

Aplica

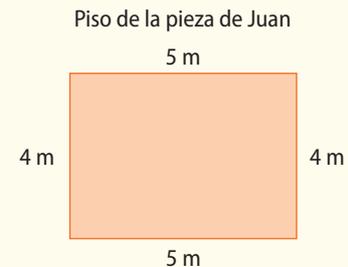
- Resuelve cada problema y expresa el resultado como una potencia.

- La masa conjunta de 3 trozos de queso iguales es 27 kg. ¿Cuál es la masa de cada trozo?

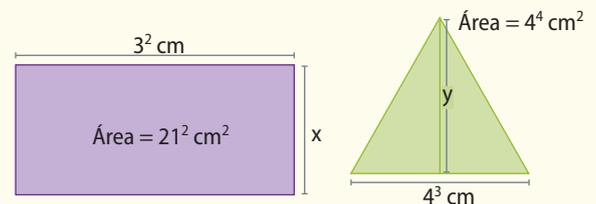
- b. Un porta CD puede contener 128 unidades. Si posee 8 subdivisiones iguales, ¿cuántos discos caben en cada subdivisión?
- c. Una caja con 81 docenas de huevos se repartió entre 9 personas. ¿Cuántos huevos recibió cada uno?
- d. Un pack de yogures cuesta \$ 1024. ¿Cuál es el precio de cada uno si el pack contiene 4 unidades?
- e. Un cine tiene capacidad para 144 espectadores sentados cómodamente. Si el cine cuenta con 12 filas horizontales, ¿cuántas filas verticales hay?
- f. Una torre con departamentos de un ambiente tiene 25 pisos y en total viven 625 personas. Si en cada departamento vive una persona, ¿cuántos departamentos por piso tiene la torre?
- g. El equipo de fútbol femenino del colegio debe elegir su tenida deportiva para el año. Como propuesta, tienen 81 combinaciones que pueden formar con 27 petos y una cierta cantidad de shorts. ¿Entre cuántos shorts pueden escoger?
- h. Un restaurante ofrece menús con plato de fondo y postre. Si en total se tienen 64 menús diferentes y 16 opciones de platos de fondo para escoger, ¿cuántos tipos de postres ofrece?
- i. ¿Cuál es la profundidad de la caja de leche si su volumen es  $320 \text{ cm}^3$ ?



- j. Juan quiere colocar cerámicas cuadradas en el piso rectangular de su dormitorio. Si el área de cada baldosa es  $20^2 \text{ cm}^2$ , ¿cuántas necesitará para cubrir todo el piso de la pieza? Considera que  $1 \text{ m}^2 = 10\,000 \text{ cm}^2$ .



- k. ¿Cuál es la medida desconocida en cada figura?



11. **Conecto con la Física.** La sigla SI permite identificar el Sistema Internacional de Unidades que fue instaurado en 1960 durante la realización de la XI Conferencia General de Pesas y Medidas. Este sistema unifica las unidades de medida de las magnitudes físicas y usa prefijos para indicar múltiplos y submúltiplos de ellas. Por ejemplo:

$$1 \text{ kilómetro} = 1\,000 \text{ metros}$$

$$1 \text{ megámetro} = 1\,000\,000 \text{ metros}$$

Si una carretera A mide 10 kilómetros y una carretera B mide 10 megámetros, ¿cuántas veces mayor es la carretera B que la carretera A?

### Reflexión

- Al aplicar la regla de la división de potencias de igual base a  $8^2 : 8^3$ , donde el exponente del dividendo es menor que el exponente del divisor, ¿qué sucede con el exponente del cociente? ¿Cómo resolverías esta operación? Calcula y luego discute tu respuesta con tus compañeros y compañeras.
- ¿Cómo interpretarías el resultado obtenido en la pregunta anterior? Escribe 3 ejemplos donde se vea esta situación.

### Refuerzo

- Describe el procedimiento que puedes aplicar para representar gráficamente la división de potencias de igual exponente.
- Explica paso a paso cómo calculas aritméticamente el cociente de potencias de igual base.
- Enuncia las reglas que puedes aplicar para calcular la división de potencias de igual base y la de potencias de igual exponente.

► **Propósito**

Aplicar las propiedades de las operaciones con potencias.

¿Para qué?

Al resolver un problema matemático que involucra potencias, el resultado puede ser una potencia de exponente nulo, en cuyo caso la definición no nos permite conocer su valor. Entonces, por convención, se le asigna un valor que es importante justificar mediante las operaciones aprendidas.

**Palabras clave**

División

Potencia

Exponente 0

¿Qué reglas o propiedades de las potencias y sus operaciones se ocupan en este desarrollo?

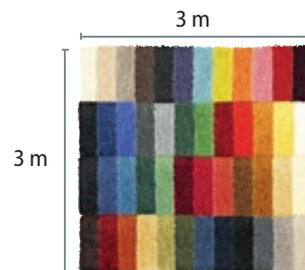
¿Cómo son entre sí el dividendo y el divisor, iguales o diferentes?

## ¿Cuál es el valor de una potencia de exponente 0?

Magdalena necesita alfombrar el piso de su dormitorio, pero el tipo de alfombra que eligió solo lo pudo comprar por trozos. Su habitación tiene forma cuadrada con un lado de 6 metros.

**Situación 1** Aplicando operaciones con potencias

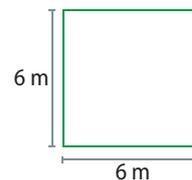
Si los trozos de alfombra que compró Magdalena son trozos cuadrados de las medidas indicadas en la figura del enunciado, ¿alcanzará para cubrir por completo el piso del dormitorio con 4 trozos?



Responderemos trabajando con potencias y usando las reglas deducidas para su multiplicación y división.

**Paso 1** Expresa el área del piso del dormitorio usando potencias.

$$\text{área del piso} = 6^2 \text{ m}^2$$



**Paso 2** Expresa el área de cada trozo de alfombra usando potencias.

$$\text{área del trozo} = 3^2 \text{ m}^2$$

**Paso 3** Expresa como una única potencia el área que es posible cubrir con los 4 trozos de alfombra.

$$\begin{aligned} \text{área total de alfombra} &= (4 \cdot 3^2) \text{ m}^2 \\ &= (2^2 \cdot 3^2) \text{ m}^2 = (2 \cdot 3)^2 \text{ m}^2 = 6^2 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

**Paso 4** Divide el área del piso del dormitorio por el área total que se puede cubrir con los trozos de alfombra comprados.

$$6^2 : 6^2 = 6^{2-2} = 6^0$$

Escribe para completar el enunciado:

Como el dividendo y el divisor de la división  $6^2 : 6^2$  son iguales, el cociente es \_\_\_\_\_. Paralelamente, si aplicamos la regla de división de potencias de igual base a esta misma división, obtenemos \_\_\_\_\_. Por lo tanto, puedo concluir que \_\_\_\_\_ es igual a \_\_\_\_\_.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

► **Para concluir**

Para  $a \in \mathbb{N}$ , se cumple que:

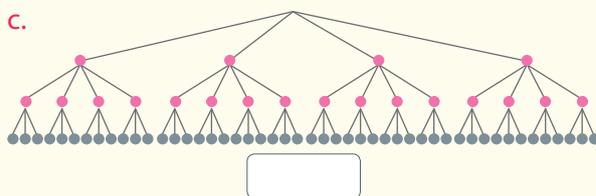
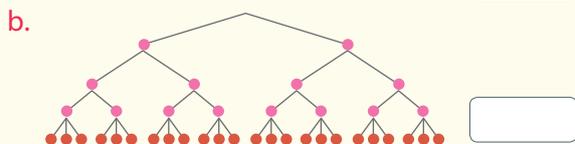
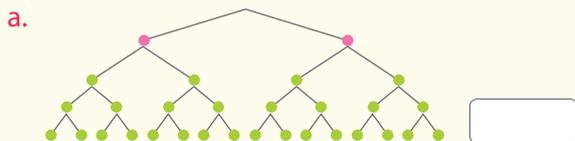
$$a^0 = 1$$

**Argumenta y comunica**

¿Existe algún  $b \in \mathbb{N}$  tal que para  $a \in \mathbb{N}$  se cumpla que  $a^b = 0$ ? Comunica tu respuesta a tu profesor o profesora y expón tus argumentos.

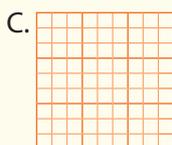
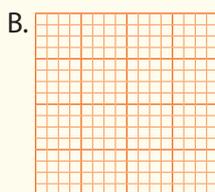
Repaso

1. Escribe la multiplicación de potencias correspondiente a cada diagrama de árbol.



2. Relaciona las letras de las divisiones de potencias con los cuadrados que las representan.

- a.  $16^2 : 4^2$       b.  $9^2 : 3^2$       c.  $4^2 : 2^2$



Práctica guiada

3. Calcula el resultado de cada operación.

$$2^0 = 1$$

- a.  $25^0 : 1$       c.  $38^0 + 20^0$       e.  $108^0 \cdot 7^0$   
 b.  $1^0 + 8^0$       d.  $1000^0 - 3^0$       f.  $1024^0 : 3^0$

4. Expresa las potencias con exponente cero como una división de potencias de exponentes distintos de cero.

$$2^0 = 2^{3-3} = 2^3 : 2^3$$

- a.  $3^0$       b.  $4^0$       c.  $20^0$       d.  $6^0$       e.  $7^0$

Reflexiono

- Martina afirma que al dividir un número por una potencia de exponente cero, el cociente no se puede calcular. ¿Estás de acuerdo con lo que dice Martina?, ¿por qué? Piénsalo y justifica tu respuesta con un ejemplo.
- Sean  $a, b, c \in \mathbb{N}$  y dada la potencia  $a^{b+c}$ , ¿qué condición debe cumplirse para que  $a^{b+c} = 1$ ? ¿Pueden  $b$  y  $c$  tener el mismo signo? Piénsalo y escribe una conclusión.

5. Expresa el resultado de cada operación combinada con una sola potencia.

$$\frac{7^0 \cdot 7^3}{7 \cdot 49} = \frac{7^{0+3}}{7 \cdot 7^2} = \frac{7^3}{7^{1+2}} = \frac{7^3}{7^3} = 7^{3-3} = 7^0$$

- a.  $\frac{3^3 \cdot 3^0}{3}$       b.  $\frac{2^3 \cdot 2^0 \cdot 2^5}{2 \cdot 2^3}$       c.  $\frac{5^5 \cdot 5^2}{5^0 \cdot 5^1}$

Aplica

6. Responde las preguntas.

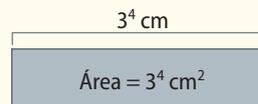
a. ¿Cuál es el área del cuadrado?



b. ¿Cuál es el área del rectángulo?



c. ¿Cuál es la medida del ancho del rectángulo?



7. **Crea.** Inventa 3 ejercicios combinados utilizando en cada uno de ellos las potencias  $18^0$ ,  $41^0$  y  $203^0$ . Luego, compártelos con tres compañeros o compañeras y pide que los resuelvan.

8. **Descubre el error.** Francisco realizó el siguiente desarrollo:

$$\frac{2^5 \cdot 2^4}{2} = \frac{2^{5+4}}{2^0} = \frac{2^9}{2^0} = 2^{9-0} = 2^9$$

¿Cuál es el error que cometió Francisco? Comenta con tus compañeros y compañeras, y desarrolla la operación correctamente.

9. **Investiga.** Considera la igualdad  $2^3 \cdot 2^a = 2^0$ , con  $a$  desconocido. ¿Qué valor de  $a$  mantiene la igualdad? Aplica la regla para multiplicar potencias de igual base y obtén el valor de  $a$ . Investiga qué significado tiene una potencia con un exponente como  $a$  y escribe dos ejemplos de potencias de este tipo.

Refuerzo

- Escribe una multiplicación de potencias de igual base cuyo resultado sea una potencia de exponente 0.
- Escribe ahora una división de potencias de igual base cuyo resultado sea una potencia de exponente 0.
- Escribe la operación  $27 : 27$  como una división de potencias, que tenga como resultado una potencia de exponente 0.

► **Propósito**  
Comprender el concepto de raíz cuadrada.

## ¿Para qué?

Muchos problemas geométricos y algebraicos requieren trabajar con números que deben ser expresados como potencias de exponente 2. Por ejemplo, conocida el área de un cuadrado, ¿cuál es la longitud de su lado? En esta clase de situaciones, la raíz cuadrada es una herramienta valiosa que permite simplificar los cálculos.

## Palabras clave

Potencia  
Exponente 2  
Raíz cuadrada

Si la forma del rompecabezas armado fuera un rectángulo de lados  $a$  y  $b$ , ¿cómo podrías calcular la cantidad de piezas que tiene en total?

## ¿Cómo se calcula una raíz cuadrada?

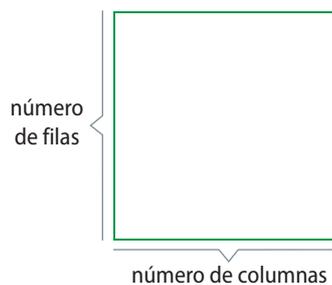
Guadalupe compró un rompecabezas de animales para sus hermanos pequeños. En la caja del rompecabezas dice que vienen 144 piezas y que su forma, una vez armado, es la de un cuadrado.



### Situación 1 Aplicando estrategia de ensayo y error

¿Por cuántas piezas estará formado cada lado del rompecabezas una vez que esté armado?

Para responder, construiremos ordenamientos con igual número de filas de piezas que de columnas, y calcularemos la cantidad total de piezas como el producto del número de filas construidas por el número de columnas:



**Paso 1** Aplicando la estrategia de ensayo y error, busca el número exacto de filas y de columnas que permite disponer las 144 piezas en un ordenamiento cuadrado.

Número de filas	Número de columnas	Número total de piezas
8	8	$8 \cdot 8 = 64$
10	10	$10 \cdot 10 = 100$
11	11	$11 \cdot 11 = 121$
12	12	$12 \cdot 12 = 144$

**Paso 2** Identifica en la tabla el ordenamiento que responde al requerimiento inicial. En la última fila se lee que este ordenamiento considera 12 piezas en cada fila y en cada columna. Por lo tanto:

**R:** Cada lado del rompecabezas armado está formado por 12 piezas.

¿A qué exponente hay que elevar 12 para obtener 144?

Escribe para completar el enunciado:

Como se cumple que  $12^{\square} = 144$ ; entonces se dice que la raíz cuadrada de 144 es 12, y esto se escribe  $\sqrt{144} = \underline{\hspace{2cm}}$ .

### Ayuda

El símbolo de raíz cuadrada es  $\sqrt{\quad}$  o  $\sqrt[2]{\quad}$ .

## Situación 2 Calculando la medida del lado de un cuadrado

¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuya área es  $256 \text{ cm}^2$ ?

Para responder, aplicaremos nuevamente la estrategia de ensayo y error.

**Paso 1** Confecciona una tabla para ir probando distintos valores para la medida del lado. Complétala tú.

Medida del lado (cm)	Área del cuadrado ( $\text{cm}^2$ )	¿Es $256 \text{ cm}^2$ ?
14	$14 \cdot 14 = 14^2 = 196$	No
15	$15 \cdot 15 = 15^2 = 225$	
16	$16 \cdot 16 = 16^2 = 256$	

**Paso 2** Identifica en la tabla la medida del lado que responde al requerimiento.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

### Ampliando

Se llama número cuadrado perfecto a aquel número cuya raíz cuadrada es un número natural. Los primeros 10 números cuadrados perfectos son 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81 y 100.

### Ampliando

Para obtener la raíz cuadrada de un número con calculadora, por ejemplo la de 36, debes teclear los botones:



## Situación 3 Representando mediante material concreto

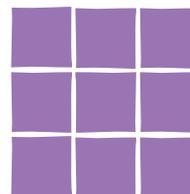
¿Cuáles son las raíces cuadradas de 4, de 9 y de 16?

**Paso 1** Recorta cuadraditos de 3 cm de lado de papel lustre o de cartón.

**Paso 2** Separa 4 cuadraditos y forma un cuadrado más grande con ellos, usando todos los cuadraditos. Luego, cuenta el número de cuadraditos que hay en cada lado del cuadrado que formaste.



**Paso 3** Separa ahora 9 cuadraditos y forma un cuadrado más grande con ellos, usando todos los cuadraditos igual que en el paso anterior. Cuenta los cuadraditos que hay en cada lado del cuadrado que formaste, ¿cuántos son?



**Paso 4** Separa 16 cuadraditos y haz lo mismo que hiciste en los pasos anteriores. Haz un dibujo en tu cuaderno.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

¿Qué representa el número que obtuviste en esta cuenta?

¿Podrías formar un cuadrado más grande con exactamente 12 cuadraditos?, ¿por qué?

### Para concluir

Intuitivamente, la **raíz cuadrada** ( $\sqrt{\quad}$ ) aparece como la operación matemática que aplicada al área de un cuadrado permite calcular la medida de su lado. Así, por ejemplo, si el área de un cuadrado es  $25 \text{ cm}^2$ , entonces su lado mide  $\sqrt{25} \text{ cm} = 5 \text{ cm}$ .

Formalmente, para  $a, b \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ , la raíz cuadrada se define como:

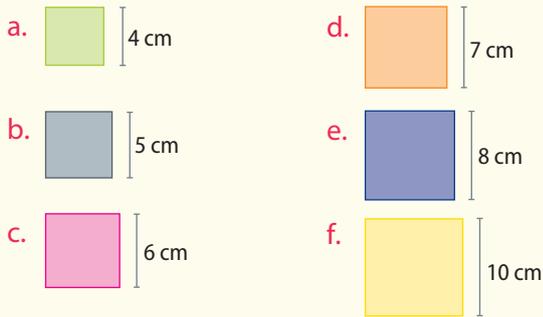
$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow a = b^2$$

### Argumenta y comunica

¿Qué harías si tuvieras que calcular el valor de  $\sqrt{20}$ , dado que 20 no es un número cuadrado perfecto? Para responder, comprueba con calculadora la relación de orden  $\sqrt{16} < \sqrt{20} < \sqrt{25}$ . Comparte tu respuesta con un compañero o una compañera, corrijan y comuniquen sus resultados.

Repaso

- Calcula el valor del cuadrado de cada número.
  - 2
  - 6
  - 9
  - 13
  - 15
  - 27
- Calcula el área de cada cuadrado dada la medida de su lado.



Práctica guiada

- Completa la tabla con la medida del lado de cada cuadrado a partir de su área.

Área (m <sup>2</sup> )	Lado (m)	Área (m <sup>2</sup> )	Lado (m)
81	9	49	
121		256	
144		361	
225		484	
400		729	
625		1600	

- Para cada área, ¿es posible definir un cuadrado cuyo lado mida una cantidad entera de centímetros? Si es así, determina esta medida.

Área (cm <sup>2</sup> )	Cuadrado (Sí/No)	Lado del cuadrado (cm)
49	Sí	7
25		
30		
40		
64		
80		
100		

- Calcula las raíces cuadradas. Comprueba tu resultado utilizando una calculadora.

$$\sqrt{441} = 21$$

- $\sqrt{121}$
- $\sqrt{81}$
- $\sqrt{169}$
- $\sqrt{676}$
- $\sqrt{400}$
- $\sqrt{289}$
- $\sqrt{841}$
- $\sqrt{1225}$
- $\sqrt{10000}$

- El símbolo ♣ representa un número entero no negativo distinto en cada caso. Calcúlalo.

$$\sqrt{\clubsuit} = 13 \rightarrow \clubsuit = 169$$

- $\sqrt{\clubsuit} = 3$
- $\sqrt{\clubsuit} = 11$
- $\sqrt{\clubsuit} = 18$
- $\sqrt{\clubsuit} = 0$
- $\sqrt{\clubsuit} = 10$
- $\sqrt{\clubsuit} = 15$

- Señala dos números naturales consecutivos tales que uno sea menor y el otro mayor que cada raíz.

$$\sqrt{144} < \sqrt{150} < \sqrt{169} \rightarrow 12 < \sqrt{150} < 13$$

- $\sqrt{2}$
- $\sqrt{8}$
- $\sqrt{15}$
- $\sqrt{24}$
- $\sqrt{27}$
- $\sqrt{34}$
- $\sqrt{89}$
- $\sqrt{156}$
- $\sqrt{264}$

- Une con una línea la raíz cuadrada y el intervalo de la recta numérica que la contiene.

Raíz cuadrada	Intervalo
$\sqrt{2}$	Entre 4,5 y 4,6.
$\sqrt{5}$	Entre 5,5 y 6,1.
$\sqrt{10}$	Entre 6,5 y 7,1.
$\sqrt{21}$	Entre 7,9 y 8,1.
$\sqrt{35}$	Entre 1,4 y 1,5.
$\sqrt{48}$	Entre 8,9 y 9,1.
$\sqrt{65}$	Entre 9,9 y 10,1.
$\sqrt{80}$	Entre 2,2 y 2,3.
$\sqrt{99}$	Entre 3,1 y 3,2.

- Señala si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F).

V La raíz cuadrada de un número natural siempre es un número positivo.

- \_\_\_\_\_ La raíz cuadrada de un número entero no negativo siempre es un número entero no negativo.
- \_\_\_\_\_ La raíz cuadrada de un número natural siempre es menor que dicho número.
- \_\_\_\_\_ Existen 10 raíces cuadradas exactas de números naturales menores o iguales a 100.
- \_\_\_\_\_ La raíz cuadrada de 50 es un número decimal.

## Aplica

## 10. Resuelve los problemas.

- a. Javiera quiere colocar una foto en un marco confeccionado por ella. Este debe tener la forma de un cuadrado que enmarque un área de  $900 \text{ cm}^2$ . En la tienda venden listones de madera de 1 cm de ancho de los siguientes largos:  
20 cm, 25 cm, 30 cm, 35 cm, 40 cm y 50 cm.



- ¿Cuánto mide el lado del marco?
  - ¿Qué tipo de listón debe elegir Javiera para que quede el mínimo de material sobrante? Calcula cuánto sobra.
- b. El piso de una casa tiene una superficie cuadrada de  $256 \text{ m}^2$ . Si se quiere colocar guardapolvos alrededor de esta, ¿cuántos metros deberá cubrir?
- c. El dueño de una tienda necesita reciclar su letrero de 4 metros de alto y 9 metros de ancho, para confeccionar un letrero cuadrado que tenga la misma área que el original. ¿Cuál es el área de ambos letreros? ¿Cuál es la medida del lado del letrero cuadrado?
11. **Conecta con la Física.** Uno de los grandes aportes a la ciencia que hizo Galileo Galilei fue demostrar que los cuerpos, en ausencia de fuerzas que se opongan al movimiento (por ejemplo, el roce con el aire), caen al mismo tiempo. Con esto, determinó que el tiempo que demora en caer un objeto desde una altura  $h$  está dado por la expresión  $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ ; donde la altura  $h$  se

mide en metros, el tiempo  $t$  en segundos y  $g$  es la aceleración de gravedad cuyo valor aproximado en la superficie de la Tierra es  $10 \text{ m/s}^2$ . Entonces, ¿cuánto demora en llegar al suelo una piedra que se suelta desde una altura de 10 m? Usa una calculadora y aproxima el resultado a la segunda cifra decimal.

12. **Descubre el error.** Andrea está haciendo su tarea de Matemática. Ahí le piden calcular el valor de  $\sqrt{5}$  y lo hace de la siguiente manera:

$$4 < 5 < 9 \rightarrow \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} \rightarrow 2 < \sqrt{5} < 3$$

Por lo tanto,  $\sqrt{5} = 2,5$ .

¿Cuál fue el error que cometió Andrea? Discútelo con tus compañeros o compañeras y escribe el desarrollo correcto en tu cuaderno.

13. **Conecta con la Biología.** El índice de masa corporal (IMC) es un indicador que se utiliza para evaluar el estado nutricional de las personas. Este se calcula mediante la fórmula  $\text{IMC} = \frac{\text{masa}}{\text{estatura}^2}$ , donde la masa está expresada en kilogramos y la estatura, en metros.

- a. A partir de la fórmula anterior, ¿qué expresión permite calcular la estatura de una persona si se conoce su masa y su IMC? Escríbela en tu cuaderno y compara tu respuesta con la de un compañero o una compañera.
- b. ¿Cuál es la estatura de una persona cuya masa es de 85 kg y su IMC es  $26 \text{ kg/m}^2$ ? Usa una calculadora y averigua en algún libro o en internet sobre el estado nutricional de esta persona.

14. **Investiga.** Los científicos y matemáticos Isaac Newton y Joseph Raphson descubrieron, por separado, un método para obtener aproximaciones de la raíz cuadrada de un número natural. Junto con un compañero o una compañera investiguen este procedimiento y aplíquelo para estimar el valor de la raíz cuadrada de 3.

## Reflexiono

1. ¿Es correcto afirmar que la raíz cuadrada de un número natural siempre es un número natural? Discútelo con tus compañeros y compañeras. Escribe algunos ejemplos que justifiquen tu respuesta.
2. Como el número 12 se ubica entre el 9 y el 16 en la recta numérica, ¿su raíz cuadrada debería ubicarse entre el 3 y el 4? Piénsalo y justifica tu respuesta.

## Refuerzo

1. Indica la medida del lado de los cuadrados cuyas áreas son  $280 \text{ mm}^2$ ,  $529 \text{ cm}^2$  y  $1764 \text{ m}^2$ .
2. Escribe el valor de las raíces cuadradas de los números 256, 441, 1156 y 2304.
3. Describe el procedimiento que aplicarías para estimar el valor de una raíz cuadrada. Ejemplifica con  $\sqrt{84}$ .

# Lección 12

► **Propósito**  
Estimar y representar raíces cuadradas.

## ¿Para qué?

Las raíces cuadradas definen números que pueden ser naturales o no, y que aparecerán de forma recurrente en muchos problemas geométricos. Por lo tanto, es importante conocer su orden a partir de su ubicación en la recta numérica.

## Palabras clave

Raíz cuadrada  
Recta numérica  
Orden

## ¿Cómo ubicar raíces cuadradas en la recta numérica?

Al costado se presentan las raíces cuadradas de los números naturales 4, 2, 16 y 9.

$\sqrt{4}$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{16}$	$\sqrt{9}$
------------	------------	-------------	------------

### Situación 1 Aplicando una estrategia

#### ¿Cuál de las raíces es mayor?

Para conocer el orden de estas raíces cuadradas determinaremos su valor y luego las ubicaremos en la recta numérica.

**Paso 1** Identifica aquellas raíces cuyo término subradical es un número cuadrado perfecto. Estas son  $\sqrt{9}$ ,  $\sqrt{4}$  y  $\sqrt{16}$ , y sus valores son:

$$\sqrt{9} = 3 \qquad \sqrt{4} = 2 \qquad \sqrt{16} = 4$$

Como 2 no es un número cuadrado perfecto, el valor de  $\sqrt{2}$  no es un número entero.

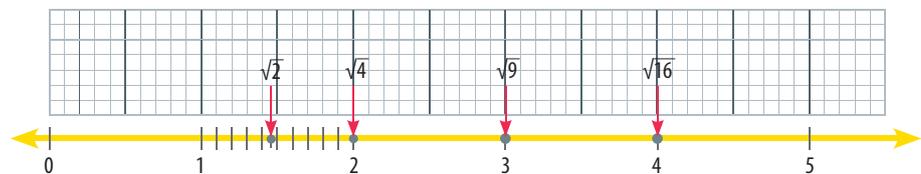
**Paso 2** Estima el valor de  $\sqrt{2}$ . Tienes que buscar un número b que elevado al cuadrado se aproxime lo más posible a 2. Empezaremos con el valor 1.

b	1	2	1,5	1,4	1,45	1,44
b <sup>2</sup>	1	4	2,25	1,96	2,1025	2,0736
¿b <sup>2</sup> es menor (m) o mayor (M) que 2?	m	M	M	m	M	M

El número 1,44 es tal que  $1,44^2 = 2,0736$ , que es un número decimal cercano a 2.

¿Cómo podrías obtener una aproximación más cercana a 2?

**Paso 3** Dibuja una recta numérica en papel milimetrado y ubica los valores de las raíces cuadradas.



Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

A partir de la relación de orden obtenida,  $\sqrt{2} < \sqrt{4} < \sqrt{9} < \sqrt{16}$ , ¿qué puedes concluir sobre el orden de las raíces cuadradas?

**Ayuda**  
Puedes corroborar tus resultados usando una calculadora.

### Ampliando

Los términos de una raíz son:

índice  $\rightarrow \sqrt[n]{a}$   $\leftarrow$  subradical

En estas páginas solo estudiaremos raíces cuadradas, es decir, raíces de índice 2.



### ► Para concluir

Para **ubicar raíces cuadradas en la recta numérica** debes determinar el valor exacto de la raíz cuando el término subradical es un cuadrado perfecto, y estimar un valor aproximado cuando el término subradical no es un cuadrado perfecto.

### Argumenta y comunica

¿Qué criterio usas para ir seleccionando los números que podrían ser una estimación del valor de una raíz cuadrada en un intervalo dado? Por ejemplo, como  $9 < 12 < 16$ , entonces  $3 < \sqrt{12} < 4$ . Y ahora, ¿qué valor mayor que 3 y menor que 4 eliges para seguir la búsqueda? Justifica tu respuesta y comunícala a tu curso.

Repaso

- Representa los números en la recta numérica.
  - 5
  - 1,5
  - 2,8
  - 3,25
- Calcula las raíces cuadradas.
  - $\sqrt{0}$
  - $\sqrt{16}$
  - $\sqrt{64}$
  - $\sqrt{49}$
  - $\sqrt{121}$
- Estima el valor de las raíces.
  - $\sqrt{5}$
  - $\sqrt{17}$
  - $\sqrt{52}$
  - $\sqrt{80}$
  - $\sqrt{112}$

Práctica guiada

- Representa, de forma aproximada, las siguientes raíces cuadradas en la recta numérica. Usa papel milimetrado.

$$\sqrt{8} \approx 2,8$$



- $\sqrt{5}$
- $\sqrt{10}$
- $\sqrt{20}$
- $\sqrt{3}$

Aplica

- Resuelve los problemas.
  - ¿Cuál es el perímetro de un cuadrado de área  $256 \text{ cm}^2$ ?
  - Un albañil utilizó 4900 baldosas cuadradas de lado 20 cm para cubrir el piso cuadrado de una habitación. ¿Cuántos metros mide el lado de la habitación?
  - Una granjera quiere cercar un terreno cuadrado cuya área es  $289 \text{ m}^2$ , con una valla que cuesta \$ 7500 por metro. ¿Cuánto dinero gastará en cercar el terreno?
- Analiza la sucesión. Luego responde.
 

$\sqrt{1}$     $\sqrt{4}$     $\sqrt{9}$     $\sqrt{16}$     $\sqrt{25}$     $\sqrt{36}$     $\sqrt{49}$     $\sqrt{64}$     $\sqrt{81}$     $\sqrt{100}$

  - ¿Cuál es la raíz cuadrada que viene a continuación en la sucesión?
  - Calcula la diferencia entre el término subradical de una raíz y el de la raíz anterior. ¿Qué puedes observar? Explica.
- Describe el procedimiento. Representa en la recta numérica las longitudes de las hebras de lana que aparecen en la tabla. Explica el procedimiento que realices paso a paso.

Hebra de lana	Longitud (cm)
Roja	$\sqrt{87}$
Verde	$\sqrt{28}$
Azul	$\sqrt{35}$
Amarilla	$\sqrt{63}$

- Investiga. El caracol de Pitágoras o caracol pitagórico es una construcción que sirve para representar las raíces cuadradas de números naturales a partir de un triángulo rectángulo isósceles. Averigua en internet sobre este método y utilízalo para representar  $\sqrt{5}$ .

Reflexiono

- Considera  $\sqrt{25}$  y  $\sqrt{b}$ , con  $b \in \mathbb{N}$ . ¿Qué valor debe tener b para que la diferencia entre las raíces sea igual a  $-4$ ? Piénsalo y compara tu resultado con el de tus compañeros o compañeras.
- ¿Qué valor de b satisfaría la ecuación  $\sqrt{25} + 14 = \sqrt{b}$ ? ¿Cómo la resolverías? Piénsalo y escribe un desarrollo detallado en tu cuaderno.

Refuerzo

- Escribe en tu cuaderno tres raíces cuadradas que se puedan ubicar en la recta numérica entre las posiciones del 7 y del 9.
- Escribe ejemplos de raíces cuadradas en que el subradical no sea un cuadrado perfecto.
- Describe el procedimiento que utilizarías para estimar el valor de  $\sqrt{7}$ . Usa la recta numérica.



14 Relaciona ambas columnas uniendo con una línea cada raíz y el intervalo que la contiene.

- a.  $\sqrt{2}$  Entre 2,1 y 2,4.
- b.  $\sqrt{3}$  Entre 2,9 y 3,4.
- c.  $\sqrt{5}$  Entre 1,6 y 1,8.
- d.  $\sqrt{7}$  Entre 1,4 y 1,6.
- e.  $\sqrt{11}$  Entre 2,4 y 2,7.

Lección 12: ¿Cómo ubicar raíces cuadradas en la recta numérica?

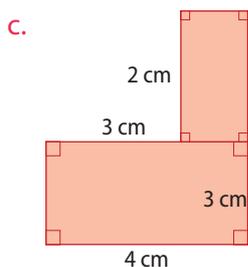
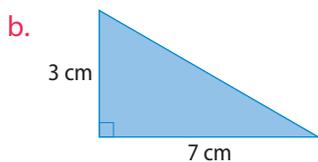
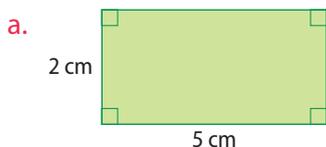
15 Ubica, de forma aproximada, las raíces cuadradas en las rectas numéricas.

- a.  $\sqrt{10}$  y  $\sqrt{13}$   

- b.  $\sqrt{19}$  y  $\sqrt{23}$   

- c.  $\sqrt{30}$  y  $\sqrt{33}$   


16 Calcula, en cada caso, el lado del cuadrado cuya área es igual a la de la figura dada.



Desafíos de integración

a. Para hacer transferencias de dinero por internet, Andrea debe utilizar una tarjeta como la siguiente:

	A	B	C	D	E
1	03	35	13	94	70
2	21	31	74	25	68
3	44	89	05	57	99
4	48	29	37	28	85
5	19	53	17	63	07

En el momento de la transferencia, el banco le pide ingresar una clave de tres números de dos dígitos de esta tarjeta al azar. Por ejemplo:

A5	E2	C3
19	68	05

¿Cuántas combinaciones de claves posibles hay?

b. Como ya sabes, si un objeto se deja caer desde una altura determinada  $h$  (medida en metros), el tiempo aproximado (medido en segundos) que tarda en llegar al suelo (considerando  $g$  igual a  $10 \text{ m/s}^2$ ) se puede calcular mediante la fórmula:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2h}{10}} = \sqrt{\frac{h}{5}}$$

Usando esta fórmula, completa la tabla:

Tiempo que tarda en caer (s)	Altura desde la que cae (m)
13	
	5
20	
	9
27	

- Considera una altura cualquiera  $h$  y calcula el tiempo que tarda en caer un objeto desde las alturas  $h$ ,  $(h + 1)$  y  $(h + 2)$ .
- Considerando los resultados anteriores, ¿es posible determinar cuántos segundos más tarda en caer un objeto si la altura se aumenta 1 metro?, ¿o depende de cada caso? Explica.

Coevaluación

Selecciona un tiempo  $t$  expresado en minutos y propón a un compañero o una compañera que calcule la altura  $h$  usando la expresión descrita en el desafío b. Corrige su trabajo prestando atención al uso correcto de las unidades de medida.

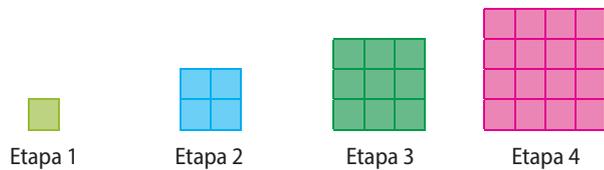
## Encontrar un patrón

Consiste en identificar el patrón o regularidad descrita en el enunciado o esquema y aplicarlo para llegar a la respuesta buscada.

### Algunas estrategias

- Usar un proceso de ensayo y error.
- Aplicar procesos reversibles.
- Descartar información irrelevante.
- Usar un problema similar pero más sencillo.
- Construir un esquema, diagrama o tabla.
- **Encontrar un patrón.**
- Usar modelos matemáticos.
- Usar razonamiento lógico.
- Identificar submetas.

En el esquema hay 4 etapas, cada una de ellas formada por un cuadrado principal que está subdividido en otros más pequeños: en 1, en 4, en 9 y en 16, respectivamente.



En una tabla se anotó la cantidad total de cuadriláteros (cuadrados y rectángulos) que se pueden dibujar sobre las líneas de la cuadrícula que forman los cuadrados principales, hasta la etapa 3. Esto es:

Etapa	1	2	3	4
N.º de cuadriláteros	1	9	36	?

Si se mantiene la regularidad, ¿cuántos cuadriláteros se pueden dibujar en la etapa 4?

¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema?

La cantidad de cuadriláteros que se pueden dibujar en la etapa 4.

¿Qué datos tengo para resolver?

Escribe tú

Crea un plan para resolver

Para resolver este problema puedes usar la estrategia **Encontrar un patrón** para identificar la regularidad descrita en la situación.

### Aplica la estrategia y resuelve

La cantidad de cuadriláteros que se pueden dibujar sobre las cuadrículas en cada etapa se puede representar usando potencias. Entonces, se reescribe la tabla del problema de la siguiente manera:

Etapa	1	2	3	4
N.º de cuadriláteros	1	3	6	?

La cantidad de cuadriláteros de cada etapa responde a una regularidad de potencias, en la que el exponente es 2 y la base se obtiene sumando el número de la etapa con la base de la potencia de la etapa anterior.

De esta forma, la potencia que representa la cantidad de cuadriláteros de la etapa 4 es  $10^2$ .

### Verifica la respuesta

Se puede corroborar la respuesta con esta otra regularidad:

Etapa 1:  $1^2 = 1$

Etapa 2:  $(1 + 2)^2 = 3^2 = 9$

Etapa 3:  $(1 + 2 + 3)^2 = 6^2 = 36$

Etapa 4:  $(1 + 2 + 3 + 4)^2 = 10^2 = 100$

O también puedes dibujar en tu cuaderno todos los cuadriláteros posibles de la etapa 4.

### Comunica la respuesta

Escribe tú

¿De qué otra forma resolverías este problema? Explica.

## Vuelvo a mis procesos

Responde de acuerdo a tu apreciación.

¿Estás conforme con el trabajo que realizaste en esta sección?, ¿por qué?

¿Aprendiste todo lo que esperabas al inicio de la sección? ¿Faltó algo?, ¿qué?

En general, ¿comprendiste las instrucciones de las actividades? ¿Con cuáles tuviste dificultades?

$2^4$  cm

$2^2$  cm

¿Crees que prestaste la suficiente atención y te esmeraste al realizar las actividades?, ¿por qué?

¿Qué lección te costó más aprender?, ¿por qué?

¿Te quedó alguna duda relacionada con los temas trabajados en la sección?, ¿cuál?

# Variaciones porcentuales

## Activo ideas previas

1. Lee la información y coméntala con un compañero o una compañera.



**E**n economía, se llama demanda a la cantidad de artículos que las personas están dispuestas a comprar a determinado precio. Así, por ejemplo, si un computador se vende muy barato, habrá mucha gente dispuesta a comprarlo; mientras que si se vende muy caro, es natural que haya menos personas interesadas.

Sin embargo, esto no siempre es así. Se dice que la demanda es elástica cuando efectivamente cambia al variar el precio del artículo, y si no lo hace, hablamos de demanda inelástica. Algunas demandas inelásticas son las de los productos básicos y las modas. Por ejemplo, supón que se venden 20 unidades de un producto a un precio unitario de \$ 100 y solo 15 unidades a un precio unitario de \$ 120. En este caso, la elasticidad de la demanda se calcula así:

$$E = \frac{\frac{15 - 20}{20}}{\frac{120 - 100}{100}} = -\frac{\frac{5}{20}}{\frac{20}{100}} = -\frac{0,25}{0,2} = -1,25$$

Este resultado indica que si el precio del producto aumenta en un 1 %, la demanda disminuye en un 1,25 %. Como la variación porcentual de la demanda es mayor que la variación porcentual del precio, diremos que la demanda es elástica.

Responde las preguntas junto a tu compañero o compañera.

- a. ¿Qué productos de uso común tienen demandas muy elásticas? Mencionen 3 y justifiquen su elección.

- b. ¿Qué producto podría tener una demanda muy inelástica? ¿Qué les hizo elegirlo? Comparen su respuesta con la de otra pareja e intercambien opiniones y argumentos para validar o invalidar la elección de sus compañeros o compañeras.

- c. ¿Qué mide la elasticidad? Redacten una respuesta completa y, observando el cálculo hecho en el texto leído, escriban la fórmula general de la elasticidad, llamando  $Q_1$  a la demanda de un producto al precio unitario  $P_1$ , y  $Q_2$  a la demanda del producto al precio unitario  $P_2$ .

## Activo conceptos clave

2. A continuación, se presentan algunos conceptos clave de esta sección. Escribe el que corresponda a cada definición.

recta numérica

variación

porcentual

proporción

porcentaje

disminución  
porcentual

IVA

interés

aumento  
porcentual

- a. Impuesto aplicado a la venta de un producto. \_\_\_\_\_
- b. Incremento expresado como porcentaje. \_\_\_\_\_
- c. Concepto matemático cuyo símbolo es %. \_\_\_\_\_
- d. Igualdad entre dos razones. \_\_\_\_\_
- e. Diferencia expresada como porcentaje. \_\_\_\_\_

### Pienso mis procesos

Responde de acuerdo a lo que conoces.

**¡OFERTA!**  
Precio **REBAJADO**  
en **\$1200**



¿Cómo defines el símbolo %? ¿Qué te indica?

¿Comprendiste el concepto de porcentaje en el curso anterior? ¿Qué dificultades tuviste?

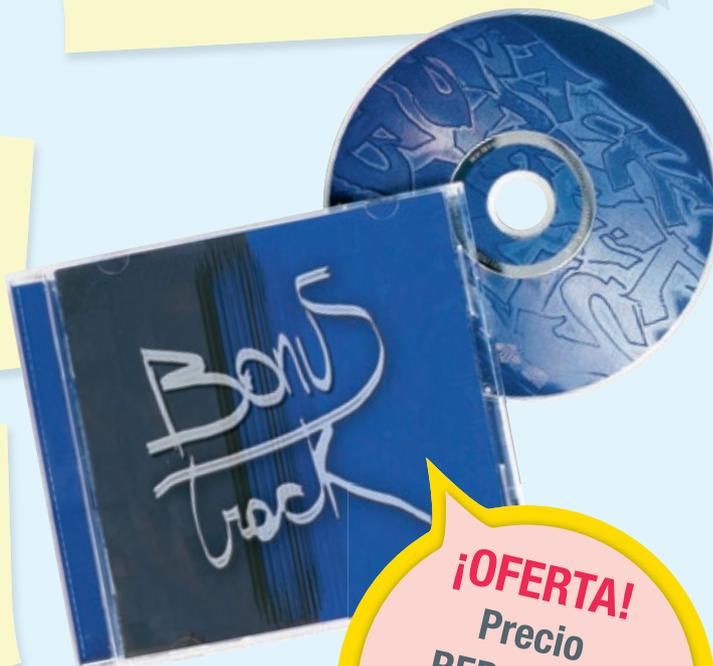
¿Qué método ocupas para calcular un porcentaje? ¿Qué pasos sigues?

¿Cuál de las ofertas es más conveniente para el comprador?, ¿por qué? ¿De qué depende?

¿Qué estrategia o contenido nuevo esperas aprender en esta sección?

¿Qué metas esperas alcanzar tras el estudio de esta sección?, ¿por qué?

**¡OFERTA!**  
Precio  
**REBAJADO**  
en un  
**25%**



Activa tus conocimientos previos respondiendo las preguntas laterales y luego resuelve las actividades. Para terminar, registra tus logros.

¿Qué es un porcentaje?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
15 correctas o más	menos de 15 correctas

¿Qué errores cometiste?

¿Qué harás para evitarlos?

### Calcular porcentajes

- Calcula, en cada caso, qué porcentaje del segundo número representa el primero. (8 puntos)
 

a. 5 de 10.	e. 1 de 2.
b. 12 de 60.	f. 10 de 8.
c. 4 de 16.	g. 3,5 de 7.
d. 20 de 25.	h. 12 de 6.
- Calcula el porcentaje pedido en cada caso. (8 puntos)
 

a. El 25% de 24.	e. El 18% de 150.
b. El 10% de 70.	f. El 55% de 55.
c. El 5% de 80.	g. El 120% de 90.
d. El 30% de 160.	h. El 170% de 38.
- Calcula el valor de x en cada caso. (8 puntos)
 

a. 12 es el 12% de x.	e. 7 es el 10% de x.
b. 5 es el 15% de x.	f. 72 es el 90% de x.
c. 35 es el 20% de x.	g. 150 es el 300% de x.
d. 19 es el 50% de x.	h. 3,5 es el 7% de x.

¿Cómo expresas un porcentaje con un número decimal o una fracción?, ¿y viceversa?

### Representar porcentajes

- Completa la tabla con el porcentaje, el número decimal o la fracción que corresponda. (16 puntos)

Porcentaje	Número decimal	Fracción
40%		
	0,2	
		$\frac{3}{5}$
124%		
25%		
		$\frac{7}{10}$
	1,4	
	0,85	

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
10 correctas o más	menos de 10 correctas

¿Qué errores cometiste?

¿A qué se debieron tus equivocaciones?

¿Qué ventajas tiene representar información en un gráfico?

¿En qué otros tipos de gráficos puedes representar porcentajes?

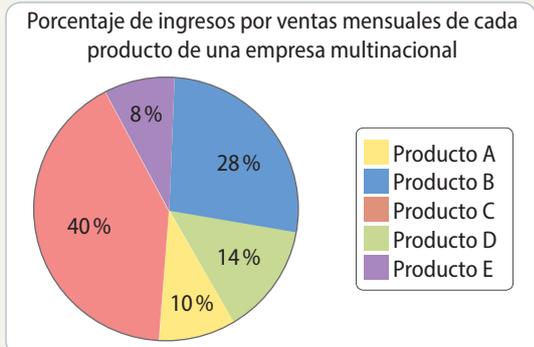
Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
3 correctas o más	menos de 3 correctas

¿Qué errores cometiste?

### Interpretar gráficos que contienen porcentajes

5 Responde las preguntas a partir de la información del gráfico. (4 puntos)



- ¿Qué producto genera mayores ingresos?
- ¿Cuál es la diferencia porcentual entre el producto que genera más ingresos y el que lo sigue?
- Si durante un mes los ingresos totales fueron de \$ 500 000 000, ¿cuánto dinero se recaudó con las ventas de cada producto?
- Si los ingresos en un mes fueron de \$ 100 000 000, ¿cuál fue la diferencia entre los ingresos generados por el producto C y la suma de los ingresos de todos los otros productos?

¿Qué estrategias has utilizado para resolver problemas con porcentajes?

¿Es siempre necesario construir un gráfico para resolver un problema con porcentajes?, ¿por qué?

### Resolver problemas

6 Resuelve los problemas que involucran porcentajes. (4 puntos)

- La masa corporal de Laura equivale al 80% de la de su hermano. Si su hermano tiene una masa corporal 12 kilogramos mayor que la de ella, ¿cuál es la masa de Laura?
- Cecilia está descargando un programa para su computador y el proceso ya ha avanzado un 18%. Luego de 10 minutos, el avance es de 25%. Suponiendo que la velocidad de descarga es constante, ¿en cuántos minutos más, aproximadamente, terminará el proceso?
- Alicia compró un par de zapatos que estaban con un 25% de descuento. Como pagó con una tarjeta de la tienda, le hicieron un descuento adicional del 10% sobre el precio en oferta, por lo que solo pagó \$ 2 150. ¿Cuál era el precio de los zapatos sin ningún descuento?
- Felipe ya ha ocupado el 68% de los minutos libres de su plan de celular. Si este incluye 250 minutos libres, ¿cuántos le quedan?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
3 correctas o más	menos de 3 correctas

¿Qué errores cometiste?

¿Qué propones para corregirlos?

# Lección 13

## ► Propósito

Comprender el concepto de variación porcentual y calcular variaciones porcentuales.

## ¿Para qué?

Tanto en el ámbito económico como en el científico abundan las referencias a porcentajes, ya que son una herramienta útil para evidenciar variaciones en las variables estudiadas.

## Palabras clave

Porcentaje

Aumento porcentual

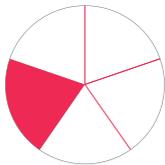
Disminución porcentual

Proporción

Recta numérica

## Ampliando

Un porcentaje (%) hace referencia a un entero que se considera dividido en 100 partes iguales, cada una de las cuales equivale a su 1%. Así, por ejemplo, 20% se puede representar gráficamente como:



¿Por qué se dividió el círculo en 5 partes iguales para representar el 20%?

¿Puedes concluir, con la información disponible, si la promoción es conveniente para los compradores?, ¿por qué?

## ¿Cómo calcular una variación porcentual?

En la caja de una pasta de dientes dice que por una promoción el contenido por envase ha aumentado con respecto al original, en el porcentaje que se indica en la imagen. Como antes cada envase traía 90 g, los compradores creen que ahora contendrá 100 g.



### Situación 1 Resolviendo el problema en la recta numérica

¿Traerá 100 g de pasta de dientes el envase de la promoción?

Responderemos la pregunta trabajando en la recta numérica.

**Paso 1** Construye una recta numérica. Partiendo de 0, define 10 intervalos iguales en sentido positivo, escribiendo en la última marca el número 90. Para determinar los números de las otras marcas, suma el cociente de  $90 : 10$  desde 0.

¿Por qué crees que se definen 10 intervalos en la recta numérica?



**Paso 2** Construye otra recta numérica, paralela a la anterior y dividida en 10 intervalos iguales, y escribe en cada marca 0%, 10%, 20%, 30%, etcétera, hasta llegar a 100%. Une con una línea vertical la posición del 20% en esta recta y la posición del número que le corresponde en la otra recta.



El número correspondiente de la recta inferior es 18.

**Paso 3** Adiciona a los 90 g originales la cantidad de gramos determinados en el paso 2. Escríbelo tú.

¿Qué habría que cambiar en el enunciado del problema para que en lugar de sumar estos valores tuvieras que restarlos?

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Situación 2 Resolviendo el problema aritméticamente**

¿Cuál es la solución del problema anterior si lo resuelves usando proporciones?

**Paso 1** Identifica los datos relevantes que te permitirán definir dos proporciones para calcular la respuesta:

- Considerar los 90 g, que corresponden al 100%; y un valor por determinar x, que corresponde al 20%. En este caso, la respuesta será 90 + x.
- Considerar los 90 g, que corresponde al 100%; y un valor por determinar y, que corresponde al 120%. En este caso la respuesta será y.

**Paso 2** Escribe las proporciones en tablas y aplica su regla fundamental.

Primera forma		Segunda forma	
Contenido (g)	Porcentaje (%)	Contenido (g)	Porcentaje (%)
90	100	90	100
x	20	y	120
$x = \frac{90 \cdot 20}{100} = \frac{1800}{100} = 18$		$y = \frac{90 \cdot 120}{100} = \frac{10800}{100} = 108$	
Que sumado a 90 da 108.			

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Ampliando**

La regla fundamental de las proporciones es una regla operacional que indica que para la proporción:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

Donde  $b \neq 0$  y  $d \neq 0$ , se cumple que  $ad = bc$ .

¿Cuál de las dos formas te parece más sencilla?, ¿por qué?

¿De qué otra forma se pudo haber resuelto el problema usando proporciones?

**Situación 3 Resolviendo aritméticamente otro problema**

Si el precio de una pasta de dientes ayer era \$ 1600 y hoy es \$ 1800, ¿cuál fue el porcentaje de aumento del precio?

**Paso 1** Calcula la diferencia entre el precio de hoy y el de ayer. Esto es  $\$ 1800 - \$ 1600 = \$ 200$ .

**Paso 2** Define los términos de la proporción que usarás para resolver el problema, escribe la proporción en una tabla y aplica la regla fundamental. Los \$ 1600 corresponden al 100% y los \$ 200, a un porcentaje (z%) por determinar.

Precio (\$)	Porcentaje (%)
1600	100
200	z

$$z = \frac{200 \cdot 100}{1600} = \frac{20000}{1600} = 12,5$$

**Ayuda**

$$\frac{20000}{1600} = \frac{200}{16} = \frac{50}{4} = \frac{25}{2}$$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

¿Qué información te entrega esta diferencia?

**Para concluir**

Una **variación porcentual** indica un aumento —o una disminución— de una cantidad expresado en porcentajes. La variación siempre está referida a la cantidad inicial. Para resolver problemas de variaciones porcentuales habitualmente se usan proporciones.

**Argumenta y comunica**

Para obtener el 20% de 90, basta con calcular cualquiera de estos productos:

$$0,2 \cdot 90 \qquad \frac{20}{100} \cdot 90$$

Calcula ambos productos, confirma que efectivamente permiten calcular el 20% de 90 y comunica tus conclusiones a tu curso.

Repaso

- Calcula los porcentajes.
  - El 30% de 90.
  - El 10% de 50.
  - El 50% de 40.
  - El 80% de 60.
  - El 105% de 80.
  - El 11,2% de 150.
- Calcula, en cada caso, qué porcentaje del segundo número representa el primero.
  - 25 de 50.
  - 20 de 70.
  - 12 de 98.
  - 12 de 60.
  - 120 de 100.
  - 1500 de 2000.
- Calcula en cada caso el 100%.
  - 8 es el 20%.
  - 40 es el 5%.
  - 3 es el 10%.
  - 56 es el 80%.
  - 9 es el 0,5%.
  - 2,1 es el 9%.

Práctica guiada

- Identifica el total o el 100% en cada situación.

Un barril contiene 13 litros de vino, que equivalen al 25% de su capacidad.  
El barril puede contener un total de 52 litros.

- De los estudiantes de un curso, 16 son hombres y el 60% son mujeres.
  - María ha leído 120 páginas de un libro, equivalentes al 30% del total.
  - ¡Solo por hoy! Todas las frutas y verduras tienen un 15% de descuento con la tarjeta SÚPER. Aprovecha y compra los duraznos a \$400 el kilogramo.
- Completa la tabla.

Situación	Aumento o rebaja
Todos los productos tienen un 20% de descuento.	Rebaja
A un producto se le debe agregar el 19% de IVA.	
Al sueldo imponible se le descuentan el 7% por salud y el 12% por AFP.	
El crecimiento de la población es de un 1,2%.	
La bencina de 95 octanos baja de \$700 el litro a \$680.	

- Calcula cada porcentaje final, una vez aplicado el aumento o la rebaja.

**¡Oferta solo por hoy!**  
Automóvil a \$ 3 990 000,  
con un 10% de descuento.

Porcentaje final: 90%

**Cremas faciales**  
con un 15% de contenido extra.

**¡Todas las loncheras a mitad de precio!**  
Lonchera básica, antes a \$ 4990  
ahora a \$ 2495.

**¡Lleve ahora, lleve ya!**  
Todas las pastas de dientes  
con un quinto de contenido extra.

**¡Precios bajos!**  
Todas las blusas marca Happy con  
un 15% de descuento.  
Precio de referencia: \$ 9990.

- Escribe la letra mayúscula que permite relacionar correctamente las situaciones de rebaja o aumento con los porcentajes finales correspondientes.

- “Lleve 4 y pague 3”.  **A. 50%**
- Reducción en un quinto.  **B. 81%**
- Aumento en un 3%.  **C. 75%**
- Reducción a la mitad.  **D. 80%**
- Reducción en un 19%.  **E. 104%**
- Aumento en un 4%.  **F. 66,6%**
- Rebaja en un tercio.  **G. 103%**

- Calcula la variación porcentual en cada situación. Redondea a la décima cuando sea necesario.

**¡Oferta solo por hoy! Estufa eléctrica:**  
antes \$25000, ahora \$15000

Porcentaje (%)	Precio (\$)
100	25000
x	15000

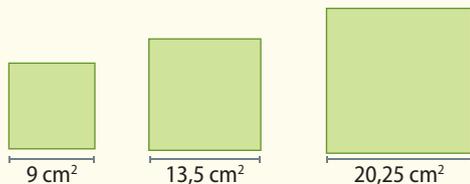
x = 60. La variación fue del 40%.

La variación fue del 40%.

- a. **Crecimiento de la población**  
año 2000: 805 218  
año 2010: 874 603
- b. **¡Imbatible! ¡Vuelve el hipotecario!**  
Te prestamos \$ 14 000 000 y nos devuelves \$ 15 000 000 en tres años más.
- c. **¡Útiles escolares con descuentos!**  
Block de dibujo mediano.  
Antes a \$ 1290, ahora a \$ 990.

## Aplica

9. Resuelve los problemas. Usa calculadora cuando lo necesites.
- a. El precio de una cocina aumentó en un 10% en marzo y disminuyó en un 15% en abril. Si el precio a finales de abril era \$ 192 208, ¿cuál era el valor de la cocina a principios de marzo, antes del primer aumento?
- b. En una venta veraniega se hizo una rebaja del 20% al valor de las piscinas. Cuando terminó la promoción, el vendedor aumentó el precio ya rebajado en el mismo porcentaje del descuento. ¿Se obtiene el precio que tenía originalmente la piscina? Justifica tu respuesta.
- c. La siguiente secuencia de cuadrados muestra una variación porcentual de sus áreas.



- Si dibujas los dos cuadrados que siguen en la secuencia, respetando el cambio porcentual, ¿cuál es el área de cada uno?

10. **Conecta con la Biología.** La jirafa es el mamífero terrestre más alto entre las especies existentes: puede alcanzar una altura de hasta 6 metros. Considera que la masa corporal de una jirafa recién nacida es de 84 kg, lo que corresponde al 7% de la masa de una jirafa adulta.

- a. ¿Cuál es la masa corporal de una jirafa adulta?
- b. Considerando que una jirafa que vive en cautiverio estabiliza su masa a los 30 años y el aumento de esta es constante, entonces ¿en qué porcentaje aumenta su masa año a año?

11. **Conecta con la Industria.** En el proceso de fabricación de ampolletas se estima que el 7% de las unidades producidas viene fallada. Según la información, ¿cuál es el porcentaje estimado de ampolletas sin falla? ¿Cuántas ampolletas se deben producir para obtener 200 000 ampolletas sin falla?

12. **Describe el procedimiento.** Explica cómo obtener la variación porcentual del precio de un automóvil nuevo que en el 2013 era \$ 3 999 990 y al año siguiente aumentó a \$ 4 299 990. Compara el procedimiento que utilizaste con el de un compañero o una compañera. ¿Llegaron al mismo resultado?

13. **Descubre el error.** Al precio de una camisa, que era originalmente \$ 8000, se le hizo un descuento del 10% y quedó en \$ 7200. Adicionalmente, se le aplicó una rebaja del 5% en caja, por lo que quedó en \$ 6840. Pablo dice que la variación porcentual fue del 15%. ¿Cuál es el error que cometió? Discute con tus compañeros o compañeras y determina el cambio porcentual correcto.

## Reflexión

1. Si se considera que cada lado de un cuadrado mide  $x$  cm, ¿en cuánto se debe disminuir esa medida para que su área disminuya a la cuarta parte? Piénsalo y redacta una respuesta completa.
2. ¿Cómo interpretarías que el volumen de un cubo de hielo disminuya en un 10% cada 20 minutos? ¿Es correcto afirmar que en una hora su disminución porcentual será del 30%? Justifica tu respuesta.

## Refuerzo

1. Explica, a través de un ejemplo, el procedimiento que utilizarías para representar un aumento porcentual del 60% en la recta numérica.
2. Indica cómo calcularías una variación porcentual usando proporciones. Escribe un ejemplo considerando un 45% de disminución porcentual.
3. Aplica los siguientes aumentos porcentuales a 356 400 y luego compara tu resultado con el de un compañero o compañera: 18%, 36% y 84%.

► **Propósito**  
Resolver problemas cotidianos que involucran variaciones porcentuales.

## ¿Para qué?

Muchos indicadores económicos relevantes para la vida de los ciudadanos se expresan como porcentajes con respecto a un valor referencial. Por ejemplo: las tasas de interés bancarias, el IVA, la variación del IPC, la variación del Imacec, los descuentos previsionales, etc.

## Palabras clave

Variación porcentual

IVA

Interés

## Ayuda

Averigua más sobre el IVA ingresando el código TM8P080 en <http://codigos.auladigital.cl>

¿Cómo resolverías el problema usando proporciones?

Si el precio sin IVA del artículo corresponde al 100%, ¿a qué porcentaje corresponde el precio con IVA?

## ¿Cómo hacer cálculos usando variaciones porcentuales?

El IVA (Impuesto al Valor Agregado) es el principal impuesto al consumo que existe en nuestro país y grava las ventas de muchos bienes de uso común, así como también algunos servicios que se prestan en nuestro territorio.

Supón que quieres comprar una mesa de centro para tu casa y su precio sin IVA es de \$ 120 000 y con IVA, de \$ 142 800.

### Situación 1 Representando en la recta numérica

#### ¿Cuál es el porcentaje que se cobra en Chile por IVA?

Resolveremos este problema en la recta numérica.

**Paso 1** Calcula la diferencia entre los precios con y sin IVA.

$$\$ 142\,800 - \$ 120\,000 = \$ 22\,800$$

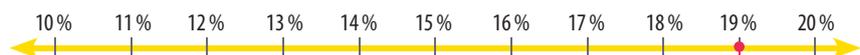
**Paso 2** Construye una recta numérica. Partiendo de 0, define 10 intervalos iguales en sentido positivo y escribe en la última marca el número 120 000. Para determinar los números que van en las otras marcas ve agregando el cociente de  $120\,000 : 10$  desde la segunda marca hasta la penúltima.



**Paso 3** Construye otra recta numérica paralela a la anterior y dividida en 10 intervalos iguales, y escribe en cada marca 0%, 10%, 20%, 30%, etcétera, hasta llegar a 100%. Une con una línea vertical la posición aproximada de 22 800 en la primera recta con la segunda recta. Los intervalos que incluyen los puntos conectados por la línea vertical son entre 12 000 y 24 000 y entre 10% y 20%.



**Paso 4** Construye dos nuevas rectas en las que aparezcan los intervalos determinados en el paso 3. Divídelos en 10 partes iguales y une con una línea vertical la posición del 22 800 en una recta con la posición del porcentaje que le corresponde en la otra recta.



Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

### Situación 2 Resolviendo aritméticamente un problema

El hijo de Andrea quiere ahorrar dinero y ella le ofrece ser su banco, con una tasa de interés anual simple del 2%. Si el depósito inicial fue de \$ 50 000, ¿cuánto dinero tendrá ahorrado el hijo de Andrea al cabo de 3 años?

**Paso 1** Calcula el 2% de 50 000.

Monto inicial (\$)	Porcentaje (%)
50 000	100
x	2

$$x = \frac{50\,000 \cdot 2}{100} = 1000$$

Como el régimen del ahorro es simple, al finalizar cada año se le deben agregar \$ 1000 al monto que había inicialmente.

**Paso 2** Calcula los montos al finalizar cada uno de los 3 años.

$$\text{Año 1} \rightarrow 50\,000 + 1000 = 51\,000$$

$$\text{Año 2} \rightarrow 51\,000 + 1000 = 52\,000$$

$$\text{Año 3} \rightarrow 52\,000 + 1000 = 53\,000$$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

#### Ampliando

En un régimen de interés anual simple a una tasa del  $s\%$ , el dinero se va reajustando anualmente en una cantidad fija que corresponde al  $s\%$  del monto depositado a principios del primer año.

### Situación 3 Resolviendo aritméticamente otro problema

Si en la situación anterior consideramos un régimen de interés compuesto, ¿cuánto dinero habrá ahorrado al cabo de 3 años?

**Paso 1** Calcula el 102% de \$ 50 000.

Monto inicial (\$)	Porcentaje (%)
50 000	100
x	102

$$x = \frac{50\,000 \cdot 102}{100} = 51\,000$$

**Paso 2** Calcula el 102% de \$ 51 000.

Monto inicial (\$)	Porcentaje (%)
51 000	100
y	102

$$y = \frac{51\,000 \cdot 102}{100} = 52\,020$$

**Paso 3** Calcula el 102% de \$ 52 020.

Monto inicial (\$)	Porcentaje (%)
52 020	100
z	102

$$z = \frac{52\,020 \cdot 102}{100} = 53\,060,4$$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

¿Por qué hay que calcular el 102%?

#### Ampliando

En un régimen de interés anual compuesto a una tasa del  $c\%$ , el dinero se va reajustando anualmente en una cantidad variable que corresponde al  $c\%$  del monto existente al empezar cada año.

¿Cuál de los regímenes de ahorro es más conveniente para el inversor, el simple o el compuesto?

#### ► Para concluir

Para **resolver problemas** que involucran variaciones porcentuales, se puede ocupar la recta numérica y resolver gráficamente, o aplicar proporciones y resolver aritméticamente.

#### Argumenta y comunica

Un estudiante dice que para calcular el  $p\%$  del  $q\%$  de 500 hay que resolver:

$$\frac{p}{100} \cdot \frac{q}{100} \cdot 500$$

¿Está en lo correcto? Justifica tu respuesta.

Repaso

1. Escribe la letra mayúscula que corresponde al porcentaje final de cada situación.

- a. Aumento del 2%. — **A. 83,3%**
- b. "Lleve 6 y pague 5". — **B. 50%**
- c. Reducción a la mitad. — **C. 81%**
- d. Rebaja en un quinto. — **D. 80%**
- e. Reducción del IVA. — **E. 102%**

Práctica guiada

2. Completa la factura y luego responde.

Librería SOLES		FACTURA N.º 0000569	
Señor(es):			
Rut:			
Cantidad	Producto	Precio unitario sin IVA (\$)	Total (\$)
25	Lápiz mina	80	$80 \cdot 25 = 2000$
80	Goma 6 cm	70	
16	Estuches 15 cm	1150	
90	Cuaderno universitario	590	
Total sin IVA (\$)			
Valor del IVA (19%)			
<b>Total con IVA (\$)</b>			

- a. ¿Cuál es monto total con IVA a pagar por la compra de las gomas de 6 cm?
- b. ¿Cuál es monto total sin IVA a pagar por la compra de los cuadernos universitarios?
- c. Camila quiere vender estos productos en su almacén con un 45% de ganancia sobre el precio que pagó por ellos. ¿A qué precio debe vender (con IVA) los estuches de 15 cm?

3. Completa la tabla y luego responde.

La tabla muestra parte de la evolución de un capital en una cuenta de ahorro tipo A.

Año	Capital inicial (\$)	Tasa de interés (%)	Interés simple (\$)	Capital final (\$)
1	100 000	0,50	$100\,000 \cdot 0,005 = 500$	100 500
2	100 500			

Completa la tabla anterior con los intereses para la cuenta de ahorro son:

Año	Tasa de interés	Año	Tasa de interés
1	0,50%	4	2,25%
2	1,05%	5	3,25%
3	1,75%	6	4,50%

- a. ¿Cuál será el capital final que habrá en la cuenta transcurridos 6 años?
- b. Si consideraras un capital inicial de \$ 200 000, ¿cuál sería el capital final al cabo de 6 años? Construye una tabla con esta nueva información.
- c. Compara los datos de cada tabla. ¿Qué conclusiones puedes sacar?
- d. Si existe un tipo B de cuenta de ahorro cuyo interés fijo es del 1,2%, ¿cuál será el capital final al cabo de 6 años si inicialmente se depositan \$ 100 000?
- e. ¿Cuál tipo de cuenta de ahorro conviene más, el A o el B? Comenta con tu curso las ventajas y desventajas del ahorro a largo plazo.

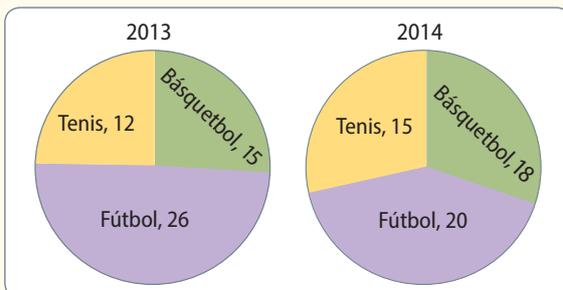
Aplica

4. Resuelve los problemas.

- a. Un trabajador recibe a fin de mes un sueldo líquido de \$ 500 000, tras efectuarse los descuentos legales al sueldo imponible: 12,6% por previsión y 7% por salud.
  - ¿Cuál es el sueldo imponible del trabajador?
  - ¿Cuál es el porcentaje asociado al sueldo líquido respecto del sueldo imponible?
  - ¿Cuál es la diferencia porcentual entre el sueldo imponible y el sueldo líquido?
  - Si, además de la previsión y la salud, al sueldo imponible se le descontara un 0,6% por un seguro de cesantía, ¿cuál sería ahora el sueldo líquido?
- b. Luis tiene un taller de bicicletas en Lota y para abastecerlo compra mensualmente en Concepción los productos que se muestran en la tabla.

Cantidad	Producto	Precio unitario (\$)
12	Casco infantil	8900
26	Asiento bicicleta	5000
12	Llantas aro 26	6700
40	Frenos	15 000

- ¿Cuál es el precio total que debe pagar Luis si debe cancelar con factura, es decir, si debe incluir el IVA?
  - Si el dueño del local donde compró los productos le ofrece un descuento del 6% al total facturado, ¿cuál es el porcentaje que pagó finalmente Luis?
- c. Lorena arrienda un departamento en la ciudad. El dueño, al comenzar el arrendamiento, le informó que cada año transcurrido aumentaría el monto del arriendo en un 5%. Si lleva 4 años viviendo ahí y paga \$ 250 000 mensuales de arriendo, aproximadamente:
- ¿cuál era el valor inicial del arriendo pactado?
  - ¿cuál es el porcentaje de arriendo que ella paga respecto a lo que cancelaba inicialmente?
  - ¿cuál ha sido la variación porcentual del costo del arriendo?
5. En el 2013, un grupo de estudiantes asistió a unos talleres deportivos que incluían: tenis, fútbol y básquetbol. En el 2014, algunos de los participantes cambiaron de deporte, como puedes ver en los gráficos circulares.



- ¿Cuál fue la variación porcentual de los estudiantes inscritos en fútbol?
- ¿Cuál fue la variación porcentual de los estudiantes inscritos en tenis?

6. **Conecto con la Economía.** Una institución financiera ofrece préstamos, en pesos, a alumnos de pregrado para pagar sus carreras universitarias. Los estudiantes podrán comenzar a pagar este préstamo cuando estén trabajando. En este préstamo se aplica una tasa de interés compuesto del 2% anual.

- Si un alumno pide un crédito para pagar sus estudios superiores, su carrera dura 4 años y tiene un arancel anual de \$ 1 300 000, ¿a cuánto ascenderá su deuda cuando termine de estudiar?
- Si una alumna pide un crédito y su carrera dura 5 años con un arancel anual de \$ 900 000, ¿a cuánto ascenderá su deuda?

7. **Descubre el error.** Pía pide en un banco un crédito de consumo de \$ 1 000 000, con una tasa de interés compuesto del 1,4% mensual. Como Pía quiere pagar el préstamo en 1 año, realizó el siguiente cálculo para saber cuánto pagará en total:

$$\$ 1\,000\,000 + \$ 1\,000\,000 \cdot (1,4\% \cdot 12)$$

$$\$ 1\,000\,000 + \$ 1\,000\,000 \cdot 16,8\%$$

$$\$ 1\,168\,000$$

¿Qué error cometió Pía en su cálculo? Comenta con tus compañeros y compañeras y escribe en tu cuaderno el desarrollo correcto.

8. **Crea.** Elabora una situación que se contemple un interés anual simple y considera un capital inicial de \$ 350 000. Luego, modifica el planteamiento para que incluya un interés compuesto. ¿Qué datos tienes para resolver cada situación? Responde y muestra tu trabajo a un compañero o a una compañera.

### Reflexiono

1. ¿Crees que en un almacén todos los productos se venden con IVA incluido?, ¿por qué? Coméntalo con tus compañeros y compañeras y averígalo en fuentes confiables de internet.
2. Si tuvieras que elegir el tipo de interés que se aplicará tu cuenta de ahorro, ¿elegirías el interés simple o el compuesto? Justifica tu elección y discútela con tus compañeros y compañeras.

### Refuerzo

1. Describe cómo calcularías una variación porcentual usando la recta numérica. Crea una situación en la que se aplique una variación del 28%.
2. Explica el procedimiento que seguirías para calcular con proporciones la variación porcentual del precio de un libro que cuesta \$ 15 000 con IVA.
3. Señala las semejanzas y diferencias que hay entre el interés simple y el compuesto.

# Reciclaje y energías renovables no convencionales en Chile

## ¿Cuáles son sus beneficios?

En Chile se consideran energías renovables no convencionales (ERNC) a la eólica, la pequeña hidroeléctrica, la biomasa, el biogás, la solar y la mareomotriz. Entre los años 2013 y 2017, los parques eólicos y las plantas solares (fotovoltaicas) representarán el 54,8% de los proyectos de ERNC en nuestro país.

Algunos de los beneficios del uso de las ERNC proyectados para el año 2028 son:

$CO_2$

Se evita la emisión de más de 83 millones de toneladas de dióxido de carbono ( $CO_2$ ).

\$

Si se alcanza un 20% de ERNC, esto generará 1600 millones de dólares para la economía chilena.

$H_2O$

Un ahorro del 11% en el consumo de agua del sector eléctrico, equivalente a 120 millones de  $m^3$  de agua en un año.



» Paneles solares fotovoltaicos

En la comuna de Combarbalá, ubicada en la IV región, se inauguró en 2011 el primer barrio solar de Chile, llamado Cruz del Sur, que integra a 114 familias de escasos recursos. El propósito de este proyecto fue hacer un modelo de barrio solar incorporando en los techos de las casas paneles solares fotovoltaicos para hacer uso de esta energía renovable.

### Sabías que...

Feldheim es un pueblo alemán cercano a la ciudad de Berlín que genera el 100% de la energía que ocupa de manera sostenible. Se considera la capital mundial de las energías renovables. Por ejemplo, ahí existe un parque solar de 45 hectáreas con capacidad para abastecer a 600 familias, y el uso de automóviles eléctricos ha permitido disminuir en un 30% el precio de la energía consumida.

### Actividad grupal

Reúnanse en grupos de 3 o 4 integrantes para realizar las actividades. Luego, comuniquen sus respuestas al curso.

1. Averigüen qué otros beneficios económicos, sociales y medioambientales tiene el uso de las ERNC en Chile. Elaboren un listado incluyendo cifras porcentuales sobre el uso actual de ERNC en nuestro país y mencionen cuáles son las proyecciones que se hacen para los próximos años. ¿Cómo pueden interpretar los datos que obtuvieron?
2. La Unesco declaró el 17 de mayo como el día internacional del reciclaje, con la finalidad de que se tome conciencia sobre la importancia de reducir, reutilizar y reciclar.
  - ¿Alguna vez has reciclado?, ¿qué productos? ¿En tu barrio existen contenedores de reciclaje?
  - ¿Qué impacto medioambiental produce el reciclaje?
  - Investiga con tus compañeros y compañeras sobre la evolución que ha tenido el reciclaje en Chile y en otros países durante la última década. Comenten y escriban conclusiones al respecto.



**Lección 13: ¿Cómo calcular una variación porcentual?**

**1** En cada caso, calcula la variación porcentual y escribe en el recuadro si es un aumento o una disminución.

a. El litro de combustible costaba \$ 800 y hoy alcanza los \$ 920.

\_\_\_\_\_%

b. En el campeonato de fútbol del 2012 la asistencia de público a los estadios fue de 4 920 120, y en el campeonato del 2013 alcanzó los 4 182 102.

\_\_\_\_\_%

c. La cantidad de accidentes de tránsito durante los fines de semana de agosto fue de 135, mientras que en septiembre fue de 243.

\_\_\_\_\_%

d. El consumo de agua de una familia en enero fue de 12 metros cúbicos, y en febrero fue de 15 metros cúbicos.

\_\_\_\_\_%

e. Una oficina de servicio al cliente registró 58 llamadas por reclamos en su primera semana de funcionamiento y 50 en la segunda.

\_\_\_\_\_%

f. El sueldo promedio de un trabajador de una empresa fue de \$ 458 000 durante su primer año de funcionamiento de la empresa y es de \$ 490 060 luego de 5 años.

\_\_\_\_\_%

**2** Calcula la cantidad final que resulta luego de aplicar la variación porcentual indicada y responde.

a. En una industria embotelladora se utilizaba una máquina capaz de envasar 50 botellas por minuto. Al renovar algunas de sus piezas, la máquina aumentó su rendimiento en un 18 %. ¿Cuántas botellas podrá envasar en 10 minutos tras esta mejoría?

b. En condiciones normales, cierta planta alcanza 1 metro de altura luego de 12 días. A una planta de la misma especie y en las mismas condiciones se le administró un fertilizante que aumenta su crecimiento en un 27 %. ¿Cuál será la altura de la segunda planta luego de 12 días?

c. Un bus vacío tiene una masa de 3620 kilogramos y después de que suben los pasajeros su masa total aumenta en un 35 %. ¿Cuál es la masa de 3 buses de este tipo llenos de pasajeros?

d. En una producción de 120 kilogramos de manzanas, lo normal es que 8 kilogramos tengan parásitos. Si se administra un pesticida que reduce en un 25 % la presencia de parásitos, ¿cuántos kilogramos de manzanas contaminadas se espera obtener en la siguiente producción?

e. Luego de una campaña informativa, la cantidad de personas por semana que solicitaba realizarse un examen médico aumentó en un 150 %. ¿Ahora cuántas personas a la semana solicitan que les hagan el examen si antes eran 428 por semana?

**3** En cada caso, calcula la cantidad inicial teniendo la cantidad final y la variación porcentual.

a. Después de obtener un aumento de sueldo del 13 %, Estefanía recibe \$ 540 705. ¿Cuál era su sueldo anterior?

b. Un hombre de 30 años mide 1,64 metros de altura. Si a los 13 años medía un 14 % menos, ¿cuál era su estatura a esa edad?

c. Magdalena separó su basura y con ello logró reducir su volumen en un 28 %. Si ahora saca de su casa 2,5 metros cúbicos de basura a la semana, ¿cuántos sacaba antes?

d. Diego es capaz de terminar un circuito de atletismo en 17,5 minutos. Revisando sus tiempos anteriores, constata que el entrenamiento le ha permitido mejorar su rendimiento un 12 % en tres meses. ¿Cuánto tiempo tardaba en recorrer el circuito hace tres meses?

### Lección 14: ¿Cómo hacer cálculos usando variaciones porcentuales?

- 4 Analiza los datos de cada enunciado e indica, pintando el cuadro correspondiente, el término desconocido que se puede calcular con ellos. Luego, calcúlalo.

- a. Se depositó un monto en una cuenta de ahorro con un interés simple del 5% mensual durante 9 meses, y se obtuvieron \$ 159 500.

Monto inicial      Monto final      Interés

- b. Carlos depositó \$ 125 000 en una cuenta de ahorro con una tasa de interés simple durante 13 meses y su saldo tras este período fue de \$ 238 750.

Monto inicial      Monto final      Interés

- c. A un capital de \$ 240 000 se le aplica el 3% de interés compuesto mensual durante 3 meses.

Monto inicial      Monto final      Interés

- d. María depositará \$ 400 000 durante 5 meses con un interés simple del 3% mensual.

Monto inicial      Monto final      Interés

- 5 Completa los datos que faltan en la factura.

FACTURA			
Cantidad	Detalle	Precio unitario (\$)	Total (\$)
2	Lápices	900	
3	Sacapuntas	400	
5	Cuadernos	1200	
2	Gomas	200	
1	Estuche	4500	
Precio neto (\$)			
IVA (\$)			
<b>Total (\$)</b>			

- 6 Resuelve los problemas.

- a. En una industria metalmecánica se fabricaron 300 500 tuercas durante septiembre. Debido a un importante aumento de la demanda, al mes siguiente hubo un incremento de la producción de tuercas del 56%. ¿Cuántas tuercas se fabricaron en octubre en la industria metalmecánica?
- b. Debido a la pérdida de parte de su maquinaria producto de un incendio, en una fábrica se despidió al 20% de los trabajadores a finales de octubre. Si al comenzar este mes había 350 trabajadores, ¿cuántas de esas personas empezaron el mes de noviembre trabajando en la fábrica?

#### Desafíos de integración

- a. El precio original de venta de un televisor es de \$ 180 000. Al día siguiente, su precio original se rebajó en un 5% y dos días después, el precio se rebaja nuevamente en un 5%. Luego de cinco días, su precio aumentó en un 10%. ¿Cuál es el precio final del celular?
- b. Se estima que la población de una especie de insectos en un laboratorio es de 5184 ejemplares y que su cantidad decrece diariamente a razón del 25%.
- Calcula la cantidad estimada de insectos que habrán el tercer día.
  - ¿Es cierto que al segundo día quedará la mitad de la cantidad inicial de insectos? Justifica tu respuesta y coméntala con tus compañeros y compañeras.

#### Trabajo en grupo

Elige el desafío en el que te enfrentaste a más dificultades. Explica verbalmente a tu grupo de trabajo el origen de estas dificultades y resuélvelo nuevamente, pero ahora trabajando en forma grupal.

## Construir un diagrama

Un diagrama de barras permite visualizar variaciones de una cantidad y calcular valores desconocidos a partir de la representación de valores conocidos.

### Algunas estrategias

- Usar un proceso de ensayo y error.
- Aplicar procesos reversibles.
- Descartar información irrelevante.
- Usar un problema similar pero más sencillo.
- **Construir un esquema, diagrama o tabla.**
- Encontrar un patrón.
- Usar modelos matemáticos.
- Usar razonamiento lógico.
- Identificar submetas.

El parque eólico El Arrayán se encuentra en la región de Coquimbo, en las cercanías de la ciudad de Ovalle, y fue inaugurado en agosto de 2014. Es la central más grande de nuestro país destinada a la producción de la energía que se obtiene a partir del movimiento del viento. Según su diseño, su capacidad de producción mínima es de

280 GW/h, donde GW es una unidad de potencia energética (1 GW/h equivale a 1000000000 watt por hora). Se estima que el parque puede llegar a aumentar su producción en un 25% sobre su capacidad mínima. ¿Cuál es la producción energética máxima que puede alcanzar el parque eólico El Arrayán?

¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema? Escribe tú

¿Qué datos tengo para resolver? Escribe tú

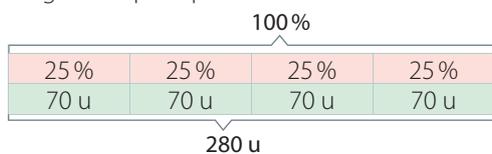
Crea un plan para resolver

Para resolver este problema, puedes usar la estrategia **Construir un diagrama** para visualizar la variación porcentual de la capacidad energética del parque y determinar su valor.

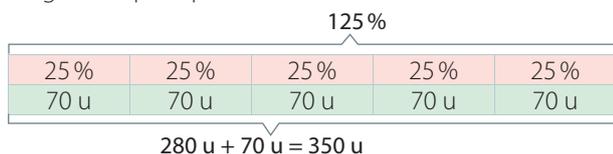
### Aplica la estrategia y resuelve

Llamaremos  $u$  a la unidad de potencia energética GW/h.

Diagramas que representan las cantidades iniciales:



Diagramas que representan las cantidades finales:



En el estado inicial, la barra roja indica el 100% que corresponde a las 280 u que se indican en la barra verde. Al dividir estas barras en 4 partes iguales, vemos que la barra roja queda dividida en partes equivalentes a 25% ( $100\% : 4 = 25\%$ ) y que la barra verde queda dividida en partes equivalentes a 70 u ( $280 u : 4 = 70 u$ ).

Como la producción energética del parque puede llegar a aumentar en un 25%, los diagramas de barras que representan las cantidades finales muestran un crecimiento del 25%. Esta variación porcentual aumenta en 70 u la producción energética, llegando a las  $280 u + 70 u = 350 u$ .

Verifica la respuesta

Se puede comprobar la respuesta usando proporciones.

Comunica la respuesta

Escribe tú

¿De qué otra forma resolverías este problema? Explica.

**Vuelvo a mis procesos**

Responde de acuerdo a tu apreciación.

¿Cuál fue el error que cometiste en más oportunidades durante el desarrollo de las actividades de la sección? ¿A qué se debió?

¿Comprendiste todas las estrategias usadas para calcular porcentajes?, ¿cuáles no?

En general, ¿fue interesante para ti resolver los ejercicios y los problemas de la sección?, ¿por qué?



¿Usaste alguna estrategia para calcular porcentajes diferente a las vistas en la sección?, ¿cuál?

¿Cuáles contenidos o estrategias debes repasar?

¿Te gustó el trabajo grupal realizado en la sección?, ¿por qué?

¿Cómo se llama?

### Mapa conceptual

Organiza los conceptos en el mapa propuesto para la sección 2 de esta unidad.

dividir – representar – igual exponente – aproximación numérica – multiplicar – potencias



Junto con un compañero o una compañera construyan mapas conceptuales para las secciones 1 y 3 de esta unidad.

¿Cómo se hace?

• **Pregunta sección 1**

¿Cómo multiplicas o divides números si al menos uno de ellos es negativo?

• **Pregunta sección 2**

Cuando resuelves una multiplicación o una división de potencias, ¿qué debes identificar en los factores de la multiplicación o en el dividendo y el divisor de la división?

• **Pregunta sección 3**

¿En qué se diferencia el cálculo que permite determinar el valor de 400 aumentado en un 20% del que permite determinar el 20% de 400?

Multiplicación y división de números enteros

- Calcula el resultado de cada multiplicación.
  - $-3 \cdot 7$
  - $-6 \cdot (-4)$
  - $-9 \cdot (-3) \cdot 8$
  - $10 \cdot (-4) \cdot 3$
- Calcula el resultado de cada división.
  - $-6 : (-2)$
  - $8 : (-6)$
  - $-10 : 4$
  - $13 : (-1) : (-2)$
- Calcula el resultado de cada ejercicio.
  - $[-18 : (-3)] : [12 : (-6)]$
  - $[-16 : 2 \cdot (-2)] \cdot (-5)$
  - $[36 : (-9) \cdot (-2)] : [-15 : (-5) \cdot (-1)]$
- Completa el cuadrado de números enteros considerando que el producto de cada fila y de cada columna debe ser  $-1000$ .

-2		
25	10	
20		

- Considera la secuencia  $-4, 12, -36, 108, \dots$ 
  - ¿Qué regla de formación podrías considerar? ¿Es única?
  - ¿Cuáles son los dos términos siguientes, de acuerdo a la regla que consideraste?
  - ¿Qué término ocuparía la décima posición?
- En una habitación hay  $10^\circ\text{C}$ . Con el aire acondicionado encendido, la temperatura varía  $-3^\circ\text{C}$  por cada hora que pasa. ¿Qué temperatura habrá en la habitación luego de 8 horas?
- Un buzo que se encontraba en la superficie del mar se sumerge y alcanza una profundidad de 40 m en 5 horas. ¿Cuántos metros por hora bajó, considerando que lo hizo a una rapidez constante?

Números decimales y fracciones

- Completa la tabla.

Fracción	Número mixto	Número decimal	Tipo de decimal
$-\frac{8}{3}$			
	$5\frac{3}{4}$		
$-\frac{7}{2}$			
	$4\frac{5}{6}$		

- Ubica en la recta numérica cada par de números y determina cuál es el mayor de los dos.
  - $3,21$  y  $3\frac{5}{6}$ .
  - $-5\frac{1}{4}$  y  $-\frac{32}{5}$ .
  - $-3,56$  y  $-4,41$ .
  - $8,01\overline{32}$  y  $8,013\overline{2}$ .

- Determina los números que se ubican en las posiciones ocupadas por A, B y C en la recta numérica.



- Describe un procedimiento para ubicar en una misma recta numérica los números:
 
$$0,9375 \quad -2\frac{1}{12} \quad 1,8\overline{3} \quad 1\frac{17}{24}$$
- El análisis del rendimiento de cuatro tipos de motores permitió establecer que el motor A rinde  $8,8 \text{ km/L}$ ; el motor B,  $\frac{53}{6} \text{ km/L}$ ; el motor C,  $8,78 \text{ km/L}$  y el motor D,  $8\frac{3}{5} \text{ km/L}$ .
  - ¿Cuál es el motor de mejor rendimiento?
  - ¿Cuál es el motor de rendimiento más bajo?

Adición y sustracción de números decimales y fracciones

- Calcula el resultado de cada operación y explica el procedimiento que aplicaste en el desarrollo.
  - $\frac{3}{5} + \frac{8}{5}$
  - $3,25 - \frac{9}{10}$
  - $\frac{15}{4} - \frac{7}{8}$
  - $2\frac{7}{10} + 9,125$
  - $\frac{11}{6} + \frac{19}{8}$
  - $7,05 - \frac{33}{20}$
- Un camión comienza su recorrido con  $18,23$  toneladas de carga. En un punto del camino se descargan  $9\frac{7}{20}$  toneladas y se cargan otras  $\frac{57}{25}$ . ¿Cuánta carga lleva ahora?

Multiplicación y división de números decimales y fracciones

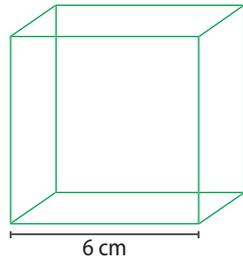
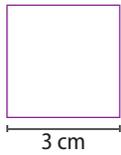
15. Calcula el resultado de cada operación. En cada caso, explica el procedimiento aplicado.

- a.  $\frac{32}{15} \cdot \frac{25}{12}$                       d.  $\frac{42}{5} : \frac{13}{28}$   
 b.  $8,52 : 3$                           e.  $7,45 \cdot 5$   
 c.  $6,7 \cdot (-3,5)$                       f.  $(-3,8) : 4$

Potencias

16. Expresa como una potencia el área (A) o el volumen (V), según corresponda.

- a. Área cuadrado.                      b. Volumen cubo.



17. Identifica cuáles de las siguientes situaciones se pueden modelar usando potencias. Además indica la base y el exponente de la potencia respectiva.

- a. La cantidad de resultados posibles al lanzar 4 veces un dado.  
 b. La cantidad de banderas distintas que pueden formarse con tres franjas de colores diferentes.  
 c. La cantidad de números de tres dígitos que se pueden formar con los dígitos 5, 7 y 9, sin repetirlos.

18. Calcula el resultado de cada operación y exprésalo como una potencia.

- a.  $12^2 \cdot 12$                           f.  $5^3 \cdot 6^3$   
 b.  $9^3 \cdot 9^2$                           g.  $100^3 : 100^0$   
 c.  $19^5 : 19^2$                           h.  $51^2 : 17^2$   
 d.  $23^4 : 23^3$                           i.  $31^2 \cdot 31^2$   
 e.  $11^2 \cdot 8^2$                           j.  $4^2 \cdot 4^2 \cdot 4^2$

19. Si el perímetro de cada cara de un cubo es 60 cm, ¿cuál es el volumen del cubo?

20. Una persona está vendiendo  $4^3$  cajas con  $2^3$  dulces cada una. Si cada dulce lo venderá a  $\$3^3$ , ¿cuánto dinero obtendrá si vende todos los dulces?

Raíz cuadrada

21. Indica el intervalo numérico más pequeño en el que se ubican las siguientes raíces cuadradas en la recta numérica. Considera números con un dígito decimal.

- a.  $\sqrt{7}$                                   c.  $\sqrt{35}$                                   e.  $\sqrt{138}$   
 b.  $\sqrt{71}$                                 d.  $\sqrt{56}$                                 f.  $\sqrt{212}$

22. Determina, de forma aproximada, la ubicación de las raíces cuadradas en la recta numérica.

- a.  $\sqrt{6}$                                   c.  $\sqrt{10}$                                   e.  $\sqrt{15}$   
 b.  $\sqrt{7}$                                 d.  $\sqrt{12}$                                 f.  $\sqrt{20}$

23. Juan pintó una pared cuadrada cuya área es  $24 \text{ m}^2$ , utilizando un tarro de pintura. Andrea también pintó una pared cuadrada y ocupó 2 tarros de pintura idénticos al usado por Juan. ¿Cuánto mide el lado de la pared que pintó Andrea?

Variaciones porcentuales

24. Completa la tabla con los valores de A y B, y con las variaciones porcentuales involucradas en la transformación de A en B y de B en A.

A	B	De A a B	De B a A
50	32	-36%	56,25%
20	25		
54			-25%
	40	60%	

25. Dado un número cualquiera, determina una expresión que represente su variación porcentual total.

- a. Aumenta 3 veces consecutivas en un 5%.  
 b. Aumenta 2 veces consecutivas en un 8% y luego aumenta 4 veces consecutivas en un 12%.  
 c. Disminuye 5 veces consecutivas en un 14% y luego aumenta 3 veces consecutivas en un 18%.

26. Completa la tabla. Para ello, considera:  $C_0$  = monto invertido,  $C_n$  = monto final,  $i$  = tasa de interés,  $n$  = cantidad de períodos y  $t$  = tipo de interés, simple (S) o compuesto (C).

$C_0$ (\$)	$C_n$ (\$)	$i$ (%)	$n$	$t$
120 000		9	8	S
150 000		4	6	C
	490 800	5,3	12	S
85 000	132 600	8		S
73 000	87 600		4	S

Parte I

1. Escribe V si la afirmación es verdadera y F si es falsa. (7 puntos)
  - a. \_\_\_\_ Para determinar el 9% de 240 se puede calcular el producto de  $0,9 \cdot 240$ .
  - b. \_\_\_\_ Si multiplicas  $-1$  por un número decimal, el resultado siempre es negativo.
  - c. \_\_\_\_ Si el cociente de dos números es un número negativo, entonces uno de ellos debe ser negativo y el otro, positivo.
  - d. \_\_\_\_ El producto de  $2^3 \cdot 3^2$  es  $6^5$ .
  - e. \_\_\_\_ Si 320 aumenta en un 14%, entonces el nuevo valor se puede calcular como el producto entre 1,14 y 320.
  - f. \_\_\_\_ El cociente de  $6^2 : 24^2$  es un número positivo menor que 1.
  - g. \_\_\_\_ Si un cuadrado tiene la misma área que un rectángulo cuyos lados miden 3 cm y 4 cm, entonces el lado del cuadrado mide  $\sqrt{12}$  cm.
2. ¿Cuál es el porcentaje de ahorro de la oferta "lleve 3, pague 2"? (3 puntos)
3. Aplicando la definición de potencia, podemos escribir  $2^3 \cdot 2^3 = (2^3)^2$ . ¿Cuál es el resultado de la multiplicación  $2^3 \cdot 2^3$ , considerando los factores como potencias de igual base? Usa este resultado para proponer una fórmula que permita desarrollar la expresión  $(2^3)^2$  y, más generalmente, la expresión,  $(a^b)^c$ , con  $a \in \mathbb{N}$ ,  $b$  y  $c \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ . (4 puntos)

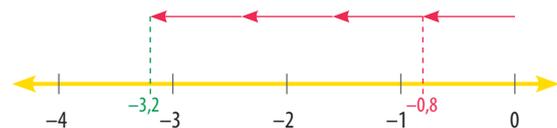
En los ejercicios del 4 al 11, selecciona la alternativa correcta. (8 puntos)

4. El producto de cuatro números enteros es un número negativo. ¿Cuál de estas combinaciones es consistente con este enunciado?
  - A. Los cuatro números son negativos.
  - B. Los cuatro números son positivos.
  - C. Un número es negativo y tres son positivos.
  - D. Dos números son negativos y los otros dos son positivos.

5. Un número aumenta en un 20% y luego disminuye en un 25%. Si el resultado final tras estas variaciones es 108, ¿cuál era el número original?
  - A. 97,2
  - B. 114
  - C. 120
  - D. 126
6. El número  $\sqrt{45}$  se ubica en la recta numérica entre las posiciones de:
  - A. 4 y 5.
  - B. 6,2 y 6,3.
  - C. 6,7 y 6,8.
  - D. 6,5 y 6,6.
7. ¿Cuál es el resultado de estas operaciones con potencias?

$$(12^3 : 12) : (3^2 \cdot 2^2)$$

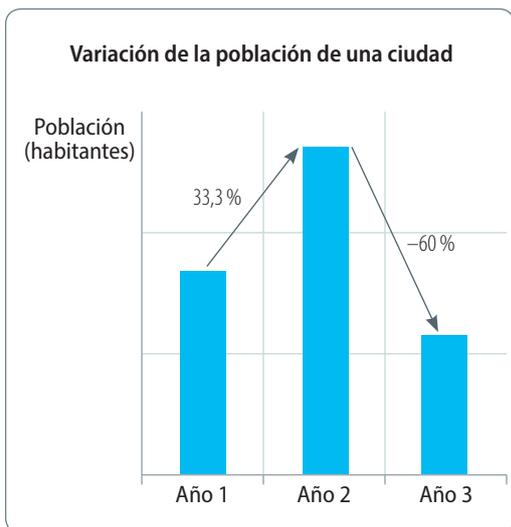
- A.  $3^2$
  - B.  $2^2$
  - C.  $6^2$
  - D.  $10^2$
8. ¿Cuál es el resultado de estas operaciones con números positivos y negativos?
 
$$\left(-10,8 \cdot \frac{1}{4}\right) : \left(-\frac{2}{3} \cdot 4,5\right)$$
  - A.  $-0,9$
  - B.  $-0,7$
  - C.  $0,7$
  - D.  $0,9$
9. Una trabajadora depositó \$100 000 en la cuenta de ahorro de un banco que le ofreció una tasa de interés compuesto anual de 5%. ¿Cuánto dinero tendrá en la cuenta al cabo de 2 años?
  - A. \$ 105 500
  - B. \$ 110 000
  - C. \$ 110 250
  - D. \$ 225 000
10. La clave de seguridad de un maletín consta de 3 dígitos y cada dígito puede ser 0 o 1. ¿Cuántas claves es posible elegir con estas restricciones?
  - A.  $2^3$
  - B.  $3^2$
  - C.  $6^1$
  - D.  $3^1$
11. ¿Qué multiplicación está representada en la recta numérica?



- A.  $3 \cdot (-0,8)$
  - B.  $-3,2 \cdot (-0,8)$
  - C.  $4 \cdot (-0,8)$
  - D.  $4 \cdot (-3,2)$

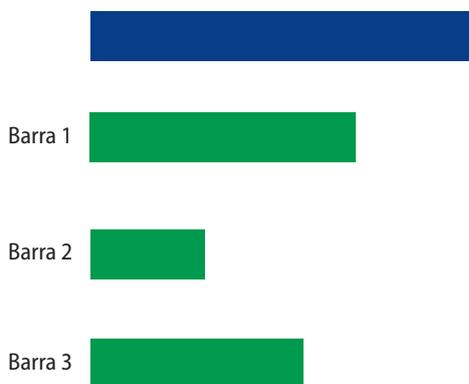
Parte II

12. La población de una ciudad ha variado tal como se muestra en el gráfico. En este se consideran 3 años consecutivos.

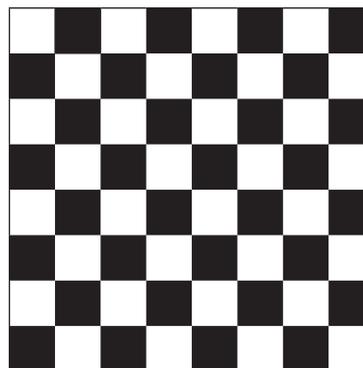


- ¿Qué representa el número -60 en el contexto de la situación planteada? Explica.
- ¿Puedes calcular la población de la ciudad en el año 1 conociendo la del año 2?, ¿cómo? Hazlo suponiendo que la población en el año 2 era de 50000 habitantes.
- Un experto afirma que la variación porcentual de población entre los años 1 y 3 fue de  $33,3\% + (-60\%) = -26,6\%$ . ¿Estás de acuerdo con él? Da argumentos para apoyar o rechazar su afirmación.

13. ¿Cuál de las barras verdes representa, aproximadamente, una variación porcentual de -30% en la longitud de la barra azul?



14. Un tablero de ajedrez es un cuadrado de casillas blancas y negras, con 8 casillas por lado, como se muestra continuación:



Responde usando solo potencias.

- ¿Cuántas casillas tiene el tablero de ajedrez?
  - ¿Cuántas casillas tienen 8 tableros de ajedrez?
  - ¿Cuántas casillas negras tienen 8 tableros de ajedrez?
  - Si se construyera un nuevo tablero con 9 casillas por lado, ¿cuál sería la variación porcentual del número total de casillas con respecto al tablero tradicional?
15. Al aumentar la temperatura, algunos materiales se dilatan. Supón que un alambre de un material A aumenta su longitud inicial en un 0,2% por cada grado Celsius que aumenta su temperatura. Entonces, se cumple que si un alambre mide 100 cm a 20 °C, medirá 100,2 cm a 21 °C. Considera el siguiente modelo propuesto para describir esta situación:

$$\frac{L - L_0}{L_0} = 0,002 \cdot \Delta T$$

Donde  $\Delta T$  representa la variación de temperatura.

- Identifica las variables  $L_0$  y  $L$  basándote en los datos del enunciado.
- ¿Qué ocurrirá con el alambre de material A si disminuye la temperatura?, ¿por qué?
- ¿Cuál será la longitud final de un alambre de material A con una longitud de 88 cm si la temperatura disminuye 3 °C? ¿Qué valor numérico tendría  $\Delta T$ ? ¿Qué operaciones tendrías que resolver?

Para repasar contenidos

Cuenta el puntaje que obtuviste en la parte I de la evaluación (para conocer el de las actividades 2 y 3 pide ayuda a tu profesor o profesora). Luego, revisa la tabla y calcula tu puntaje por contenido. Según tu nivel de logro, repasa el contenido y haz los ejercicios señalados.

Contenido	Logrado	Por lograr	Repasa en
Multiplicación y división de números enteros (Actividades 1.c y 4)	2 puntos	0 o 1 punto	• Lecciones 1, 2 y 3. • Cuaderno de Ejercicios, páginas 6 a 10.
Multiplicación y división de números decimales y fracciones (Actividades 1.b, 8 y 11)	2 o 3 puntos	0 o 1 punto	• Lecciones 4, 5 y 6. • Cuaderno de Ejercicios, páginas 11 a 15.
Multiplicación y división de potencias (Actividades 1.d, 1.f, 3, 7 y 10)	5 o más puntos	4 o menos puntos	• Lecciones 7, 8, 9 y 10. • Cuaderno de Ejercicios, páginas 20 a 25.
Concepto de raíz cuadrada (Actividades 1.g y 6)	2 puntos	0 o 1 punto	• Lecciones 11 y 12. • Cuaderno de Ejercicios, páginas 26 y 27.
Variaciones porcentuales (Actividades 1.a, 1.e, 2, 5 y 9)	5 o más puntos	4 o menos puntos	• Lecciones 13 y 14. • Cuaderno de Ejercicios, páginas 32 a 35.

Para practicar habilidades

Para practicar las habilidades matemáticas evaluadas en la parte II, pide apoyo a tu profesor o profesora y dirígete a las páginas 40 y 41 del Cuaderno de Ejercicios.

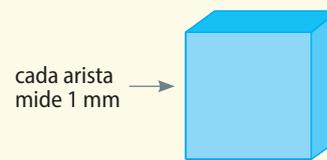
Habilidad	Logrado	Por lograr
Argumentar y comunicar (Actividad 12)	5 o más puntos	4 o menos puntos
Representar (Actividad 13)	4 puntos	0 puntos
Resolver problemas (Actividad 14)	5 o más puntos	4 o menos puntos
Modelar (Actividad 15)	6 o más puntos	5 o menos puntos

Desafío en equipo

Para finalizar la unidad, los invitamos a formar equipos de 3 estudiantes para resolver este desafío.

Crecimiento cristalino

Los cristales son sólidos cuyas partículas se ordenan siguiendo algún patrón definido en las tres dimensiones espaciales. Consideren un cristal de forma cúbica con 1 mm de arista que crece 2 mm cada 50 años, en cada una de las dimensiones espaciales: alto, ancho y largo.



1. Construyan una tabla de valores con el crecimiento de la arista y del volumen del cristal cada 50 años. Consideren hasta los 3 siglos.
2. Identifiquen el crecimiento porcentual de la longitud de la arista durante los primeros 50 años y relaciónenlo con el crecimiento porcentual volumétrico en el mismo período. ¿Existe alguna relación matemática?, ¿cuál?
3. Descubran y analicen la regularidad del crecimiento del cristal y propongan una fórmula general para calcular su volumen transcurridos  $n$  años.

Tomando en consideración los contenidos, las habilidades y las actitudes desarrollados en esta unidad, ¿qué nivel de dificultad representó este desafío para ustedes?, ¿por qué? ¿En qué fallaron? Respondan individualmente escribiendo en el recuadro.

- ▶ **Sección 4**  
Expresiones algebraicas
- ▶ **Sección 5**  
Ecuaciones e inecuaciones
- ▶ **Sección 6**  
Función lineal y función afín



## El cobre en Chile

En Chile, la minería del cobre se encuentra compartida entre empresas privadas y empresas del Estado. Codelco Chile, Corporación del Cobre, es una empresa estatal autónoma, la más grande del país en la minería del cobre y la principal productora de cobre del mundo.

Los principales productos comercializados por Chile son los cátodos y concentrados de cobre, los que son exportados para procesarlos y obtener productos manufacturados. Su destino ha sido desde siempre los países industrializados y hoy en día, además, los países en proceso de industrialización, como China. Destaca la gran concentración de las exportaciones a los mercados de Asia y Europa Occidental, lo que refleja el alto grado de dependencia de la comercialización del cobre con esos mercados.

¿Qué yacimiento es el que se muestra en la imagen principal? ¿Cuál es su importancia para nuestro país? ¿En qué región se ubica?



### ¿Qué aprenderé?

- Comprender la operatoria de expresiones algebraicas.
- Comprender la noción de función.
- Modelar situaciones usando ecuaciones lineales.
- Resolver inecuaciones lineales en forma manual y usando software educativo.
- Comprender la función afín.

### ¿Para qué?

- Representar situaciones cotidianas y geométricas en forma simbólica y traducirlas usando lenguaje algebraico.
- Usar funciones como modelos para comprender situaciones en que se relacionan dos o más variables.
- Usar ecuaciones lineales e inecuaciones lineales para describir situaciones de igualdad y desigualdad, y para determinar datos desconocidos.
- Resolver problemas que involucran funciones, ecuaciones lineales e inecuaciones lineales.

### Actitudes

- Mostrar una actitud crítica al evaluar información matemática y valorar el aporte de los datos cuantitativos.
- Demostrar interés y rigurosidad en la resolución de problemas.
- Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación.

¿Qué usos cotidianos puedes darle a lo que aprenderás en esta unidad?

¿Qué propiedades del cobre hacen que sea un metal tan apreciado? Investiga y comunica a tu curso dos de esas propiedades.

Se extrajo una muestra de una roca de mineral de cobre de  $x$  kg. La roca solo será procesada si el contenido de cobre en estado puro de la muestra es mayor al 3%. Si el contenido de cobre de la muestra fue de  $y$  kg, ¿qué inecuación representa la condición anterior?

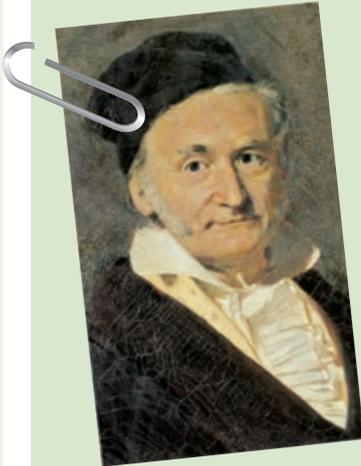
Sección

4

# Expresiones algebraicas

Activo ideas previas

1. Lee la información y coméntala con un compañero o una compañera.



Johann Karl F. Gauss fue un matemático alemán que vivió entre los años 1777 y 1855. Se destacó por sus originales aportes al desarrollo del álgebra, del análisis y de la geometría. Entre las muchas anécdotas que se cuentan acerca de su genialidad destaca la que señala que a los 10 años elaboró en menos de media hora el siguiente procedimiento para sumar números:

$$S(2) = 1 + 2 = \frac{2 \cdot 3}{2} = 3$$

$$S(3) = 1 + 2 + 3 = \frac{3 \cdot 4}{2} = 6$$

...

$$S(10) = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = \frac{10 \cdot 11}{2} = 55$$

Si quieres saber más sobre la suma de Gauss, ingresa el código TM8P098 en <http://codigos.auladigital.cl>

Responde las preguntas junto con tu compañero o compañera.

- a. ¿Qué representan los términos  $S(n)$  que están en el desarrollo? Redacten una respuesta y, además, expliquen qué representa  $n$ .
- b. ¿Cuál es la suma de los  $n$  primeros números naturales? Analicen el desarrollo presentado, identifiquen la regularidad y escriban una expresión algebraica.
- c. ¿Cuál es la suma de los 100 primeros números naturales? ¿Y de los primeros 1000?




Activo conceptos clave

2. El listado contiene algunos conceptos clave de esta sección. Úsalos para responder las preguntas.

factor común	términos semejantes	propiedad distributiva
expresión algebraica	área	factor literal
coeficiente numérico		factorizar

- a. ¿Cuál de estos conceptos estudiaste en la unidad anterior? \_\_\_\_\_
- b. ¿Qué concepto es nuevo para ti? Propón una definición intuitiva. \_\_\_\_\_
- c. ¿Cuáles conceptos están relacionados con la multiplicación? \_\_\_\_\_

### Pienso mis procesos

Responde de acuerdo a lo que conoces.

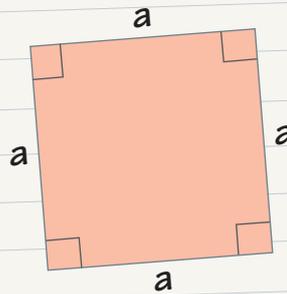
¿Qué condición se debe cumplir para poder sumar los términos algebraicos? ¿Es la única?

$$3a + 8b$$

¿En qué consiste factorizar?

$$6ab + 12bc$$

¿Cómo puedes expresar el área del cuadrado?, ¿y el perímetro?



¿Qué aplicación podrías dar a los temas que verás en esta sección?

¿Qué metas te planteas alcanzar al finalizar esta sección?, ¿por qué?

¿Cuánto interés tienes por aprender los contenidos de esta sección?, ¿por qué?

Activa tus conocimientos previos respondiendo las preguntas laterales y luego resuelve las actividades. Para terminar, registra tus logros.

¿Cómo resuelves una multiplicación de números enteros? ¿Y una división? ¿Qué regla de signos aplicas?

¿En qué se diferencia una división de fracciones de una división de números enteros? Ejemplifica.

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
11 correctas o más	menos de 11 correctas

¿Cometiste muchos errores?, ¿por qué?

¿Qué deberías hacer para no volver a cometer estos errores?

Resolver operaciones con números enteros, fracciones y decimales

1 Escribe el valor que completa correctamente cada igualdad. (7 puntos)

a.  $-2 + 3 = \square$

b.  $1 + \square = -5$

c.  $\square + (-3) = -6$

d.  $-1 - 3 = \square$

e.  $\square - 0,25 = 0,3$

f.  $0,5 - \frac{3}{4} + 0,125 = \square$

g.  $4\frac{1}{6} - \frac{2}{3} + \square = -\frac{1}{2}$

2 Resuelve las multiplicaciones y divisiones. Cuando el resultado sea una fracción, simplifícala a su expresión irreducible. (6 puntos)

a.  $-7 \cdot (-0,25)$

d.  $-\frac{3}{4} : (-0,75)$

b.  $0,3 \cdot -0,1$

e.  $-0,15 : \left(-\frac{3}{4}\right)$

c.  $15 : (-5)$

f.  $8\frac{1}{5} \cdot 20 : (-5)$

3 Resuelve los problemas y responde. 4 puntos)

a. Una máquina excavadora estuvo en funcionamiento durante 8 horas continuadas, durante las cuales avanzó 100 metros de profundidad.

- Si el ritmo de excavación de la máquina es constante, ¿cuántos metros excavó en cada hora?
- Si al día siguiente la máquina excavadora estuvo encendida durante 3,5 horas manteniendo un ritmo de trabajo constante, ¿cuántos metros avanzó en los dos días de trabajo?

b. Felipe debe entregar un trabajo de Historia en 12 días, el cual debe tener al menos 35 páginas.

- Si Felipe escribe 3,5 páginas al día, ¿podrá terminar a tiempo?
- Si escribe la misma cantidad de páginas diarias, ¿cuántas debería escribir al día para terminar el trabajo en 10 días?

¿Qué es una expresión algebraica?  
¿En qué consiste su reducción?

¿Cómo valorizas una expresión algebraica? ¿Para qué te podría servir valorizarla?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
12 correctas o más	menos de 12 correctas

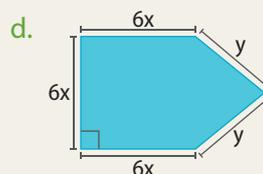
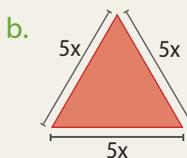
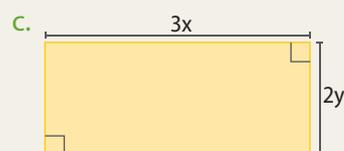
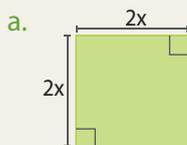
¿En qué ejercicios fallaste?

¿Qué hiciste mal en ellos?

### Reducir y valorizar expresiones algebraicas

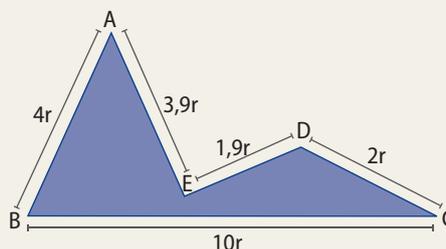
- 4** Representa cada enunciado usando lenguaje algebraico. (7 puntos)
- El cuádruple de un número.
  - La tercera potencia de un número.
  - El cuadrado de la suma de dos números.
  - El triple de un número menos el doble del mismo número.
  - El doble de un número, aumentado en 8 unidades.
  - El cuadrado de un número, más el doble del mismo número.
  - La suma de cuatro números consecutivos.
- 5** Reduce las expresiones algebraicas. (7 puntos)
- $6x - 7x + 15x$
  - $3y + 4 + 2x - 5$
  - $8p + 14 - 10 - 10p$
  - $\frac{q}{2} - 0,25q + \frac{q}{8}$
  - $0,2 + 2,5a - 0,7 + 1,5a$
  - $-9d - 2e + 7f + 2e - 5f$
  - $4m^2 - 4m + 10m - 4m^2 - 4m$

**6** Expresa el perímetro de cada figura. (4 puntos)

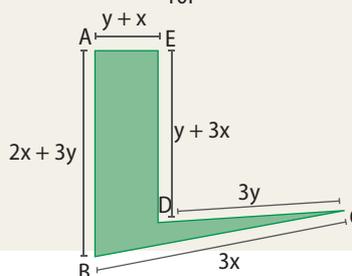


**7** Valoriza los lados de la figura y calcula su perímetro. (2 puntos)

a.  $r = 7$



b.  $x = 0,5$   
 $y = 0,2$



► **Propósito**  
Comprender, representar, reducir y valorizar expresiones algebraicas.

### ¿Para qué?

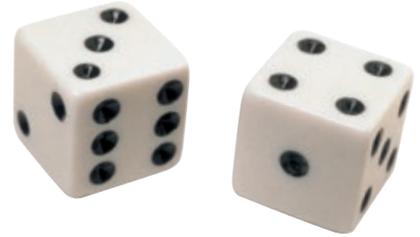
El lenguaje algebraico fue introducido en los inicios mismos de la matemática, tanto para representar leyes generales como para desarrollar procedimientos numéricos. Muchas de las fórmulas que conoces de la matemática y de las ciencias están expresadas en lenguaje algebraico.

### Palabras clave

- Término algebraico
- Expresión algebraica
- Términos semejantes
- Factor literal
- Coficiente numérico

## ¿Qué representa una expresión algebraica?

Natalia y Sergio están jugando cada uno con un dado de seis caras. En cada turno, si el puntaje del dado de uno supera al puntaje del dado del otro por 1 punto, entonces gana una ficha roja. Y si lo supera por 2, 3, 4 o 5 puntos, gana una ficha azul.

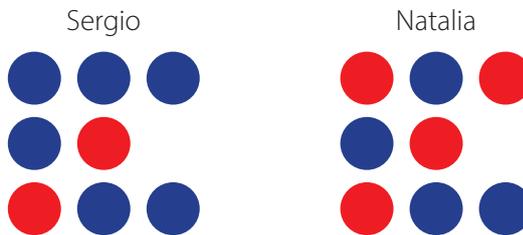


El puntaje de cada ficha es el siguiente:

 → 4 puntos  → 2 puntos

¿Por qué no puede haber una diferencia de 6 en los puntajes de los dados?

Tras 20 turnos, las fichas ganadas por Natalia y Sergio son:



¿Por qué crees que la suma de las fichas de los jugadores es 16 y no 20?

### Situación 1 Representando de manera concreta

¿Cuál de los participantes va ganando el juego tras los 20 turnos?

Responderemos representando las fichas y asignándole los valores definidos.

**Paso 1** Ordena las fichas de cada jugador por su color.



**Paso 2** Escribe la información en forma más compacta.

Sergio: 6  y 2 

Natalia: 4  y 4 

**Paso 3** Evalúa las fichas. Escríbelo tú.

¿Qué valor tiene una ficha azul?, ¿y una roja?

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

¿Qué operaciones debes resolver en este paso?

**Situación 2** Representando de manera simbólica

Roberto y Emilia juegan a los dados como se describe en la situación 1. Si los resultados de los primeros 10 turnos fueron los que se indican en la tabla, ¿cuál de ellos va ganando el juego?

Juego	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Roberto										
Emilia										

En esta ocasión, para responder, usaremos lenguaje algebraico.

**Paso 1** Representa la información de la tabla mediante expresiones algebraicas, con factores literales r y a. Luego, agrupa los términos semejantes.

Roberto:  $\text{r} + \text{a} + \text{r} + \text{r}$   
 $(\text{r} + \text{r} + \text{r}) + \text{a}$

Emilia:  $\text{r} + \text{r} + \text{a} + \text{r} + \text{r} + \text{a}$   
 $(\text{r} + \text{r} + \text{r} + \text{r}) + (\text{a} + \text{a})$

¿Qué característica común tienen los términos semejantes?

**Paso 2** Reduce los términos semejantes, es decir, suma sus coeficientes.

Roberto:  $(\text{r} + \text{r} + \text{r}) + \text{a}$   
 $3\text{r} + \text{a}$

Emilia:  $(\text{r} + \text{r} + \text{r} + \text{r}) + (\text{a} + \text{a})$   
 $4\text{r} + 2\text{a}$

¿Cuál es el coeficiente numérico que acompaña a la en la expresión de Roberto?

**Paso 3** Evalúa las expresiones algebraicas.

Roberto:  $3\text{r} + \text{a}$   
 $3 \cdot 2 + 4$   
 10

Emilia:  $4\text{r} + 2\text{a}$   
 $4 \cdot 2 + 2 \cdot 4$   
 16

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Para concluir**

Un **término algebraico** es una expresión que consta de números y letras y las únicas operaciones que aparecen son multiplicaciones y potencias de exponente no negativo. Una **expresión algebraica** es una secuencia de números (coeficientes numéricos) y letras (factores literales) unidos mediante operaciones matemáticas de adición y sustracción. A través de las operaciones que relacionan sus términos, la expresión algebraica permite representar situaciones matemáticas diversas. Para reducir los términos semejantes de una expresión algebraica basta sumarlos o restarlos.

**Argumenta y comunica**

Observa los siguientes pares de términos:

- A.  $4p$  y  $4q$
- B.  $3pq$  y  $-4qp$
- C.  $-2pqr$  y  $7pq^2r$
- D.  $3rpq$  y  $5prq$

Señala cuáles pares contienen términos semejantes. Justifica tus respuestas por escrito en tu cuaderno y comenta con un compañero o compañera para corregirlas, de ser necesario.

Repaso

1. Resuelve las operaciones.

a.  $3 + \left(-\frac{4}{5}\right) - \left(-\frac{1}{2}\right)$

b.  $(2,8 + 5,5) (1,8 - 0,4)$

c.  $\frac{3}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \left(-\frac{1}{5}\right)$

2. Completa la tabla según las indicaciones de la primera columna.

Una expresión que representa un número cualquiera	
Súmale 2	
Multiplícala por 3	
Divide el resultado en 5	

Práctica guiada

3. Escribe una expresión para los puntajes de cada agrupación de fichas.



Puntaje:  $5a$  y  $3r$



4. Dibuja las fichas que representa cada suma.

Puntaje:  $2a$  y  $1r \rightarrow$



5. Escribe una expresión algebraica para registrar el puntaje de cada jugador, representado una ficha roja por  $r$  y una ficha azul por  $a$ .

Juego	1	2	3	4	5
Jugador 1		a	r		
Jugador 2	a			a	r

Jugador 1:  $a + r$   
 Jugador 2:  $a + a + r = 2a + r$

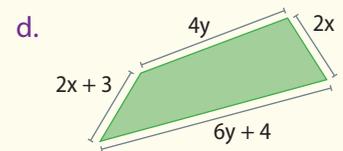
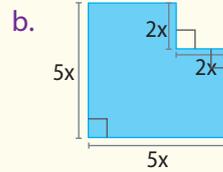
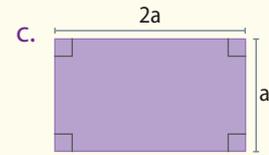
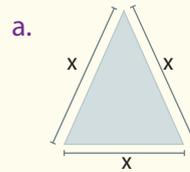
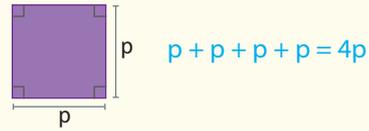
a.

Juego	1	2	3	4	5
Jugador 1	r				r
Jugador 2		a	r	a	

b.

Juego	1	2	3	4	5
Jugador 1	r	a	r	a	r
Jugador 2		a	r	a	r

6. Escribe una expresión algebraica que represente el perímetro de cada figura y redúcela si es posible.



7. Identifica el coeficiente numérico y el factor literal de cada término algebraico y escríbelos en los recuadros.

$-3m^2 \rightarrow$  coeficiente:  ; factor literal:

a.  $5ab \rightarrow$  coeficiente:  ; factor literal:

b.  $-8t^3 \rightarrow$  coeficiente:  ; factor literal:

c.  $-n^5 \rightarrow$  coeficiente:  ; factor literal:

d.  $12x^2yz^3 \rightarrow$  coeficiente:  ; factor literal:

8. Completa cada igualdad.

$2x + 3y + \underline{3x} + \underline{4y} = 5x + 7y$

a.  $3y + 6 = 3y + \underline{\quad}$

b.  $8m + 3n - 12 + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 6m + 5n - 12$

c.  $5x + \underline{\quad} + \underline{\quad} = 6x - 5$

9. Determina la relación entre las variables  $x$  e  $y$ , y completa la tabla.

$x$	1	2	3	4	$x$
$y$	2	3	4	5	$x + 1$

a.

$x$	1	2	3	4	
$y$	2	4	6	8	

b.

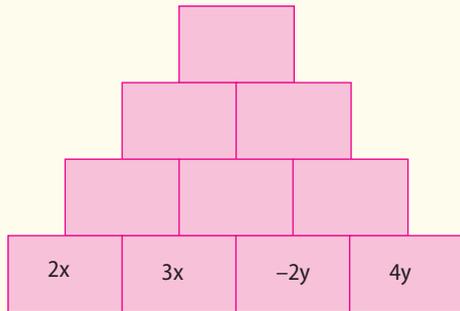
$x$	1	2	3	4	
$y$	0	1	2	3	

c.

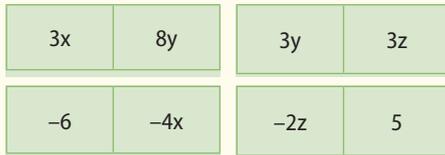
$x$	1	2	3	4	
$y$	3	5	7	9	

Aplica

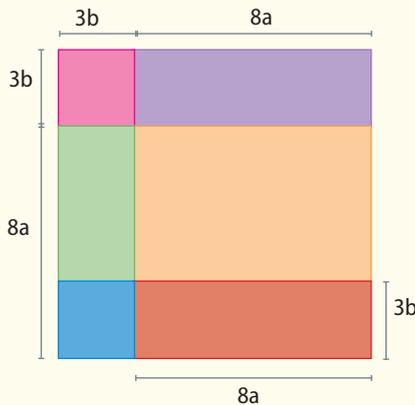
10. Suma cada par de términos vecinos para ir completando la pirámide hasta llegar a la cima.



11. Junta las cuatro fichas de dominó por el lado que tienen términos semejantes y forma una línea.



12. La figura está formada por rectángulos. Analiza el rectángulo mayor y escribe una expresión algebraica que represente el perímetro de cada rectángulo de color.



13. Completa la tabla, identifica la regularidad y encuentra una expresión algebraica que relacione el número de la figura (f) y el número de segmentos que la componen (n).

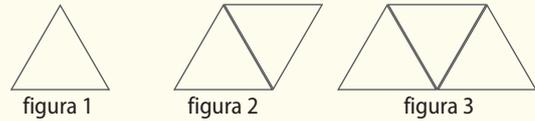


Figura (f)	1	2	3
n			

¿Cuál será el valor de n en la figura 4?

14. Representa las situaciones con expresiones algebraicas y responde las preguntas.
- Fabián, hace 5 horas, se encontraba en el kilómetro 15 de una carretera y está avanzando a una rapidez de  $x$  km/h. ¿En qué kilómetro se encontrará en dos horas más?
  - El perímetro de un rectángulo de largo  $a$  y ancho  $b$  es 12 cm. ¿Qué expresión algebraica representa el perímetro? Si el largo y el ancho son números naturales, ¿qué valores pueden asumir  $a$  y  $b$ ?
  - El pago final que deberá hacer una persona al comprar un producto tiene un 20% de descuento. Si el precio sin descuento es  $p$ , ¿cuál es el precio con descuento?

15. **Argumenta.** ¿Por qué, en general,  $x + y \neq 2xy$ ? Primero, constata que las excepciones se dan para  $x = y = 0$  y para  $x = y = 1$ . Luego, responde la pregunta inicial y justifica tu respuesta.

16. **Descubre el error.** Carla desarrollaba su tarea de Matemática y redujo la expresión algebraica  $16a^2b - 8ab^2$ , obteniendo  $8a^2b^2$ . ¿Cuál fue su error? Comenta con un compañero o una compañera y corrige la expresión original para poder obtener el resultado correcto.

Reflexiono

- Si consideras una expresión algebraica cualquiera, ¿tiene un valor numérico definido? ¿Es siempre el mismo? ¿De qué depende? Explica por escrito y ejemplifica.
- Las operaciones que involucran expresiones algebraicas, ¿cumplen las mismas propiedades aritméticas que las operaciones numéricas? Justifica tu respuesta con un ejemplo y coméntalo con tus compañeros o compañeras.

Refuerzo

- Escribe dos ejemplos de expresiones algebraicas indicando sus coeficientes numéricos y sus factores literales.
- Indica las condiciones que deben tener los términos de una expresión algebraica para poder reducirla y describe paso a paso el procedimiento que utilizas para reducir una expresión algebraica.
- Escribe en tu cuaderno el resultado que se obtiene al reducir la siguiente expresión:  

$$3xy - 6x + 2xy - 12x + 8$$

► Propósito

Comprender la multiplicación de expresiones algebraicas.

¿Para qué?

Para generalizar reglas matemáticas y describir magnitudes cuantitativas como perímetros, áreas y volúmenes, es necesario desarrollar y resolver operaciones básicas entre expresiones algebraicas, tales como adición, sustracción y multiplicación.

Palabras clave

Expresión algebraica

Área

Propiedad distributiva

Términos semejantes

Ampliando

- Cuadrilátero: polígono de cuatro lados.
- Paralelogramo: cuadrilátero cuyos lados opuestos son paralelos y congruentes.
- Rectángulo: paralelogramo que tiene cuatro ángulos rectos y sus lados opuestos congruentes.
- Cuadrado: paralelogramo que tiene cuatro ángulos rectos y lados congruentes.

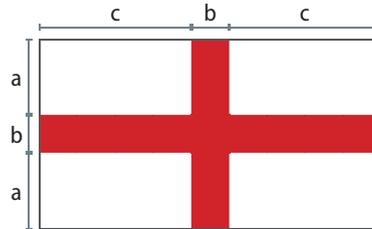
¿Cómo podrías haber calculado las áreas determinadas por cada cuadrilátero usando la multiplicación?

¿Pueden sumarse los términos de esta expresión?, ¿por qué?

## ¿Cómo multiplicar expresiones algebraicas?

La bandera de Inglaterra tiene como símbolo la cruz de San Jorge, que consiste en una cruz roja sobre un fondo blanco. Geométricamente puede considerarse como una agrupación de rectángulos blancos y rojos.

Las medidas de un modelo de la bandera se representan mediante letras, como se muestra a continuación:



¿Cuántos rectángulos rojos y cuántos blancos puedes distinguir en la bandera?

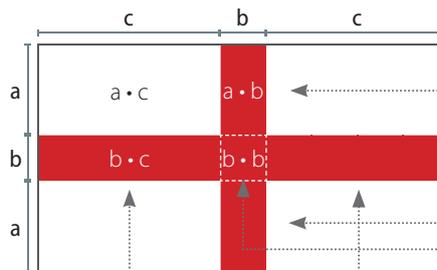
### Situación 1 Representando el área con lenguaje algebraico

Si descompones la bandera en cuadriláteros y calculas el valor del área total, ¿qué expresión algebraica obtienes?

Calcularemos el área descomponiendo la bandera en 8 rectángulos y 1 cuadrado.

**Paso 1** Identifica los rectángulos y cuadrados presentes en la bandera.

Los rectángulos blancos tienen largo  $c$  y ancho  $a$ . Su área es  $a \cdot c$ .



Rectángulos de largo  $a$  y ancho  $b$ . Su área es  $a \cdot b$ .

El cuadrado central tiene área  $b^2$ .

Rectángulos de largo  $c$  y ancho  $b$ . Su área es  $b \cdot c$ .

**Paso 2** Suma las áreas de los cuadriláteros definidos. Hay 4 rectángulos de área  $ac$ , 2 de área  $ab$ , 2 de área  $bc$  y 1 cuadrado de área  $b^2$ .

**Ayuda**

Observa que el signo de multiplicación entre dos factores literales puede omitirse. Por ejemplo:

$$a \cdot c = ac$$



$$\rightarrow ac + ac + ac + ac = 4ac$$



$$\rightarrow ab + ab = 2ab$$



$$\rightarrow bc + bc = 2bc$$



$$\rightarrow b^2$$

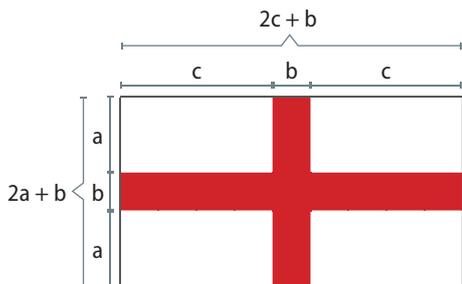
Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Situación 2** Representando el área con lenguaje algebraico

Si ahora calculas el área de la bandera de Inglaterra usando las medidas de sus lados, ¿qué expresión algebraica obtienes?

Calcularemos el área de la bandera multiplicando la medida de sus lados.



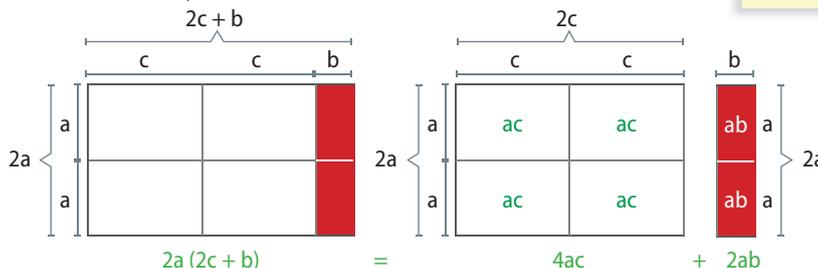
¿Cómo se llama la propiedad matemática que permite establecer las equivalencias  $a + b + a = 2a + b$  y  $c + b + c = 2c + b$ ?

Esto es, resolviendo el producto  $(2a + b)(2c + b)$ .

**Paso 1** Distribuye el primer factor en el segundo factor, es decir:

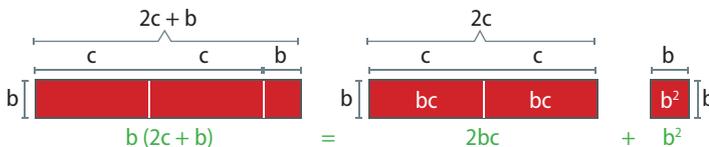
$$(2a + b)(2c + b) = 2a(2c + b) + b(2c + b)$$

**Paso 2** Desarrolla la expresión  $2a(2c + b)$ .



Por lo tanto,  $2a(2c + b) = 4ac + 2ab$ .

**Paso 3** Desarrolla el término  $b(2c + b)$ .



Por lo tanto,  $b(2c + b) = 2bc + b^2$ .

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Ampliando**

Algunas expresiones algebraicas poseen nombres particulares:

- Monomio: está formado por un término.
- Binomio: está formado por dos términos.
- Trinomio: está formado por tres términos.
- Polinomio: está formado por dos o más términos.

¿Cómo sería el desarrollo si distribuyeras el segundo factor en el primero? ¿Obtendrías el mismo resultado final?

**Ayuda**

El desarrollo algebraico de esta multiplicación es:  
 $2a(2c + b)$   
 $2a \cdot 2c + 2a \cdot b$   
 $4ac + 2ab$

¿Qué operaciones debes realizar para responder a la pregunta inicial?

¿Coincide esta expresión con la que obtuviste en la situación 1?, ¿esperabas esto?

**Para concluir**

- Para **multiplicar expresiones algebraicas** formadas por un término (**monomios**), hay que multiplicar los coeficientes numéricos entre sí y multiplicar los factores literales entre sí.
- Para **multiplicar expresiones algebraicas** formadas por más de un término (**binomios, trinomios**, etc.), hay que aplicar la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición y multiplicar monomio a monomio.

**Argumenta y comunica**

Desarrolla en forma escrita el procedimiento que usarías para resolver la siguiente multiplicación:

$$(3a + b)(a + 2b - c)$$

Luego, explica en voz alta este desarrollo.

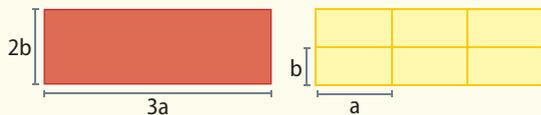
Finalmente, escribe una multiplicación similar, en la que uno de los factores sea un binomio y el otro un trinomio, y desafía a un compañero o a una compañera a que lo resuelva. Revisa este trabajo y corrige.

Repaso

- Resuelve aplicando la propiedad distributiva.
  - $5(3 - 8)$
  - $-2(6 + 4)$
  - $-7(9 + 3)$
  - $12(10 + 5)$
  - $18(22 - 4)$
- Reduce las expresiones algebraicas.
  - $3m + 4m + 7 + 5m + 8$
  - $9p + q + 5p + 6q - 15p$
  - $-bc - ab - c - a + ab + 5bc$
  - $-8x^2y + 2 + 4xy^2 - 10x^2y - 7 + 3xy^2$

Práctica guiada

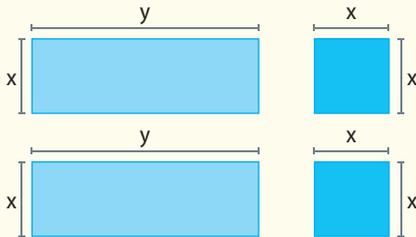
- Observa los rectángulos y responde según corresponda.



¿Cuál es el área (A) del rectángulo rojo? Expresa el área usando las variables a y b.

$$A = 2b \cdot 3a$$

- Multiplica los términos  $2b$  y  $3a$  de la expresión anterior.
  - Expresa el área de uno de los rectángulos amarillos pequeños usando las variables  $a$  y  $b$ .
  - Expresa el área total del rectángulo formado por los 6 rectángulos amarillos.
  - ¿Qué relación existe entre el área del rectángulo rojo y el área total formada por los rectángulos amarillos? Explica.
- Observa los rectángulos y cuadrados. Luego, realiza las actividades.



Expresa las áreas de los rectángulos y cuadrados usando las variables  $x$  e  $y$ .

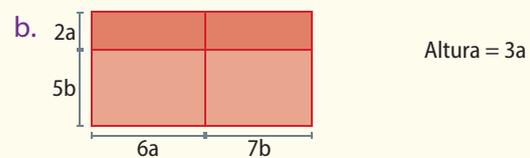
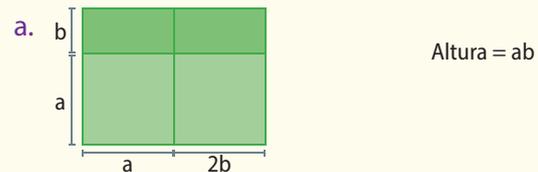
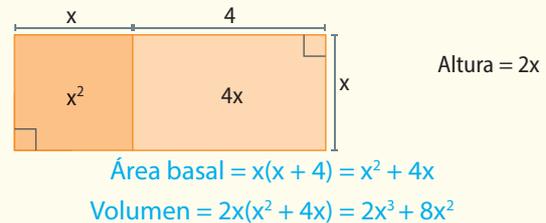
Área de cada rectángulo  $\rightarrow x \cdot y = xy$

Área de cada cuadrado  $\rightarrow x \cdot x = x^2$

- Suma las áreas anteriores.
- Dibuja en tu cuaderno los rectángulos y cuadrados de la imagen. Puedes elegir las

medidas, pero conservando la condición de que el ancho del rectángulo sea igual a la medida del lado del cuadrado.

- Recorta las figuras anteriores y reagrupalas para formar un rectángulo de lados  $2x$  y  $(x + y)$ .
  - Expresa algebraicamente el área del rectángulo anterior y desarrolla la multiplicación.
  - Verifica si la suma de las áreas que calculaste en la parte a es equivalente al producto encontrado en la pregunta anterior. Compara tu respuesta con la de un compañero o una compañera y menciona dos propiedades aritméticas que utilizaste en tu desarrollo.
- Cada figura representa la base de un prisma recto de la altura que se señala. Calcula el volumen de cada prisma con la información dada.



- Calcula el producto entre un monomio y un binomio.

$$3a(2a + b) = 3a \cdot 2a + 3a \cdot b = 6a^2 + 3ab$$

- $-2y(8x - 4y)$
- $ax(2 + 3y)$
- $2pq(4x - 5)$
- $-7xz(3 - 2x)$
- $-10x^2b(6x + 9y)$
- $5y^3(7 - 11y)$

- Calcula el producto entre los polinomios y reduce términos semejantes.

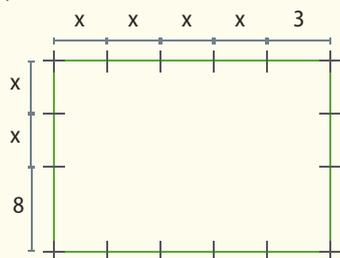
$$(3a + 5b)(a - b) = 3a^2 - 3ab + 5ab - 5b^2 = 3a^2 + 2ab - 5b^2$$

- $(x - y)(x^2 + xy + y^2)$
- $(1 + y + z)(1 - y - z)$
- $(9mn - n)(6 - m^2n + n)$
- $(abc - 1)(2 - abc + ab + bc)$

Aplica

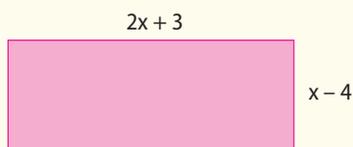
8. Resuelve los problemas.

a. Se tiene un rectángulo cuyos lados miden  $4x + 3$  y  $2x + 8$ .



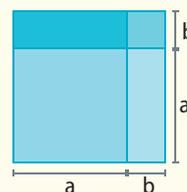
- Descompón la figura en cuadrados (de lado  $x$ ) y en rectángulos.
- Calcula el área de las figuras que obtuviste en la pregunta anterior.
- Suma las áreas anteriores.
- Calcula el área del rectángulo mayor.
- ¿Qué relación hay entre la suma de las áreas parciales y el producto obtenido en la pregunta anterior?

b. Se tiene un rectángulo cuyas medidas se especifican en la imagen.



- ¿Qué expresión algebraica reducida permite representar el perímetro del rectángulo?, y cuál permite representar su área?

c. Dada la figura, realiza las actividades.



- Calcula el área de las figuras que componen el cuadrado.
- Suma las áreas anteriores.
- Calcula el área del cuadrado mayor.
- ¿Qué relación hay entre la suma de las áreas parciales y el producto obtenido en la pregunta anterior?

d. Si Sebastián tiene  $(2x + 5)$  años y Antonio es  $(x + 1)$  años mayor que Sebastián, ¿qué expresión representa el producto de sus edades?

9. Analiza. Observa con tus compañeros o compañeras los siguientes productos:

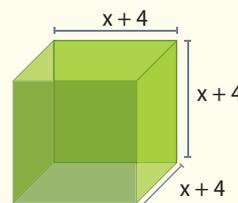
$$(a + 2)(a + 2) = a^2 + 2a + 2a + 4 = a^2 + 4a + 4$$

$$(x + 3)(x + 3) = x^2 + 3x + 3x + 9 = x^2 + 6x + 9$$

$$(y + 1)(y + 1) = y^2 + y + y + 1 = y^2 + 2y + 1$$

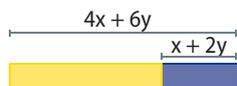
- a. Escribe en tu cuaderno el patrón que encontraste y compáralo con tus compañeros o compañeras.
- b. Responde sin escribir el paso intermedio. ¿Cuál es el resultado de  $(x + 7)(x + 7)$ ?

10. Desafío. Calcula el volumen del cubo de la figura y comunica el resultado a tu profesor o profesora.



Reflexión

1. Considera que el área de un rectángulo de lados  $b$  y  $c$  es  $b \cdot c$ . Si se aumenta  $b$  en 4 unidades y se disminuye  $c$  en 4 unidades, ¿qué ocurre con el área? Piénsalo y justifica tu respuesta con un ejemplo numérico.
2. Dada la figura, ¿cómo obtendrías la expresión que representa el largo del rectángulo amarillo? Coméntalo con un compañero o una compañera y luego verifica tu resultado.



Refuerzo

1. Describe el procedimiento que utilizarías para calcular el producto entre los polinomios  $(3r - s)$  y  $(-7t^2 + uv + 8xy)$ .
2. Señala por escrito cómo representarías algebraicamente el área de un rectángulo de lados  $(14p + 6q)$  y  $(p + 2q)$ .
3. Escribe 2 ejemplos de operaciones con expresiones algebraicas en que se aplique la propiedad distributiva de la multiplicación sobre la adición.

► **Propósito**  
Comprender la factorización de expresiones algebraicas.

### ¿Para qué?

Algunas fórmulas de la matemática y de las ciencias pueden expresarse de diferentes formas equivalentes. Las formas factorizadas, esto es, escritas en forma de multiplicaciones, facilitan su análisis y comprensión.

### Palabras clave

Expresión algebraica

Factorizar

Factor

Descomposición multiplicativa

Factor común

## ¿Cómo factorizar expresiones algebraicas?

Para factorizar una expresión algebraica debes buscar los factores en que puede descomponerse multiplicativamente. Así como el número 12 puede descomponerse en los factores 3 y 4, o también en los factores 2 y 6; una expresión algebraica también puede descomponerse en más de una forma.

### Situación 1 Representando el área con lenguaje algebraico

¿Qué expresiones algebraicas podrían representar las medidas de rectángulos de área  $2ab$ ?

Responderemos considerando solo tres casos.

**Paso 1** Descompón la expresión del área en factores.

$$2ab = 2 \cdot a \cdot b$$

Los factores son 2,  $a$  y  $b$ .

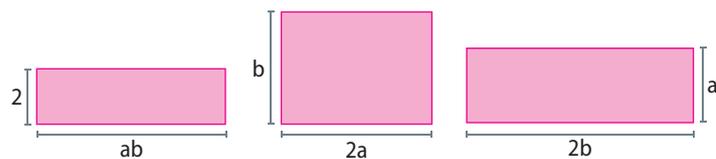
**Paso 2** Usa la propiedad conmutativa para generar distintas combinaciones de los factores cuyo producto sea  $2ab$ .

**Ayuda**  
Estas son tres posibles descomposiciones para la expresión algebraica  $2ab$ .

$$2ab = 2 \cdot ab = 2a \cdot b = a \cdot 2b$$

¿Se te ocurre otra forma de descomponer en factores la expresión  $2ab$ ? ¿cuál?

**Paso 3** Dibuja rectángulos usando estos factores como medidas de sus lados para visualizar la geometría obtenida.



Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

### Situación 2 Representando el área con lenguaje algebraico

¿Cómo puedes factorizar la expresión  $a^2 + ab$ ?

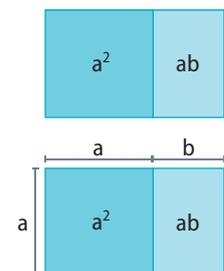
Responderemos considerando que la expresión  $a^2 + ab$  representa la composición del área de un rectángulo.

**Paso 1** Interpreta la suma de los términos de la expresión algebraica  $a^2 + ab$  como la suma de las áreas parciales del rectángulo mayor de la figura.

**Paso 2** Determina la medida de los segmentos que conforman el contorno del rectángulo mayor.

Con estas medidas puedes establecer que las medidas de los lados del rectángulo mayor son:

$$a \text{ y } (a + b)$$



R: Dos factores de la expresión  $a^2 + ab$  son  $a$  y  $(a + b)$ , y la factorización queda:  
 $a^2 + ab = a(a + b)$

¿Qué ocurriría si  $a = b$ ?  
¿Cómo sería este desarrollo?

¿Qué expresión algebraica representa el perímetro del rectángulo mayor?

Si  $a = 9$  y  $b = 6$ , ¿cuál sería el área y el perímetro del rectángulo mayor?

**Situación 3** Modelando usando algoritmo

Si ahora calculas la factorización de  $a^2 + ab$  buscando un factor común en sus términos, ¿qué factores obtienes?

Para responder, buscaremos un factor común, que es un elemento algebraico que se repite en los términos de la expresión.

**Paso 1** Escribe cada término de la expresión algebraica como el producto de sus factores e identifica el factor o grupo de factores que es común a todas las descomposiciones. A continuación, se destaca en rojo:

$$a^2 + ab = \color{red}{a} \cdot a + \color{red}{a} \cdot b$$

**Paso 2** Escribe la descomposición como factores en que uno de ellos es el factor común identificado en el paso anterior.

$$a^2 + ab = \color{red}{a} \cdot a + \color{red}{a} \cdot b = a(a + b)$$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Ayuda**

Recuerda la propiedad distributiva de la multiplicación respecto de la adición:

$$a(b + c) = ab + ac$$

**Ayuda**

En este desarrollo de la propiedad distributiva debes descomponer los términos de la expresión al máximo.

**Situación 4** Representando el área con lenguaje algebraico

¿Cómo puedes factorizar la expresión  $a^2 + 5a + 6$ ?

Consideraremos que la expresión representa el área de un rectángulo.

**Paso 1** Dibuja un rectángulo y divídelo en un cuadrado y tres rectángulos. El área del cuadrado rosado es  $a^2$  y el del rectángulo verde es 6. Las áreas de los otros dos rectángulos llámalas  $xa$  e  $ya$ , en que  $x$  e  $y$  no se conocen pero cumplen las condiciones:

**Condición 1:**  $xa + ya = (x + y)a = 5a \rightarrow x + y = 5$

**Condición 2:**  $xy = 6 \rightarrow xy = 6$

¿Por qué se debe cumplir la igualdad  $xa + ya = 5a$ ?

**Paso 2** Determina  $x$  e  $y$ . El número 6 puede descomponerse de dos maneras:

$$6 = 3 \cdot 2 \quad 6 = 1 \cdot 6$$

¿Por qué los factores 1 y 6 no sirven como valores para  $x$  e  $y$ ?

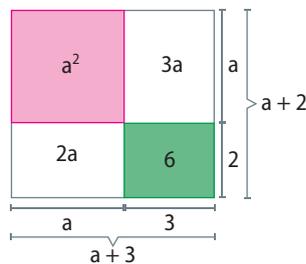
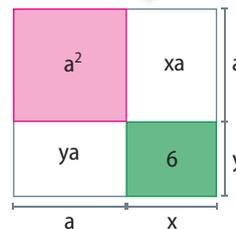
Y los factores que, además, suman 5 son 3 y 2. Reemplaza estos valores en el rectángulo y determina expresiones para las medidas de sus lados:

$$(a + 2) \text{ y } (a + 3)$$

R: Dos factores de la expresión  $a^2 + 5a + 6$  son  $(a + 2)$  y  $(a + 3)$  y la factorización queda:

$$a^2 + 5a + 6 = (a + 2) \cdot (a + 3)$$

¿Se te ocurre otra forma de dividir el rectángulo para factorizar la expresión  $a^2 + 5a + 6$ ? ¿Cuál sería?



¿Cómo podrías factorizar  $a^2 + 5a + 6$ , sin utilizar rectángulos?

**Para concluir**

**Factorizar** una expresión algebraica consiste en expresarla como una multiplicación de factores. Para factorizar monomios, binomios, trinomios, etc., puedes usar el concepto de composición del área de rectángulos o aplicar métodos numéricos.

**Argumenta y comunica**

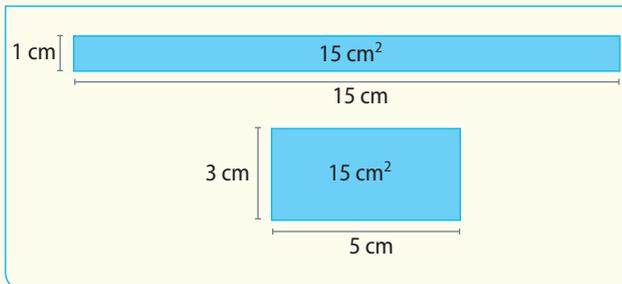
Factoriza la expresión  $a^2 + 3a - 10$  en la forma  $(a + x)(a - y)$  sin ocupar rectángulos. ¿Qué condiciones deben cumplir  $x$  e  $y$ ? Argumenta para justificar tu respuesta y comunica tu resultado a un compañero o una compañera.

Repaso

- Escribe dos factores cuyo producto sea cada uno de los números.
  - 8
  - 16
  - 32
  - 45
  - 56
  - 63
- Escribe la factorización prima de cada número.
  - 21
  - 25
  - 30
  - 52
  - 72
  - 90

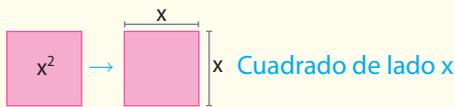
Práctica guiada

- Dibuja algunos rectángulos cuyos lados midan un número natural de centímetros y cuya área (A) sea la que se indica.



- $A = 17 \text{ cm}^2$
- $A = 24 \text{ cm}^2$
- $A = 28 \text{ cm}^2$
- $A = 36 \text{ cm}^2$

- Determina las posibles dimensiones de los cuadrados y rectángulos dadas sus áreas.



- $2x^2$
- $6xy$
- $3x^2y$

- Completa las factorizaciones.

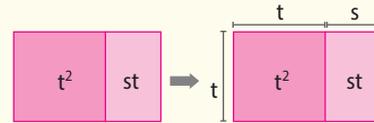
$$12x + 24 = 12(\text{---} + \text{---})$$

$$12x = 12 \cdot x \quad y \quad 24 = 12 \cdot 2$$

$$12x + 24 = 12(x + 2)$$

- $3z + 6 = 3(\text{---} + \text{---})$
- $5m^2 + 10m = 5m(\text{---} + \text{---})$
- $8p^2q - 12pq^2 = 4pq(\text{---} - \text{---})$
- $4x^2 + 8x + 16 = 4(\text{---} + \text{---} + \text{---})$

- Determina las posibles dimensiones de los rectángulos, dadas sus áreas.



Rectángulo de lados  $t$  y  $(t + s)$

- 
- 
- 
- 

- Identifica el factor común y factoriza.

$$5r^2 - 25r = 5 \cdot r \cdot r - 5 \cdot 5 \cdot r = 5r(r - 5)$$

- $y^2 - 7y$
- $12xy + 27y$
- $9mn^2 + 54n^3$
- $15r - 25s + 20$
- $x^2y - xy^2 - xy$
- $a^2b^3c - 2ab^2 + 8b^2c^2 + b^3$

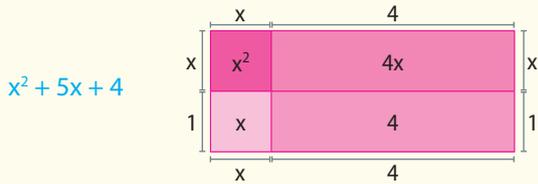
- Verifica que la factorización de la expresión algebraica sea correcta.

$$x^2 + 5x - 36 = (x + 9)(x - 4)$$

$$(x + 9)(x - 4) = x^2 - 4x + 9x - 36 = x^2 + 5x - 36$$

- $10x^2 - 60x = 10x(x - 6)$
- $abc - 4bc + 2a^2c = c(ab - 4b + 2a^2)$
- $4x^2 - 9y^2 = (4x + 3y)(4x - 3y)$
- $2x^2y^4 + 8x^4y^6 - 10xy^3 = 2xy^3(xy + 4x^3y^3 - 5)$

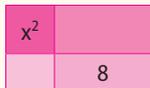
9. Encuentra las dimensiones de cada rectángulo, dada su área.



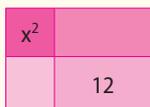
$$x^2 + 5x + 4 = (x + 4)(x + 1)$$

El rectángulo tiene medidas  $(x + 4)$  y  $(x + 1)$ .

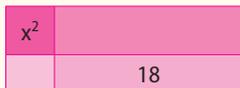
- a.  $x^2 + 6x + 8$



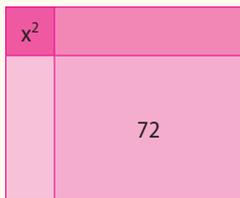
- b.  $x^2 + 7x + 12$



- c.  $x^2 + 9x + 18$



- d.  $x^2 + 17x + 72$



10. Completa las factorizaciones.

$$t^2 + 14t + 40 = (t + \underline{\quad})(t + \underline{\quad})$$

$$t^2 + 14t + 40 = (t + 4)(t + 10)$$

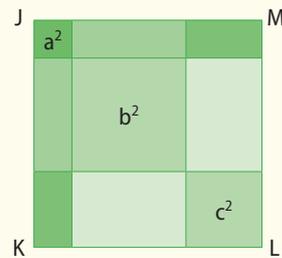
- a.  $x^2 + 8x + 7 = (x + \underline{\quad})(x + \underline{\quad})$   
 b.  $m^2 + 11m + 28 = (m + \underline{\quad})(m + \underline{\quad})$   
 c.  $b^2 + 11b + 18 = (b + \underline{\quad})(b + \underline{\quad})$   
 d.  $y^2 + 25y + 24 = (y + \underline{\quad})(y + \underline{\quad})$

### Reflexiono

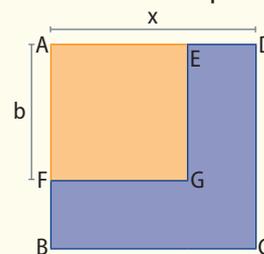
- Dada la expresión  $x^2 - 3x + 2$ , ¿se puede representar mediante la composición de áreas de rectángulos? Justifica tu respuesta.
- Si consideras la multiplicación de los binomios  $(x - a)(x - b)(x - c)$ , ¿cuál será el resultado?

### Aplica

11. Observa las figuras que componen el cuadrado JKLM y responde.



- Calcula las áreas que componen el cuadrado JKLM y súmalas. ¿Cuál es el área total?
  - ¿Qué expresión representa la medida del lado del cuadrado JKLM?
12. **Descubre el error.** María Paz, mientras estudiaba para su prueba de Matemática, realizó la siguiente factorización  $x^2 + 5x + 6 = (x + 1)(x + 6)$ . ¿Cuál fue el error que cometió? Coméntalo con una compañera o compañero y escribe en tu cuaderno la factorización correcta.
13. **Analiza.** En la imagen se muestran los cuadrados ABCD y AFGE con sus respectivas medidas.



- ¿Cómo obtendrías el área de la figura BCDEGF? Piénsalo y escribe el procedimiento, paso a paso.
- ¿Qué expresión algebraica representa dicha área? Verifica que tu resultado coincide con la factorización  $(x + b)(x - b)$  y compara con tus compañeros y compañeras.

### Refuerzo

- Dibuja la representación de la igualdad  $x^2 + 10x + 16 = (x + 8)(x + 2)$  usando rectángulos y sus respectivas áreas.
- Explica cómo factorizar una expresión algebraica. Utiliza como ejemplo  $6a^2b + 3ab^2 + ab$ .
- Señala las ventajas y desventajas de utilizar la composición de áreas en rectángulos o cuadrados para la factorización.

# TETRIS

## Un clásico mundial

El Tetris es un juego que combina la destreza de la visualización espacial y la rapidez mental de quien lo practica. Fue inventado en 1984 por el ingeniero informático ruso Alekséi Pázhitnov. El nombre de este juego combina las palabras "tetra" (cuatro, haciendo referencia a los 4 cuadrados que forman cada pieza) y "tenis".

Se juega con siete piezas de colores llamadas tetraminós, tetrininós o tetrominós (compuestas por cuatro cuadrados congruentes) que van cayendo desde la parte superior de la pantalla. Estas se pueden rotar (en  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  y  $360^\circ$ ) y se van ubicando en la parte inferior de la pantalla. Al formar una línea horizontal completa, esta desaparece y otorga puntaje al jugador.

El juego se divide en niveles, los cuales son cada vez más rápidos; y finaliza cuando los tetraminós se amontonan impidiendo colocar más de estos por falta de espacio.

Versión original	Última versión



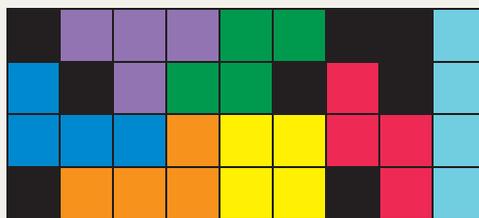
**Sabías que...**

El Tetris es considerado uno de los juegos más importantes de todos los tiempos, considerando su antigüedad, las más de 100 millones de copias vendidas en dispositivos móviles, consolas, etc., y la cantidad de seguidores que aún tiene.

**Actividad grupal**

Reúnanse en grupos de 3 o 4 integrantes para realizar las siguientes actividades. Luego, comuniquen sus resultados al curso.

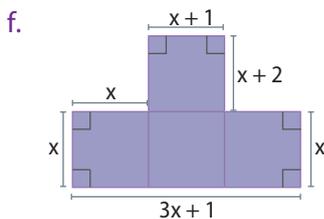
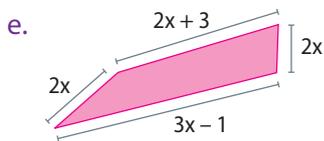
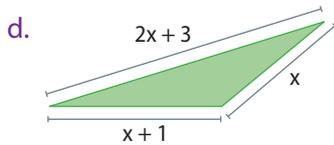
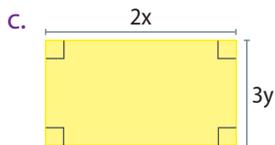
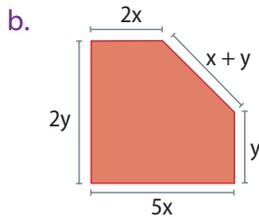
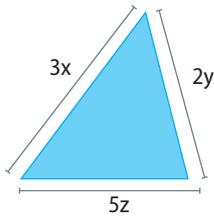
1. Consideren la siguiente disposición de piezas:



- Determinen la longitud de los segmentos de cada tetraminó. Consideren que la medida del lado de cada cuadrado es  $x$ .
  - ¿Qué expresión representa el área de la figura formada por los tetraminós?
  - ¿Cuál es el perímetro de la figura conformada por los tetraminós naranja, amarillo y rojo?
2. Inventen una figura usando las 7 piezas del Tetris, intercámbienla con otros grupos y expresen algebraicamente el área de la figura.
  3. Ingresen el código **TM8P115** en <http://codigos.auladigital.cl>, practiquen un momento e inviten a sus compañeros y compañeras a jugar.

**Lección 15:** ¿Qué representa una expresión algebraica?

- 1 Representa cada enunciado mediante una expresión algebraica.
  - a. La mitad de la edad de Pedro hace 7 años.
  - b. La deuda de Andrea pagada en 4 cuotas.
  - c. El 80% del precio original de los zapatos.
  - d. Un tercio de la cantidad de amigos de Sergio.
- 2 Expresa el perímetro de cada figura.
  - a.
  - b.
  - c.
  - d.
  - e.
  - f.



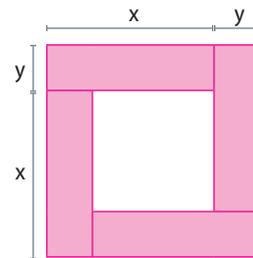
- 3 Evalúa las expresiones con los valores dados.
  - a.  $x + 3y + 2$ ;  $x = -2$ ,  $y = -1$
  - b.  $3x - 2y$ ;  $x = 1$ ,  $y = -3$
  - c.  $2x + 3y$ ;  $x = 4$ ,  $y = -6$
  - d.  $x + y$ ;  $x = 1$ ,  $y = \frac{3}{5}$

- 4 Reduce los términos semejantes.
  - a.  $2x + 5x + 7x - 3x$
  - b.  $5x - 6y + 8y + 3xy$
  - c.  $19x - 10y + 8 - 12x$
  - d.  $-x + 15x - 4x + 6x$
- 5 Completa cada igualdad.
  - a.  $2x + \underline{\hspace{2cm}} = 5x$
  - b.  $3x + 5y + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = x + 3y$
  - c.  $5x - 3y + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = 0$
  - d.  $12x + 5 - 12y + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} + \underline{\hspace{2cm}} = 24x - 16y$

**Lección 16:** ¿Cómo multiplicar expresiones algebraicas?

- 6 Determina el área de los rectángulos, descomponiéndolos.
  - a.
  - b.
  - c.
  - d. ¿Encontraste algún patrón en los productos anteriores? Comenta con un compañero o una compañera y describe la regla de formación.

- 7 Analiza la figura y responde las preguntas.



- a. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado mayor?
- b. ¿Cuánto mide el lado del cuadrado menor?
- c. Encuentra una expresión para el área sombreada y redúcela.

8 Resuelve las multiplicaciones de monomios.

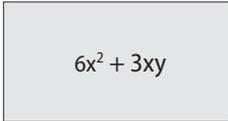
- a.  $2x \cdot x$
- b.  $3a \cdot 2a$
- c.  $3a \cdot 5a$
- d.  $x \cdot 4x \cdot (-3x)$
- e.  $3a \cdot a \cdot 2a$
- f.  $4x \cdot 3y \cdot 6z$
- g.  $-3x \cdot (-4x) \cdot x$
- h.  $5ab \cdot 2ab \cdot ab$

9 Resuelve las multiplicaciones de binomios.

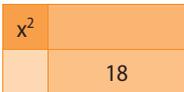
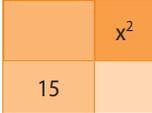
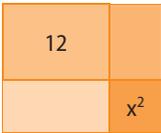
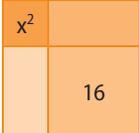
- a.  $(x - 3)(x + 3)$
- b.  $(a - 7)(a + 7)$
- c.  $(2a + 4)(2a - 4)$
- d.  $(3x + 5)(3x - 5)$
- e. ¿Encontraste algún patrón en los productos anteriores? Comenta con tus compañeros y compañeras y describe la regla de formación.

Lección 17: ¿Cómo factorizar expresiones algebraicas?

10 Determina las posibles medidas de los lados de los rectángulos o cuadrados, dadas sus áreas.

- a. 
- b. 
- c. 
- d. 

11 Dada la expresión, determina el área de las regiones que faltan y representa algebraicamente los lados de cada rectángulo.

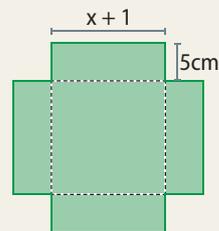
- a.  $x^2 + 11x + 18$   

- b.  $x^2 + 8x + 15$   

- c.  $x^2 + 7x + 12$   

- d.  $x^2 + 8x + 16$   


12 Escribe sobre la línea la letra mayúscula que permite relacionar la expresión algebraica y su factorización.

- a.  $x^2 + 2x + 1$     \_\_\_\_\_    A.  $(x + 3)(x + 2)$
- b.  $x^2 + 5x + 6$     \_\_\_\_\_    B.  $(x + 1)(x + 4)$
- c.  $x^2 + 8x + 12$     \_\_\_\_\_    C.  $(x + 5)(x + 2)$
- d.  $x^2 + 7x + 10$     \_\_\_\_\_    D.  $(x + 1)(x + 1)$
- e.  $x^2 + 5x + 4$     \_\_\_\_\_    E.  $(x + 6)(x + 2)$

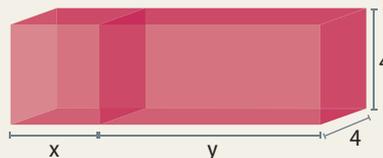
Desafíos de integración

- a. En una competencia de triatlón, una atleta recorrió el triple de distancia corriendo que nadando. Además, en bicicleta anduvo 30 km más de los que corrió. Si la competencia consta en total de 51 km, ¿cuántos kilómetros recorrió en cada etapa?
- b. En una lámina metálica cuadrada se recortan en las esquinas cuadrados de 5 cm de lado y se dobla por las líneas punteadas formando una caja.



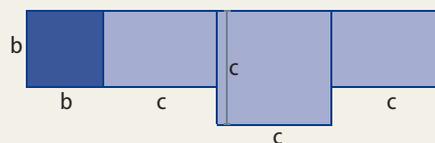
- ¿Qué dimensiones tienen las caras de la caja?
- ¿Cuál es el volumen de la caja?

c. La siguiente figura está formada por dos paralelepípedos.



- ¿Qué expresiones representan el área y el volumen de la figura compuesta?

d. Dada la composición de estos cuatro rectángulos o cuadrados, responde.



- ¿Qué expresión algebraica representa el área total?
- Si se reagrupan las cuatro figuras en un cuadrado de lado  $(b + c)$ , ¿qué expresión algebraica representa su área? ¿Se obtiene el mismo resultado de la pregunta anterior?, ¿por qué?

Estrategia alternativa

Escoge uno de los desafíos planteados y utiliza otra estrategia para resolverlo. Verifica si obtienes el mismo resultado y determina cuál de las dos estrategias es más conveniente.

## Usar un proceso de ensayo y error

Un proceso de ensayo y error permite acercarse gradualmente a la solución de un problema, analizando, probando y manipulando valores hasta llegar a la respuesta buscada.

### Estrategias

- Usar un proceso de ensayo y error.
- Aplicar procesos reversibles.
- Descartar información irrelevante.
- Usar un problema similar pero más sencillo.
- Construir un esquema, diagrama o tabla.
- Encontrar un patrón.
- Usar modelos matemáticos.
- Usar razonamiento lógico.
- Identificar submetas.

Un rectángulo está dividido como se indica en la imagen. En él,  $A_1$  es un cuadrado, y  $A_2$ ,  $A_3$  y  $A_4$  son rectángulos.

Si el área del rectángulo se puede representar por la expresión  $9x^2 + 27x + 20$ , entonces, ¿qué expresión algebraica representa sus dimensiones?



¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema? Escribe tú

¿Qué datos tengo para resolver? Escribe tú

Crea un plan para resolver

Para resolver este problema puedes aplicar la estrategia de Usar un proceso de ensayo y error para determinar la expresión que representa las dimensiones del rectángulo.

### Aplica la estrategia y resuelve

El rectángulo de área  $9x^2 + 27x + 20$  es la composición de un cuadrado de área  $9x^2$ , un rectángulo de área 20 y dos rectángulos cuyas áreas suman  $27x$ .

De acuerdo a la distribución de áreas que posee el rectángulo se deben cumplir las siguientes condiciones:

$$A_1 = 9x^2; A_4 = 20 \text{ y } A_2 + A_3 = 27x$$

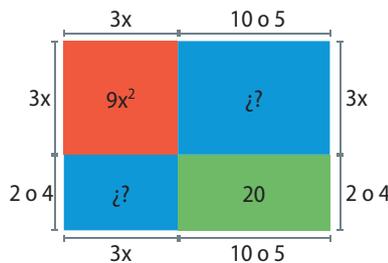
Entonces, para encontrar las dimensiones de los rectángulos  $A_2$  y  $A_3$  debemos descomponer el área del rectángulo verde ( $A_4$ ) en dos factores naturales, esto es:

$$20 = 2 \cdot 10$$

$$20 = 4 \cdot 5$$

$$20 = 1 \cdot 20$$

Ahora, iremos probando cada par de valores como medidas de los lados desconocidos de los rectángulos  $A_2$  y  $A_3$  hasta hallar los que cumplen con las condiciones del problema.



#### Uso de factores 2 y 10:

$$\left. \begin{array}{l} A_2 = 10 \cdot 3x = 30x \\ A_3 = 2 \cdot 3x = 6x \end{array} \right\} A_2 + A_3 = 36x$$

Estos valores no cumplen con la condición.

#### Uso de factores 4 y 5:

$$\left. \begin{array}{l} A_2 = 5 \cdot 3x = 15x \\ A_3 = 4 \cdot 3x = 12x \end{array} \right\} A_2 + A_3 = 27x$$

Estos valores sí cumplen con la condición.

Como los factores 4 y 5 cumplen con la condición, no es necesario probar con 1 y 20.

Verifica la respuesta

Escribe tú

Puedes comprobar la respuesta multiplicando las dimensiones determinadas del rectángulo.

Comunica la respuesta

Escribe tú

¿De qué otra forma resolverías este problema? Explica.

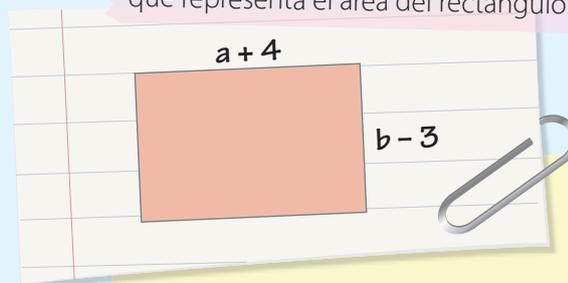
### Vuelvo a mis procesos

Responde de acuerdo a tu apreciación.

¿Con qué expresiones tendrías que multiplicar cada término de la expresión algebraica para poder reducir la nueva expresión a un único término? ¿Es única la respuesta? Explica.

$$2ab + a + 3c$$

¿Cuántos términos tendrá la expresión algebraica que representa el área del rectángulo?, ¿por qué?



¿Cómo identificas cada término de la expresión algebraica con uno de los rectángulos o cuadrados de la figura?

¿En qué otras asignaturas has visto expresiones algebraicas? ¿En qué te ayudará lo aprendido en esta sección para el desarrollo de los contenidos de esas asignaturas?

$$4ab + 12a + 3b + 9$$



¿Qué dificultades tuviste para multiplicar binomios? ¿En qué debes fijarte para no cometer errores?

¿Alcanzaste las metas que te propusiste al iniciar el trabajo de esta sección?, ¿por qué?

# Ecuaciones e inecuaciones

## Activo ideas previas

1. Lee la información y coméntala con un compañero o compañera.

La tasa bruta de natalidad (TBN) es un indicador que expresa la frecuencia de nacimientos ocurridos por cada mil personas, en cierto año y territorio. En la última década, la tendencia de la TBN en Chile es a la baja, como se muestra en la tabla inferior. Considerando estimaciones de 2012, la Región del Biobío presentó la menor tasa de natalidad (12,89), comparada con la tasa nacional que fue de 14,0. Para calcular esta tasa se utiliza la siguiente fórmula:

$$TBN = \frac{B \cdot 1000}{P}$$

TBN: tasa bruta de natalidad.  
B: número de nacimientos.  
P: población total.

Año	N.º de nacimientos	Tasa de natalidad
2008	246 581	14,8
2009	252 240	15,0
2010	250 643	14,7
2011	247 358	14,4
2012	243 635	14,0

Fuente: www.inebiobio.cl

Responde las preguntas junto a tu compañero o compañera.

a. La TBN esperada en la Región del Biobío para el año 2020 es de 12,47 y la población estimada para el mismo año es de aproximadamente 2 177 000 habitantes. ¿Cuántos nacimientos se espera que ocurran en esta región el año 2020? ¿Cómo lo calcularon?

b. Averigua en el sitio web del Instituto Nacional de Estadísticas la población total y el número de nacimientos de tu región y calcula la TBN. ¿Es mayor o menor que la TBN estimada a nivel nacional en 2012?

c. Tras analizar la gráfica, ¿por qué creen que la TBN ha bajado a lo largo de los años? ¿Qué implicancias a nivel país creen que puede tener una baja sostenida de la TBN? Comenten con otros grupos de trabajo.



¿Sabías que el 19 de abril del 2017, el INE realizará un censo de hecho? Tú podrás participar junto a tu familia, para que este acto soberano y republicano sea un éxito. Si quieres saber más del censo, conéctate a [www.ine.cl](http://www.ine.cl) o a [www.censo2017.cl](http://www.censo2017.cl)

## Activo conceptos clave

2. A continuación, se presentan algunos conceptos clave de esta sección. Úsalos para completar las afirmaciones.

- En  $1 + 3x = 4$ ,  $x$  representa la \_\_\_\_\_.
- Los signos de \_\_\_\_\_ son  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$  y  $\leq$ .
- En  $2x = 8$ , el valor 4 es su \_\_\_\_\_.
- La expresión  $-4 > 2 + 5x$  corresponde a una \_\_\_\_\_.

desigualdad      inecuación  
balanza            solución  
incógnita          conjunto solución  
ecuación           igualdad

## Pienso mis procesos

Responde de acuerdo a lo que conoces.

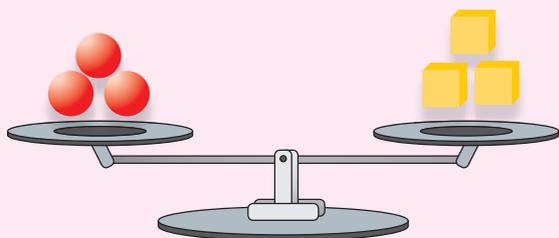
¿El coeficiente que acompaña a la incógnita es un número entero? ¿Has visto ecuaciones de este tipo?, ¿dónde?

$$\frac{2}{3}x + 4 = 2$$

¿Cómo lees esta inecuación? ¿Cuál de sus lados posee un valor menor,  $6 - 0,2x$  o  $-2$ ? ¿cómo lo sabes?

$$6 - 0,2x < -2$$

¿Hacia qué lado se inclinará la balanza una vez que se apoyen los cuerpos sobre sus platos?, ¿por qué?



¿Qué estrategias has ocupado para resolver ecuaciones en cursos anteriores? ¿Crees que te servirán en esta sección?

¿Cuál de los temas de esta sección te interesa más?, ¿por qué?

¿Qué metas te propones alcanzar durante el desarrollo de esta sección? ¿cómo lo harás?

Activa tus conocimientos previos respondiendo las preguntas laterales y luego resuelve las actividades. Para terminar, registra tus logros.

¿Cuál es la prioridad de las cuatro operaciones básicas al resolver ejercicios combinados?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
8 correctas o más	menos de 8 correctas

¿Cometiste muchos errores? ¿En qué estás fallando?

¿Qué haces para comprobar el resultado de un problema?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
3 correctas o más	menos de 3 correctas

¿Obtuviste el nivel de logro que esperabas?, ¿por qué?

**Resolver operaciones con números enteros, fracciones y decimales**

**1** Resuelve las operaciones con números enteros. (4 puntos)

- a.  $3(2 - 1) + 2(1 - 2)$
- b.  $-3(5 - 1) - 8(4 - 5)$
- c.  $8 - 4 \cdot (-3) - 3 \cdot 4 + 8 \cdot (-3)$
- d.  $5 \cdot (-4) + 4 \cdot (-5) + (-10) \cdot (-4)$

**2** Determina en cada caso un número entero que satisfaga las condiciones dadas. (4 puntos)

- a. Sea menor que  $-3$ .
- b. Esté entre  $-7$  y  $-9$ .
- c. Sea menor que  $-3$  y mayor que  $-5$ .
- d. Sea mayor que  $-3$  y menor que  $0$ .

**3** Resuelve las operaciones con decimales y fracciones. (5 puntos)

- a.  $(3,8 - 4,2) : 5$
- b.  $(2,1 \cdot 3,4) : 0,2$
- c.  $0,1(18,4 - 21,6)$
- d.  $3,4 \cdot \frac{4}{5} - 1,7 \cdot 1,6$
- e.  $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} - 0,1 \cdot \frac{2}{5}$

**Resolver problemas con números enteros, fracciones y decimales**

**4** Resuelve los problemas. (5 puntos)

- a. Alicia tiene \$ 24 000 y debe pagar 5 cuotas de \$ 12 000. Expresa con un número entero la diferencia entre el dinero que tiene y el que adeuda.
- b. Un computador que valía \$ 320 000 está con un 15% de descuento.
  - ¿Qué porcentaje del precio original es el precio actual?
  - ¿Cuál es el precio actual del computador?
- c. Enrique ha perdido 7 puntos en cada una de las ocho jugadas de un juego. Si al principio tenía 48 puntos, ¿cuántos puntos tiene ahora?
- d. Paola necesita cortar un alambre de 21 m de largo en trozos de  $1\frac{3}{4}$  m para arreglar su jardín. ¿Cuántos trozos puede obtener?

¿Qué elementos componen una expresión algebraica?

¿Qué condiciones se deben cumplir para poder reducir una expresión algebraica?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
7 correctas o más	menos de 7 correctas

De los contenidos evaluados, ¿cuáles no dominas?

¿Qué harás para llegar a dominarlos?

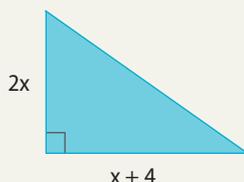
**Representar y calcular operaciones con expresiones algebraicas**

**5** Representa en lenguaje algebraico cada enunciado. (3 puntos)

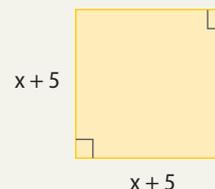
- a. La edad de Samuel disminuida en seis.
- b. El doble de la distancia entre el colegio de Estela y su casa.
- c. La diferencia entre dos números enteros consecutivos.

**6** Expresa en lenguaje algebraico el área de cada polígono. (2 puntos)

a.



b.

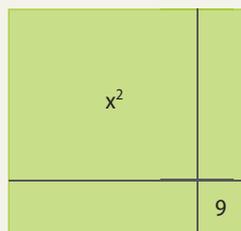


**7** Reduce las expresiones algebraicas. (4 puntos)

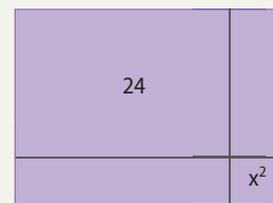
- a.  $3b + 5 - 12b - 6$
- b.  $18m + 23n - 16m + 6$
- c.  $3x - 7y + 12x - 3y + 5$
- d.  $8t + 5s - 4 + 12t - 10s + 8$

**8** Determina las dimensiones de cada rectángulo, dada su área A. (2 puntos)

a.  $A = x^2 + 6x + 9$



b.  $A = x^2 + 11x + 24$



¿Qué es una ecuación? ¿Qué propiedades permiten resolver una ecuación?

**Resolver ecuaciones e inecuaciones**

**9** Resuelve las ecuaciones. (5 puntos)

- a.  $x + 3 = 7$
- b.  $2x + 2 = 8$
- c.  $6x + 3 - 4x = 13$
- d.  $4x + 1 - 2x = -11 - 7x$
- e.  $2x + 3x - 4 = 4x + 9 - 8x$

**10** Resuelve las inecuaciones. (5 puntos)

- a.  $x + 2 < 5$
- b.  $x + 8 > 6$
- c.  $2x + 20 < 30$
- d.  $5x + 2 - 3x > 12$
- e.  $x + x + 5x + 6 < 30$

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
6 o más correctas	menos de 6 correctas

¿Tuviste alguna dificultad?, ¿cuál?

► Propósito

Modelar situaciones usando ecuaciones lineales.

¿Para qué?

Muchas situaciones cotidianas pueden ser modeladas mediante ecuaciones. Por ejemplo, cuando vas de compras a una tienda, la suma de los costos de los productos que compres debe ser igual al dinero que gastaste en tus compras; o si viertes en un bidón vacío el contenido de varias botellas con 250 ml de agua cada una, el número de ml que contendrá el bidón será igual a  $250x$ , donde  $x$  representa el número de botellas cuyo contenido se vertió en el bidón.

Palabras clave

Incógnita

Ecuación

Balanza

Equilibrio

## ¿Cómo modelar situaciones con ecuaciones?

Un avión dispone de dos habitaciones para transportar las mascotas de los pasajeros. Para no sobrecargar ninguna de ellas y para aportar a que el avión mantenga el equilibrio, se intenta acomodar la misma masa en cada una de las habitaciones.

Para transportar los animales, se dispone de jaulas individuales de 4 kg cada una. En un viaje, se acomodan 3 perros en una habitación y 4 gatos en la otra. Además, en la habitación de los gatos va 1 jaula adicional.

### Situación 1 Representando en una balanza

Si la masa corporal de un gato equivale a la mitad de la masa corporal de un perro, ¿cómo puedes representar esta situación en una balanza?

Para responder, representaremos un perro, un gato y una jaula con los siguientes símbolos:



Perro



Gato



Jaula

**Paso 1** Establece una equivalencia entre la cantidad de perros y gatos.



Perro



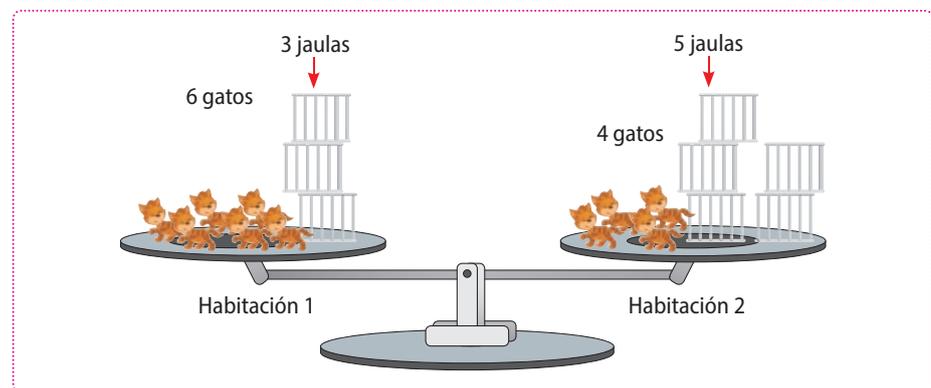
Gato



Gato

¿Qué relación numérica representa esta equivalencia?

**Paso 2** Representa la situación en una balanza, en que cada platillo representa una habitación. La representación es:



¿Por qué hay 6 gatos en vez de 3 perros en el platillo izquierdo?

¿Sabes resolver esta ecuación? ¿Cuál es la masa corporal de un gato?, ¿y de un perro?

Escribe para completar el enunciado:

Si  $x$  representa la masa corporal de \_\_\_\_\_ y se considera el equilibrio de la balanza como condición de igualdad, entonces la expresión matemática que modela la situación descrita por la balanza es:

$$6x + 3 \cdot 4 = 4x + 5 \cdot 4$$

**Situación 2 Representando con una ecuación**

Si un técnico electricista debe cortar un cable de 2,6 metros de largo, obteniendo 3 trozos de la misma medida y un trozo de 20 cm, ¿qué ecuación te permitiría obtener la longitud de uno de los tres trozos iguales?

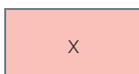
Para responder, primero representaremos con barras la situación y asociaremos a esta representación una ecuación.

**Paso 1** Calcula a cuántos metros equivalen 20 cm.

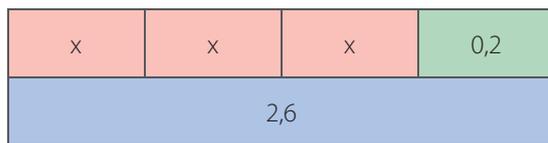
$$20 \text{ cm} = \frac{20}{100} \text{ m} = 0,2 \text{ m}$$

¿Cómo se realizó la transformación de centímetros a metros? ¿Por qué se dividió por 100?

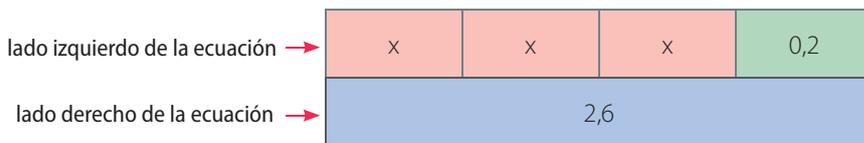
**Paso 2** Llama  $x$  a la incógnita, es decir, a la longitud de cada uno de los tres trozos iguales que se obtendrán del cable y represéntala como sigue.



**Paso 3** Representa la situación usando un diagrama de barras, expresando las medidas en metros.



**Paso 4** Modela la representación usando una ecuación.



Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Ampliando**

Las ecuaciones que se estudian en esta sección son lineales con una incógnita. Esto quiere decir que la única incógnita existente está elevada a un exponente 1. Por ejemplo:

$$2x + 3 = 4$$

$$-0,2x = 3$$

$$\frac{2}{5}x - 3 = 4$$

¿Se te ocurre una representación equivalente a esta?, ¿cuál sería?

¿Sabes resolver esta ecuación? Inténtalo.

¿Cuál sería la ecuación si en lugar de usar metros hubieras usado centímetros como unidad de medida?

**Para concluir**

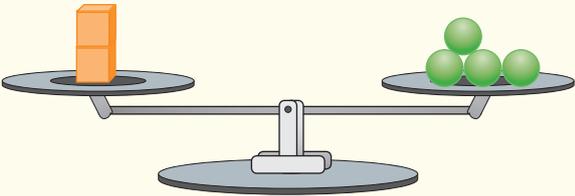
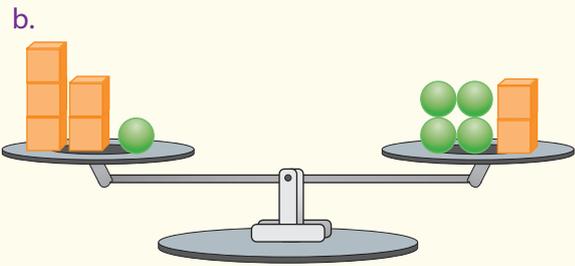
Una **ecuación** representa la igualdad entre dos expresiones algebraicas y permite modelar muchas situaciones cotidianas. En ella debe existir al menos una incógnita o término desconocido, que puede representarse por una letra u otro símbolo. Habitualmente se utilizan las letras  $x$ ,  $y$  o  $z$  para representar la incógnita.

Es posible representar pictóricamente una ecuación usando una balanza equilibrada, en que cada platillo representa uno de los lados de la ecuación; o un diagrama de barras, en que cada barra representa cada uno de los componentes de los lados de la ecuación.

**Argumenta y comunica**

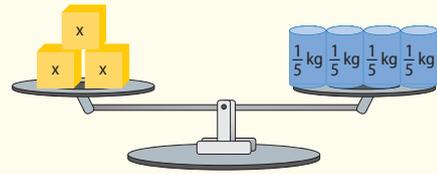
- ¿Puedes representar una ecuación usando la recta numérica?, ¿cómo? Intenta representar la ecuación  $2x + 0,1 = 3$  en la recta numérica y explica tu procedimiento por escrito.
- ¿Podrías representar una ecuación como  $\frac{3}{4}x + 2 = 8$  en una balanza? Si tu respuesta es afirmativa, explica dibujando la representación en tu cuaderno; y si es negativa da argumentos que justifiquen tu respuesta.

Repaso

- Expresa en lenguaje algebraico cada situación.
  - La cantidad de chocolates que quedan, si había 10 e Isabel comió algunos de ellos.
  - Lo que le falta a Sergio para medir lo mismo que su hermano, que mide 1,8 metros.
  - La cantidad de naranjas que hay en 8 cajones, si cada uno contiene la misma cantidad de naranjas.
  - La cuota que debe pagar cada persona de un grupo que salió a almorzar, si la cuenta fue de \$ 19400.
- Crea una situación que pueda representarse por cada expresión algebraica.
  - $0,1p$
  - $\frac{x}{3} + 8$
  - $x - 4,5$
  - $\frac{x+y}{2}$
- Reduce los términos semejantes en cada expresión algebraica.
  - $2,6x + 3y + 8x - 1,2y + 3$
  - $\frac{10}{9}p - 8,4 - \frac{2}{3}p + 7,2$
  - $5(2b - 0,3) + 8(b - 1,7)$
  - $\frac{4}{7} + 5y - \frac{2}{3}x + \frac{3}{4}y$
- Identifica la ecuación representada en cada balanza equilibrada. Considera que cada cubo representa la incógnita y cada bolita, una unidad.
  - 
  - 

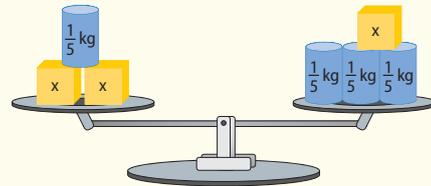
Práctica guiada

- Escribe en lenguaje algebraico la ecuación que está representada en cada balanza.

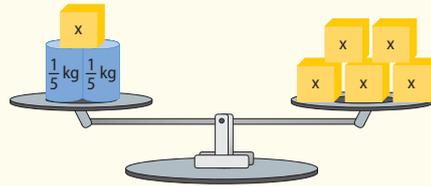


Ecuación:  $x + x + x = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \Leftrightarrow 3x = \frac{4}{5}$

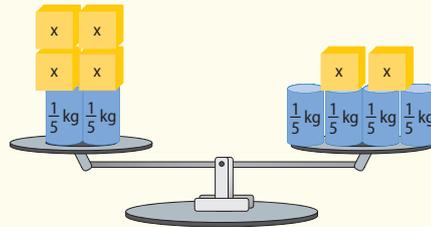
a.



b.



c.



- Representa las ecuaciones utilizando diagrama de barras.

Ecuación:  $4x + 2 = 3,8$

Representación:

x	x	x	x	1	1
3,8					

- $x + 5 = 8$
- $2x = 1,4$
- $9,5 = 3x + 7,5$
- $4,8 + 3x = \frac{15}{4}$
- $4(x + 2,8) = 16$

## 7. Modela cada situación mediante una ecuación.

Si un automóvil recorre diariamente la misma cantidad de kilómetros durante 3 días, le faltarán 900 km para llegar a su destino; y si lo hace durante 4 días, se pasará en 600 km de su destino.

**Ecuación que modela la situación:**

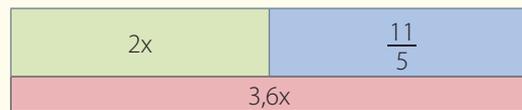
$$3x + 900 = 4x - 600$$

- Un número y su cuarta parte suman 20.
- La tercera parte del número total de páginas que tiene un libro es 280.
- El cuádruple de la masa corporal de Andrea es igual a su doble, aumentado en 86 kg.
- Bastían necesita comprar rollos de cinta de género para hacer adornos. Si compra 5 rollos de cinta le faltarán 12 metros; pero si compra 7 rollos, le sobrarán 2 metros.
- Hace 15 años, la edad de Marco era  $\frac{3}{5}$  de la edad que tendrá dentro de 15 años.
- Tomás compró 2 pizzas del mismo valor y 1 ensalada que costó \$ 4500. En total gastó \$ 23 000.
- En un triángulo, el primer ángulo mide el doble del segundo y el tercero mide  $60,2^\circ$  más que el segundo.
- Fabián ha recorrido  $\frac{1}{6}$  del camino y le quedan por recorrer 200 km.
- Con el dinero que tiene Roberto, puede comprar 8 panes y le sobrarán \$ 720, o bien puede comprar 11 panes y le sobrarán \$ 150.
- Mariana debe leer un libro en cierta cantidad de días. Para ello tiene dos alternativas: leer 25 páginas cada día y dejar 8 para el último día; o bien leer 22 páginas cada día y dejar 13 para el último día.

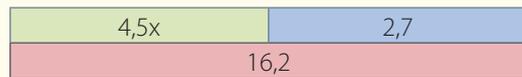
## Aplica

## 8. Determina la ecuación representada en cada diagrama.

a.



b.



- Conecto con el Transporte.** El tiempo que permanece un tren del Metro de Santiago en cada estación es de aproximadamente 30 segundos. Una persona que viaja por la línea 1 demora 22,5 min en recorrer las 15 estaciones que hay entre las estaciones Baquedano y San Pablo. ¿Qué ecuación modela el tiempo que el Metro está en movimiento? Expresa tu respuesta en minutos y comunícala al curso.
- Describe el procedimiento.** En un triángulo isósceles la base mide 5,2 cm y su perímetro es 30 cm. Determina la ecuación que modela la situación explicando el procedimiento que uses mediante pasos, esquemas o dibujos. Compara tu procedimiento con el de un compañero o una compañera y comuniquen sus resultados al curso.
- Descubre el error.** Catalina debía representar en una ecuación “la quinta parte de la suma de un número más 3 es igual a  $\frac{7}{2}$ ” y la escribió como  $\frac{x}{5} + 3 = \frac{7}{2}$ . Descubre el error de Catalina. Coméntalo con tus compañeros o compañeras y expresa de manera correcta la ecuación. Luego, resuélvela.

## Reflexiono

- Al utilizar una balanza o un diagrama de barras, ¿existen limitaciones para representar una ecuación?, ¿cuáles? Piénsalo y discute tu respuesta con tus compañeros o compañeras.
- Una ecuación en la que los coeficientes de todos los términos son positivos, ¿puede tener solución negativa? Si tu respuesta es afirmativa, escribe un ejemplo; y si es negativa, justifica tu respuesta.

## Refuerzo

- Explica cómo representarías la ecuación  $4x + 2 = 5$  mediante una balanza o un diagrama de barras. Dibuja la representación en tu cuaderno.
- Redacta una situación que pueda ser modelada por la ecuación  $\frac{x}{2} + 3 = 4$ .
- Indica la utilidad que tiene el modelar una situación usando una ecuación.

► **Propósito**  
Resolver ecuaciones lineales.

## ¿Para qué?

Tan importante como modelar situaciones de nuestro entorno usando ecuaciones, es el saber resolverlas y obtener y comunicar la solución al problema planteado.

## Palabras clave

Incógnita

Ecuación

Balanza

Solución

¿Qué masa representan las dos bolitas blancas que sacaste de cada platillo?

¿Qué masa representan las bolitas blancas que quedaron en el platillo 2?  
¿Qué masa representa la esfera negra que sacaste de cada platillo?

## Ampliando

Algunas propiedades de las ecuaciones que conservan la igualdad son:

- Sumar **c** o restar **d** a ambos lados:  
 $a = b$

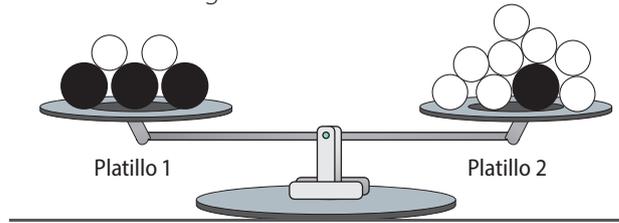
$+c$	$-d$
$a + c = b + c$	$a - d = b - d$

- Multiplicar **c** o dividir por **d** a ambos lados:  
 $a = b$

$\cdot c$	$:d$
$a \cdot c = b \cdot c$	$a : d = b : d$

## ¿Cómo resolver ecuaciones?

Considera la siguiente balanza equilibrada, en que la masa de cada bolita blanca es de 0,25 kg y la de las esferas negras es desconocida:



### Situación 1 Representando en una balanza

#### ¿Cuál es la masa de una de las esferas negras?

Para responder, iremos realizando operaciones en la balanza y modelándolas con una ecuación en que la incógnita  $x$  representa la masa de la esfera negra.

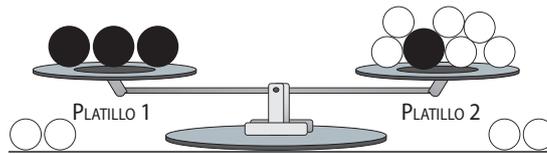
**Paso 1** Determina la masa de las bolitas blancas a ambos lados de la balanza y escribe la ecuación que modela la situación inicial de la balanza.

**Platillo 1**  
2 bolitas blancas  $2 \cdot 0,25 \text{ kg} = 0,5 \text{ kg}$

**Platillo 2**  
8 bolitas blancas  $8 \cdot 0,25 \text{ kg} = 2 \text{ kg}$

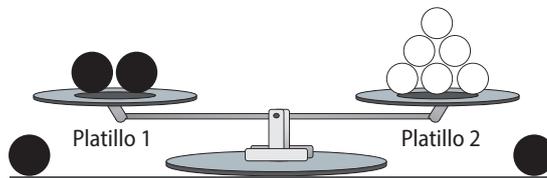
La ecuación es:  $3x + 0,5 = x + 2$

**Paso 2** Saca de cada platillo el mismo número de bolitas blancas, procurando que sea el máximo. En este caso, 2.



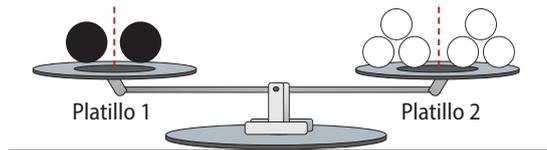
La ecuación queda como: \_\_\_\_\_

**Paso 3** Saca de cada platillo el mismo número de bolitas negras, procurando que sea el máximo. En este caso, 1.



La ecuación queda como: \_\_\_\_\_

**Paso 4** Finalmente, divide en dos partes iguales el contenido de cada platillo.



La ecuación queda como: \_\_\_\_\_

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

## Situación 2 Resolviendo algebraicamente

¿Cuál es el valor de  $x$  que hace cierta la igualdad  $\frac{6}{5}x - 1 = x + \frac{1}{4}$ ?

Para determinar el valor de  $x$  en la ecuación, aplicaremos transformaciones como las que realizamos en la balanza de la situación 1, pero ahora solo escribiremos el desarrollo algebraico.

**Paso 1** Suma 1 en ambos lados de la igualdad. Escribe la operación realizada en el casillero rojo.

$$\frac{6}{5}x - 1 = x + \frac{1}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6}{5}x - 1 + 1 = x + \frac{1}{4} + 1$$

+ 1

$$\frac{6}{5}x = x + \frac{5}{4}$$

¿Cómo calculas el resultado de  $\frac{1}{4} + 1$ ?

**Paso 2** Resta  $x$  de ambos lados de la igualdad.

$$\frac{6}{5}x = x + \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{6}{5}x - x = x - x + \frac{5}{4}$$

$$\frac{1}{5}x = \frac{5}{4}$$

¿Cómo calculas el resultado de  $\frac{6}{5}x - x$ ?

**Paso 3** Multiplica por 5 ambos lados de la igualdad.

$$\frac{1}{5}x = \frac{5}{4} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{5}x \cdot 5 = \frac{5}{4} \cdot 5$$

$$x = \frac{25}{4}$$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

¿Cómo puedes comprobar que este resultado es correcto?

### Ayuda

En el paso 2, restar  $x$  equivale a sumar el inverso aditivo de  $x$ , es decir,  $-x$ . Y en el paso 3, multiplicar por 5 equivale a dividir por el inverso multiplicativo de 5, es decir,  $\frac{1}{5}$ .

### Ayuda

Se dice que dos ecuaciones son equivalentes cuando tienen la misma solución.

### Ampliando

Existen muchos tipos de ecuaciones con una incógnita. Además de las ecuaciones lineales, que se estudian en estas páginas, algunas otras son:

- cuadráticas (orden 2), en que el mayor exponente de la incógnita es 2.
- de tercer orden, en que el mayor exponente de la incógnita es 3.

### ► Para concluir

Para **resolver una ecuación** puede aplicarse una serie ordenada de transformaciones que no altera la igualdad y que permite despejar la incógnita, esto es, aislarla en un lado de la igualdad, obteniendo su valor en el otro lado de ella. Estas transformaciones consisten en: sumar, restar, multiplicar o dividir una misma cantidad a ambos lados de la igualdad.

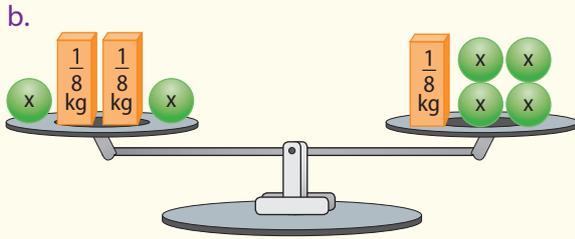
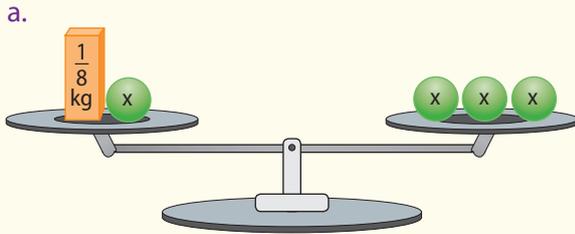
Siempre es importante comprobar que la solución encontrada es la correcta, reemplazando la incógnita por su valor y comprobando que la igualdad se verifica.

### Argumenta y comunica

- Observa los tres pasos de la situación 2 y explica por escrito por qué se aplicó la transformación indicada en los casilleros y no otra. Señala el efecto que provocó cada transformación y qué propiedad está involucrada en cada una de ellas.
- Explica si las transformaciones necesarias para resolver una ecuación deben ser aplicadas siguiendo un orden o, independiente del orden, siempre permiten obtener la solución correcta.
- Comunica a un compañero o a una compañera qué transformaciones aplicarías para resolver la ecuación  $0,5 + 0,2x = -1,2x + 4$ .

Repaso

1. Escribe en lenguaje algebraico la ecuación representada en cada balanza.

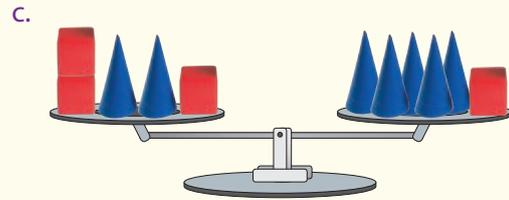
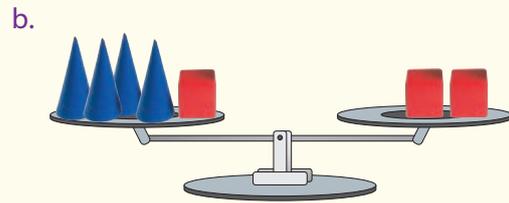
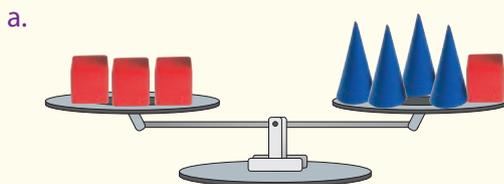
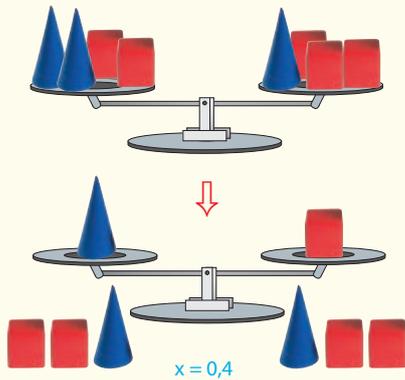


2. Representa cada ecuación usando un diagrama de barras.

- |                               |                            |
|-------------------------------|----------------------------|
| a. $\frac{3}{10}x = 3$        | d. $4z + 1 = \frac{3}{10}$ |
| b. $3q + 0,9 = 11$            | e. $1,5 + 1,5p = 11$       |
| c. $w + 3 = 2w + \frac{1}{2}$ | f. $y + 5 = 3y + 0,8$      |

Práctica guiada

3. Encuentra el valor de la incógnita x según la ecuación representada en la balanza. Considera que la masa de cada figura azul es de 0,4 kg y la de cada figura roja es de x kg.



4. Escribe, en cada caso, las operaciones que se realizaron en cada lado de la igualdad.

$$\begin{aligned} 2x + 3,2 &= 8 & /- 3,2 \\ 2x &= 5,8 & /: 2 \\ x &= 2,9 \end{aligned}$$

a.  $2x - \frac{3}{7} = 5$  / \_\_\_\_\_

$2x = \frac{38}{7}$  / \_\_\_\_\_

$x = \frac{19}{7}$

b.  $\frac{x}{4} + 7 = 18$  / \_\_\_\_\_

$\frac{x}{4} = 11$  / \_\_\_\_\_

$x = 44$

c.  $2(y - 0,1) - 3(3 - y) = 0$

$2y - 0,2 - 9 + 3y = 0$

$5y - 9,2 = 0$  / \_\_\_\_\_

$5y = 9,2$  / \_\_\_\_\_

$y = 1,84$

d.  $6z - 7 = 2(z - 5) + 9z + 4$

$6z - 7 = 2z - 10 + 9z + 4$

$6z - 7 = 11z - 6$  / \_\_\_\_\_

$6z - 1 = 11z$  / \_\_\_\_\_

$-1 = 5z$  / \_\_\_\_\_

$-0,2 = z$

5. Resuelve cada ecuación e indica las transformaciones aplicadas para determinar su solución.

$$\begin{array}{ll} 6m - 18 = 3m - 21 & /- 3m \\ 6m - 18 = -21 & /+ 18 \\ 3m = -3 & /: 3 \\ m = -1 & \end{array}$$

- a.  $7p = \frac{32}{9} - p$
- b.  $1,2x - 3(x + 8) = -5,1$
- c.  $3x - \frac{9}{8} = x + \frac{1}{4}$
- d.  $2(x + 4,3) = 3(x - 2,5)$
6. Escribe sobre la línea la letra mayúscula que permite asociar cada ecuación con su solución.

- a.  $2x - 9 = 5$           B          **A. 4,68**
- b.  $2x - 3 = \frac{11}{2}$                 **B. 7**
- c.  $12 - 6x + 4,8x = 0$                 **C.  $\frac{17}{4}$**
- d.  $6x - 2,3 = -14 + 8,5x$                 **D. 10**
- e.  $\frac{2}{3}x + 5(x - 3) = \frac{x+1}{2}$                 **E. -6**
- f.  $-\frac{2}{3}x + 1 = 4 - \frac{1}{6}x$                 **F. 3**

### Aplica

7. Resuelve los problemas. En cada caso, escribe la ecuación e indica qué representa la incógnita.
- a. El precio de un libro (IVA incluido) es de \$ 16 000. El IVA es un impuesto que corresponde al 19% del precio. ¿Cuál es el precio del libro sin IVA, aproximadamente?
- b. Daniela sigue una dieta que en un mes le ha hecho perder el 1% de su masa corporal. Si ahora su masa es de 54 kg, ¿cuál era su masa corporal antes de la dieta?

### Reflexiono

1. Resuelve la ecuación:

$$x + \frac{1}{2} + \frac{3}{4} + 3x = 7x + \frac{5}{4} - 3x$$

¿Con qué dificultades te encuentras? Descríbelas en tu cuaderno.

2. Con respecto a la pregunta anterior, si compruebas que  $x = 3$ ,  $x = 10$  y  $x = 0$  son soluciones de la ecuación, ¿qué conclusiones puedes obtener? Piénsalo y comunica tu respuesta a tu profesor o profesora.

- c. En un colegio de 1600 alumnos se sabe que 3 de cada 5 estudiantes tienen un celular. ¿Cuántos estudiantes no tienen celular?
- d. La medida del ancho de un sitio rectangular es igual a la medida de su largo disminuido en sus  $\frac{2}{5}$  partes. Para cercar el terreno se necesitan 160 m de alambre. ¿Cuál es la medida del largo y del ancho del sitio?
- e. Laura juntó agua de lluvia en un frasco. Con la primera lluvia llenó la mitad del frasco; con la segunda lluvia el nivel de agua subió un cuarto más; con la tercera lluvia subió un sexto más; y con la cuarta completó los 3 mm que faltaban para llenar el frasco.
- ¿Qué ecuación representa la situación? Considera que  $x$  representa la altura del frasco.
  - ¿Cuántos milímetros de agua recolectó en cada lluvia?

8. **Conecta con las Telecomunicaciones.** Una compañía telefónica tiene el siguiente plan para cobrar las llamadas realizadas durante el mes: el cobro base para la prestación de servicios es de \$ 12 000, el que incluye 100 minutos sin costos. Por cada minuto que sobrepasa el límite, se cobran \$ 85 adicionales. Si en la cuenta mensual de una familia salió un monto total a pagar de \$ 14 975, entonces:
- ¿Qué ecuación permite calcular los minutos extra hablados?
  - ¿En cuántos minutos sobrepasaron el límite de minutos del plan?
9. **Argumenta.** Cuando Ana resolvió una ecuación llegó al resultado  $-x = 3$ . Ella dijo entonces que la solución es  $x = -3$ . ¿Es correcta la afirmación de Ana? ¿Qué operación realizó para obtener la solución? Justifica y comunica tu respuesta.

### Refuerzo

1. Dibuja en tu cuaderno cómo representarías la solución de la ecuación  $2x + 0,25 = 1,25$  en una balanza.
2. Escribe la transformación que se puede hacer a la ecuación  $3x + 8 = 17$  para obtener la ecuación equivalente,  $3x = 9$ .
3. Escribe el coeficiente que hay que agregar en el lado derecho de la igualdad  $3x + 140 = x + 120$ , para que su solución sea  $x = 20$ .

► Propósito

Modelar situaciones usando inecuaciones lineales.

¿Para qué?

Situaciones como exceder el número de minutos de un plan de telefonía móvil, sobrepasar la carga máxima que puede transportar un vehículo o, en el caso de una ciudad, presentar un déficit de precipitaciones, pueden modelarse usando inecuaciones.

Palabras clave

- Incógnita
- Inecuación
- Recta numérica
- Balanza
- Desequilibrio
- Desigualdad

¿Por qué debes dibujar 12 intervalos? ¿Qué representa cada intervalo?

## ¿Cómo modelar situaciones con inecuaciones?

Una tejedora chilota puso un negocio de chalecos de lana en el terminal de Ancud y el primer mes de marcha blanca pondrá a la venta 12 chalecos. Ella debe pagar \$ 140 000 mensualmente por el arriendo del puesto de venta y el costo por fabricar cada chaleco es de \$ 7000.



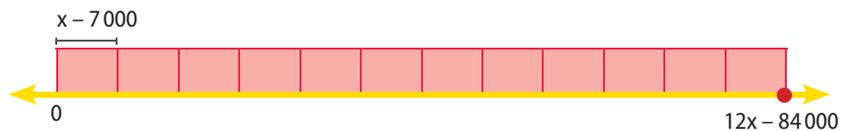
### Situación 1 Representando en la recta numérica

¿Cómo puedes modelar la condición que asegura que la tejedora obtendrá una ganancia económica a partir de sus ventas?

Para responder, primero representaremos la situación en la recta numérica.

**Paso 1** Representa por  $x$  la ganancia en pesos obtenida por la venta de cada chaleco. Entonces, la ganancia por cada chaleco se puede representar por  $(x - 7000)$ .

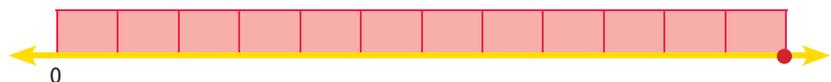
**Paso 2** Dibuja una recta numérica y define, partiendo del origen, 12 intervalos de longitud  $(x - 7000)$ . Como no se conoce el valor de  $x$ , dibuja los intervalos del tamaño que quieras.



La posición indicada por el intervalo que está más a la derecha (punto rojo) señala el dinero obtenido por la venta de los 12 chalecos, esto es:

$$12(x - 7000) = 12x - 84000$$

**Paso 3** Ubica el costo del arriendo del puesto de venta en la recta numérica. Como el dinero obtenido por la venta de los 12 chalecos debe ser mayor que el costo del arriendo, este último debe ubicarse a la izquierda del primero.



Ubica tú el 140 000 en cualquier punto ubicado entre las posiciones del 0 y del punto rojo.

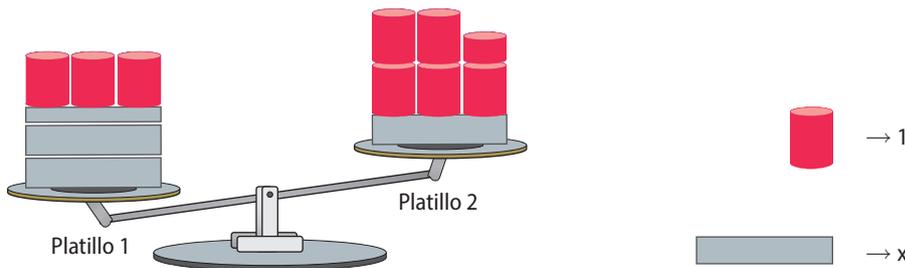
Considerando lo anterior, la respuesta a la pregunta es:

**R:** La condición que asegura que la tejedora obtendrá una ganancia económica a partir de sus ventas es  $12x - 84000 > 140000$ .

¿Cómo interpretarías la condición  $12x - 84000 = 140000$ ?

**Situación 2** Representando en una balanza

¿Qué inecuación representa la situación ilustrada en la balanza?



Para obtener la inecuación escribiremos cada uno de los lados de la inecuación y luego el sentido del signo de desigualdad.

**Paso 1** Determina el lado izquierdo de la inecuación.

Hay dos y medio bloques grises :  $2,5x$   
Hay tres cilindros rojos: 3

Escribe tú el lado izquierdo de la inecuación: \_\_\_\_\_

**Paso 2** Determina el lado derecho de la inecuación.

Hay un bloque gris :  $x$   
Hay cinco y medio cilindros rojos: 5,5

Escribe tú el lado derecho de la inecuación: \_\_\_\_\_

**Paso 3** Define el sentido del signo de desigualdad. En este caso, como la balanza está inclinada hacia el platillo 1 (lado izquierdo), el signo es:

>

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Ampliando**

Los signos de desigualdad son:

- < : menor que
- > : mayor que
- ≤ : menor o igual que
- ≥ : mayor o igual que

¿Qué ocurriría si sacaras un cilindro rojo de cada platillo? ¿Se mantendría la inclinación de la balanza?, ¿por qué? ¿Y si agregaras un cilindro a cada platillo, qué ocurriría?

¿Por qué el signo > indica que la balanza está inclinada hacia el platillo 1?

¿Cuál sería la respuesta si la balanza estuviera equilibrada?

**Para concluir**

Una **inecuación** representa una desigualdad entre dos expresiones algebraicas y permite modelar muchas situaciones cotidianas. En ella debe existir al menos una incógnita que, igual que para las ecuaciones, suele representarse por las letras  $x$ ,  $y$  o  $z$ .

Es posible representar pictóricamente una inecuación en la recta numérica o usando una balanza no equilibrada, inclinada hacia el platillo que representa la cantidad mayor.

**Argumenta y comunica**

- Además de los signos de desigualdad ya señalados en la lección, en matemática se usan los signos  $\gg$  y  $\ll$ . Investiga qué significa cada uno y comunica a tu curso lo que averigües.
- Observa la balanza que está en la parte superior de esta página. ¿Qué ocurre si quitas dos cilindros rojos y el bloque gris del platillo 2? ¿Cambia la inclinación de la balanza? ¿Puedes saberlo? Discute con tus compañeros y compañeras y usa argumentos matemáticos para justificar tus respuestas.

Repaso

- Dibuja una recta numérica y ubica los números. Señala las posiciones usando las letras correspondientes.
  - 10
  - 7,6
  - 3,9
  - 8
  - 4
  - $\frac{11}{2}$
  - 4
  - $\frac{1}{4}$
  - 1
- Compara cada par de números. Utiliza los símbolos  $<$  o  $>$ .
  - 3,21 \_\_\_\_\_ 2,5
  - $\frac{5}{2}$  \_\_\_\_\_ 2
  - 1,34 \_\_\_\_\_ -1,43
  - $\frac{4}{3}$  \_\_\_\_\_ 1,5
- Determina en cada caso una fracción y un número decimal distinto, que en la recta numérica se ubiquen entre:
  - 8 y -5
  - 3 y 7
  - 6 y -4
  - 4,56 y -0,21
- Representa las expresiones usando lenguaje algebraico.
  - La diferencia entre el triple de un número y su cuarta parte.
  - La semisuma entre el sucesor de un número y -1.
  - La suma de dos números enteros consecutivos.

Práctica guiada

- Identifica, en cada caso, el símbolo que corresponde a cada situación, respetando el orden de lectura, y destácalo.
 

El sueldo mensual de Ximena es superior a \$ 300 000.

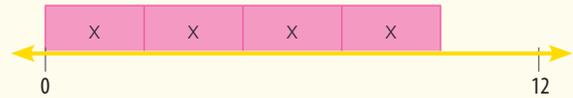
$<$   **$>$**   $=$   $\geq$   $\leq$

  - Sergio trabaja al menos 40 horas a la semana.  
 $<$   $>$   $=$   $\geq$   $\leq$
  - Rosa salta a lo más 3,2 metros.  
 $<$   $>$   $=$   $\geq$   $\leq$
  - Las vacaciones deben durar al menos 15 días.  
 $<$   $>$   $=$   $\geq$   $\leq$
  - El precio del euro no superará los \$ 620.  
 $<$   $>$   $=$   $\geq$   $\leq$
  - La nota de aprobación debe ser superior a 4,0.  
 $<$   $>$   $=$   $\geq$   $\leq$

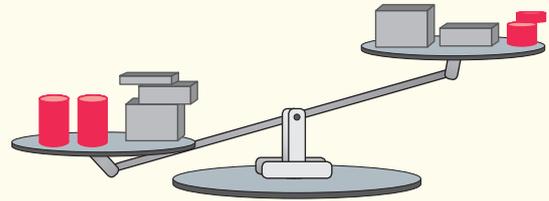
- Representa las situaciones en la recta numérica.

El cuádruplo de un número positivo es menor que 12.

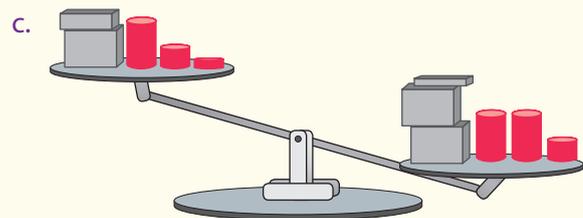
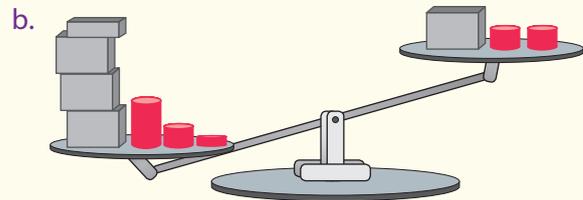
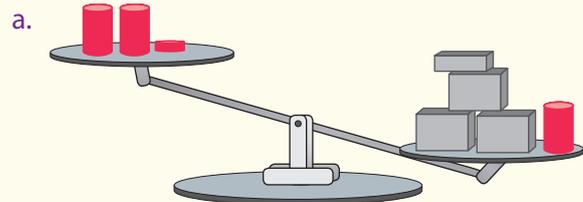
$$4x < 12$$



- El triple de un número positivo es mayor que 2.
  - El doble de un número positivo más 8 es menor que 42.
- Escribe simbólicamente o en lenguaje algebraico la inecuación representada en la balanza. Considera en cada caso que el bloque grande es la incógnita y el cilindro grande la unidad. Además, considera que se representan mitades y cuartas partes del bloque y del cilindro.



Inecuación:  $1,75x + 2 > 1,5x + 0,75$



8. Modela cada situación con una inecuación que permita contestar la pregunta. Define las incógnitas con diferentes símbolos.

Una fábrica de tazones obtiene una ganancia de \$ 400 por cada tazón que vende. ¿Cuántos tazones debe vender para que la ganancia sea de, al menos, \$ 50 000?

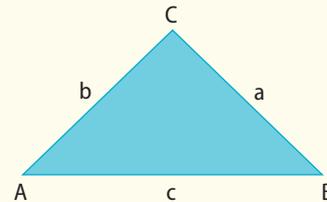
$x$ : cantidad de tazones

$$400x \geq 50\,000$$

- Ester gana \$ 7500 por hora de trabajo. ¿Cuántas horas debe trabajar para ganar más de \$ 200 000?
- Para poder usar la piscina municipal se debe pagar una cuota mensual de \$ 8000 y luego \$ 600 por cada vez que se utiliza. ¿Cuántas veces puede ir Cristina a la piscina si no quiere gastar más de \$ 12 000 mensuales?
- Juan gana \$ 120 000 al mes, más \$ 5000 de comisión por cada televisor que vende. ¿Cuántos televisores debe vender para ganar más de \$ 200 000?
- Macarena tiene \$ 5000, con los que debe comprar 4 jugos naturales y una barra de cereales que cuesta \$ 900. ¿Cuál debe ser el precio máximo de cada jugo?
- La velocidad máxima permitida en una carretera es de 120 km/h. Si un vehículo corre a 133 km/h, ¿en cuántos km/h como mínimo debe disminuir su velocidad para no superar la velocidad máxima permitida?
- En el boxeo, los deportistas se clasifican en categorías según su masa corporal. La categoría pluma tiene como límite los 57 kg. Si Tomás posee una masa de 60 kg, ¿cuántos kilogramos debe bajar, por lo menos, para poder competir en esa categoría?

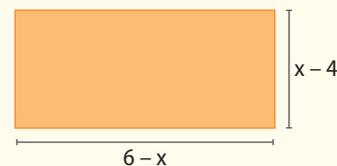
### Aplica

9. Para la construcción de un triángulo cualquiera, se debe cumplir que la suma de las longitudes de dos de sus lados debe ser mayor que la longitud del tercer lado. A esta restricción se le conoce como desigualdad triangular.



A partir de la información de la figura, ¿cuáles son las desigualdades que se deducen de la restricción descrita?

10. **Conecto con la Informática.** El pendrive es un dispositivo portátil de almacenamiento de información. Su capacidad varía según el modelo que se encuentre en el mercado. Una persona tiene un pendrive cuya capacidad es de 32 GB (gigabyte) y tiene ocupada la cuarta parte de él. Escribe la inecuación que permite responder la pregunta, ¿cuál es el tamaño máximo en GB que puede tener el próximo archivo que se guarde en el pendrive?
11. **Argumenta.** Considera el rectángulo de la figura. ¿Qué condición debe cumplir  $x$  para que la medida de sus lados sea posible? Discútelo con una compañera o compañero y justifica tu respuesta.



### Reflexiono

- Considera la inecuación  $10x - 3 > 12x - 1$ . ¿Podrías representarla usando una balanza? Piénsalo y comenta tu respuesta con tus compañeros y compañeras.
- Y si ahora consideras  $2 < x + 1 < 5$ , ¿podrías representar esta expresión en una balanza? Piénsalo y justifica tu respuesta.

### Refuerzo

- Explica paso a paso cómo representarías en la recta numérica una inecuación. Para ello, ejemplifica con  $2500 + x > 4000$ .
- Inventa 3 ejemplos de situaciones reales que se puedan modelar mediante una inecuación.
- Señala por escrito las diferencias que hay entre una ecuación y una inecuación.

► **Propósito**  
Representar inecuaciones lineales.

¿Para qué?

Expresar y representar correctamente la solución de una inecuación permite visualizar sus alcances y consecuencias y facilita la elaboración de conclusiones acerca de la situación modelada.

**Palabras clave**

Inecuación

Desigualdad

Recta numérica

Conjunto solución

Intervalo solución

¿Por qué ahora sí se incluye el punto extremo?

¿Cuál de los cuatro intervalos definidos en las situaciones 1 y 2 contiene más números? ¿Estás seguro?, ¿cómo lo sabes?

**Ampliando**

Una desigualdad es estricta cuando se define por los signos  $<$  o  $>$ . Y es no estricta cuando se define por los signos  $\leq$  o  $\geq$ .

¿Cómo interpretas verbalmente y gráficamente los conceptos de estricto y no estricto en esta definición?

## ¿Cómo representar la solución de una inecuación?

Al resolver una inecuación lineal, la solución puede expresarse indicando que la incógnita es mayor, menor, mayor o igual que o menor o igual que un número.

### Situación 1 Representando inecuaciones estrictas en la recta numérica

¿Cómo puedes representar las inecuaciones  $x < 1,2$  e  $y > -2$ ?

**Paso 1** Ubica los números 1,2 y  $-2$  en la recta numérica.

**Paso 2** Dibuja flechas desde las posiciones definidas en el paso 1 (excluyendo los puntos), apuntando en los sentidos que te indiquen los signos de desigualdad.



### Situación 2 Representando inecuaciones no estrictas en la recta numérica

¿Cómo puedes representar las inecuaciones  $x \leq -0,8$  e  $y \geq \frac{3}{5}$ ?

**Paso 1** Ubica los números  $-0,8$  y  $\frac{3}{5}$  en la recta numérica.

**Paso 2** Dibuja flechas desde las posiciones definidas en el paso 1 (incluyendo los puntos), apuntando en los sentidos que te indiquen los signos de desigualdad.



### Situación 3 Representando inecuaciones en la recta numérica

¿Qué inecuación se representa en la recta numérica?



**Paso 1** Determina si el intervalo incluye o no el punto  $-2,5$ . En este caso, no lo incluye.

**Paso 2** Determina si el intervalo incluye los valores menores o mayores que  $-2,5$ . Como incluye números como  $-2$ ,  $-1$  y  $0$ , que son mayores que  $-2,5$ , el intervalo incluye números mayores que  $-2,5$ .

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

► **Para concluir**

La **solución de una inecuación** no es un valor único, sino que es un conjunto de valores y se puede representar como un intervalo en la recta numérica. Este intervalo excluirá su valor extremo si la desigualdad es estricta ( $<$  o  $>$ ) y lo incluirá si la desigualdad no es estricta ( $\leq$  o  $\geq$ ).

**Argumenta y comunica**

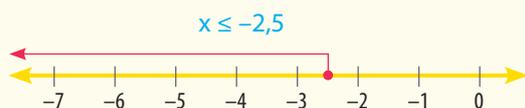
- ¿Existe alguna diferencia entre las desigualdades  $x < 4$  y  $4 > x$ ? ¿Cuál o cuáles? Si existen, enuméralas en tu cuaderno.
- ¿Hay alguna diferencia entre las inecuaciones  $x < 4$  y  $x \leq 4$ ? Justifica tu respuesta.

Repaso

- Resuelve las ecuaciones.
  - $3x + 8 = 20$
  - $0,5 + 2y = -6$
  - $p + 1 = 4p - 0,9$
  - $0,1z - 0,2 = 0,2z - 1$
- Sin contestar la pregunta, modela cada situación usando una inecuación.
  - Camila tiene 10 años menos que Pablo. Si las edades de ambos suman menos de 74 años, ¿cuál puede ser la edad máxima de Camila de manera que se cumpla la condición?
  - Gerardo cobra \$ 10 000 por transportar en su camión cargas que no sean superiores a los 250 kg. Marcelo le pidió llevar 6 sacos de cemento y 5 sacos de clavos de 1,5 kg cada uno, y le pagó \$ 10 000. ¿Cuál es la masa máxima de un saco de cemento?

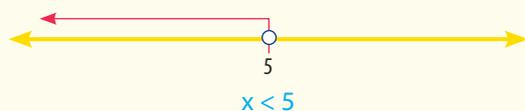
Práctica guiada

- Representa cada inecuación en la recta numérica.

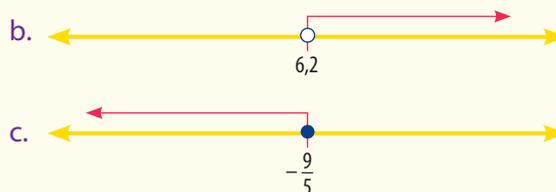


- a.  $x > 0,8$       b.  $s \leq \frac{7}{2}$       c.  $t > -3,4$

- Identifica la inecuación que se representa en la recta numérica.



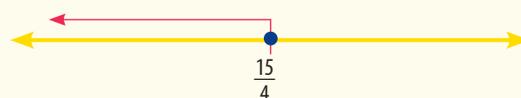
- a.



Aplica

- Representa en la recta numérica el intervalo de valores definido en cada situación.
  - El costo del litro de gasolina será de al menos \$ 750.
  - Tras resolver una inecuación, Eva la comunicó a su curso: "la incógnita es menor o igual que  $-7,9$ ".
  - Si las predicciones demográficas son correctas, para el año 2050 la población humana superará los 9 000 000 000 de habitantes.
- Investiga. El espectro auditivo es el rango de todas las frecuencias que el oído humano puede percibir. Este rango incluye las frecuencias entre los 20 Hz y los 20 000 Hz (en que Hz representa la unidad de frecuencia Hertz). Investiga en internet sobre este tema y averigua el nombre que llevan las frecuencias menores a 20 Hz y las mayores a 20 000 Hz. ¿Cómo escribirías esta desigualdad? Comunica el resultado de tu trabajo al curso.

- Argumenta. Observa la solución gráfica de una inecuación.



Josefina dice que se representan tres números: 3, 2 y 1. Vicente, por su parte, dice que representa una cantidad infinita de números.

¿Quién tiene la razón? Justifica tu respuesta y comparte tus argumentos con un compañero o una compañera.

Reflexiono

- Considera la desigualdad  $-5 < x \leq 8$ . ¿Qué intervalo representa? ¿Cómo lo podrías representar? Piénsalo y determina cuatro números que pertenezcan al intervalo.
- ¿Qué condiciones de desigualdad se representarían por el conjunto vacío en la recta numérica? Propón dos condiciones que sean incompatibles entre sí, es decir, que si un número  $x$  pertenece a uno de los intervalos definidos, entonces no puede pertenecer al otro, y viceversa.

Refuerzo

- Señala la diferencia gráfica que hay entre los símbolos  $>$ ,  $<$ ,  $\geq$  y  $\leq$  cuando se representan las soluciones de una inecuación en la recta numérica.
- Describe paso a paso cómo representarías en la recta numérica la desigualdad  $x \leq -6,5$ .
- Representa en una misma recta numérica las soluciones de  $x \geq \frac{9}{2}$ ,  $y < -6,1$  y  $z > 1,3$ .

# Contaminación del aire en Chile

## Un problema nacional

Datos de la Organización Mundial de la Salud (OMS) señalan que aproximadamente la mitad de la población mundial convive diariamente con una contaminación 2,5 veces mayor que la máxima aceptable para tener una buena salud.

En el caso de Chile, se indica que la ciudad de Santiago ya no es la más contaminada sino que otras ciudades lideran la mala calidad del aire en el país, tales como Rancagua, Chillán, Temuco, Talca, Calama, Copiapó y San Pedro de la Paz, ya que poseen una mayor concentración de material particulado fino (MP 2,5).

Las principales emisiones que originan la acumulación de material particulado en el aire son:

Emisiones industriales  
y domiciliarias

Emisiones de automóviles,  
buses, etc.

Incendios forestales



**Sabías que...**

El año 2005 se declaró zona saturada por material particulado respirable (MP10), a las comunas de Temuco y Padre Las Casas (Región de La Araucanía). El 94% de las emisiones de estas comunas provienen del uso de parafina y de la combustión de leña en los meses de invierno.

**¡NO LO OLVIDES!**

MP 2,5 son partículas de diámetro inferior o igual a los 2,5 micrómetros. Su pequeño tamaño hace que sean muy dañinas ya que ingresan directamente al aparato respiratorio, evadiendo los filtros que posee el organismo.

MP 10 son partículas sólidas o líquidas, como polvo, cenizas, hollín, metales, cemento o polen, suspendidas en la atmósfera, cuyo diámetro es inferior a los 10 micrómetros. Incluyen las dañinas MP 2,5.

**Índice de calidad del aire para material particulado en la Región de La Araucanía.**

Calidad	Índice
Bueno	menor a 50 ICAP
Regular	50 a 79 ICAP
Alerta	80 a 109 ICAP
Preemergencia	110 a 169 ICAP
Emergencia	170 o superior ICAP

Fuente: <http://www.mma.gob.cl/>

**Actividad grupal**

Reúnanse en grupos de 3 o 4 integrantes para realizar las actividades. Luego, comuniquen sus respuestas al curso.

1. Observen la tabla que contiene información sobre el índice de calidad del aire en la región de la Araucanía.
  - Investiguen acerca del índice ICAP. Indiquen su significado y su unidad de medida.
  - Escriban los valores de la tabla como desigualdades y represéntenlos en la recta numérica.
  - Si cierto día la ciudad de Temuco presenta un índice de 140 ICAP, ¿en qué categoría de calidad de aire se encuentra? Ubiquen este valor en la representación que realizaron anteriormente.
2. Investiguen sobre los efectos que provocan los altos índices de material particulado en la salud de las personas. Hagan un listado y comuniquen sus conclusiones al curso.
3. Averigüen sobre las medidas que implementó en el pasado la Comisión Nacional del Medio Ambiente (Conama) y actualmente el Ministerio del Medio Ambiente para mejorar la calidad del aire de las ciudades de Chile. Estas acciones, ¿han aportado a la disminución de los niveles de material particulado en las ciudades más afectadas? ¿Ustedes han tomado conciencia de este problema? ¿Qué acciones tomarían para disminuir la contaminación en su ciudad?

► **Propósito**  
Resolver inecuaciones lineales.

### ¿Para qué?

Tras modelar situaciones de nuestro entorno usando inecuaciones, el resolverlas y obtener el intervalo solución te permitirá responder a interrogantes, comprender de mejor manera el fenómeno modelado y hacer predicciones respecto de él.

### Palabras clave

Inecuación

Recta numérica

Balanza

Desequilibrio

Intervalo solución

### Ayuda

Al sacar de cada platillo objetos del mismo valor, te aseguras de mantener el sentido original del desequilibrio.

### Ampliando

Algunas propiedades de las desigualdades que mantienen el sentido de su signo son:

- Sumar un número  $c$  o restar un número  $d$  a ambos lados:  
 $a < b$

$+c$	$-d$
$a + c < b + c$	$a - d < b - d$

- Multiplicar por un número positivo  $c$  o dividir por un número positivo  $d$  a ambos lados:  
 $a > b$

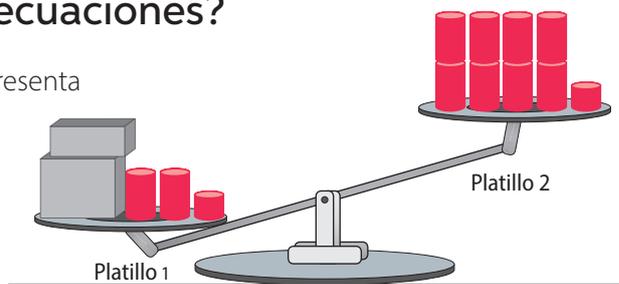
$\cdot c$	$:d$
$a \cdot c > b \cdot c$	$a : d > b : d$

¿Cuántos cilindros tendrías que poner sobre el platillo 2 para equilibrar la balanza?, ¿cómo lo sabes?

## ¿Cómo resolver inecuaciones?

En la siguiente balanza se representa la inecuación  $1,5x + 2,5 > 8,5$ .

En ella, un bloque gris representa la incógnita y un cilindro rojo representa una unidad.

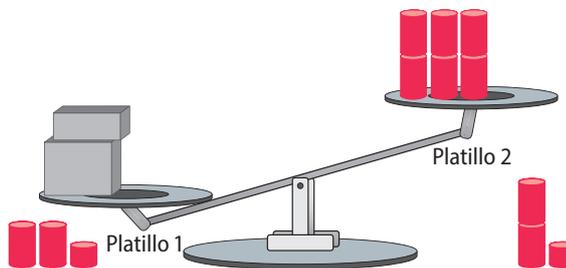


### Situación 1 Representando en una balanza

#### ¿Cuál es la solución de la inecuación representada en la balanza?

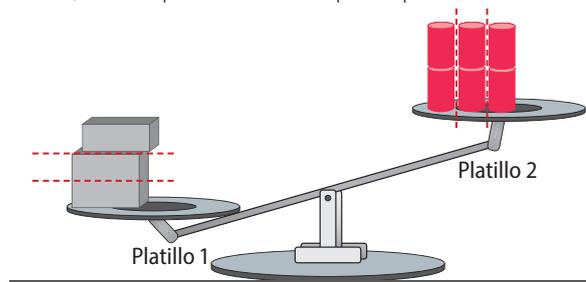
Para responder, debemos aislar la incógnita a uno de los lados de la inecuación y determinar su intervalo solución. Al costado de la balanza escribiremos las transformaciones que va sufriendo la inecuación.

**Paso 1** Saca de cada platillo 2 cilindros y medio.

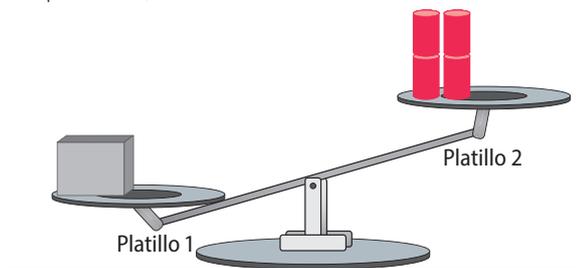


La inecuación queda como:  
\_\_\_\_\_

**Paso 2** Divide mentalmente lo que hay en cada platillo en tres partes iguales. Al hacerlo, verás que medio bloque equivale a dos cilindros.



**Paso 3** Elimina medio bloque del platillo 1 y dos cilindros del platillo 2. Lee lo que observas en la balanza. Como has dejado un único bloque en el platillo 1, esta es la solución de la inecuación representada.



La inecuación queda como:  
\_\_\_\_\_

Por lo tanto:

**R:** La solución de la inecuación es  $x > 4$ .

### Situación 2 Multiplicando desigualdades en la recta numérica

¿Qué ocurre con el sentido de la desigualdad  $-4 < -2$  al multiplicarla por  $-1$ ?

**Paso 1** Representa en la recta numérica el  $-4$  como una flecha de 4 unidades de longitud apuntando hacia la izquierda y el  $-2$  como una flecha de 2 unidades de longitud apuntando también hacia la izquierda.



La desigualdad es:  $-4 < -2$

**Paso 2** Multiplica los números involucrados en la desigualdad por  $-1$ .

$$-4 \cdot -1 = 4 \quad -2 \cdot -1 = 2$$

**Paso 3** Representa en la recta numérica el 4 como una flecha de longitud 4 apuntando hacia la derecha y el 2 como una flecha de longitud 2 apuntando también hacia la derecha.



La desigualdad queda como:  $4 > 2$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

Escribe para completar el enunciado:

Si divido cada término de la desigualdad  $-4 < -2$  por  $-2$  obtengo \_\_\_\_\_ en el lado izquierdo y \_\_\_\_\_ en el lado derecho, por lo tanto, el sentido de la desigualdad se invierte, quedando la desigualdad como  $2 > 1$ .

Escribe para completar el enunciado:

Al multiplicar o dividir una desigualdad por un número \_\_\_\_\_ se invierte el sentido de su signo.

#### Ayuda

Recuerda la regla de los signos para la multiplicación de números enteros, decimales y fraccionarios:

$$\begin{array}{l} + \cdot + \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right. \\ - \cdot - \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right. \end{array} \quad \begin{array}{l} + \cdot - \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right. \\ - \cdot + \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} + \\ - \end{array} \right.$$

### Situación 3 Resolviendo algebraicamente una inecuación

¿Cuál es la solución de la inecuación  $\frac{1}{2}x - \frac{2}{5} \leq -0,3$ ?

Para resolver la inecuación aplicaremos transformaciones similares a las que se ocuparon para resolver ecuaciones. Antes, transformaremos el número decimal en fracción, para trabajar solo con fracciones. Como  $-0,3$  equivale a  $-\frac{3}{10}$ , la inecuación se puede reescribir como  $\frac{1}{2}x - \frac{2}{5} \leq -\frac{3}{10}$ .

**Paso 1** Suma  $\frac{2}{5}$  en ambos lados de la inecuación. Escribe la operación realizada en el casillero rojo.

$$\frac{1}{2}x - \frac{2}{5} \leq -\frac{3}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x - \frac{2}{5} + \frac{2}{5} \leq -\frac{3}{10} + \frac{2}{5}$$

$$\frac{1}{2}x \leq \frac{1}{10}$$

¿Qué inecuación obtendrías si multiplicaras por 10 ambos lados de la inecuación? ¿Su solución sería la misma?

¿Cómo desarrollas la adición  $-\frac{3}{10} + \frac{2}{5}$ ?

¿Cómo desarrollas la multiplicación  $\frac{1}{10} \cdot 2$ ?

**Paso 2** Multiplica por 2 ambos lados de la inecuación.

$$\frac{1}{2}x \leq \frac{1}{10} \Leftrightarrow \frac{1}{2}x \cdot 2 \leq \frac{1}{10} \cdot 2$$

$$x \leq \frac{1}{5}$$



Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Situación 4** Representando la solución de una inecuación

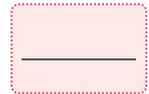
¿Cuál es la representación de la solución de  $-0,1x - 2,7 \geq 4,5$ ?

Primero resolveremos la inecuación aplicando transformaciones y luego representaremos su solución en la recta numérica.

**Paso 1** Suma 2,7 en ambos lados de la inecuación. Escribe la operación realizada en el casillero rojo.

$$-0,1x - 2,7 \geq 4,5 \Leftrightarrow -0,1x - 2,7 + 2,7 \geq 4,5 + 2,7$$

$$-0,1x \geq 7,2$$

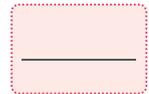


¿Por qué se invierte el sentido del signo de la inecuación?

**Paso 2** Divide por  $-0,1$  ambos lados de la inecuación. Recuerda que, en este caso, debes invertir el sentido del signo de la inecuación.

$$-0,1x \geq 7,2 \Leftrightarrow -0,1x : (-0,1) \leq 7,2 : (-0,1)$$

$$x \leq -72$$



¿Cómo desarrollas la división  $7,2 : (-0,1)$ ?

**Paso 3** Dibuja en una recta numérica el punto  $-72$  y dibuja el intervalo de los números menores que  $-72$ , incluyéndolo, ya que se trata de una inecuación no estricta.



**Para concluir**

Para **resolver una inecuación** puede aplicarse una serie de transformaciones que no alteran la inecuación y que permiten despejar la incógnita. Estas transformaciones son similares a las aplicadas en la resolución de ecuaciones, excepto cuando se multiplica o divide por un número negativo, ya que en este caso se debe invertir el sentido del signo de la desigualdad. La solución de una inecuación consiste en un intervalo de números que puede representarse en la recta numérica mediante una flecha.

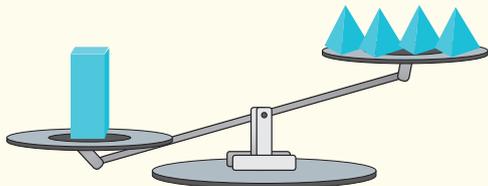
**Argumenta y comunica**

- ¿Causa el mismo efecto multiplicar ambos lados de una inecuación por 0,1 que dividirlos por 10?, ¿por qué? Explica y ejemplifica en tu cuaderno.
- Para resolver la inecuación  $2x + 3 > 7$ , se resta 3 y luego se divide por 2. ¿Es equivalente esto a sumar el opuesto aditivo de 3 y multiplicar por el inverso multiplicativo de 2? Justifica tu respuesta.

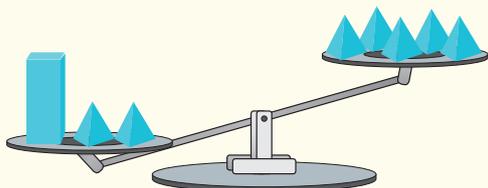
Repaso

1. Escribe la inecuación representada en la balanza. Considera que cada prisma representa la incógnita y que cada pirámide representa una unidad.

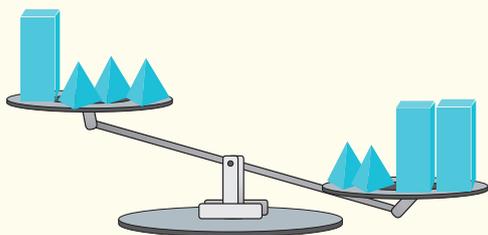
a.



b.



c.



2. Representa cada inecuación en la recta numérica.

a.  $x < \frac{9}{4}$



b.  $x \geq -1,5$



c.  $x > 1,2$

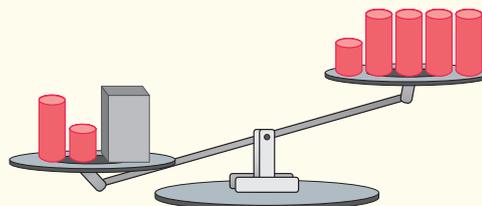


d.  $x \leq \frac{24}{5}$



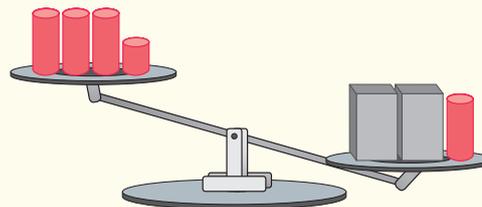
Práctica guiada

3. Escribe las transformaciones que se deben realizar para encontrar la solución de cada inecuación. Considera que un bloque representa la incógnita y que cada cilindro representa la unidad. Además, considera que el bloque pequeño representa medio bloque y que el cilindro pequeño representa media unidad.

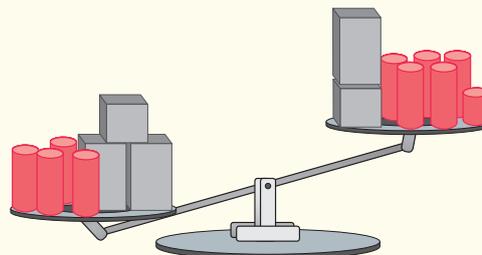


- Inecuación:  $x + 1,5 > 4,5$ .
- Para aislar la incógnita a uno de los lados de la inecuación hay que sacar 1,5 cilindros de cada platillo de la balanza.
- La solución de la inecuación es  $x > 3$ .

a.



b.



4. Realiza la operación indicada y escribe la desigualdad que se obtiene.

$$\begin{array}{l} 5 > 4 \quad / +2 \\ 7 > 6 \end{array}$$

- a.  $-5 < 8$  / $\cdot (-3)$
- b.  $-7,5 < 1,8$  / $:$ 6
- c.  $\frac{9}{8} > \frac{1}{3}$  / $:\frac{2}{3}$
- d.  $-2,7 < 9,6$  / $+(-8)$
- e.  $-\frac{15}{2} < \frac{5}{4}$  / $:(-5)$
- f.  $12,4 \geq 3,1$  / $\cdot (-1,7)$

5. Indica, en cada caso, la operación que se realizó a la primera desigualdad para obtener la segunda.

$$5 \leq 6 \Leftrightarrow 12 \leq 13$$

Se sumó 7

- a.  $-2,3 > -5 \Leftrightarrow 11,5 < 25$   
 b.  $-8 < 4 \Leftrightarrow 0 < 12$   
 c.  $\frac{14}{5} > 1,9 \Leftrightarrow -\frac{1}{5} > -1,1$   
 d.  $-6,21 < 5,1 \Leftrightarrow 2,07 > -1,7$   
 e.  $12 > 8 \Leftrightarrow \frac{37}{3} > \frac{25}{3}$

6. Identifica, en cada caso, la inecuación que no puede ser obtenida de la inecuación original.

$$5x > 35$$

$15x > 105$	$-x < -7$	$-20 > -140$
-------------	-----------	--------------

a.  $-6x + 5 < 4x + 9$

$-10x < 4$	$5x > 2$	$-1 > 2,5x$
------------	----------	-------------

b.  $15 \leq 12x + 7,2$

$7,8 \geq 12x$	$-15,6 \geq -24x$	$7,8 \leq 12x$
----------------	-------------------	----------------

c.  $\frac{3}{8}x + 2 > -1$

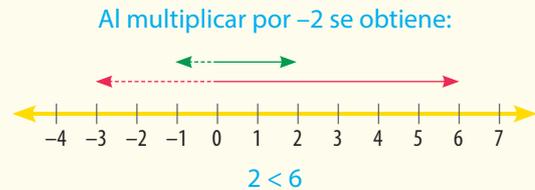
$3x + 16 > -8$	$3x > 24$	$6x > -42$
----------------	-----------	------------

7. Resuelve algebraicamente las inecuaciones. Escribe cada paso.

$$\begin{aligned} -4x + 8 &\geq 5 && /-8 \\ -4x &\geq -3 && /:(-4) \\ x &\leq \frac{3}{4} \end{aligned}$$

- a.  $\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \leq \frac{3}{4}x$   
 b.  $\frac{2}{5}x - 6 \leq \frac{1}{2}x - 5$   
 c.  $3,8 + 2x > -2,4 + 3x$   
 d.  $\frac{1}{10}x + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{5}$   
 e.  $0,5x - 0,75 > 4x$   
 f.  $\frac{1}{2} - \frac{5}{2}x \leq -8x + \frac{1}{4}$

8. Representa en la recta numérica la desigualdad de acuerdo a la operación indicada.



- a.  $2,5 > 0,5 \quad / \cdot (-3)$   
 b.  $-1,8 < 4 \quad / \cdot (-1,5)$   
 c.  $6 < 7 \quad / \cdot (-0,5)$   
 d.  $-1,5 > -2 \quad / \cdot 4$

9. Identifica y destaca los números que pertenecen al conjunto solución de cada inecuación.

$$-3 \leq -2(p - 3)$$

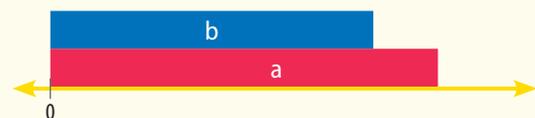
$-4$     $3$     $5$     $4,7$     $8$

- a.  $0,4 - x < 3$   
 $-9,2$     $-1,5$     $7$     $\frac{5}{2}$     $-3$
- b.  $\frac{1}{3}q - 2 \leq q + 4$   
 $15$     $-8$     $-3,5$     $6$     $-0,5$
- c.  $5(2r + 3) > 2(r - 3) + 1$   
 $-7$     $-\frac{5}{2}$     $0$     $\frac{7}{4}$     $5$

Aplica

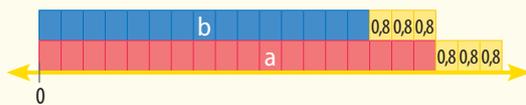
10. A continuación podrás representar, para el caso  $a > 0$  y  $b > 0$ , algunas propiedades de las desigualdades.

Dibuja una recta numérica y recorta una tira de papel rojo del largo  $a$  que quieras y uno de papel azul de longitud  $b$ , tal que  $b$  es menor que  $a$ . Ubica ambas tiras de papel desde 0 como se muestra en la figura:

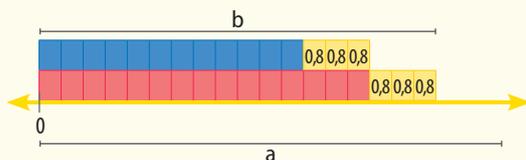


¿Qué desigualdad representa la relación entre  $a$  y  $b$ ?

- a. Recorta cuadrados de papel amarillo de 0,8 cm de longitud. Ubica la misma cantidad de cuadrados en el extremo derecho, a continuación de cada tira de papel, así como se muestra aquí:



- ¿Cuál es la desigualdad que se representa ahora?
  - ¿Qué similitud observas con la desigualdad definida inicialmente? ¿Se mantiene el sentido del signo de la desigualdad? Justifica tu respuesta.
- b. Ubica los mismos cuadrados amarillos de la parte a, también desde el extremo derecho de cada tira de papel, pero ahora sobreponlos sobre cada tira, dirigidas hacia el cero.



- ¿Qué desigualdad se representa ahora en la recta numérica?
  - Compara esta desigualdad con la de la parte a. ¿Observas alguna similitud? ¿Se mantiene el sentido del signo de la desigualdad?
  - De acuerdo a los resultados obtenidos en las partes a y b, ¿qué puedes concluir con respecto al sentido del signo de la desigualdad? Comunica tu respuesta a tus compañeros y compañeras.
- c. Si consideras cantidades  $p$  y  $q$  para representar  $a - p < b - q$ , ¿qué condiciones debe cumplir  $p$  y  $q$  para mantener el sentido de la desigualdad? Piénsalo y ejemplifica para responder.

## 11. Resuelve los problemas.

- a. El largo  $a$  y el ancho  $b$  de una mesa rectangular (expresados en centímetros) se han medido con un error menor que 1 cm. Los valores para las longitudes  $a$  y  $b$  son:
- $$130 \leq a \leq 131 \text{ y } 65 \leq b \leq 66$$
- ¿Entre qué números está comprendido el perímetro?
  - ¿Entre qué números está comprendida el área?
- b. Las notas de Elsa han sido 4; 5; 5; 6 y 4, faltándole una prueba por rendir. Si su promedio final es igual o superior a 5, podrá eximirse del examen final del curso. ¿Qué nota debe obtener como mínimo en la próxima prueba para eximirse del examen?
- c. Los lados no basales de un triángulo isósceles miden un número entero de centímetros. La base también mide un número entero de centímetros y su medida equivale a la mitad de la longitud de uno de los lados no basales.
- ¿Cuáles son las posibles medidas de cada lado si el perímetro es menor que 16 cm?
  - ¿Cuáles son los posibles valores si el perímetro es mayor que 6 cm?
  - ¿Cuáles son los valores que cumplen con ambas condiciones? Grafica este resultado.

## 12. Crea. Inventa una inecuación cuya solución sea $x \leq -10,5$ , de forma tal que los pasos para resolverla sean los siguientes:

restar 2  $\rightarrow$  restar  $4x$   $\rightarrow$  dividir por  $-3$

Compara tu respuesta con la de tus compañeros y compañeras. ¿Obtienen las mismas desigualdades?, ¿por qué?

## 13. Argumenta. Resuelve las inecuaciones:

$$10 < 4n + 6$$

$$4n + 6 < 20$$

¿Satisface el número 2 ambas inecuaciones? ¿Cómo lo sabes? Comenta con un compañero o compañera. Da argumentos que justifiquen tu respuesta.

### Reflexiono

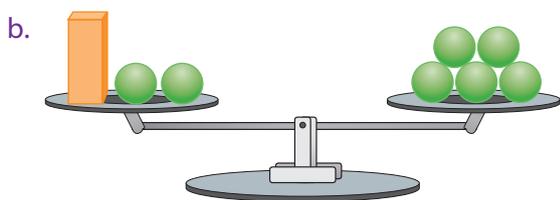
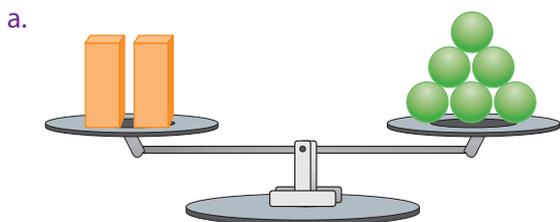
1. Resuelve la inecuación  $ax + 4 < -12$ , en que la incógnita es  $x$ . ¿Qué puedes observar? ¿Mantiene el mismo sentido el signo de la desigualdad? ¿De qué depende la solución de la inecuación? Justifica y ejemplifica.
2. ¿Qué número se debe agregar a la fracción  $\frac{2}{5}$  para que la suma pertenezca al conjunto solución de la desigualdad  $\frac{1}{2} < x < \frac{3}{4}$ ? Justifica tu respuesta.

### Refuerzo

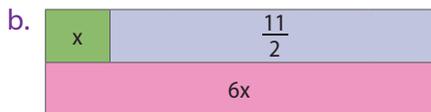
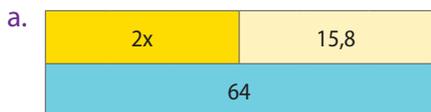
1. Describe en tu cuaderno el procedimiento que aplicarías para resolver en una balanza la inecuación  $8,5x > 6,5x + 3$ .
2. Escribe las transformaciones que se deben aplicar a la inecuación  $\frac{3}{5}x + \frac{1}{2} \geq -8,2 + x$  para obtener su solución.
3. Explica en qué caso debes invertir el sentido del signo de la desigualdad al resolver una inecuación.

**Lección 18:** ¿Cómo modelar situaciones con ecuaciones?

1 Escribe la ecuación representada en cada balanza. Considera que la masa de cada rectángulo es  $x$  kg y la de cada círculo es  $0,6$  kg.



2 Determina la ecuación representada en cada diagrama de barras.



3 Representa con un diagrama de barras cada ecuación.

a.  $0,5x + 2,5 = 4,5$

b.  $2x + 0,7 = \frac{7}{2}$

4 Escribe una ecuación que modele cada situación y que permita responder la pregunta planteada.

- La suma de dos números consecutivos es 65. ¿Cuáles son los números?
- Uno de los ángulos de un triángulo mide  $60^\circ$ , el segundo mide  $p^\circ$  y el tercero mide el doble del segundo. ¿Cuánto mide cada ángulo del triángulo?
- Dos números están en la razón  $2 : 3$ , y su suma es 25. ¿Cuáles son los números?
- La hermana de Elisa tiene 8 años más que ella, y la suma de sus edades es de 22 años. ¿Cuántos años tiene cada una?

**Lección 19:** ¿Cómo resolver ecuaciones?

5 Resuelve las ecuaciones.

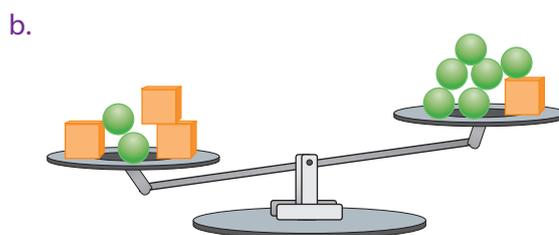
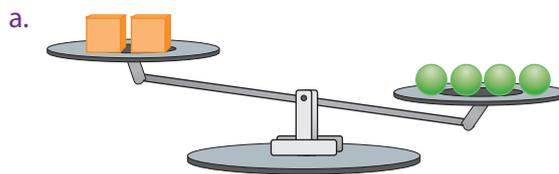
- $5x = -62,3$
- $2x + 6,1 = 27$
- $0,5x + 8 = 2x - 9,4$
- $\frac{x}{3} + 8 = 12$
- $4x - 5(x + 8) = -14$
- $3(x - 1) + 2(x - 6) = 4,9x$

6 Plantea una ecuación que modele cada situación y resuélvela.

- Lucía y Camila quieren comprarle a su mamá un regalo que cuesta \$ 18400. Para ello, cada una aportó la misma cantidad de dinero que, sumado a \$ 3500 que les dio su papá, les alcanzó para comprar el regalo. ¿Cuánto dinero aportó cada una?
- La diferencia entre dos números es 13 y la diferencia entre el mayor y el doble del menor es 4. ¿Cuáles son los números?
- Elisa comió una bolsa de bombones en 3 días. El segundo día comió 4 bombones más que el primero, y el tercer día 8 bombones más que el segundo. Si todos los días hubiera comido la misma cantidad de bombones que el primer día, la bolsa le hubiese durado 5 días. ¿Cuántos bombones comió cada día?
- En tres semanas, Leonel gastó \$ 560 000. Si cada semana gastó la mitad de lo que gastó la semana anterior, ¿cuánto gastó cada semana?

**Lección 20:** ¿Cómo modelar situaciones con inecuaciones?

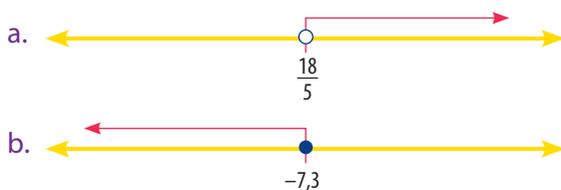
7 Representa con una inecuación lo que ilustra cada balanza. Considera que la masa de cada cuadrado es  $x$  kg y la de cada círculo es  $0,1$  kg.



- 8 Determina la inecuación que modela cada situación y que permite responder la pregunta planteada.
- Laura gana \$ 600 por cada collar que vende en una feria. ¿Cuántos collares debe vender para ganar al menos \$ 10 400?
  - Pedro compró un cajón de frutillas en \$ 18 000 y las venderá a \$ 1800 el medio kilogramo. ¿Cuántos kilogramos debe vender como mínimo para no perder dinero en el negocio?
  - Julio resuelve todos los días 8 ejercicios que le dieron de tarea, pero aún no logra completar los 324 ejercicios del libro. ¿Cuántos días han pasado como mínimo desde que comenzó?
  - El largo de un rectángulo es el doble del ancho y su perímetro es a lo menos 52 cm. ¿Cuáles podrían ser las dimensiones del rectángulo?

**Lección 21:** ¿Cómo representar la solución de una inecuación?

- 9 Identifica, en cada caso, el intervalo numérico representado en la recta numérica.



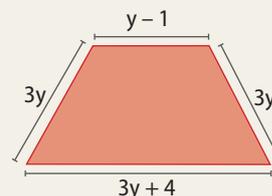
**Lección 22:** ¿Cómo resolver inecuaciones?

- 10 Resuelve las inecuaciones y representa las soluciones en la recta numérica.
- $6x > 4,5x + 12$
  - $4,8x + 3 < -1,2$
  - $\frac{2}{5}x + \frac{1}{2}x \geq \frac{1}{4}$
  - $5,2x - 2,1 \geq 0,5x$
  - $0,3x + 1,4 > 8 - 0,7x$
  - $x + 9,4 \leq \frac{1}{5}x$
- 11 Plantea la inecuación que modela cada situación, resuélvela y responde la pregunta.
- Cecilia paga \$ 900 de cargo fijo de electricidad y \$ 70 por cada kilowatt que consume. Si no quiere gastar en electricidad más de \$ 10 000, ¿cuántos kilowatt puede consumir?

- Miguel, Francisca y Jorge son primos. Miguel tiene 16 años y Francisca tiene 4 años más que Jorge. La suma de las edades de Jorge y Francisca es menor que la edad de Miguel. ¿Qué edad podría tener Jorge?
- Para ser aceptado en una carrera, Rubén debe rendir tres pruebas y obtener un promedio superior a 70 puntos (cada prueba tiene 100 puntos). En la primera prueba obtuvo 75 puntos y en la segunda 61. ¿Cuántos puntos, al menos, debe obtener en la tercera prueba para ser aceptado?

### Desafíos de integración

- El uso de estufas eléctricas de una casa en temporada de invierno aumenta el consumo de energía entre un 30% y un 45%. Si una familia consume en verano 120 kilowatts y el valor del kilowatt por hora es de \$ 70, ¿cuánto podría aumentar la cuenta de la luz?
- Dos empresas que arriendan automóviles, tienen distintos sistemas de cobranza. En la empresa A se cobra una base fija por día de \$ 21 000 y \$ 120 por cada kilómetro recorrido; mientras que la empresa B tiene una base fija de \$ 30 000 y cobra \$ 80 por cada kilómetro recorrido. Si se piensa recorrer muchos kilómetros, ¿en qué empresa el arriendo es más económico? Elabora una ecuación para el precio de cada empresa.
- Se sabe que el perímetro de la figura no es mayor que 13 cm. ¿Qué inecuación representa la situación? ¿Existen valores de  $y$  que satisfagan la inecuación? Explica.



### Trabajo en grupo

Escoge el desafío cuya resolución te planteó más dificultades. Describe por escrito las dificultades que tuviste y resuélvelo nuevamente, trabajando ahora en forma grupal.

## Usar modelos matemáticos

Esta estrategia consiste en modelar la información del problema, en este caso usando una ecuación, es decir, letras, números, operaciones aritméticas y signos de igualdad. Este modelo permitirá encontrar un valor desconocido, llamado incógnita.

### Estrategias

- Usar un proceso de ensayo y error.
- Aplicar procesos reversibles.
- Descartar información irrelevante.
- Usar un problema similar pero más sencillo.
- Construir un esquema, diagrama o tabla.
- Encontrar un patrón.
- Usar modelos matemáticos.
- Usar razonamiento lógico.
- Identificar submetas.

La Empresa de Ferrocarriles del Estado (EFE) es una empresa estatal chilena que se encarga del transporte de carga y de pasajeros mediante un servicio de trenes entre las ciudades de Santiago y Chillán, abarcando una distancia aproximada de 400 km.

Considera que un tren con carga sale directo desde Santiago hacia el sur y, simultáneamente, desde Chillán parte un segundo tren hacia el norte, 40 km/h más rápido que el primero. Si los trenes viajan con una rapidez constante en todo su trayecto y se encuentran después de 2,5 horas de viaje, ¿cuál es la rapidez de cada uno?

¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema? Escribe tú

¿Qué datos tengo para resolver? Escribe tú

Crea un plan para resolver

Para resolver este problema puedes usar la estrategia **Usar modelos matemáticos** para determinar la rapidez que lleva cada uno de los trenes.

### Aplica la estrategia y resuelve

Para resolver el problema usaremos la fórmula de la física que relaciona la rapidez constante  $v$  de un cuerpo que recorre una distancia  $d$  en un tiempo  $t$ , que está dada por la expresión  $d = v \cdot t$ . De esta manera, al ordenar la información en una tabla para cada situación tenemos que:

Tren 1 (salida desde Santiago)

Rapidez (km/h)	Tiempo (h)	Distancia (m)
$v$	2,5	$2,5v$

Tren 2 (salida desde Chillán)

Rapidez (km/h)	Tiempo (h)	Distancia (m)
$v + 40$	2,5	$2,5 \cdot (v + 40)$

Transcurridas 2,5 horas, la suma de las distancias que han recorrido los trenes es aproximadamente de 400 km, entonces, la ecuación que podemos plantear es  $2,5v + 2,5(v + 40) = 400$ . A continuación, resuelve esta ecuación para obtener la rapidez que lleva el tren 1.

Verifica la respuesta

Escribe tú

Se puede calcular la distancia recorrida por cada tren y comprobar que su suma es de 400 km.

Comunica la respuesta

Escribe tú

¿De qué otra forma resolverías este problema? Explica.

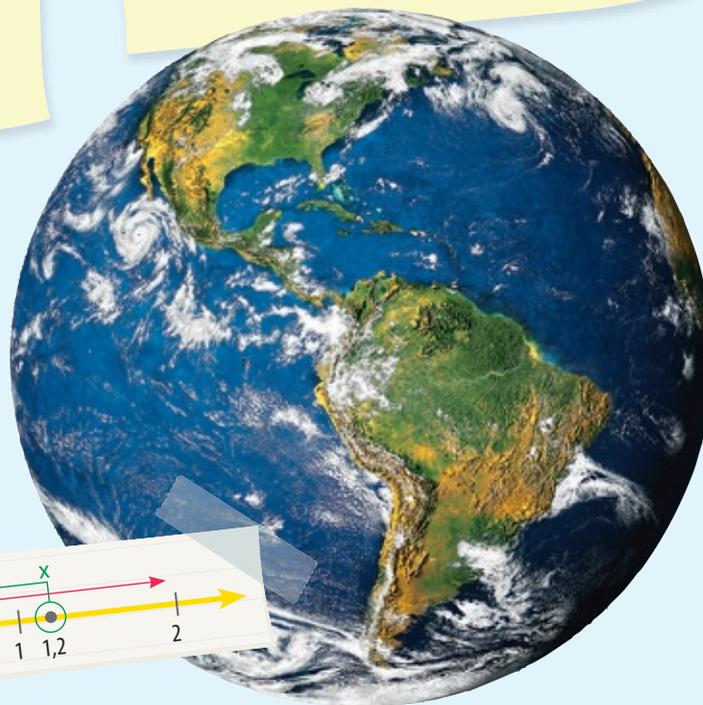
### Vuelvo a mis procesos

Responde de acuerdo a tu apreciación.

¿Tuviste dificultades al modelar situaciones usando ecuaciones e inecuaciones? ¿Lograste resolverlas?

¿Comprendiste las instrucciones al resolver ecuaciones e inecuaciones en la balanza?, ¿por qué?

¿Tuviste dificultades al representar las soluciones de inecuaciones en la recta numérica? ¿Te quedó alguna duda?, ¿cuál?



¿Crees que hay algún tema que no comprendiste bien y que requieres reforzar?, ¿cuál?

¿Crees que la balanza fue una herramienta útil para tu aprendizaje de la resolución de ecuaciones e inecuaciones?, ¿por qué?

¿Fueron eficaces las estrategias que aplicaste para resolver ecuaciones e inecuaciones?, ¿por qué?

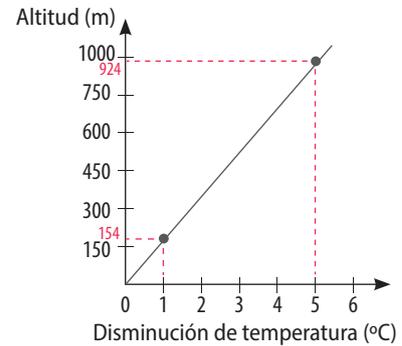
# Función lineal y función afín

**Activo ideas previas**

1. Lee la información y coméntala con un compañero o una compañera.

La atmósfera terrestre puede dividirse en capas de acuerdo a su estructura y composición: troposfera, estratosfera, mesosfera, ionosfera y exosfera. En la troposfera (capa que se extiende desde la superficie de la Tierra hasta los 10 o 12 kilómetros de altura) la variación de la temperatura con la altitud en ciertas condiciones, podemos considerarla como aproximadamente constante. Es así como se ha establecido que, en promedio, la temperatura disminuye  $1\text{ }^{\circ}\text{C}$  cada 154 m. En el gráfico, se representa la relación que existe entre la altitud (medida en metros) y la disminución de temperatura (medida en  $^{\circ}\text{C}$ ).

**Disminución de la temperatura con la altitud en la troposfera**



Responde las preguntas junto con tu compañero o compañera.

- a. ¿Han escalado o subido alguna vez a una montaña, cerro o volcán? ¿A cuántos metros sobre el nivel del mar es lo más alto que han llegado, aproximadamente? Compartan sus respuestas con otros compañeros o compañeras.
- b. ¿Cómo interpretan que la variación de la temperatura con la altitud sea constante? ¿Cuál es la constante de proporcionalidad? Observen el gráfico y justifiquen sus respuestas.
- c. ¿Cómo podrían determinar la disminución de temperatura a los 5 km de altitud? Analicen el gráfico presentado, identifiquen la relación que modela la situación y calculen.

**Activo conceptos clave**

2. A continuación, se presentan algunos conceptos clave de esta sección. Úsalos para responder las preguntas.

proporcionalidad directa	variable	función	función lineal
coeficiente de posición	función afín	constante de proporcionalidad	recta
	pendiente	plano cartesiano	

- a. ¿Cuál o cuáles de ellos conoces? ¿Cuáles son nuevos para ti?
- b. ¿Cuál de ellos está relacionado con la noción de inclinación de una recta?
- c. ¿Cuál de ellos representa el concepto contrario de constante?

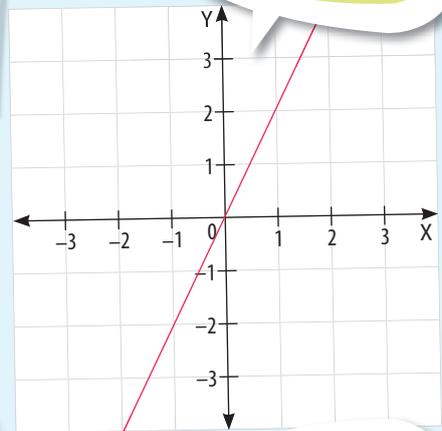
## Pienso mis procesos

Responde de acuerdo a lo que conoces.

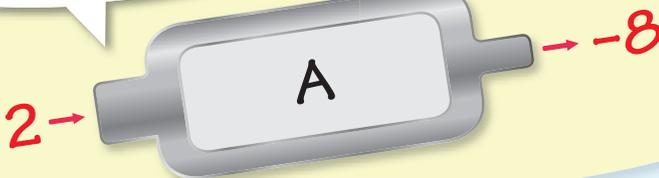
¿Cuántas incógnitas tiene esta ecuación? ¿Puedes determinar los valores de  $x$  e  $y$ , simultáneamente?, ¿cómo?

$$y = 2x + 1$$

¿Qué clase de relación existe entre las variables graficadas?, ¿cómo lo sabes?



¿Qué operación debe aplicarse dentro de  $A$  para transformar el número 2 en el número  $-8$ ?  
¿Es la única?



¿Sabes ocupar algún software para construir gráficos?, ¿cuál? ¿Cuál es tu manejo de recursos tecnológicos: nulo, básico o avanzado?

¿Qué tema de los que verás en esta sección te interesa más?, ¿por qué?

¿Qué tema de la sección piensas que te traerá más dificultades?, ¿por qué? ¿Cómo esperas superarlas?

Activa tus conocimientos previos respondiendo las preguntas laterales y luego resuelve las actividades. Para terminar, registra tus logros.

Considera dos variables directamente proporcionales. Si el valor de una de ellas aumenta, ¿qué ocurre con el valor de la otra, aumenta o disminuye?

¿Qué condición matemática cumplen dos variables directamente proporcionales?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
9 correctas o más	menos de 9 correctas

¿Cuántos errores cometiste?  
Indica el más importante.

¿Qué propones para no volver a cometer este error?

### Reconocer variables directamente proporcionales

**1** Identifica cuáles de las variables descritas son directamente proporcionales. (5 puntos)

- El diámetro y el perímetro de una circunferencia.
- El tiempo que está prendida una estufa a parafina y la cantidad de litros de parafina que consume.
- Las medidas de la base y la altura de un triángulo de área constante.
- El número de prendas de ropa mojada expuestas al sol y el tiempo que demoran en secarse.
- La cantidad de litros de bencina comprados y el precio de 1 litro de bencina.

**2** Identifica las tablas en las que las variables  $x$  e  $y$  son directamente proporcionales. (5 puntos)

a.

x	1	2	3
y	3	4	5

b.

x	1	2	3
y	2	4	6

c.

x	3	4	5
y	3	4	5

d.

x	1	2	3
y	6	7	8

e.

x	1	2	3
y	7	14	21

**3** Determina el valor pedido en cada caso. (5 puntos)

- Calcula  $y$  en  $\frac{y}{x} = 4$ ; si  $x = 4$ .
- Calcula  $y$  en  $\frac{y}{x} = \frac{1}{2}$ ; si  $x = 12$ .
- Calcula  $x$  en  $\frac{y}{x} = 0,2$ ; si  $y = 3$ .
- Calcula  $x$  en  $\frac{y}{x} = \frac{5}{6}$ ; si  $y = 10$ .
- Calcula  $y$  en  $\frac{y}{x} = 6$ ; si  $x = 9$ .

¿Qué estrategia crees que podría servir para resolver problemas que involucran proporcionalidad directa?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
2 o 3 correctas	0 o 1 correctas

¿Cuál problema te costó más resolver?, ¿por qué?

### Aplicar proporcionalidad directa

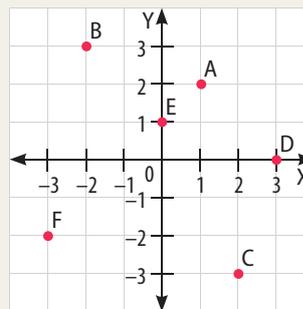
- 4** Resuelve los problemas que involucran el concepto de proporcionalidad directa. (3 puntos)
- Seis personas pueden alojar en un hotel durante 12 días pagando \$ 288 000. ¿Cuánto costará el hospedaje de 15 personas en el hotel durante 8 días?
  - En un supermercado muy económico, por comprar 4 kg de paltas se pagan \$ 3600. Si una persona compra 7 kg de paltas, ¿cuánto debe pagar?
  - Dos ruedas están unidas por una correa transmisora. La primera tiene un radio de 15 cm de longitud y la segunda de 45 cm de longitud. Cuando la primera rueda da 300 vueltas, ¿cuántas vueltas da la segunda?

¿Qué representa cada una de las coordenadas de un punto P que se ubica en el plano cartesiano?

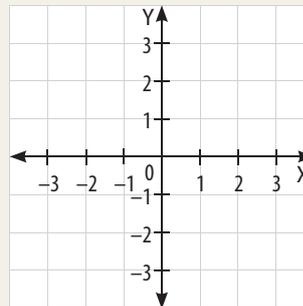
¿Has ocupado algún software para para graficar puntos en el plano cartesiano?, ¿cuál?

### Representar puntos en el plano cartesiano

- 5** Identifica las coordenadas de cada punto graficado en el plano cartesiano. (6 puntos)
- A( , )
  - B( , )
  - C( , )
  - D( , )
  - E( , )
  - F( , )



- 6** Ubica los puntos en el plano cartesiano. (6 puntos)
- P(3, 2)
  - Q(-1, -3)
  - R(0, -2)
  - S(1, 0)
  - T(2, -2)
  - U(-2, 1)



- 7** Determina los vértices desconocidos de un cuadrado si se sabe que las coordenadas de dos de ellos son (-4, -4) y (4, 4). ¿Es la única respuesta posible? (1 punto)

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
8 correctas o más	menos de 8 correctas

¿En qué actividad cometiste más errores, en la identificación o en la ubicación de puntos en el plano cartesiano?

¿Por qué crees que cometiste esos errores?

► **Propósito**  
Relacionar la proporcionalidad directa con la función lineal.

### ¿Para qué?

La proporcionalidad directa relaciona variables que aparecen al describir muchos fenómenos cotidianos. Por ejemplo, son variables relacionadas en forma directamente proporcional: el número de productos que vas a comprar y el dinero que gastarás en la compra; el número de kilómetros que un chofer debe conducir y la cantidad de litros de bencina que consumirá su automóvil; la masa de un cuerpo y su peso en la superficie de la Tierra; entre muchas otras.

### Palabras clave

Variable  
Proporcionalidad directa  
Función lineal  
Constante de proporcionalidad

¿Por qué para embotellar 1,2 L de jugo se deben agregar 96 g de azúcares?

## ¿Cómo relacionar la proporcionalidad directa y la función lineal?

Para elaborar 0,6 L de jugo de frutas no gasificado se deben incorporar 48 g de azúcares.



### Situación 1 Relacionando variables

¿Qué relación existe entre la cantidad de kilogramos de azúcares que se deben agregar al proceso y el número de litros de jugo embotellado?

Para responder, primero constatamos que si se quiere aumentar el número de litros de jugo embotellado, entonces se debe aumentar la cantidad de kilogramos de azúcares que se incorporan al proceso.

¿Qué ocurre con la cantidad de azúcares que se deben incorporar si el número de litros de jugo embotellado disminuye?

**Paso 1** Representa el hecho de que si se desea embotellar 0,3 L de jugo (la mitad de 0,6 L) se deben agregar 24 g de azúcares (la mitad de 48 g) y que si se desea embotellar 1,2 L de jugo se deben agregar 96 g de azúcares.



**Paso 2** Completa la tabla con las cantidades de gramos de azúcares "A" que se deben agregar para poder embotellar diferentes cantidades de litros de jugo "J".

J (L)	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1
A (g)	24	48		96			

**Paso 3** Constata que el cociente  $\frac{A}{J}$  es constante para todos los pares de valores de la tabla.

Para 0,3 L	Para 0,6 L	Para 1,2 L
$\frac{A}{J} = \frac{24}{0,3} = 80$	$\frac{A}{J} = \frac{48}{0,6} = 80$	$\frac{A}{J} = \frac{96}{1,2} = 80$

Compruébalo para los otros pares de valores.

**R:** El número de litros de jugo embotellado y la cantidad de kilogramos de azúcares que se deben incorporar son variables directamente proporcionales.

#### Ayuda

Usa una calculadora para verificar los resultados registrados y para determinar los datos desconocidos.

#### Ayuda

Recuerda que si dos variables P y Q son directamente proporcionales, entonces se cumple que  $\frac{P}{Q}$  es constante.

## Situación 2 Modelando una relación directamente proporcional

¿Qué modelo matemático se puede plantear para describir la relación que existe entre las variables **A** y **J** de la situación 1?

Primero recordemos las definiciones de **J** y **A**.

**J**: número de litros de jugo embotellado.

**A**: cantidad de kilogramos de azúcares que se deben incorporar.

**Paso 1** Define la constante de proporcionalidad de la relación existente entre **J** y **A** como el siguiente cociente constante.

$$\frac{A}{J} = 80$$

**Paso 2** Confirma que para conocer la cantidad de azúcares que hay que agregar al proceso basta multiplicar el número de litros de jugo que se desea embotellar por 80.

Escribe para completar los enunciados:

Para embotellar 0,3 L de jugo hay que agregar:  
 $80 \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$  g de azúcares  
 Para embotellar 0,9 L de jugo hay que agregar:  
 $80 \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$  g de azúcares  
 Para embotellar 90 L de jugo hay que agregar:  
 $80 \cdot \underline{\hspace{1cm}} = \underline{\hspace{1cm}}$  g de azúcares

**Paso 3** Escribe la relación matemática existente entre las variables **A** y **J**.

**R:** El modelo matemático que relaciona las variables **A** y **J** se puede escribir como:

$$A(J) = 80J$$

¿Podrías haber definido la constante de proporcionalidad como el cociente  $\frac{J}{A}$ ? ¿En qué cambiaría el desarrollo realizado y esta respuesta?

### Ayuda

Observa que para calcular el valor de **A**, debes conocer el valor de **J**. Esto permite afirmar que la variable **A** "depende" de la variable **J**.

Escribe para completar el enunciado:

El modelo matemático que acabo de obtener, que es \_\_\_\_\_, recibe el nombre de función lineal, en que **J** es la variable independiente y **A** es la variable dependiente.

### ► Para concluir

Dos variables tienen una relación de **proporcionalidad directa** cuando el cociente entre cada par de sus valores es constante. A esta constante se le llama constante de proporcionalidad. Esta relación puede ser descrita por la ecuación

$$y = mx$$

donde **x** e **y** representan las variables relacionadas y el valor **m** es la constante de proporcionalidad.

A una relación que se puede escribir de esta forma se le llama función lineal, que puede ser escrita como:

$$f(x) = y = mx$$

### Argumenta y comunica

- Considera una tabla de datos con los valores de dos variables relacionadas. ¿Cómo reconoces si estos valores se pueden modelar usando una función lineal? Explica detalladamente por escrito.
- Analiza la ecuación general de una función lineal,  $y = mx$ . Sin importar el valor que tenga la constante **m**, ¿qué par de valores numéricos (**x**, **y**) siempre verifica esta ecuación matemática? Compara tu respuesta con la de un compañero o una compañera y comuniquen su respuesta en común al resto del curso.

Repaso

1. Determina si las razones forman o no una proporción.

- a. 5 : 4 y 6 : 5
- b. 4 : 7 y 1 : 1,75
- c. 8 : 6 y 3,2 : 2,4
- d. 6 : 5 y 12 : 15

2. Calcula el valor de x en las proporciones.

- a.  $\frac{x}{5} = \frac{3}{15}$
- b.  $\frac{8}{x} = \frac{6}{4}$
- c.  $\frac{1}{5} = \frac{x}{4}$
- d.  $\frac{5}{6} = \frac{3}{x}$

3. Observa la tabla de proporcionalidad directa y responde.

Pan (kg)	5	8	9	12
Precio (\$)	3250	5200	5850	7800

¿Qué información entrega el valor de la constante de proporcionalidad?

4. Identifica cuáles de las variables descritas son directamente proporcionales.

- a. La altura en metros de una persona y su edad.
- b. Las horas trabajadas en un turno y el pago respectivo por ese turno.
- c. La cantidad de páginas de un libro y la cantidad de hojas que se necesitan para imprimirlo.
- d. El precio de una comida y el tiempo que un cliente demora en comerla.

Práctica guiada

5. Completa la tabla sabiendo que las variables son directamente proporcionales.

Cantidad de naranja: N ; Precio: P

N (kg)	3	5	7	11
P (\$)	2400	4000	5600	8800

a. Distancia recorrida: d ; tiempo: t

t (s)		20	30	
d (m)	30		60	110

b. Cantidad de agua: A ; Masa de sal: S

A (L)	25	40	70	
S (g)	650			2600

c. Cantidad de bolsas de clavos: B ; masa de clavos: C

B	2	4	12	20
C (kg)		5		

6. Determina la ecuación que representa los datos de cada tabla de valores.

x	2	3	12
y	10	15	60

Como la constante de proporcionalidad es  $\frac{y}{x} = \frac{10}{2} = 5$ , entonces, la ecuación es  $y = 5x$ .

a.

x	3	-4	-6
y	-12	16	24

b.

x	1	2	3
y	0,4	0,8	1,2

c.

x	0,5	1	1,5
y	1,5	3	4,5

7. Verifica si los valores de cada tabla pueden ser representados por una función lineal.

x	0	1	2
y	5	10	20

No es una función lineal, porque  $f(0) \neq 0$ .

a.

x	4	8	16
y	0	1	2

b.

x	0	2	4
y	0	9	18

c.

x	0	1	6
y	0	3	8

8. Analiza los datos de cada situación y generalízala, determinando la función que modela la relación entre las variables.

Un granjero tiene 15 gallinas (variable p: número de gallinas), que comen 750 gramos de trigo (variable t: cantidad de gramos que en total comen las gallinas) al día.

Se determina la constante de proporcionalidad m dividiendo 750 por 15 y luego se establece la ecuación de la función:

$$m = \frac{750}{15} = 50 \rightarrow \text{Función: } t(p) = 50p$$

a. El sonido de un trueno demora 0,6 segundos (t: tiempo) en recorrer una distancia de 206 metros (d: distancia).

- b. En el plano de una casa, la longitud de un pasillo de 8 m (l: longitud real) está representada por 2 cm (p: longitud en el plano).
- c. La dosis diaria de un remedio es de 2 mg (d: dosis de remedio) por cada kilogramo de masa corporal del paciente (m: masa).

## Aplica

## 9. Resuelve los problemas.

- a. Sara quiere reducir el tamaño de unas flechas que dibujó en una hoja. Una fotocopidora está programada para reducir la longitud de cada flecha a la cuarta parte. De acuerdo a esto, completa la tabla.

Longitud original x (cm)	2	6	8	14	20
Longitud imagen f(x) (cm)					

¿Qué función lineal modela esta reducción?

- b. Luis toma fotografías y compara el tamaño de los objetos en la foto con su tamaño en la realidad. Un objeto cuya altura es de 2 m aparece en la foto con un tamaño de 6 cm.
- Sin utilizar la función anterior, determina el tamaño que tendrán en la foto un objeto que mide 1 m y uno que mide 6 m.
  - Determina la función  $f(x)$  que relaciona el tamaño real de los objetos (medido en metros) con su tamaño en la foto (medido en centímetros).
  - De acuerdo a las respuestas anteriores, analiza la veracidad de la igualdad:  $f(ab) = a \cdot f(b)$ , donde  $a$  y  $b$  son números naturales. Si crees que es verdadera, justifica. Si no, determina un par de valores para los que no se cumple.

- c. Una tienda ofrece un descuento del 25% en todos sus artículos. Además, las personas que compren utilizando una tarjeta obtienen un descuento del 30% respecto del precio de oferta.
- Determina la función que relaciona el precio original de un artículo con su precio en oferta, sin compararlo con la tarjeta.
  - Determina la función que relaciona el precio original de un artículo con su precio en oferta, comprándolo con la tarjeta.
  - Otra tienda ofrece descuento del 30% en los mismos artículos, y un 25% adicional usando tarjeta. ¿Son iguales los precios finales en ambas tiendas? Justifica tu respuesta.
- d. Natalia cotiza artículos de computación, cuyos precios en vitrina aparecen sin IVA. Recuerda que el IVA es un impuesto que aumenta en un 19% el precio de un producto.
- Determina la función  $f(x)$  que relaciona los precios sin IVA ( $x$ ) y con IVA ( $f(x)$ ).
  - Natalia desea comprar dos artículos, que cuestan \$ 2000 y \$ 5000 sin IVA. ¿Cuál es el precio de cada artículo con IVA?
  - En la tienda, Natalia pasa ambos artículos juntos por la caja, donde suman sus precios y aplican el IVA. ¿Cuánto debe pagar?
  - Si  $f(x)$  es una función lineal, analiza tus respuestas anteriores para demostrar la igualdad  $f(a) + f(b) = f(a + b)$ .

## 10. Analiza. Observa y analiza la tabla de valores.

x	-4	-2	3	5
f(x)	-8	-4	6	10
g(x)	0,8	0,4	-0,6	-1
h(x)	10	5	-7,5	-12,5

¿Son  $f$ ,  $g$  y  $h$  funciones lineales? En caso que una función sea lineal, escribe la expresión que la define. Si no lo es, explica por qué.

## Reflexión

1. Dada una función lineal  $g(x) = y$ , ¿qué valor toma y cuando  $x = 0$ ? ¿Es siempre así? Piénsalo e intercambia opiniones con un compañero o una compañera.
2. Sea la función  $f(x) = 0,5x + 1$ , ¿puedes afirmar que es una función lineal?, ¿por qué? Justifica.

## Refuerzo

1. Escribe en tu cuaderno tres ejemplos de variables que son directamente proporcionales.
2. Explica y ejemplifica cuál es la relación que existe entre la proporcionalidad directa y la función lineal.
3. Inventa una situación que se modele por medio de la función  $f(x) = -3x$ .

► **Propósito**

**Representar y analizar la función lineal.**

**¿Para qué?**

Saber representar la función lineal permite comprender en mayor profundidad los fenómenos que modela. Además, facilita su análisis y permite realizar predicciones sobre el comportamiento de las variables estudiadas.

**Palabras clave**

Variable

Función lineal

Constante de proporcionalidad

Linealidad

Plano cartesiano

Pendiente

**Ampliando**

Para una función  $f(a)$ , se define su dominio como el conjunto de todos los valores que puede asumir la variable independiente  $a$ . Y se define su recorrido como el conjunto de todos los valores que puede adquirir la función  $f(a)$ .

¿Se incluyeron todos los valores posibles para  $a$  y  $s$  en el diagrama?, ¿por qué?

**Ayuda**

Para representar las variables y constantes involucradas en una función puedes usar las letras o símbolos que prefieras. Lo importante es que a lo largo de la situación descrita las letras o símbolos representen lo mismo.

## ¿Cómo representar y analizar una función lineal?

En la localidad de Cahuil, ubicada en la Región de O'Higgins, hay una laguna de agua de mar desde donde los lugareños extraen sal de mar. La concentración de la sal extraída es de aproximadamente 35 gramos de sal por litro de agua.



**Situación 1 Usando una metáfora de máquinas**

¿Cómo puedes modelar la extracción de sal en Cahuil utilizando una metáfora de máquinas?

**Paso 1** Determina las variables presentes en el problema y represéntalas mediante un símbolo.

**a:** cantidad de litros de agua de mar.

**s:** cantidad de gramos de sal.

**Paso 2** Dibuja dos máquinas, una que transforme 1 litro de agua en 35 gramos de sal y la otra que modele la relación de las variables  $a$  y  $s$ .



Por lo tanto:

**R:** Es posible modelar la extracción de sal mediante una máquina  $f$  que relaciona cada posible cantidad de agua de mar con la cantidad correspondiente de sal que se puede extraer de ella.

**Situación 2 Usando diagrama sagital**

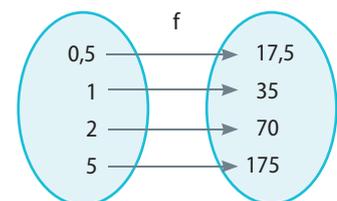
¿Cómo puedes representar la extracción de sal utilizando un diagrama sagital?

**Paso 1** Determina y escribe en una tabla algunos valores de  $s$  a partir de valores que elijas de  $a$ .

<b>a</b>	0,5	1	2	5
<b>f(a) = s</b>	17,5	35	70	175

¿Puedes determinar el dominio y el recorrido de la función  $f$ ?, ¿cuáles son?

**Paso 2** Dibuja el diagrama. En un conjunto escribe los valores de  $a$ , en el otro, los valores de  $f(a) = s$  correspondientes, y asocia con flechas los pares de valores relacionados.



Por lo tanto:

**R:** Es posible representar la extracción de sal mediante un diagrama sagital, pero solo para algunos valores del dominio de  $f$  y sus respectivos valores del recorrido.

**Situación 3** Escribiendo una expresión algebraica

¿Cómo puedes modelar la extracción de sal usando una expresión algebraica?

**Paso 1** Representa las variables involucradas mediante dos símbolos fáciles de relacionar a ellas. Usa las letras definidas anteriormente: **a** y **s**.

**Paso 2** Escribe una expresión que permita definir la función **f**.

Ya que **a** y **s** son variables directamente proporcionales, puede modelarse esta relación usando una función lineal  $f(a) = s = ma$ , en que **m** es la constante de proporcionalidad. En esta expresión puedes determinar el valor de **m** calculando  $f(1)$ , reemplazando los datos conocidos, es decir,  $a = 1$  y  $s = 35$ .

$$35 = m \cdot 1 \quad \rightarrow \quad 35 = m$$

Por lo tanto:

**R:** La extracción de sal puede modelarse usando una función lineal, que puede definirse por las expresiones  $s = 35a$  o, equivalentemente,  $f(a) = 35a$ .

¿Cuál es la variable independiente, **a** o **s**?, ¿por qué?

**Ampliando**

El coeficiente numérico **m** de una función lineal  $f(x) = mx$  coincide numéricamente con la pendiente de la recta que la representa en el plano cartesiano.

**Situación 4** Graficando en el plano cartesiano

¿Cuál es el gráfico de la función que modela la extracción de sal?

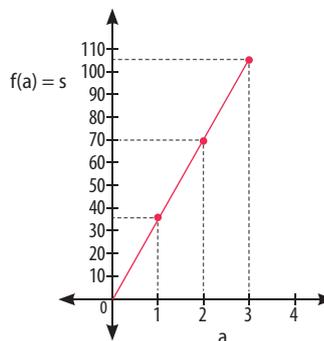
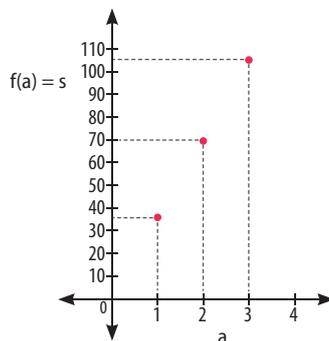
**Paso 1** Determina algunos pares de valores de la función sencillos de calcular.

<b>a</b>	1	2	3
<b>f(a) = s</b>	35	70	105

¿Cómo queda expresada la información de la tabla usando la notación de pares ordenados?

**Paso 2** Dibuja un plano cartesiano y elige una escala adecuada para los ejes. A continuación, dibuja los puntos de la tabla en el plano y únelos mediante una línea.

Gráfico de la función  $f(a) = s = 35a$ :



¿Cuál es el signo de la pendiente de la recta que representa la función  $f(a) = 35a$ ?

**Ayuda**

Para graficar una función lineal se determina un punto que pertenezca a ella, además del punto  $(0, 0)$ , que corresponde al origen del plano cartesiano. Una vez graficados estos dos puntos, se unen mediante la recta que representa a  $f$ .

Por lo tanto:

**R:** El gráfico de la función lineal es una recta que pasa por el origen.

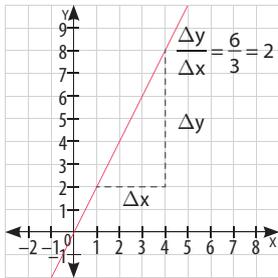
Completa el enunciado:

Observo que la recta graficada cuya pendiente es \_\_\_\_\_, número positivo, crece en el sentido positivo del eje X.

¿Cómo crees que será el gráfico de una función lineal de pendiente negativa? ¿Crece o decrece en el sentido positivo del eje X?

**Ampliando**

El valor de la pendiente de una recta puede asociarse a la variación de la ordenada cuando la abscisa varía en 1 unidad, o, lo que es lo mismo, al cociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , como se puede ver en la figura:



¿Es equivalente calcular  $f(7)$  y  $f(3) + f(4)$ ? ¿Se cumple siempre para la función lineal  $f$  que  $f(h_1) + f(h_2) = f(h_1 + h_2)$ ? Prueba con dos o tres pares de valores.

**Ampliando**

Una función  $f$  cumple las condiciones de linealidad si verifica las propiedades aditiva y homogénea, respectivamente:

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

$$k \cdot f(x) = f(k \cdot x)$$

**Para concluir**

Una **función lineal puede representarse** de muchas maneras. La más usual es la representación en el plano cartesiano.  
La recta que representa a la función lineal  $f(x) = mx$ , crece en el sentido positivo del eje  $X$  si  $m > 0$  y decrece si  $m < 0$ .

Para extraer la sal de la laguna, un microempresario contrata recolectores, a los que les paga \$ 1500 por hora.

**Situación 5 Modelando una situación**

¿Qué expresión define la función que modela esta situación?

**Paso 1** Define el símbolo que usarás para representar cada variable. Usa  $h$  para la cantidad de horas trabajadas y  $d$  para la cantidad de dinero recibido por el trabajo.

**Paso 2** Identifica que  $h$  y  $d$  son variables directamente proporcionales y que, por lo tanto, puedes definir la función lineal  $f(h) = d = mh$ , en que  $m = 1500$ .

Por lo tanto:

**R:** La función que modela la situación es  $f(h) = d = 1500h$ .

**Situación 6 Verificando primera propiedad de linealidad**

Si un recolector trabajó 3 horas un día y 4 horas el día siguiente, ¿cuánto dinero se le pagará?

Para responder usaremos la función definida  $f(h) = d = 1500h$ .

**Paso 1** Como  $3 + 4 = 7$ , calcula  $f(7)$  para responder.  $d = 1500 \cdot 7 = 10\,500$

Por lo tanto:

**R:** Se le pagarán \$ 10 500 al recolector.

**Situación 7 Verificando segunda propiedad de linealidad**

Si un día un recolector trabajó 2 horas y su hijo trabajó el triple de estas horas, ¿cuánto dinero se le pagará a cada trabajador?

Para responder usaremos nuevamente la función  $f(h) = d = 1500h$ .

**Paso 1** Determina la paga del padre. Calcula  $f(2)$ .  $d = 1500 \cdot 2 = 3000$

**Paso 2** Determina la paga del hijo. Como el padre trabajó 2 horas, el triple de esta cantidad es  $2 \cdot 3$  horas = 6 horas. Calcula  $f(6)$ .  $d = 1500 \cdot 6 = 9000$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

**R:**

Completa el enunciado:

Observo que el valor de  $f(3 \cdot 2) = f(6)$ , que es 9000, equivale al valor de  $3f(2) = 3 \cdot 3000 = \underline{\hspace{2cm}}$ .

**Argumenta y comunica**

Considera la función  $f(x) = mx$  para los casos:  
 $m = 10$     $m = 1$     $m = -1$     $m = -10$   
Haz un bosquejo del gráfico que corresponde en cada caso y explica cómo varía la inclinación de la recta que representa cada ecuación.

Repaso

1. Determina la función lineal asociada a cada tabla de valores.

a.

x	5	6	7	8
y	15	18	21	24

b.

x	2	9	15	19
y	1	4,5	7,5	9,5

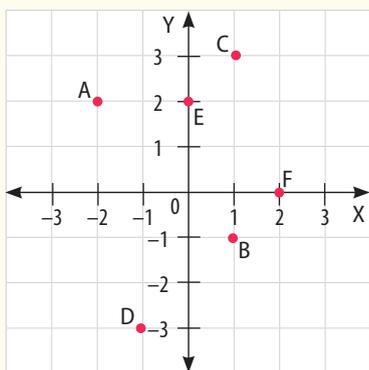
c.

x	0,6	0,8	1,2	2,3
y	4,8	6,4	9,6	18,4

2. Modela las situaciones mediante una función lineal. Usa las variables que se indican.

- a. Un automóvil gasta 8 litros de bencina (b) en recorrer 100 kilómetros (d).
- b. Una persona necesita 16 duraznos (d) y 2 kg de azúcar (a) para preparar una mermelada.
- c. El nivel de agua (n) de un estanque es de 19 cm para un tiempo (t) de 60 minutos.
- d. En un supermercado, una persona que compra 0,5 kg de queso fresco (q) debe pagar \$ 1500 (p).

3. Determina las coordenadas de los puntos representados en el plano cartesiano.



4. Representa los puntos en un plano cartesiano.

- a. A(2, 4)
- b. B(-1, -3)
- c. C(4, -2)
- d. D(0, -1)
- e. E(3, 0)
- f. F(-3, 5)

Práctica guiada

5. Determina la expresión que representa a la función descrita.

La función f asigna a un número su quinta parte:

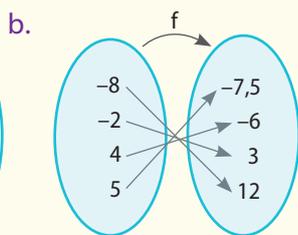
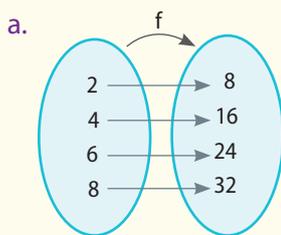
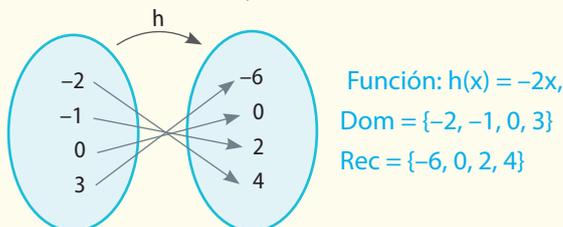
$$f(x) = \frac{x}{5}$$

- a. La función g asigna a un número su triple.
- b. La función h asigna a un número su mitad.
- c. La función i asigna a un número su inverso aditivo.
- d. La función j relaciona un número con el doble de su inverso aditivo.

6. Completa con los números que ingresan o salen en cada máquina, según la definición dada.



7. Determina la función representada. Además, escribe su dominio y su recorrido.

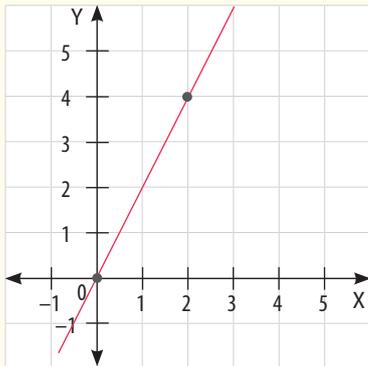


8. Representa las funciones en un mismo plano cartesiano. Elabora una tabla de valores si es necesario.

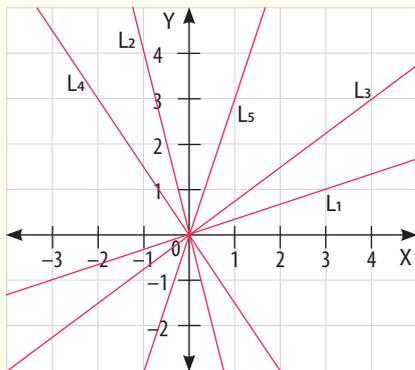
$$f(x) = y = 2x$$

x	-1	0	1	2	3
f(x)	-2	0	2	4	6

Al graficar y unir al menos dos puntos de la tabla se obtiene la recta:



- a.  $y = x$
  - b.  $y = -8x$
  - c.  $y = 0,2x$
  - d.  $y = -2,5x$
  - e.  $y = 6x$
  - f.  $y = -0,75x$
9. Asocia cada recta del gráfico con su función.

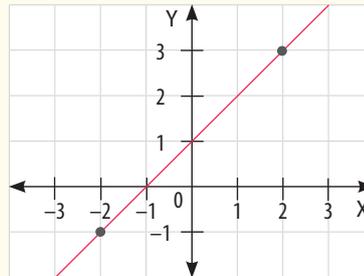


$$L_1: y = \frac{1}{3}x$$

- a.  $y = 3x$
- b.  $y = -4x$
- c.  $y = \frac{3}{4}x$
- d.  $y = -1,5x$

10. Verifica, utilizando un gráfico, si cada par de puntos pertenecen o no a la recta que representa a una función lineal.

$$(-2, -1) \text{ y } (2, 3)$$



La recta que contiene ambos puntos no representa a una función lineal, ya que no pasa por el origen.

- a. (3, 6) y (5, 10)
  - b. (1, -2) y (3, -6)
  - c. (3, 5) y (-1, 4)
  - d. (1, -3) y (3, -9)
  - e. (2,5; 4) y (5, 8)
  - f. (0,2; 1) y (-1, 5)
11. Verifica la condición de linealidad  $f(kx) = k \cdot f(x)$  para cada función, evaluando tres pares de valores cualesquiera para  $x$  y  $k$ .

$$f(x) = \frac{1}{4}x$$

x	k	$f(kx)$	$k \cdot f(x)$
-4	2	$f(-8) = \frac{1}{4} \cdot -8 = -2$	$2 \cdot f(-4) = 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot -4 = -2$
-2	3	$f(-6) = \frac{1}{4} \cdot -6 = -1,5$	$3 \cdot f(-2) = 3 \cdot \frac{1}{4} \cdot -2 = -1,5$
3	5	$f(15) = \frac{1}{4} \cdot 15 = 3,75$	$5 \cdot f(3) = 5 \cdot \frac{1}{4} \cdot 3 = 3,75$

- a.  $g(x) = 0,5x$
  - b.  $h(x) = -7x$
12. Determina si cada función  $f(x) = mx$  es creciente o decreciente en el sentido positivo del eje X, de acuerdo al valor de su pendiente.

$$m = 2$$

Como  $m > 0$ , el gráfico de la función crece en el sentido positivo del eje X.

- a.  $m = -6$
- b.  $m = 7,5$
- c.  $m = -1,5$
- d.  $m = 5$
- e.  $m = 0,8$
- f.  $m = -15$

Aplica

13. Constata la linealidad de la función  $f(x) = 0,4x$  realizando las actividades.

- Muestra que  $(kx) = k \cdot f(x)$ , para  $x = 2$  y  $k = 4$ .
- Muestra que  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ , para  $x_1 = 2$  y  $x_2 = -6$ .
- Muestra que  $k \cdot f(x_1 + x_2) = k \cdot f(x_1) + k \cdot f(x_2)$ , para  $x_1 = -8$ ,  $x_2 = 10$  y  $k = 4$ .

14. Grafica en un mismo plano cartesiano los pares de funciones lineales.

$y = 5x; y = -5x$                        $y = 3x; y = -\frac{1}{3}x$

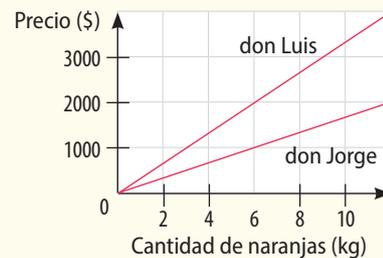
- ¿Qué relación existe entre las pendientes de cada par de funciones?
- Analiza las gráficas de cada par de funciones. ¿Qué relaciones observas? Explícalas.

15. Interpreta cada gráfico y responde.

- El gráfico muestra la distancia recorrida  $y$  (medida en kilómetros) de dos automóviles **A** y **B**, para un tiempo de viaje  $x$  (medido en horas).



- ¿Qué automóvil viaja más rápido?
  - ¿Cuál es la rapidez del automóvil **B**?
  - Si el viaje de **B** era de 900 km y mantuvo una rapidez constante, ¿cuánto tiempo tardó en realizarlo?
- El gráfico representa los costos y (expresados en pesos) para diferentes cantidades de naranjas  $x$  (expresadas en kilogramos) en dos puestos de una feria.



- ¿En qué puesto comprarías naranjas?, ¿por qué? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuál es el precio del kilogramo de naranjas en cada puesto?

16. **Conecto con la Tecnología.** WolframAlpha es un servicio en línea que permite responder las preguntas (no necesariamente relacionadas a cálculos científicos o matemáticos) que los visitantes hacen a la página. Una de las tantas aplicaciones que tiene este servicio es la de graficar funciones. Por ejemplo, si deseas graficar la función  $y = -\frac{3}{4}x$  debes realizar lo siguiente:

- Ingresa el código **TM8P163** en <http://codigos.auladigital.cl>
- Escribe en la barra de entrada plot  $(-3/4)x$ .
- Presiona Enter y podrás visualizar la gráfica de la función.

Ahora, grafica 3 funciones en WolframAlpha. Escribe en los recuadros sus ecuaciones.

- 
- 
- 

17. **Argumenta.** María tiene curiosidad por saber más respecto de los contenidos de esta lección y se plantea las siguientes posibles funciones:

$y = 5$                        $y = 0$                        $x = 1$

- Grafícalas en un plano cartesiano. ¿Qué características tiene cada una de ellas?
- ¿Son funciones lineales? Justifica tu respuesta.

Reflexiono

- Considera la función lineal  $f(x) = 2x$ . ¿Cuál es el dominio y el recorrido de esta función?, ¿por qué? Compara tu respuesta con la de un compañero o una compañera.
- ¿Cuántos puntos como mínimo se necesitan para dibujar la gráfica de una función lineal? Piénsalo y da un ejemplo.

Refuerzo

- Indica las diferentes formas en que puedes representar una función lineal.
- Dibuja el gráfico que representa a las funciones  $f(x) = 0,1x$ ;  $g(x) = 5,5x$  y  $h(x) = -0,6x$ .
- Escribe la ecuación de una recta con pendiente positiva, una con pendiente negativa y una con pendiente nula.

► **Propósito**  
Definir la función afín.

## ¿Para qué?

Al igual que la función lineal, la función afín permite modelar muchas situaciones cotidianas y, por lo tanto, es útil conocer su definición y la estrecha relación que la une a la primera. Por ejemplo, algunas de las situaciones que modela: cobro de algunos servicios como el agua, el teléfono o la luz, en los que se cobra, además de un cargo variable dependiente del consumo, un cargo fijo. También aparece en fórmulas de la física como la de la distancia recorrida por un móvil que se mueve con rapidez constante.

## Palabras clave

Función lineal

Función afín

Variable

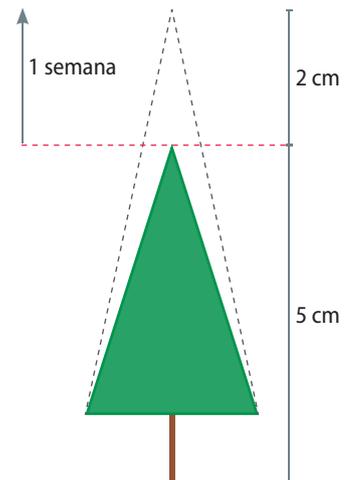
Plano cartesiano

¿En qué se diferencia la función  $h$ , de la función lineal?

¿Cambiaría esta respuesta si hubieras asignado otras letras a las variables?, ¿por qué?

## ¿Cómo definir una función afín?

Un pino de 5 cm de altura llegó a un vivero. Una de las jornaleras del recinto constató que el pino fue creciendo en forma constante durante sus primeras diez semanas, como se indica en la figura.



### Situación 1 Modelando una situación

#### ¿Cuál será la altura del pino a las 6 semanas?

Para responder, modelaremos la situación usando una función.

**Paso 1** Define las variables involucradas en el fenómeno descrito.

**s:** cantidad de semanas transcurridas.

**c:** cantidad de centímetros que crece el pino.

**h:** altura del pino expresada en centímetros.

**Paso 2** Define la función lineal que modela la cantidad de centímetros que crece el pino:

$$c = 2s$$

¿Qué cálculo se hizo para obtener el coeficiente 2?

**Paso 3** Define la función que modela la altura del pino. Como la altura del pino  $h$  corresponde a lo que va creciendo más su altura inicial, es decir,  $c + 5$ , podemos sumar 5 a ambos lados de la igualdad anterior:

$$\begin{aligned} c &= 2s && /+ 5 \\ c + 5 &= 2s + 5 \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$h = 2s + 5$$

**Paso 4** Reemplaza el valor conocido  $s = 6$  en la función recién definida y determina el valor de  $h$ .

$$\begin{aligned} h &= 2 \cdot 6 + 5 \\ h &= 12 + 5 \\ h &= 17 \end{aligned}$$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

Escribe para completar el enunciado:

Si sumo un valor constante a una función \_\_\_\_\_ obtengo una función llamada afín. En la situación 1, sumé \_\_\_\_\_ a la función lineal  $c = 2s$  y obtuve la función afín  $h = 2s + 5$ .

## Situación 2 Trasladando una función lineal

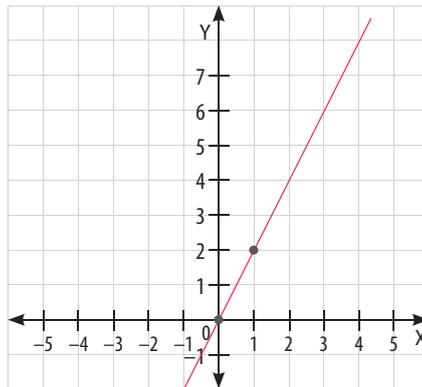
¿Qué ocurre con el gráfico de la función lineal  $c = 2s$  al sumarle 5 unidades?

Para responder, dibujaremos los gráficos de las funciones lineal y afín definidas en la situación 1 y los compararemos.

**Paso 1** Determina al menos dos puntos que pertenezcan a la función lineal  $c = 2s$ , represéntalos en el plano cartesiano y únelos para obtener la recta.

Para  $s = 0$ ,  $c = 0 \rightarrow (0, 0)$ .

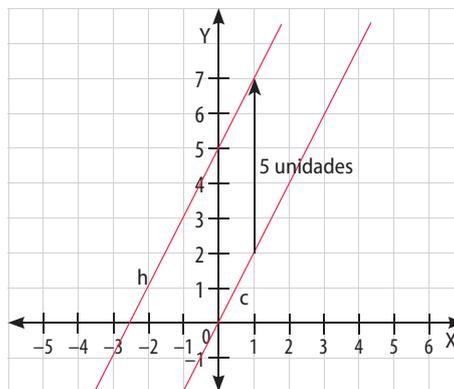
Para  $s = 1$ ,  $c = 2 \rightarrow (1, 2)$ .



### Ayuda

Recuerda que el punto  $(0, 0)$ , origen del plano cartesiano, siempre pertenece al gráfico de una función lineal.

**Paso 2** Haz lo mismo que en el paso 1, pero ahora para la función afín  $h = 2s + 5$ .



¿Qué puntos de la recta determinan las condiciones  $h = 0$  y  $s = 0$ ?  
¿Puedes dibujar la recta con ellos?

¿Pertenece el punto  $(0, 0)$  a la gráfica de la función afín?, ¿por qué?

**R:** Al sumar 5 unidades a la función lineal  $c = 2s$  se produce una traslación de la recta que la representa de 5 unidades en el sentido positivo del eje Y en el plano cartesiano, definiéndose la función afín  $h = 2s + 5$ .

Escribe para completar el enunciado:

Una función afín  $f(x) = mx + n$  puede definirse como una función lineal  $g(x) = \underline{\hspace{2cm}}$  trasladada en  $n$  unidades a lo largo del eje Y. Si  $n > 0$ , la traslación es en el sentido positivo del eje Y; y si  $n < 0$ , la traslación es en el sentido                      del eje Y.

Si para una función afín  $f(x) = mx + n$ , el valor de  $n = 0$ , ¿en qué tipo de función se transforma?

### ► Para concluir

Una **función afín** puede definirse como una función lineal trasladada en el plano cartesiano a lo largo del eje Y. La ecuación que la modela es de la forma

$$f(x) = y = mx + n$$

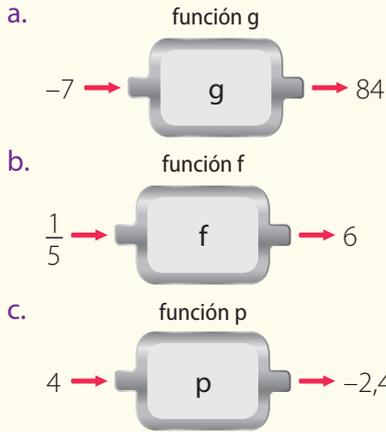
Al coeficiente  $m$  se le llama pendiente de la recta y a  $n$  se le llama coeficiente de posición.

### Argumenta y comunica

- Si se define un punto en el plano cartesiano, ¿cuántas rectas se pueden dibujar que pasen por él?
- Si se grafican dos puntos diferentes en el plano cartesiano, ¿siempre es posible dibujar una recta que pase por los dos puntos? ¿Cómo cambia tu respuesta si se dibujan tres puntos diferentes? Explica y ejemplifica.

Repaso

1. Indica la función lineal que está definida en cada máquina.



2. Representa en un mismo plano cartesiano las funciones lineales.

- |                          |                           |
|--------------------------|---------------------------|
| a. $f(x) = 7x$           | d. $q(x) = -3x$           |
| b. $p(x) = -0,25x$       | e. $g(x) = -\frac{1}{8}x$ |
| c. $h(x) = \frac{5}{2}x$ | f. $r(x) = 3,2x$          |

Práctica guiada

3. Analiza las siguientes funciones y determina si son lineales, afines o de otro tipo.

$f(x) = 1,5x + 15$       **Función afín**

- |                       |                              |
|-----------------------|------------------------------|
| a. $q(x) = 3x$        | e. $p(x) = 32 - 0,1x$        |
| b. $f(x) = 7$         | f. $f(x) = \frac{4}{5}x + 4$ |
| c. $n(x) = 33x - 1,2$ | g. $m(x) = 5 - 6x$           |
| d. $f(x) = -6x$       | h. $g(x) = x^2$              |

4. Determina, en cada caso, la función afín  $f(x) = mx + n$  que cumple las condiciones dadas.

$m = 4; f(2) = 7$

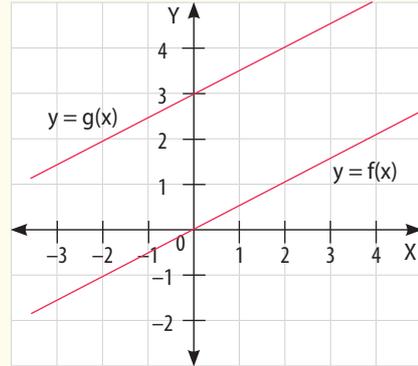
Reemplazando en  $f(x) = mx + n$ :       $7 = 4 \cdot 2 + n$   
 $n = -1$

Por lo tanto:  $f(x) = 8x - 1$

- |   |
|---|
| a. $n = -2; f(9) = 70$                    |
| b. $n = -5; f(1) = 0,4$                   |
| c. $m = 0,5; f(4) = 3$                    |
| d. $m = \frac{3}{4}; f(2) = -\frac{1}{2}$ |

5. Representa en el plano cartesiano la función afín que se obtiene al trasladar la función lineal a lo largo del eje Y tantas unidades como se indique.

$f(x) = 4x \rightarrow$  traslada 3 unidades y genera  $g(x)$ .



Se obtiene la función afín:  $g(x) = 4x + 3$ .

- |   |
|---|
| a. $m(x) = 2x \rightarrow$ traslada $-1$ unidad y genera $n(x)$ .           |
| b. $g(x) = -\frac{5}{4}x \rightarrow$ traslada 4 unidades y genera $j(x)$ . |
| c. $p(x) = 0,7x \rightarrow$ traslada $-3$ unidades y genera $q(x)$ .       |

6. Expresa las siguientes funciones afines en la forma  $y = mx + n$ .

$y - 9 = 3x$        $/+ 9$   
 $y = 3x + 9$

- |                            |
|----------------------------|
| a. $2x = 4y + 5$           |
| b. $y = 2(x + 8)$          |
| c. $-x + 8y = 4 - 5y$      |
| d. $5x = y - 8$            |
| e. $8 = \frac{2y + 6x}{3}$ |
| f. $2y = \frac{2}{3}x + 4$ |

7. Modela la función que permite responder la pregunta de cada situación.

Una montañista inicia un ascenso a la cumbre comenzando a una altura de 2400 metros sobre el nivel del mar. Cada día asciende 200 metros de altura. ¿Cuál es su altura  $h$  luego de  $x$  días?

Función:  $h = 200x + 2400$

- |  |
|--|
| a. Raquel le pidió prestados \$ 9000 a Francisco, y se comprometió a devolvérselos pagándole \$ 500 cada semana. ¿Cuál es su deuda $d$ luego de $s$ semanas? |
|--|

- b. Carmen asiste a un día de promociones en un restaurante. Por entrada, debe pagar \$ 3000, lo que le permite pagar luego \$ 300 por cada pedazo de pizza que coma. ¿Cuánto dinero gastará, si come  $x$  pedazos de pizza?
- c. Eva debe leer un libro de 400 páginas y se ha propuesto leer 30 páginas por día. ¿Cuántas páginas  $p$  le quedan por leer luego de  $x$  días?
- d. José comprará 80 dulces para servir el día de su cumpleaños. Además, regalará en una caja de sorpresas 8 dulces a cada invitado. ¿Cuántos dulces  $d$  debe comprar, si invita a  $n$  personas?
- e. Alicia venderá alfajores en su colegio. Gasta \$ 150 en preparar cada alfajor y los vende a \$ 200. Además, debe pagar \$ 5000 a la tesorería de su curso para poder venderlos. ¿Cuánto dinero  $d$  ganará si vende  $x$  alfajores?
- c. Carlos trabaja en una tienda donde recibe un sueldo de \$ 450 000, más \$ 1200 de comisión por cada artículo que vende.
- ¿Cuál es la función que representa la ganancia  $g$  de Carlos en un mes, según la cantidad  $a$  de artículos vendidos?
  - ¿Qué función representa la cantidad  $a$  de artículos vendidos por Carlos, según su ganancia mensual  $g$ ?
  - Analiza y compara las funciones anteriores. ¿Qué similitudes y qué diferencias observas? Explica.
- d. Cierta variedad de plantas de un vivero necesita cada vez menos agua a medida que va creciendo. Durante la primera semana de vida se riegan con un litro de agua y por cada semana que pasa se van quitando 50 ml. (Recuerda que 1 L = 1000 ml).
- ¿Qué función representa la cantidad  $a$  de mililitros de agua que se administra a la planta luego de  $s$  semanas?
  - ¿Al cabo de cuántas semanas requerirá solo 200 ml de agua?
  - ¿Qué ocurre con el riego luego de 20 semanas?

## Aplica

## 8. Lee cada situación y responde.

- a. Un reloj de arena contiene  $620 \text{ cm}^3$  de ella, y se sabe que la arena cae con una tasa de  $5 \text{ cm}^3$  por segundo.
- ¿Cuánto demora en caer toda la arena?
  - Si el reloj tiene solo una de sus partes con arena, y se da vuelta, ¿cuánto tiempo pasará hasta que cada parte tenga la misma cantidad de arena?
- b. Sara y Omar siguen un tratamiento médico. Ella toma 50 mg diarios de un medicamento y él, 120 mg. El médico le indica a Sara que aumente la dosis a razón de 0,5 mg por día, mientras que a Omar le recomienda reducir la dosis, bajando 0,2 mg por día.
- Determina, para cada uno, la función que indica la cantidad  $m$  de medicamento que deben tomar luego de  $x$  días, desde la visita al médico.
  - ¿Hay un día en el que ambos tomen la misma dosis? Si lo hay, determínalo y si no, justifica tu respuesta.

## Reflexiono

1. Considera la función afín de la forma  $g(x) = y = mx + n$ . Si  $n \neq 0$ , ¿las variables  $x$  e  $y$  tienen relación de proporcionalidad directa?, ¿por qué? Razona tu respuesta y ejemplifica con la función  $g(x) = 2x - 1$ .

## Refuerzo

1. Explica y ejemplifica cómo se define una función afín.
2. Dibuja en el plano cartesiano la función afín  $g(x)$  que se obtiene al restar 2 unidades a la función lineal  $f(x) = 4x$ .
3. Describe dos situaciones que puedan ser modeladas usando una función afín.

► **Propósito**  
 Describir y caracterizar la función afín.

## ¿Para qué?

Para poder comprender con mayor profundidad los fenómenos que modela la función afín, es muy importante saber interpretar el significado de los términos de la expresión que la define. Así, el estudio de lo que en la práctica representan la pendiente y el coeficiente de posición se vuelve indispensable.

## Palabras clave

Función afín

Pendiente

Coefficiente de posición

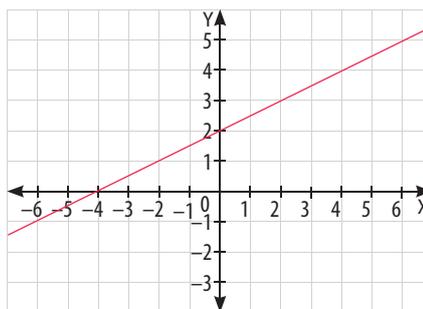
Variación

¿Cómo puedes saber a simple vista que el gráfico representa una función afín y no una función lineal?

¿Por qué puedes hacer este reemplazo? ¿Qué condiciones cumplen los puntos respecto de la ecuación de la función a la que pertenecen?

## ¿Cómo interpretar los parámetros de una función afín?

Observa la recta que está graficada en el plano cartesiano:



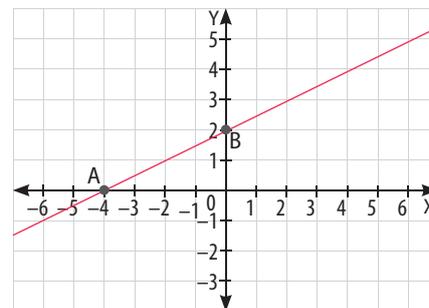
### Situación 1 Determinando su ecuación

¿Cuál es la ecuación de la función afín que está representada en el gráfico?

**Paso 1** Escribe las coordenadas de los puntos en que la recta corta los ejes del plano. Estos puntos son A y B, tales que:

$$A(-4, 0) \quad B(0, 2)$$

¿Por qué se seleccionaron estos dos puntos para determinar la ecuación de la función? ¿Podrían ser otros puntos?



**Paso 2** Reemplaza estos valores en la ecuación general de una función afín:

$$y = mx + n$$

Punto A	Punto B
$0 = m \cdot (-4) + n$	$2 = m \cdot 0 + n$
$4m = n$	$2 = n$

Al sustituir el valor  $n = 2$  en la ecuación  $4m = n$ , obtenemos:

$$4m = 2 \quad /: 4$$

$$m = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

Como determinaste los valores de la pendiente y del coeficiente de posición, ya puedes responder la pregunta inicial.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

Escribe para completar el enunciado:

El valor de  $n$ , que corresponde al \_\_\_\_\_ de la recta que representa a una función afín, indica la ordenada en que la recta corta al eje Y.

**Situación 2** Estudiando cómo varía en el plano

¿Cómo varía la función  $f(x) = y = \frac{1}{2}x + 2$  entre  $x = 0$  y  $x = 2$ , y entre  $x = 2$  y  $x = 6$ ?

Para responder, calculemos el cociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , en el que se definen las variaciones  $\Delta x$  y  $\Delta y$  entre dos puntos cualesquiera, P y Q, como:

$\Delta_x = x_Q - x_P$ : variación de la variable independiente x.

$\Delta_y = y_Q - y_P = f(x_Q) - f(x_P)$ : variación de la variable dependiente y.

**Paso 1** Analiza los intervalos de interés.

<p>Entre <math>x = 0</math> y <math>x = 2</math>:</p>	<p>Entre <math>x = 2</math> y <math>x = 6</math>:</p>
<p>Identifica los valores:</p> $x_A = 0 \rightarrow y_A = f(x_A) = 2$ $x_B = 2 \rightarrow y_B = f(x_B) = 3$	<p>Identifica los valores:</p> $x_B = 2 \rightarrow y_B = f(x_B) = 3$ $x_C = 6 \rightarrow y_C = f(x_C) = 5$

**Paso 2** Calcula el valor de  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  en cada intervalo.

<p>Intervalo <math>[2, 4]</math></p> $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 2}{2 - 0} = \frac{1}{2}$	<p>Intervalo <math>[2, 6]</math></p> $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \frac{5 - 3}{6 - 2} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$
--	--

El cociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  es el mismo para ambos intervalos. Por lo tanto:

**R:** La función afín varía de la misma forma en los intervalos, al recorrer 2 unidades en el eje X, recorre 1 unidad en el eje Y.

Escribe para completar el enunciado:

El cociente entre las variaciones de las ordenadas y de las abscisas,  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ , es un valor constante en una función \_\_\_\_ y equivale numéricamente al valor de su pendiente.

**Ayuda**

Observa que el valor de la variable y para un valor de x dado, equivale al valor de f(x). De hecho, un punto cualquiera perteneciente a la recta que representa a la función se puede escribir como (x, y) o (x, f(x)), indistintamente.



¿Cómo puedes calcular los valores de la función f evaluada en  $x_A$ ,  $x_B$ , y  $x_C$ ?  
Cálculalos en tu cuaderno.

¿Cambiaría esta respuesta si se hubieran hecho los cálculos en otro intervalo?  
Elige un intervalo y calcula el valor de  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .

**Para concluir**

En una función afín  $f(x) = y = mx + n$ , su **pendiente m** indica la variación en el valor de las ordenadas para un incremento de 1 unidad en el valor de las abscisas; y su **coeficiente de posición n** indica la ordenada en que la recta que representa a la función corta al eje Y.

**Argumenta y comunica**

“En la función afín  $f(x) = y = 0,5x + 2$ , el valor de la pendiente nos indica que al variar en 1 unidad la abscisa, la ordenada varía en 0,5 unidades”. Acerca de esta afirmación, indica si es correcta y redacta en tu cuaderno una afirmación similar para la función  $g(x) = y = 1,5x - 7$ .

Repaso

1. Completa la tabla de valores considerando las funciones  $f(x) = -0,7x$  y  $g(x) = 12x$ .

x	-4	-1	0	3	7
f(x)					
g(x)					

2. Expresa, en cada caso, la traslación que fue aplicada a la función lineal  $y = f(x)$  para obtener la función afín  $y = g(x)$ .

- a.  $f(x) = -9x \rightarrow g(x) = -9x - 3$   
 b.  $f(x) = 4,6x \rightarrow g(x) = 4,6x + 1$   
 c.  $f(x) = \frac{1}{6}x \rightarrow g(x) = \frac{1}{6}(x + 12)$

Práctica guiada

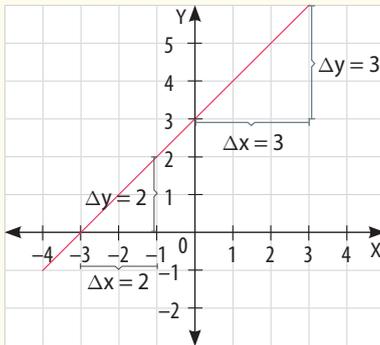
3. Calcula la variación de cada función en el intervalo dado.

$f(x) = -2x - 7$ , entre  $x_1 = -2$  y  $x_2 = 3$ .

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{-13 - (-3)}{3 - (-2)} = \frac{-10}{5} = -2$$

- a.  $f(x) = -x + 1$ , entre  $x = -5$  y  $x = -1$ .  
 b.  $g(x) = \frac{1}{2} - x$ , entre  $x = -2$  y  $x = -1$ .  
 c.  $p(x) = -6,5x$ , entre  $x = 3$  y  $x = 7$ .
4. Representa gráficamente las variaciones  $\Delta x$  y  $\Delta y$  de cada función, y calcula su cociente.

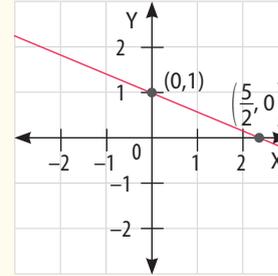
$f(x) = x + 3$ ; entre  $x = -3$  y  $x = -1$ , y entre  $x = 0$  y  $x = 3$ .



En ambos intervalos se cumple que  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$ .

- a.  $p(x) = 2x - 4$ ; entre  $x = -1$  y  $x = 2$ , y entre  $x = 1$  y  $x = 2$ .  
 b.  $q(x) = -3x$ ; entre  $x = -2$  y  $x = 0$ , y entre  $x = 0$  y  $x = 1$ .  
 c.  $r(x) = -0,5x - 1$ ; entre  $x = -6$  y  $x = -2$ , y entre  $x = 0$  y  $x = 4$ .

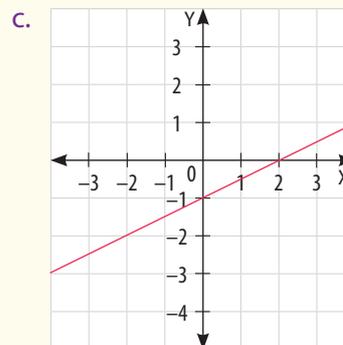
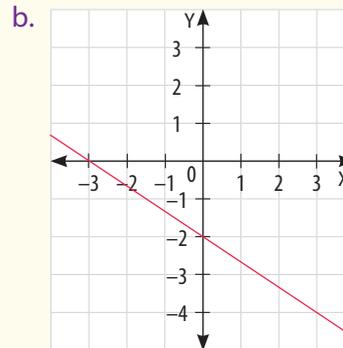
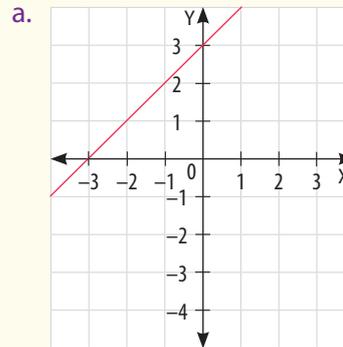
5. Identifica la función afín representada en cada gráfico.



La recta corta al eje Y en el punto  $(0, 1)$ , por lo tanto,  $n = 1$ .

Al reemplazar este valor y los del otro punto en la ecuación  $y = mx + n$ , se obtiene:

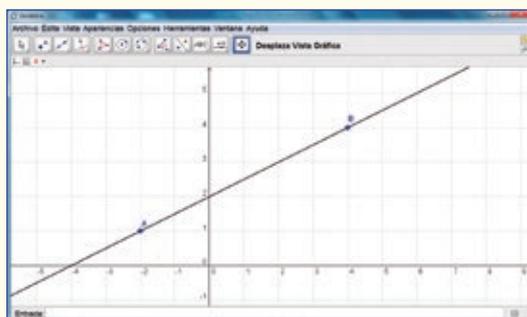
$$0 = m \cdot \frac{5}{2} + 1 \rightarrow m = -\frac{2}{5} \Rightarrow y = -\frac{2}{5}x + 1$$



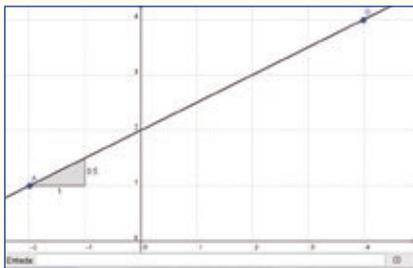
## Aplica

## 6. Realiza las actividades en el software GeoGebra (en esta aplicación usaremos la versión 4.0).

- Abre el programa GeoGebra. Haz clic en el menú "Vista" y selecciona la opción "Cuadrícula".
- Para graficar una recta a partir de dos puntos, por ejemplo  $A(-2, 1)$  y  $B(4, 4)$ , escribe en la casilla de entrada lo siguiente:  y presiona la tecla Enter. Luego, realiza el mismo procedimiento para graficar el punto B.
- Haz clic en el ícono  y selecciona la opción "Recta que pasa por Dos Puntos", luego haz clic sobre ambos puntos. Esto es lo que verás:



- Ahora, selecciona el ícono  y elige la opción "Pendiente", haz clic en la recta y podrás ver esto:



Se observa que el valor de la pendiente es 0,5 y, como la recta corta al eje Y en  $(0, 2)$ , entonces la expresión que define la función es  $f(x) = 0,5x + 2$ .

En seguida, usa GeoGebra para determinar la ecuación de la recta definida por cada par de puntos.

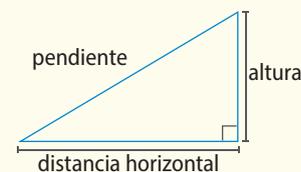
- a.  $A(-4, -2)$  y  $B(8, 1)$       b.  $A(-1, 5)$  y  $B(3, -3)$

## Reflexiono

1. ¿Qué significa que la pendiente de una función afín  $f(x)$  sea mayor que la de otra,  $g(x)$ ? Piénsalo y redacta una respuesta escrita.
2. Considera rectas definidas por la función afín  $f(x) = y = mx + n$ . ¿Qué ocurre con la inclinación de la recta si la pendiente  $m$  disminuye a la mitad? ¿Cómo lo sabes? Explica y ejemplifica.

7. Una empresa minera está perforando una zona en la que espera encontrar un yacimiento de cobre. Tras 2 semanas de avance, el fondo de la galería se encuentra 300 metros sobre el nivel del mar; y tras 8 semanas, se encuentra a 450 metros bajo el nivel del mar. Si la perforación se realizó a una tasa constante, ¿cuántos metros se excavaron por semana?
8. **Conecta con el Urbanismo.** La norma chilena que regula la accesibilidad de personas con discapacidad señala que las pendientes máximas de una rampa dependerán del cociente entre la altura y la distancia horizontal.

De acuerdo a la longitud que esta posea, la pendiente debe ajustarse a ciertos valores:



Distancia horizontal (m)	Pendiente
Igual o menor que 2	0,12
Mayor que 2	0,08

Determina si las siguientes rampas cumplen o no con la norma.

- a. Distancia horizontal: 12 m; altura: 1,5 m.
  - b. Distancia horizontal: 2 m; altura: 0,8 m.
  - c. Distancia horizontal: 1,6 m; altura: 1 m.
9. **Desafío.** Dados los vértices del  $\triangle ABC$  en el plano cartesiano  $A(-1, -2)$ ;  $B(1, 5)$  y  $C(7, -1)$ , calcula la pendiente de cada una de las rectas que representan los lados del triángulo. Compara tu resultado con el de tus compañeros o compañeras. ¿Obtuvieron lo mismo?
  10. **Describe el procedimiento.** Considera la función afín  $f(x)$ , de la cual se sabe que  $f(p) = 5$  y  $f(2) = q$ . Determina posibles valores para  $p$  y  $q$ , de manera que la pendiente de  $f(x)$  sea:
 

3	-2	0,8.
---	----	------

Explica paso a paso el procedimiento que ocupaste para llegar al resultado.

## Refuerzo

1. Explica el procedimiento que utilizarías para determinar la ecuación de una función afín representada en el plano cartesiano.
2. Indica el cociente que ocuparías para calcular la variación de una función en dos intervalos distintos.
3. Determina el cociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  para los puntos pertenecientes a una misma recta  $P(6, -3)$  y  $Q(2, 5)$ .

► Propósito

Analizar y graficar la función afín.

¿Para qué?

Otros aspectos que permiten profundizar en el estudio de la función afín y de las situaciones que modela son las condiciones que deben cumplir los puntos que pertenecen a su gráfico y la interpretación que se puede dar de los puntos que no están en él.

Palabras clave

Función afín

Pendiente

Coficiente de posición

Recta

Plano cartesiano

Desigualdad

Ayuda

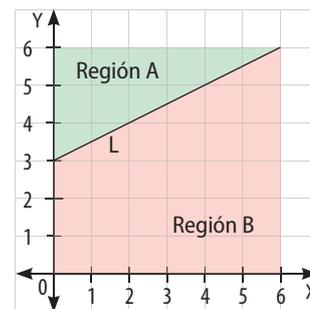
- Los puntos  $(x, y)$  que pertenecen a la región A cumplen  $y > 0,5x + 3$ .
- Los puntos  $(x, y)$  que pertenecen a la región B cumplen  $y < 0,5x + 3$ .

El punto  $(0, 0)$ , ¿está en, sobre o bajo la recta L?

El puntaje obtenido por el jugador, ¿es positivo, negativo o nulo?

## ¿Cómo analizar y graficar una función afín?

Un juego consiste en lanzar dardos sobre un blanco definido por el subconjunto del plano cartesiano que se indica en la figura. Si el dardo da en algún punto del segmento de recta L, el jugador gana 5 puntos; si cae en la región A, pierde 1 punto y si cae en la región B, pierde 2 puntos.



### Situación 1 Verificando sus puntos

¿Qué puntaje obtuvo un jugador que lanzó cuatro veces el dardo, cayendo en los puntos  $P(3, 4)$ ,  $Q(2; 4,5)$ ,  $R(4, 5)$  y  $S(5, 5)$ ?

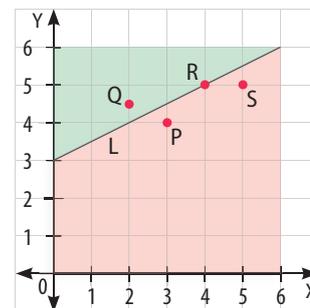
Para responder, determinamos que la ecuación de la recta que define al segmento L es  $y = 0,5x + 3$ .

**Paso 1** Completa la tabla, evaluando los puntos en ambos lados de la expresión  $y = 0,5x + 3$  e indicando si se verifica o no la igualdad.

Punto $(x, y)$	y	Signo de igualdad o desigualdad	$0,5x + 3$
$P(3, 4)$	4	<	4,5
$Q(2; 4,5)$	4,5	>	4
$R(4, 5)$	5	=	5
$S(5, 5)$	5	<	5,5

**Paso 2** Grafica los puntos y visualiza su ubicación respecto de L en el plano cartesiano.

¿Este gráfico te permite confirmar que los puntos que están sobre L cumplen  $y > 0,5x + 3$  y que los que están bajo L cumplen  $y < 0,5x + 3$ ?



Escribe para completar los enunciados:

El punto \_\_\_\_\_ se encuentra en L.  
 Los puntos \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_ se encuentran bajo L, en la región B.  
 El punto \_\_\_\_\_ se encuentra sobre L, en la región A.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

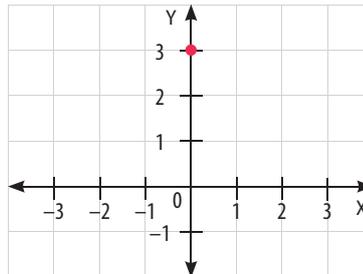
R: \_\_\_\_\_

## Situación 2 Graficando en el plano cartesiano

¿Cuál es el gráfico de la recta que representa a la función afín  $f(x) = -2x + 3$ ?

Para responder, asociaremos los términos numéricos de la expresión que define la función con los parámetros de la recta que la representa en el plano cartesiano, vale decir, con su pendiente y su coeficiente de posición.

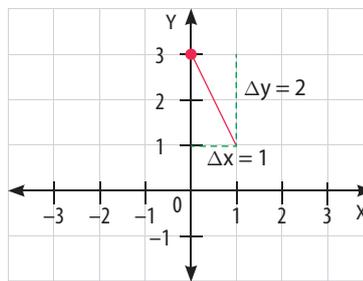
**Paso 1** Como se puede asociar el término 3 con el coeficiente de posición de la recta, indica en el plano la ordenada 3 en el eje Y, es decir, marca el punto  $(0, 3)$ .



### Ayuda

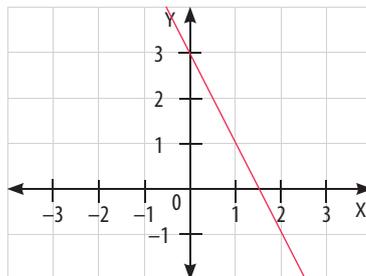
Como el coeficiente de posición indica el punto en que la recta corta al eje Y, necesariamente la abscisa de este punto es 0.

**Paso 2** Como se puede asociar el término  $-2$  con la pendiente de la recta, indica en el plano cartesiano que para un incremento de 1 unidad en el valor de la abscisa, el valor de la ordenada disminuye en 2 unidades.



Por lo tanto, el gráfico es:

R:



¿De qué otra forma podrías haber obtenido el gráfico de la función afín?

### Para concluir

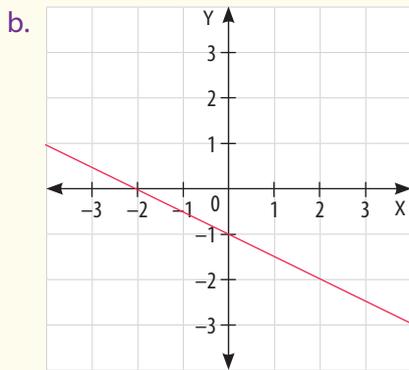
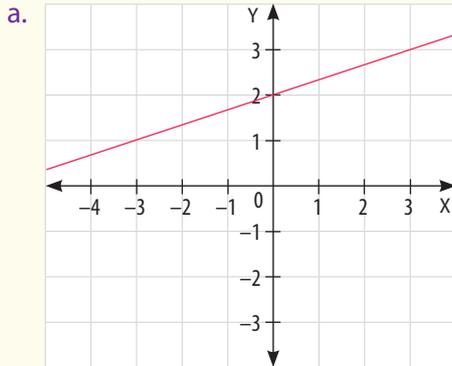
- Es posible **graficar una función afín** definida por  $f(x) = y = mx + n$ , asociando sus términos numéricos con el valor de la pendiente y del coeficiente de posición de la recta que la representa en el plano cartesiano y aplicando las definiciones de estos parámetros geométricos.
- Un punto  $(a, b)$  **pertenece al gráfico de una función afín** definida por  $f(x) = y = mx + n$ , si se verifica la igualdad  $b = m \cdot a + n$ .

### Argumenta y comunica

Explica qué representa la desigualdad  $y < 7x - 5$  en el plano cartesiano, considerando que  $x$  representa la abscisa y  $y$  la ordenada. Discute con un compañero o una compañera qué ocurre con esta representación si se suman 6 unidades al lado derecho de la desigualdad. ¿Y si se restan 6 unidades, en lugar de sumarlas?

Repaso

1. Identifica la expresión que define la función afín representada en el plano cartesiano.



2. Determina cómo varía la gráfica de cada función, calculando el cociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  en el intervalo que se indica.

- a.  $f(x) = -3x + 1$ , entre  $x = 2$  y  $x = 7$ .
- b.  $g(x) = 2x - 9$ , entre  $x = -2$  y  $x = 1$ .
- c.  $p(x) = x + 2$ , entre  $x = -4$  y  $x = -1$ .
- d.  $q(x) = 4x - 6$ , entre  $x = 0$  y  $x = 3$ .

Práctica guiada

3. Determina si los puntos pertenecen o no al gráfico de la función  $f(x) = y = \frac{3}{4}x + \frac{1}{2}$ .

Punto  $O(6, 5)$ .

Al reemplazar el valor de la abscisa en la función se obtiene:

$$y = \frac{3}{4} \cdot 6 + \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 5$$

Por lo tanto, el punto sí pertenece al gráfico.

- a.  $P(-2, -2)$
- b.  $Q(10, 8)$
- c.  $R(-6, -4)$
- d.  $S(-3, 5)$

4. Calcula el valor de la abscisa u ordenada de manera que cada punto pertenezca al gráfico de la función  $g(x) = -12x + 7$ .

$$J(3, y) \Leftrightarrow y = -12 \cdot 3 + 7$$

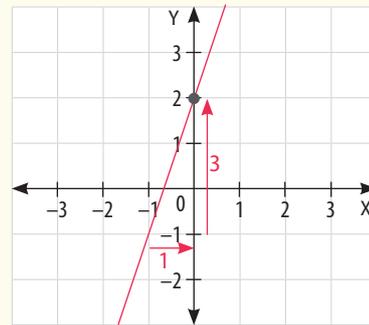
$$y = -29$$

El punto que pertenece al gráfico es  $J(3, -29)$ .

- a.  $K(x, 19)$
- c.  $M(x, 7)$
- b.  $L(-\frac{1}{3}, y)$
- d.  $N(\frac{9}{5}, y)$

5. Dibuja en el plano cartesiano los gráficos de las funciones  $f(x) = mx + n$ , considerando los valores de  $m$  y  $n$  dados.

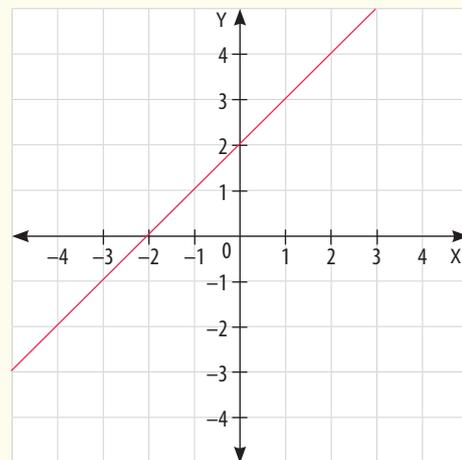
$$m = 3 \text{ y } n = 2.$$



- a.  $m = -2$  y  $n = 0,5$ .
- b.  $m = 0,25$  y  $n = -1$ .
- c.  $m = -3,5$  y  $n = -3$ .

6. Grafica la función afín que cumple con las condiciones dadas.

Las intersecciones con los ejes son  $(0, 2)$  y  $(-2, 0)$ .

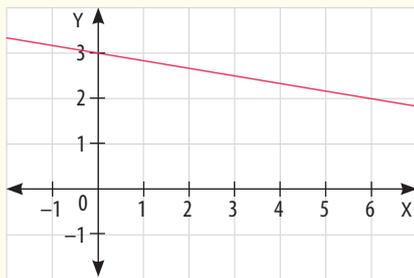


- a. Tiene igual pendiente que  $y = -x + 5$  y contiene el punto  $(1, -4)$ .
- b. Su pendiente es el inverso aditivo de  $-2$  y la intersección con el eje  $Y$  es  $1,5$ .

## Aplica

## 7. Resuelve los problemas.

- a. Los vértices de un paralelogramo son los puntos  $A(1, 2)$ ,  $B(6, 2)$ ,  $C(8, 4)$  y  $D(3, 4)$ .
- Ubícalos en el plano cartesiano.
  - Determina las expresiones de las cuatro funciones cuyas rectas contienen los lados del paralelogramo.
  - Analiza las pendientes de las rectas y relaciónalas de a pares. ¿Cómo son entre sí las pendientes de los lados opuestos? Explica y enuncia una regla.
- b. Se dice que 3 o más puntos del plano son colineales si pertenecen a una misma recta. Verifica si los tríos de puntos son o no colineales:
- $A(1, 6)$ ;  $B(4, -5)$  y  $C(3, 9)$ .
  - $D(2, -3)$ ;  $E(4, -5)$  y  $F(9, -10)$ .
  - $G(-4, 0)$ ;  $H(0, 7)$  e  $I(3, 12)$ .
- c. Considera la recta:

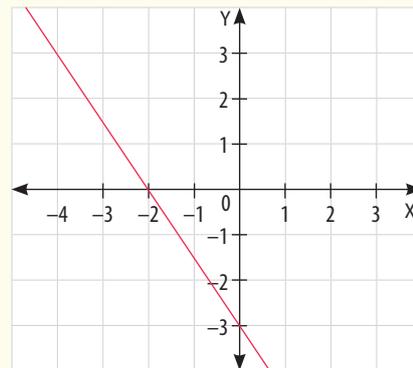


¿En qué punto la recta interseca al eje X? Explica cómo determinas este punto.

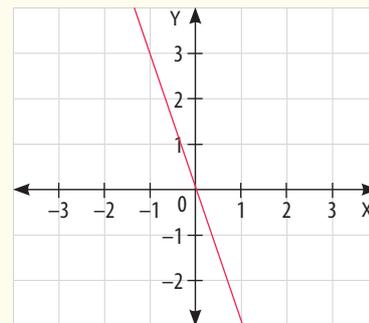
- d. Analiza la expresión  $5x + 3y = 15$ .
- Escríbela de la forma  $y = mx + n$ .
  - Grafica la función así definida entre  $x = -1$  y  $x = 4$  y determina las coordenadas de sus puntos de intersección con los ejes.

- Escribe la expresión de la forma  $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ . ¿Qué relación tienen los valores de  $p$  y  $q$  con los puntos donde la recta corta los ejes X e Y? Escribe una conclusión.

## 8. Describe el procedimiento. Considera la recta:



Explica el procedimiento que aplicarías para trazar dos rectas paralelas a ella. Compara tu respuesta con la de un compañero o una compañera. ¿Usaron la misma estrategia?

9. Descubre el error. María graficó en el plano cartesiano  $y = -3x - 1$ .

¿Hizo lo correcto? ¿En qué se equivocó? Comenta y corrige el error en tu cuaderno.

## Reflexiono

1. Si consideras la desigualdad  $y \geq 4,5x + 1$ , ¿qué región del plano determinan sus soluciones? ¿Cuál es la diferencia entre esta región y la que define la desigualdad  $y > 4,5x + 1$ ? Justifica tu respuesta.
2. Analiza la expresión  $y = -1 + 5$ . ¿Define una recta que representa a una función afín?, ¿por qué? ¿Puedes graficarla? Explica y desarrolla en tu cuaderno.

## Refuerzo

1. Explica cómo determinas si un punto pertenece al gráfico de una función. Ejemplifica usando la función afín definida por  $f(x) = 4x + 10$  y el punto  $P(2, 18)$ .
2. Señala los diferentes procedimientos que puedes aplicar para graficar una función afín.
3. Indica un punto que pertenezca al gráfico de la función  $f(x) = 2,5x - 3$ , uno que esté en el subconjunto del plano que está sobre ella y uno que esté en el subconjunto del plano que está bajo ella.

► Propósito

Modelar situaciones usando las funciones afín y lineal.

¿Para qué?

Se puede hacer uso de las funciones afín o lineal para comprender fenómenos como el comportamiento de un gas al ser calentado; o sociales, como el cálculo del interés simple.

Palabras clave

Función afín

Función lineal

Pendiente

Coefficiente de posición

Modelo

Interés simple

Ampliando

Las tres magnitudes físicas que se ocupan en esta lección para describir el comportamiento de un gas son: temperatura (que se mide en grados Celsius), volumen (que se mide en mililitros) y presión (que se considera constante e igual a la presión atmosférica).

¿Obtendrías el mismo valor para la pendiente si ocupas otros pares de valores de la tabla?

Comprueba tu respuesta usando los puntos C y D.

Aproximadamente, ¿en qué punto corta la recta al eje X? ¿Cómo puedes saberlo?

## ¿Cómo modelar situaciones usando las funciones afín o lineal?

La siguiente tabla contiene algunos datos de la variación del volumen de un gas al aumentar su temperatura, manteniendo su presión constante.

Medición	Temperatura (°C)	Volumen (ml)
A	0	20,0
B	50	23,7
C	100	27,4
D	150	31,1

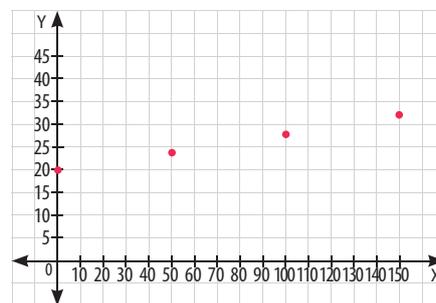
### Situación 1 Usando datos de una tabla

¿Qué expresión permite modelar los datos de la tabla?

Paso 1

Gráfica en forma aproximada los puntos. Considera la temperatura T como variable independiente y el volumen V como variable dependiente.

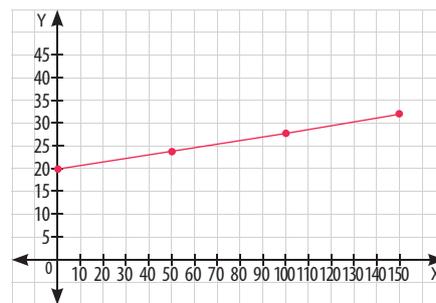
A(0, 20)      B(50; 23,7)  
C(100; 27,4)      D(150; 31,1)



Paso 2

Verifica si es posible trazar una recta que pase por los cuatro puntos.

¿Esta recta representa a una función lineal o afín?  
¿Cómo lo sabes?



Paso 3

Determina la expresión que define la función afín que modela los puntos graficados.

Coefficiente de posición	Pendiente
La recta corta al eje Y en un punto cuya ordenada es 20, por lo tanto, el coeficiente de posición es 20.	El valor del cociente $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ considerando los puntos A y B es: $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{23,7 - 20}{50 - 0} = \frac{3,7}{50} = 0,074$

Completa el enunciado:

El coeficiente de posición de la recta que representa a la función afín es \_\_\_\_\_ y su pendiente es \_\_\_\_\_.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R: \_\_\_\_\_

## Situación 2 Usando información conocida

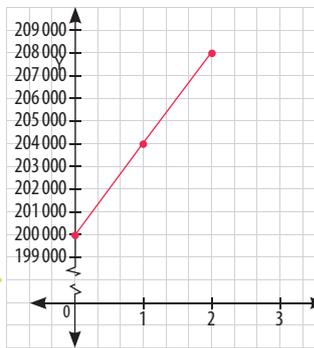
Si un banco ofrece un plan con una tasa de interés anual simple del 2% y a principios del año se invierten \$ 200 000, ¿qué función modela la variación en el tiempo del capital invertido?

Para responder, primero reconocemos que la cantidad de años transcurridos  $n$  es la variable independiente y el capital  $C$  es la variable dependiente.

**Paso 1** Calcula el capital existente al finalizar el primer y el segundo año.

n (años)	C (\$)
0	200 000
1	$200\,000 + 0,02 \cdot 200\,000 = 200\,000 + 4\,000 = 204\,000$
2	$204\,000 + 0,02 \cdot 200\,000 = 204\,000 + 4\,000 = 208\,000$

**Paso 2** Grafica en el plano cartesiano los valores calculados en el paso anterior e intenta trazar una recta que pase por los tres puntos definidos, A, B y C.



**Ayuda**

Esta marca indica que se ha hecho un acercamiento al sector del plano que estás analizando.

**Paso 3** Determina la expresión que define la función afín que modela los puntos graficados.

Coefficiente de posición:	Pendiente:
La recta corta al eje Y en un punto cuya ordenada es 200 000, por lo tanto, el coeficiente de posición es 200 000.	$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{204\,000 - 200\,000}{1 - 0} = 4\,000$

Completa el enunciado:

La expresión que define la función que modela el interés simple es  $C(n) = \underline{\hspace{2cm}}$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Ayuda**

Recuerda que el interés simple consiste en agregar un monto fijo al capital existente. Este monto fijo corresponde a un porcentaje dado del monto invertido inicialmente y se le llama tasa de interés.

**Ayuda**

Si  $n$  representa un valor dado, entonces  $(n + 1)$  representa su sucesor. Así por ejemplo, si  $n$  representa el año 5,  $(n + 1)$  representa el año 6.

¿Cuál es el valor de  $C(1) - C(0)$ ? ¿Y de  $C(2) - C(1)$ ? Para un año  $n$  cualquiera, ¿cuál es el valor de  $C(n + 1) - C(n)$ ?

### ► Para concluir

La **función afín**, al igual que la función lineal, es una **herramienta útil para modelar muchas situaciones** de nuestro entorno. Para hacer este modelamiento se debe determinar la expresión que define la función afín adecuada a partir del valor de la pendiente y del coeficiente de posición de la recta que la representa en el plano cartesiano.

### Argumenta y comunica

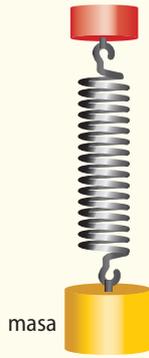
¿Cómo usarías los modelos deducidos en esta lección para predecir resultados? Explica y comunica tus conclusiones al curso. Adicionalmente, responde:

- ¿Qué volumen tendría, aproximadamente, el gas de la situación 1 si se encuentra a 75 °C?
- ¿Tras cuántos años el capital de la situación 2 alcanzará los \$ 272 000?

Repaso

- Identifica si cada ecuación corresponde a la de una recta que representa una función lineal o una función afín. Además, indica su pendiente y coeficiente de posición.
  - $y = 8x$
  - $y = 9x + 1$
  - $y = 0,5x$
  - $y = 7 - 2x$
  - $10x - 8y = 3$
  - $\frac{3x - 7y}{2} = 11$
- Determina la expresión que representa a la recta que contiene cada par de puntos.
  - $E(-5, 0)$  y  $F(2, -7)$ .
  - $G(1, 8)$  y  $H(4, -1)$ .
  - $K(-8, 5)$  y  $L(3, 3)$ .
  - $O(1, 2)$  y  $P(3, 10)$ .
- Grafica las funciones en un mismo plano cartesiano.
  - $g(x) = -1,5x + 0,5$
  - $h(x) = \frac{7}{4}x + 1$
  - $p(x) = -2x + 3,5$

- Para medir la deformación que experimenta un resorte, un estudiante fijó bloques de diferentes masas en su extremo libre, como muestra la figura. Luego, registró los valores en una tabla:



Masa (g)	500	1200	1500	2000
Deformación (cm)	0,05	0,12	0,15	0,20

- Con los datos representados, ¿es posible modelar una función lineal o una afín?, ¿por qué?
- ¿Qué expresión define la función que relaciona ambas variables?

Práctica guiada

- Define las dos variables involucradas en cada situación y la función afín o lineal que las relaciona. El sueldo que recibe un trabajador está determinado por un sueldo fijo de \$ 400 000 al mes y de \$ 3000 por cada hora extra que trabaja.

$x$ : cantidad de horas.  
 $S(x)$ : sueldo total, en pesos.  
 $S(x) = 3000x + 400\,000$

- Una fábrica de camisas tiene un costo total de producción que incluye los gastos fijos equivalentes a \$ 350 000, más \$ 2000 por cada camisa que se produce.
- Adela paga mensualmente \$ 280 000 a una empresa inmobiliaria por el dividendo del departamento que se compró.
- Un plan de telefonía celular impone un cargo fijo mensual de \$ 5000 más un cobro de \$ 30 por minuto hablado.

- Elabora una tabla de valores para cada situación y responde.

La expresión que representa las ventas diarias de una empresa durante el mes de marzo está dada por:  $V(x + 1) - V(x) = 3$ , donde  $V$  es la cantidad de artículos vendidos y  $x$  el número de día del mes. Si el 1 de marzo se venden 18 artículos, ¿cuántos artículos se venderán el día 6 de ese mismo mes?

$x$	$V(x + 1) - V(x) = 3$
1	$V(2) - 18 = 3 \Leftrightarrow V(2) = 21$
2	$V(3) - 21 = 3 \Leftrightarrow V(3) = 24$
3	$V(4) - 24 = 3 \Leftrightarrow V(4) = 27$
4	$V(5) - 27 = 3 \Leftrightarrow V(5) = 30$
5	$V(6) - 30 = 3 \Leftrightarrow V(6) = 33$

El día 6 se venderán 33 artículos.

- Para una cierta variedad de árbol, la ecuación que modela el crecimiento del anillo central de su tronco está dada por:  $C(x + 1) - C(x) = 4$ , donde  $C$  representa el crecimiento del diámetro (en mm) y  $x$  el tiempo (en años). Si el primer año el árbol tiene un anillo central de 20 mm, ¿cuál será su diámetro luego de 8 años?
  - Un deportista realiza abdominales de acuerdo a la expresión  $A(x + 1) - A(x) = 60$ , donde  $A$  representa la cantidad de abdominales que realiza diariamente y  $x$  el día considerado desde el inicio de las sesiones. Si el primer día comenzó realizando 30 abdominales, ¿cuántos hará el quinto día?
- Modela cada situación mediante una ecuación de la forma  $f(t + 1) - f(t) = c$  e indica la condición inicial.

La dosis de medicamento que debe tomar una persona el primer día es de 90 mg y luego debe ir disminuyendo la dosis en 4 mg diarios.

$f(t + 1) - f(t) = -4$ , donde  $f(1) = 90$   
 y  $t$  es el día considerado.

- El primer día de febrero, la cantidad de turistas en un hotel fue de 200 y cada día disminuyó en 4 personas.
- El precio del arriendo de una cabaña por dos días es de \$ 100 000.
- En una fábrica de zapatos, el primer día del mes se elaboran 150 pares y cada día aumenta la producción en 3 pares.
- Un automóvil cuesta \$ 3 800 000 y reduce su valor en \$ 120 000 por cada año de uso.

## Aplica

## 8. Resuelve los problemas.

- Una cuenta de electricidad incluye un cobro fijo de \$ 2000 más \$ 88 por cada kilowatt consumido.
  - Determina la función que representa el costo final de la cuenta.
  - Determina la cantidad de kilowatts que se pueden consumir en un mes, si se destinan \$ 12 560 a electricidad.
- Por arrendar un automóvil, una empresa cobra una cuota fija de \$ 40 000 más \$ 500 por cada kilómetro recorrido.
  - Determina la función que representa el costo de arrendar un automóvil, según el número de kilómetros recorridos.
  - Otra empresa de arriendo cobra \$ 1600 por kilómetro recorrido en el automóvil, sin cuota fija.
    - ¿Cuántos kilómetros se deben recorrer, como máximo, para que el costo final en la segunda empresa sea menor que en la primera?
- Una planta crece un cierto tramo en su primer año y luego va creciendo en tramos de longitud constante, dejando marcas en

el tronco. Al final del séptimo año, la planta medía 21 cm; y al final del octavo, su altura era de 23,5 cm.

- Determina la función que relaciona la altura de la planta y la cantidad de años transcurridos desde el primero.
  - Al cabo de cuantos años desde el primero la planta medirá 33 cm?
- Un estanque de agua completamente lleno comienza a vaciarse a un ritmo constante. Tras 13 minutos de iniciado el vaciado queda la mitad de agua y luego de 25 minutos, solo quedan 7 litros.
    - ¿Cuántos litros por minuto pierde el estanque?
    - ¿Cuál es su capacidad total?
    - Considera la función que relaciona la cantidad de minutos transcurridos con la cantidad de agua que queda en el estanque. ¿Cuál es la pendiente de la recta que la representa? ¿Es creciente o decreciente?, ¿por qué? Justifica tu respuesta.
- Conecto con la Química.** De la ley de Charles, establecida por el científico francés Jacques Charles a finales del siglo XVIII, se puede deducir que la relación entre el volumen  $V$  (medido en mililitros) y la temperatura  $T$  (medida en grados Celsius) de un gas de baja densidad puede ser modelada aproximadamente con una función afín. Considera que para un gas dado esta función es:

$$V(T) = 0,074T + 20$$

Determina el valor de temperatura para la que el volumen es 0. Averigua en internet o en algún texto científico qué significado tiene este valor en la teoría de los gases.

## Reflexiono

- ¿Qué características tiene una situación que puede ser modelada usando una función afín? Piénsalo y detalla tu respuesta en tu cuaderno.
- Considera la ecuación de la forma  $f(x + 1) - f(x) = a$ . ¿Qué significado tiene el valor de  $a$ ? ¿Con qué concepto de los ya estudiados está relacionado? Razona y establece una regla.

## Refuerzo

- Indica por escrito los parámetros que definen la recta que representa a una función afín.
- Describe el procedimiento que aplicas para resolver problemas usando una función afín como modelo.
- Considera la ecuación de la recta  $y = mx + n$ . ¿Cómo determinas los puntos de corte con los ejes cartesianos? Explica.

# Energía eléctrica

## ¿Cuántos kilowatt-hora consume tu hogar?

El mercado eléctrico en Chile está compuesto por las actividades de generación, transmisión y distribución de suministro eléctrico. En lo que se refiere a la industria eléctrica de nuestro país, participan aproximadamente un total de 40 empresas generadoras, 10 empresas transmisoras y 31 empresas distribuidoras.

El año 2013, el Ministerio de Energía publicó una resolución que fija el estándar mínimo de eficiencia energética que deberán tener las ampolletas a partir de diciembre del año 2015 y, además, establece que solo se podrá comercializar este tipo de ampolletas. Con la implementación de esta norma se busca disminuir el consumo innecesario de energía en hogares y lugares de trabajo.

A continuación, se muestra en la tabla el consumo y gasto mensual aproximado para algunos artefactos que puedes encontrar en tu casa, considerando su uso durante una hora.

Artefacto	Horas de uso	Consumo (kWh)	Costo (\$)
Microondas	1	0,8	70
Hervidor eléctrico	1	2,24	196,5
Televisor	1	0,11	9,7
Secador de pelo	1	1,78	156,6
Equipo de música	1	0,008	0,7
Computador	1	0,11	9,4
Estufa eléctrica	1	0,5	44
Plancha	1	1,2	105,5



### ¡NO LO OLVIDES!

La energía eléctrica se puede calcular como el producto entre la potencia eléctrica (kW) y el tiempo, expresado en horas. Su unidad de medida es el kilowatt-hora (kWh).

Si cada hogar chileno reemplazara solo una ampollita convencional por una eficiente, el consumo de energía del país tendría una disminución cercana a 300 GW por año, equivalente al consumo de una ciudad de aproximadamente 500 000 habitantes, lo que significaría un ahorro cercano a los US\$ 60 millones anuales.

### Sabías que...

Si reemplazas 9 ampollitas convencionales por 9 eficientes se produce una disminución en el consumo mensual de energía eléctrica de 59 kWh a 12 kWh, lo que significa un ahorro aproximado de \$ 4828 al mes.



### Actividad grupal

Reúnanse en grupos de 3 o 4 integrantes para realizar las actividades. Luego, comuniquen sus respuestas al curso.

1. A partir de la información de la tabla de consumo y gasto de artefactos eléctricos de la página anterior señalen cuál de ellos consume más energía eléctrica y cuál menos. ¿Por qué creen que unos artículos consumen más y otros menos? ¿De qué depende el gasto? Investiguen y expliquen.
2. Estimen el tiempo que permanecen prendidos mensualmente tres artículos en sus hogares y, a partir de la información de esta misma tabla, calculen el gasto mensual aproximado que implica este uso.
3. La cuenta de luz que reciben los hogares chilenos todos los meses, informa a los usuarios del dinero que se debe pagar por el consumo de energía eléctrica del período, monto que se constituye por un cargo fijo (exista o no consumo de energía eléctrica) más un costo variable dependiente de la cantidad de kWh consumidos.
  - Investiguen cuál es el valor del cargo fijo y del precio que se cobra por kWh durante el mes.
  - Escriban la expresión que modela la relación que hay entre la cantidad de kWh consumidos  $x$  y el costo total a pagar  $C(x)$ . Comparen su respuesta con la de otros grupos de trabajo. ¿Es la misma expresión? Esta expresión, ¿define una función lineal o afín? Justifiquen su respuesta.
4. En una cartulina, dibujen un plano cartesiano y representen la función que modelaron en la pregunta anterior. En este caso, ¿tiene sentido graficar en el sector negativo del eje de las abscisas? Discútanlo y justifiquen su respuesta.

**Lección 23: ¿Cómo relacionar la proporcionalidad directa y la función lineal?**

1 **Calcula la constante de proporcionalidad entre las variables de cada tabla, completa con los números que faltan y determina la función lineal asociada.**

a.

a	1	2	3	4
b	15		45	60

b.

p	7	14	21	28
q	-2	-4		-8

c.

x	5	8	11	14
y	2	3,2	4,4	

d.

j	3	8	11	15
k	2,4			12

2 **Identifica aquellas rectas que representan funciones lineales y determina la constante de proporcionalidad que relaciona sus variables.**

- |                 |                   |
|-----------------|-------------------|
| a. $y = 7x$     | e. $6y - 4x = 0$  |
| b. $y = 0,01x$  | f. $9 - x = 5y$   |
| c. $y = 8x - 8$ | g. $4x = 7x + 3y$ |
| d. $13x = 6,5y$ | h. $5x = 1 - 4x$  |

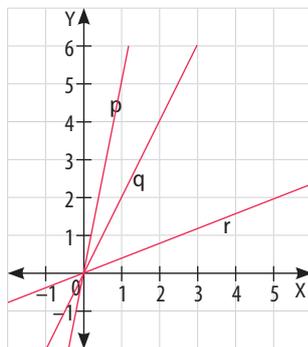
**Lección 24: ¿Cómo representar y analizar una función lineal?**

3 **Representa cada función en un mismo plano cartesiano.**

- |                  |                           |
|------------------|---------------------------|
| a. $h(x) = 0,5x$ | c. $f(x) = 2x$            |
| b. $f(x) = -3x$  | d. $g(x) = -\frac{3}{4}x$ |

4 **Asocia cada recta del gráfico con la expresión que la define.**

- a.  $y = 2x$   
 b.  $y = 5x$   
 c.  $y = 0,4x$



5 **Analiza las situaciones y realiza las actividades.**

- a. Una vaca come pasto a razón de 300 gramos por hora y mantiene este ritmo en forma constante por 6 horas.

- Elabora una tabla de valores que relacione el consumo de pasto con la cantidad de horas transcurridas y luego, construye un gráfico con los datos.
  - Identifica en el gráfico la cantidad de pasto necesario para que la vaca pueda comer durante 6 horas seguidas.
- b. Un vendedor ambulante vende diariamente 40 paquetes de agujas.
- Construye un gráfico que relacione la cantidad de paquetes vendidos y la cantidad de días trabajados.
  - Determina la función que modela la situación descrita.
  - A partir del gráfico o de la expresión que define la función, determina la cantidad de días que el vendedor deberá trabajar para acabar con los 620 paquetes de agujas que le quedan de reserva.

**Lección 25: ¿Cómo definir una función afín?**

6 **Identifica las expresiones que representan una recta en el plano cartesiano.**

- |                      |                           |
|----------------------|---------------------------|
| a. $y = 9x - 1$      | c. $y = 2x^2 + 2$         |
| b. $y = \frac{1}{x}$ | d. $y = \frac{2}{3}x - 4$ |

7 **Escribe la expresión que define la función afín que se obtiene a partir de la transformación indicada.**

- a. Trasladar 5 unidades en el sentido positivo del eje Y la función  $f(x) = x$ .
- b. Trasladar 1 unidad en el sentido negativo del eje Y la función  $h(x) = \frac{3}{5}x$ .
- c. Trasladar 4,2 unidades en el sentido negativo del eje Y la función  $g(x) = -6x$ .
- d. Trasladar  $-\frac{1}{2}$  unidades en el sentido positivo del eje Y la función  $p(x) = 0,25x$ .

8 **Un automóvil se desplaza con una rapidez constante de 80 km/h. A partir de un momento comienza a acelerar, aumentando su rapidez en 3 km/h cada diez minutos.**

- ¿Cuál es su rapidez después de una hora y media de comenzar a acelerar?
- ¿Después de cuántos minutos viajará a 130 km/h?

9 **Inventa una situación relacionada con tu vida cotidiana que se modele mediante la función**

afín definida por  $g(x) = 500 - 250x$ . Indica cuál es y qué representa la pendiente de la recta que se le puede asociar.

Lección 26: ¿Cómo interpretar los parámetros de una función afín?

10 Identifica la pendiente de la recta determinada por cada expresión.

- a.  $y = 2 - 0,75x$       c.  $3x = 2y - 5$   
 b.  $y = \frac{7}{2}x - 2$       d.  $10x + 3 = 3y - 1$

11 Calcula la pendiente de la recta cuya ecuación se puede definir a partir de la información entregada.

- a.  $e(4) = 0$ ;  $e(7) = 3$       c.  $g(-5) = 6$ ;  $g(8) = 6$   
 b.  $f(1) = 3$ ;  $f(-2) = -4$       d.  $h(0) = -5$ ;  $h(6) = -12$

12 Calcula el cociente  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$  para la recta determinada por cada expresión.

- a.  $y = -2,5x$       c.  $y = -10x + 10$   
 b.  $y = 18 + 3x$       d.  $y = -12x - 3 + 1,5x$

Lección 27: ¿Cómo analizar y graficar una función afín?

13 Dada la función definida por  $f(x) = 4,5x + 2$ , determina en cada caso si los puntos pertenecen a la recta que la representa en el plano cartesiano, están sobre ella o están bajo ella.

- a.  $P(1, 4)$       d.  $S(-3; -11,5)$   
 b.  $Q(-1; -2,5)$       e.  $T(-5, -3)$   
 c.  $R(2, 11)$       f.  $U(0,5; 7)$

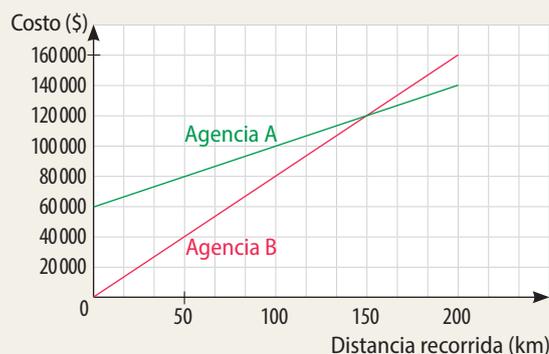
Lección 28: ¿Cómo modelar situaciones usando las funciones afín o lineal?

14 Modela cada situación usando una función definida por  $f(x) = mx + n$  y responde las preguntas.

- a. Una compañía de telefonía móvil ofrece un plan nocturno a un costo de \$0,8 el segundo. Además, se sabe que hablar durante 2 minutos tiene un costo de \$116. ¿Cuál es el costo de una llamada nocturna de 7 minutos?
- b. El costo de un evento considera el arriendo del local donde será realizado más un cobro individual por cada persona que asista. Francisca cotiza y averigua que si asisten 75 personas le cobrarán \$975 000 y que si asisten 90 personas el valor será de \$1 110 000.
- ¿Cuál es el valor del arriendo del local?
  - ¿Cuánto se debe pagar por 74 personas?

### Desafíos de integración

a. Dos agencias de turismo que realizan viajes estudiantiles cobran por la cantidad de kilómetros recorridos de acuerdo a los siguientes gráficos:



Si  $A(x)$  y  $B(x)$  representan los costos totales de las agencias A y B, respectivamente, y  $x$  representa la cantidad de kilómetros recorridos, responde:

- ¿Cuál es la expresión que define cada función graficada?
  - ¿Cuál es el costo total a pagar para 100 km y 200 km en ambas agencias?
  - Un curso realizará un paseo a una localidad que está a 175 km del colegio. ¿Cuál de las agencias le conviene contratar?
  - ¿Para qué intervalos de distancia es más conveniente contratar una u otra agencia? Explica.
- b. Ester tiene \$42 500 ahorrados y estima que gastará \$2500 por día. Ella desea saber cuánto dinero le va quedando con el transcurso de los días y para esto elabora una ecuación de la forma  $f(t + 1) - f(t) = c$ , en que  $f$  es el ahorro que queda,  $t$  es el número de días y  $c$  es una constante.
- ¿Cuál es la expresión de la función que modela esta ecuación de progresión?
  - Si Ester comienza a gastar sus ahorros el 8 de marzo, ¿qué día el ahorro disminuirá a la mitad?
  - ¿Qué día se acabará el dinero ahorrado?

### Coevaluación

Escoge uno de los desafíos y compara con un compañero o una compañera las formas en que lo resolvieron. Conjuntamente, determinen las fortalezas y debilidades de cada estrategia usada y consignent en sus cuadernos las conclusiones que puedan sacar de este análisis.

### Usar modelos matemáticos

Puedes usar un modelo matemático para relacionar variables cuando es necesario describir su comportamiento en el pasado o predecir cómo será en el futuro.

#### Algunas estrategias

- Usar un proceso de ensayo y error.
- Aplicar procesos reversibles.
- Descartar información irrelevante.
- Usar un problema similar pero más sencillo.
- Construir un esquema, diagrama o tabla.
- Encontrar un patrón.
- Usar modelos matemáticos.
- Usar razonamiento lógico.
- Identificar submetas.

Gladys estaba en su clase de Ciencias Naturales cuando su profesora comenzó a hablar sobre las distintas escalas que se usan para medir la temperatura. Ella señaló que dos de las escalas más utilizadas son la Celsius, muy usada en los países de habla hispana; y la Fahrenheit, que es común en los países anglosajones. Gladys escuchaba atenta y escribió en su cuaderno lo siguiente:

"...la relación existente entre las escalas de temperatura Fahrenheit (°F) y Celsius (°C) puede modelarse usando una función afín. Los datos experimentales indican que 0 °C equivalen a 32 °F y que 100 °C equivalen a 212 °F..."

¿Qué expresión define la función afín que relaciona ambas escalas de temperatura?

¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema? Escribe tú

¿Qué datos tengo para resolver? Escribe tú

Crea un plan para resolver

Para resolver este problema puedes utilizar la estrategia Usar modelos matemáticos para determinar la expresión que define la función que relaciona las escalas Celsius y Fahrenheit.

Aplica la estrategia y resuelve

En la función afín que relaciona ambas escalas de temperatura se definen **F** (temperatura medida en grados Fahrenheit) como la variable dependiente; y **C** (temperatura medida en grados Celsius) como la variable independiente. Por lo tanto, la función puede expresarse de la siguiente forma:

$$F = aC + b$$

Usando los pares de valores (0, 32) y (100, 212) podemos obtener los valores de **a** y **b** de la expresión anterior:

- Si  $C = 0 \rightarrow F = 32 \rightarrow 32 = a \cdot 0 + b \rightarrow 32 = b \rightarrow$  El coeficiente de posición es 32.
- Si  $C = 100 \rightarrow F = 212 \rightarrow 212 = a \cdot 100 + b \rightarrow 212 = a \cdot 100 + 32$

Y para determinar el valor de **a**, resolvemos la ecuación:

$$212 = 100a + 32 \quad /- 32$$

$$180 = 100a \quad /: 100$$

$$1,8 = a$$

$\rightarrow$  La pendiente es 1,8.

Por lo tanto, la expresión buscada es  $F = 1,8C + 32$ .

Verifica la respuesta

Escribe tú

Para comprobar tu respuesta puedes reemplazar los valores de los puntos (0, 32) y (100, 212) y verificar que cumplen la igualdad.

También, puedes buscar en internet o en un texto científico la fórmula que relaciona las dos escalas de temperatura y compararla con la que se obtuvo.

Comunica la respuesta Escribe tú

¿De qué otra forma resolverías este problema? Explica.

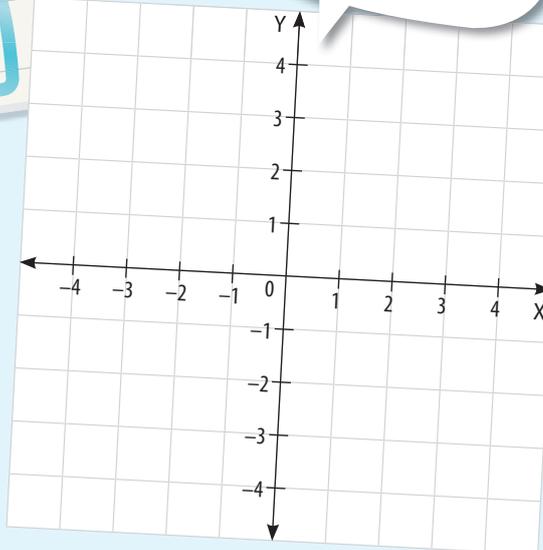
## Vuelvo a mis procesos

Responde de acuerdo a tu apreciación.

¿Pudiste comprender y asimilar una estrategia para representar funciones?, ¿cuál?

¿Tuviste dificultades al graficar puntos y funciones en el plano cartesiano? ¿Lograste resolverlas?, ¿cómo?

$$f(x) = mx$$



¿Lograste identificar fenómenos que se pueden modelar usando funciones lineales o afines?, ¿por qué?



¿Cómo fue tu desempeño al hacer uso del software sugerido en esta sección?, ¿por qué?

¿Te resultó interesante algún tema de esta sección?, ¿cuál?, ¿por qué?

¿Te resultó especialmente complicado entender alguno de los temas de esta sección?, ¿cuál?, ¿por qué?

¿Cómo se llama?

### Mapa conceptual

Organiza los conceptos en el mapa propuesto para la sección 4 de esta unidad.

términos semejantes – propiedad distributiva – factorizar – pictórica y simbólica



Junto a un compañero o una compañera construyan mapas conceptuales para las secciones 5 y 6 de esta unidad.

¿Cómo se hace?

• **Pregunta sección 4**

¿Cómo multiplicas un binomio por un trinomio?

• **Pregunta sección 5**

¿Qué procedimiento aplicas para resolver una inecuación? ¿Al efectuar qué operaciones cambia el sentido de la desigualdad?

• **Pregunta sección 6**

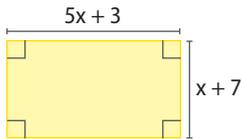
¿Cómo determinas el valor de la pendiente de una recta a partir de la representación gráfica de una función afín?

Expresiones algebraicas

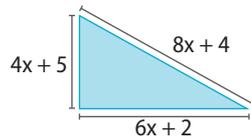
- Representa las situaciones usando lenguaje algebraico.
  - Loreto tenía \$ 4500 y compró 3 revistas a  $p$  pesos cada una. ¿Cuánto dinero ( $d$ ) le queda?
  - Don Alejandro regaló a sus  $n$  nietos \$ 15 000, que se repartieron en partes iguales. De lo que recibieron, cada uno regaló \$ 100 a un amigo. ¿Con cuánto dinero ( $d$ ) quedó cada nieto?
  - Cristóbal trabaja 5 días a la semana en turnos de  $h$  horas diarias. Los jueves y viernes sale dos horas más temprano que los otros días. ¿Cuántas horas  $t$  trabaja a la semana?

- Expresa en lenguaje algebraico el perímetro de las figuras.

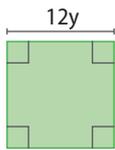
- Rectángulo.



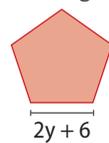
- Triángulo.



- Cuadrado.



- Pentágono regular.



- Reduce las expresiones algebraicas.

- $ab - 3c - 4ab - 4c$
- $4 - q - 2p + 5pq - 6 + 3qp + 2$
- $2x^2 + 3x + 2xy - 5xy + 7x^2 - 4x$
- $7m - 3m^2 + 5m + 2m^2 - 4m$

- Resuelve cada operación y reduce su resultado.

- $5(p + 1) - 3(2 - p)$
- $3(x - 8) - 4(3 - x)$
- $(x - 5)(x + 3) - (2x - 1)(x + 5)$
- $(a + 2b)(3a - b) - 2a(a + b)$

- Factoriza las expresiones algebraicas.

- $t^2 + 2t^3 - t$
- $ab^2 + ab + a^2b$
- $t^2 + 4t - 32$
- $8ab - 4a^2b + 10a^2b^2$
- $4p^2q^3 - 5pq^2 + 7q^4p^2$
- $4st(a + 5) + 2s(a + 5) - 3t(a + 5)$

Ecuaciones e inecuaciones

- Resuelve las ecuaciones.

- $5x - 4 = 8x - 3,7$
- $x - 19 = 5,2x + 2$
- $-2(x - 10) = 3(2 - x) - 3x$
- $\frac{x}{5} - 12 = 9 - \frac{x}{3}$

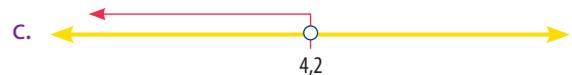
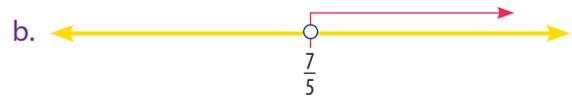
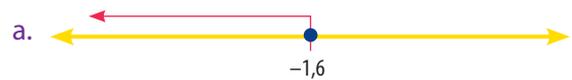
- Resuelve las inecuaciones.

- $2,5x - 8 > 5x + 7$
- $2(x + 2) - 3(x - 1) < x + 7$
- $-6x + 7,9 \leq 8x - 4,1$
- $\frac{x}{5} - 13 \geq -x + 1$

- Representa las inecuaciones en la recta numérica.

- $x > 7$
- $x \geq -8$
- $-5 > x$
- $2 \leq x$

- Identifica las inecuaciones representadas en cada recta numérica.



- Resuelve los problemas.

- La suma de dos números impares consecutivos es 16. ¿Cuáles son los números?
- La suma de tres números pares consecutivos es 42. ¿Cuáles son los números?
- El largo de un rectángulo es 10 cm menor que cuatro veces el ancho. Si el perímetro es 120 cm, ¿cuál es el largo del rectángulo?
- Una biblioteca puede gastar a lo más \$ 350 000 en libros nuevos. Si cada libro cuesta, en promedio, \$ 12 000 y se debe pagar además \$ 50 000 por el despacho, ¿cuál es la mayor cantidad de libros que se puede comprar?

Función lineal y función afín

11. En un supermercado se venden 3 paquetes de tallarines por \$ 2100.

- ¿Cuál es la constante de proporcionalidad que relaciona el número de paquetes de tallarines y su costo?
- ¿Cuánto se debe pagar por 4, 5 y 8 paquetes de tallarines?
- ¿Cuántos paquetes de tallarines se pueden comprar con \$ 10 500?
- Escribe la función lineal que relaciona el costo  $C$  de los tallarines y la cantidad de paquetes comprados  $p$ .

12. Determina la constante de proporcionalidad que relaciona las variables  $x$  e  $y$ , representadas en cada tabla.

a.

x	1	2	3	4
y	8	16	24	32

b.

x	4	8	12	16
y	4,8	9,6	14,4	19,2

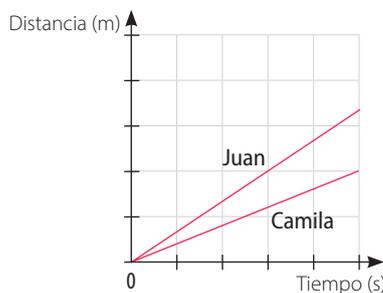
c.

x	3	5	7	9
y	0,75	1,25	1,75	2,25

13. Representa en el plano cartesiano las funciones lineales.

- $f(x) = 0,2x$
- $g(x) = -0,6x$
- $h(x) = -9x$
- $m(x) = 5,8x$

14. Observa el gráfico que representa la distancia que recorren dos personas a medida que transcurre el tiempo. Luego, responde.



- ¿Qué magnitud física representa la pendiente de cada recta?
- ¿Qué persona es más rápida, Juan o Camila?

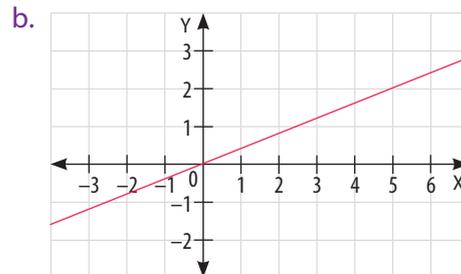
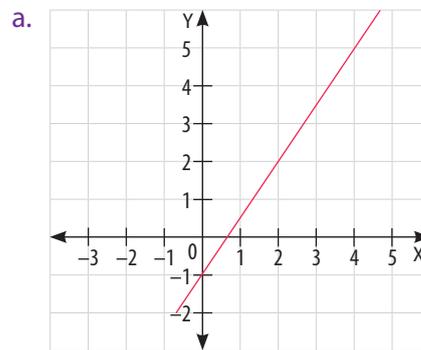
15. Determina la recta que contiene a cada par de puntos.

- $(-3, 5)$  y  $(1, 1)$
- $(-1, -2)$  y  $(3, 4)$
- $(0, 5)$  y  $(4, 9)$
- $(-1, -1)$  y  $(-2, 9)$

16. En cada caso, indica la pendiente y el coeficiente de posición de las rectas.

- $y = 3x - 6$
- $y = \frac{1}{5}x - \frac{9}{5}$
- $y = \frac{15}{4}x + 1$
- $y = 12x - 2,4$

17. Determina si la función representada es lineal o afín e indica la pendiente y el coeficiente de posición de la recta.



18. Resuelve los problemas y responde.

- La función de ingresos (medidos en miles de pesos) de una tienda está dada por  $I(x) = 30x$ , donde  $x$  representa la cantidad de un mismo producto vendido.
  - ¿Cuál es el ingreso si se venden 105 unidades de dicho producto?
  - ¿Cuántos artículos se necesitan vender para que el ingreso sea de \$ 4 200 000?
- En un estacionamiento de automóviles se considera un cargo fijo de \$ 800 y por cada minuto de estadía se deben pagar \$ 20.
  - ¿Cuál es la función que permite calcular el monto total a pagar al utilizar el estacionamiento por  $x$  minutos?
  - Si una persona estaciona su vehículo durante 30 minutos, ¿cuánto debe pagar?

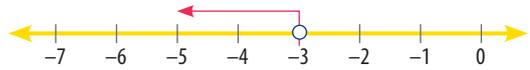
## ¿Qué aprendí?

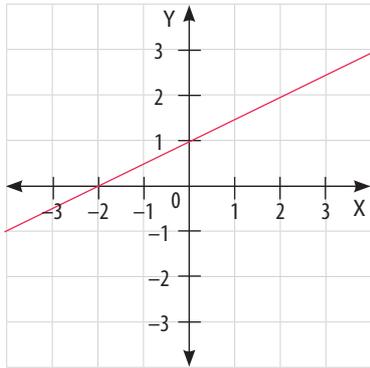
## Parte I

- Escribe V si la afirmación es verdadera y F si es falsa. (7 puntos)
  - Si el perímetro de un cuadrado es  $12x + 28$ , entonces su lado mide  $3x + 7$ .
  - El producto de  $-4a^2b$  y  $0,2a^2b$  es  $-0,8a^2b$ .
  - La solución de la ecuación  $-\frac{5}{2}(x - 1) = 5x$  es un número negativo.
  - Si se divide por  $0,25$  a ambos lados de la inecuación  $-0,25x > 6$ , el sentido de la desigualdad cambia.
  - Si una recta contiene los puntos  $P(2, 5)$  y  $Q(1, 3)$ , entonces el valor de su pendiente es  $2$ .
  - El gráfico de la función definida por  $g(x) = -8x$ , es una recta que pasa por el origen.
  - El valor de  $f(4)$  en la función definida por  $f(x) = 6 - 3x$  es  $6$ .
- Si los puntos  $A(-2, 4)$ ,  $B(0, 2)$  y  $C(3, x - 1)$  pertenecen a una misma recta, ¿cuál es el valor de  $x$ ? (2 puntos)
- Dada la función definida por  $f(x) = -\frac{4}{5}x + \frac{14}{5}$ , ¿cuál es el área del triángulo cuyos lados están formados por parte del eje X, parte del eje Y y la recta representada en el plano cartesiano? (4 puntos)

En los ejercicios del 4 al 11, selecciona la alternativa correcta. (8 puntos)

- ¿Cuál de las siguientes expresiones es equivalente con  $3x(x + 1) - x(2x - 3) + (x + 2)$ ?
  - $x^2 + 6x + 2$
  - $x^2 + 6x$
  - $x^2 + 7x + 2$
  - $x^2 - 7x - 2$
- Si  $a$  es un número natural, ¿qué expresión representa el producto entre  $(2a - 1)$  y sus dos sucesores?
  - $8a^3 - 2a - 3$
  - $8a^3 + 2a - 3$
  - $8a^3 - 2a$
  - $8a^3 + 2a$

- ¿Qué expresión corresponde a la factorización de  $x^2 + 10x + 16$ ?
  - $(x + 4)^2$
  - $x(x + 10)$
  - $(x + 1)(x + 16)$
  - $(x + 2)(x + 8)$
- ¿Cuál es la solución de la inecuación  $\frac{2}{3}x - 4 \leq \frac{5}{6}x + 3$ ?
  - $x \geq -42$
  - $x \geq -6$
  - $x \leq -24$
  - $x \leq 42$
- ¿Qué inecuación está representada en la recta numérica?
 
  - $x \leq -3$
  - $x > -3$
  - $x < -3$
  - $x \geq -3$

- Sea  $f(x) = 6 - 3x$ , ¿cuál es el valor de  $a$  si  $f(a) = 12$ ?
  - $-18$
  - $-6$
  - $-4$
  - $-2$
- ¿Cuál es la pendiente de la recta representada en el plano cartesiano?
 
  - $-2$
  - $\frac{1}{2}$
  - $1$
  - $2$

- ¿Cuál debe ser el valor de  $a$  de manera que la solución de la ecuación  $ax = -3x + 4$  sea  $-2$ ?
  - $0$
  - $-\frac{4}{3}$
  - $-5$
  - $4$

Parte II

12. Observa y mide el segmento.

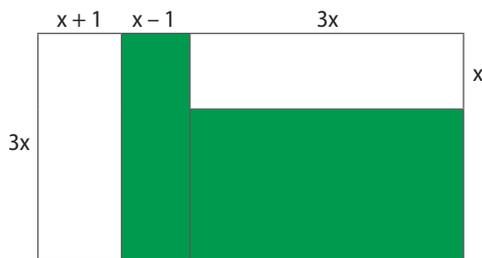


Intenta formar un triángulo ubicando los siguientes pares de segmentos en los extremos del segmento A:



- ¿Con cuál de los pares de segmentos pudiste formar un triángulo? ¿Se forma un único triángulo o se pueden construir otros? Intenta construir más de uno y explica qué ocurre.
- ¿Por qué no pudiste formar un triángulo con el otro par de segmentos? ¿Cómo es la suma de sus longitudes respecto de la longitud del segmento A, mayor o menor?
- Escribe una desigualdad para comparar la suma de las longitudes de cada par de segmentos con la longitud del segmento A. ¿Qué relación tiene el sentido de las desigualdades con el hecho de poder o no poder construir un triángulo con los segmentos B y C o D y E?
- ¿Se puede construir un triángulo si la suma de las longitudes de los segmentos fuera igual a la longitud del segmento A? ¿Por qué?

13. Observa el rectángulo y algunas de sus medidas.



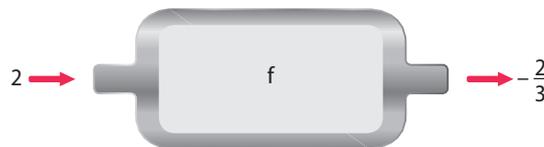
- Escribe la expresión algebraica que representa el área verde.
- Expresa esta área en forma factorizada.

14. Considera que los puntos pertenecientes a una recta están expresados de la siguiente manera:  
 $P(1 + 2k, -2 + 3k)$

Haz el siguiente desarrollo.

- Expresa un punto cualquiera de la recta como  $(x, y)$  e iguala cada una de sus coordenadas con las expresiones correspondientes que determinan el punto P.
- Desarrolla las ecuaciones surgidas en el paso anterior, despejando  $k$  en ambas ecuaciones e igualando estos valores, y obtén una fórmula del tipo  $y = mx + n$ .
- Determina los puntos donde la recta corta los ejes coordenados.

15. La máquina representa una función afín  $f$  y transforma el número 2 en el número que se indica en la figura.



- Determina una expresión que defina a la función  $f$ .
- Compara tu respuesta con la de un compañero o una compañera, ¿coinciden? ¿Por qué?
- Si la pendiente de la recta que representa a la función  $f$  es  $-5$ , ¿cuál es su coeficiente de posición?
- Si el coeficiente de posición de la recta que representa a la función  $f$  es  $4,5$ , ¿cuál es su pendiente?
- Si al ingresar a la máquina un  $0$ , saliera el mismo número  $0$ , ¿qué tipo de función sería  $f$ ? ¿Cuál sería la expresión que la definiría?

Para repasar contenidos

Cuenta el puntaje que obtuviste en la parte I de la evaluación (para conocer el de las actividades 2 y 3 pide ayuda a tu profesor o profesora). Luego, revisa la tabla y calcula tu puntaje por contenido. Según tu nivel de logro, repasa el contenido y haz los ejercicios señalados.

Contenido	Logrado	Por lograr	Repasa en
Expresiones algebraicas (Actividades 1.a, 1.b, 4, 5 y 6)	3 o más puntos	2 o menos puntos	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lecciones 15, 16 y 17.</li> <li>Cuaderno de Ejercicios, páginas 42 a 47.</li> </ul>
Ecuaciones (Actividades 1.c y 11)	2 puntos	1 o menos puntos	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lecciones 18 y 19.</li> <li>Cuaderno de Ejercicios, páginas 52 a 55.</li> </ul>
Inecuaciones (Actividades 1.d, 7 y 8)	2 o más puntos	1 o menos puntos	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lecciones 20, 21 y 22.</li> <li>Cuaderno de Ejercicios, páginas 56 a 59.</li> </ul>
Funciones (Actividades 1.e, 1.f, 1.g, 2, 3, 9 y 10)	7 o más puntos	6 o menos puntos	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lecciones 23, 24, 25, 26, 27 y 28.</li> <li>Cuaderno de Ejercicios, páginas 64 a 73.</li> </ul>

Para practicar habilidades

Para practicar las habilidades matemáticas evaluadas en la parte II, pide apoyo a tu profesor o profesora y dirígete a las páginas 78 y 79 del Cuaderno de Ejercicios.

Habilidad	Logrado	Por lograr
Argumentar y comunicar (Actividad 12)	6 o más puntos	5 o menos puntos
Representar (Actividad 13)	4 puntos	3 o menos puntos
Resolver problemas (Actividad 14)	4 puntos	3 o menos puntos
Modelar (Actividad 15)	5 o más puntos	4 o menos puntos

Desafío en equipo

Al finalizar la unidad los invitamos a formar equipos de 3 estudiantes para resolver este desafío.

Viajes al espacio:

La velocidad mínima que debe tener una nave espacial para escapar del campo gravitatorio de la Tierra es de aproximadamente 11 000 m/s. Consideren una nave que adquiere esta velocidad a 16 000 m de la superficie terrestre y la conserva constante hasta más allá de los confines de la atmósfera.

1. Construyan una tabla de valores con la distancia de la nave a la superficie terrestre desde el momento en que adquiere la velocidad mínima de escape (considerado instante  $t = 0$  s). Consideren lapsos de 1 segundo.
2. Escriban la función que modela la relación entre la distancia recorrida por la nave y el tiempo transcurrido.
3. Calculen el tiempo que demora la nave en salir de la atmósfera de la Tierra desde el momento en que adquirió la velocidad de escape. Asuman que la longitud total de la atmósfera es de aproximadamente 120 km.

Tomando en consideración los contenidos, las habilidades y las actitudes desarrollados en esta unidad, ¿qué nivel de dificultad representó este desafío para ustedes?, ¿por qué? ¿En qué fallaron? Respondan individualmente, escribiendo en el recuadro.

▶ **Sección 7**

Área y volumen de prismas y cilindros

▶ **Sección 8**

Teorema de Pitágoras

▶ **Sección 9**

Transformaciones isométricas

## El puente Chacao

La construcción de un puente sobre el canal de Chacao permitirá unir la Isla grande de Chiloé con el continente. Se estima que su entrada en operación será en el año 2019. La longitud aproximada del puente bordeará los 2,6 km y permitirá a los vehículos motorizados atravesarlo en menos de 2 minutos. El proyecto, que lleva adelante una empresa multinacional, considera la instalación de dos macizos de anclaje y tres pilas de hormigón armado que servirán de base del puente, cuya altura máxima será de alrededor de 55 metros.

¿En qué región de nuestro país se encuentra la Isla Grande de Chiloé?  
¿La has visitado alguna vez? ¿Cómo has cruzado el mar para llegar a ella?



### ¿Qué aprenderé?

- Desarrollar fórmulas para calcular el área y el volumen de prismas y cilindros.
- Explicar la validez del teorema de Pitágoras.
- Describir traslaciones, reflexiones y rotaciones de figuras 2D.
- Componer traslaciones, reflexiones y rotaciones en el plano cartesiano.

### ¿Para qué?

- Aplicar las fórmulas de área y volumen de prismas y cilindros a la resolución de problemas.
- Resolver problemas geométricos y de la vida cotidiana aplicando el teorema de Pitágoras.
- Elegir y utilizar distintas representaciones para el movimiento de figuras 2D en el plano.
- Resolver problemas geométricos relacionados con la composición de transformaciones isométricas.

### Actitudes

- Demostrar curiosidad e interés por resolver desafíos matemáticos.
- Demostrar interés y rigurosidad en la resolución de problemas.
- Trabajar en equipo.

¿Cuál de los temas que aprenderás en esta unidad te parece más interesante?, ¿por qué?

Si las vigas que sostendrán el puente tendrán una forma similar a la de un paralelepípedo y su altura aproximada será de 200 metros, ¿cómo podrías estimar el volumen de una de ellas? ¿Qué datos necesitarías?

Se estima que el puente tendrá 2 calzadas de 7 m de ancho para el tránsito vehicular. ¿Cuál sería la medida de la superficie que debe ser asfaltada si se considerara un puente recto (paralelo a la superficie del mar)?

# Área y volumen de prismas y cilindros

Activo ideas previas

1. Lee la información y coméntala con un compañero o una compañera.



Tanto en la antigüedad como en la actualidad, la construcción de grandes edificios así como la de pequeños recipientes, necesita de las aplicaciones geométricas desarrolladas por hombres y mujeres de la época. En la Antigua Grecia, por ejemplo, Eratóstenes describió la anécdota sobre la construcción de una tumba cúbica cuya arista medía cien pies, señalando que un rey, al verla, exclamó: “Demasiado pequeña es la tumba. Hacedla el doble de grande. Sin arruinar la forma, rápidamente duplicad cada arista de la tumba”. Este error de pensar que para duplicar el volumen de un cubo, se deben duplicar sus aristas, generó uno de los grandes problemas de la época, “la duplicación del cubo”.

Responde las preguntas junto con tu compañero o compañera.

- a. ¿Quién fue Eratóstenes? ¿A qué se dedicó? ¿Creen que la anécdota relatada fue real o es parte de la mitología griega? Investiguen y respondan.

- b. ¿Por qué creen que es un error duplicar la arista de un cubo para duplicar su volumen? Construyan un cubo con cartulina o papel y luego construyan un segundo cubo cuya arista mida el doble de la arista del primero. ¿Parece tener el segundo cubo el doble de volumen que el primero? Escriban una conclusión.

- c. ¿Cómo duplicarían el volumen de un cubo? Propongan un procedimiento y comparen su propuesta con las de sus compañeros o compañeras.

Activo conceptos clave

2. A continuación, se presentan algunos conceptos clave de esta sección. Relaciona algunos de ellos escribiéndolos frente a las descripciones que se presentan.

prisma	volumen	cilindro	altura
área	área lateral	red	área basal

- a. Medida de la superficie de una figura geométrica. \_\_\_\_\_
- b. Representación desplegada en el plano de una figura 3D. \_\_\_\_\_
- c. Distancia que existe entre las bases de una figura 3D. \_\_\_\_\_
- d. Figura 3D que posee una cara curva. \_\_\_\_\_
- e. Medida del espacio que ocupa un cuerpo. \_\_\_\_\_

## Pienso mis procesos

Responde de acuerdo a lo que conoces.

¿Cuál de los objetos tiene forma de prisma? ¿Qué características tiene un prisma?

Si ambos objetos tienen la misma altura, ¿cuál de los dos ocupa mayor espacio?, ¿de qué depende?



¿Cuál de los objetos tiene forma de cilindro? ¿Qué características tiene un cilindro?

¿Qué estrategias para estimar el área de figuras 2D te podrían ser útiles durante el trabajo de esta sección?

¿Qué meta tendrías interés en alcanzar al finalizar el estudio de esta sección?, ¿por qué?

¿Qué aplicación en tu vida cotidiana piensas que podrían tener los contenidos que estudiarás en esta sección?

Activa tus conocimientos previos respondiendo las preguntas laterales y luego resuelve las actividades. Para terminar, registra tus logros.

¿Cómo multiplicas una fracción por un número decimal?

¿Qué orden hay que respetar para resolver operaciones combinadas?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
8 correctas o más	menos de 8 correctas

¿Cometiste muchos errores?, ¿por qué?

¿Cómo compruebas el resultado de una ecuación?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
8 correctas o más	menos de 8 correctas

¿En qué fallaste?, ¿por qué?

Resolver operaciones y problemas con números decimales y fracciones

1 Resuelve las operaciones. (10 puntos)

- |                                 |   |
|---------------------------------|---|
| a. $\frac{2}{3} - \frac{4}{5}$  | f. $1,4 + \frac{4}{5} \cdot 2$          |
| b. $\frac{1}{2} : 8$            | g. $6,549 : 4$                          |
| c. $0,004 - (-3)$               | h. $0,13 : \frac{5}{3} + (-0,1)$        |
| d. $0,6 + \frac{4}{5} \cdot -2$ | i. $-\frac{1}{2} + 2 \cdot 0,3$         |
| e. $1 : \frac{4}{9} - 0,25$     | j. $[\frac{1}{2} : (8 - 10)] \cdot 0,3$ |

2 Resuelve los problemas. (3 puntos)

- La temperatura dentro de una habitación es de  $4^\circ\text{C}$ . Para aumentar la temperatura se programó un incremento de  $1,4^\circ\text{C}$  cada 15 minutos. ¿Qué temperatura se alcanzará al transcurrir dos horas y cuarto?
- Arturo compró  $0,75\text{ kg}$  de pan y su hermana compró  $1,5\text{ kg}$  más. ¿Cuántos kilogramos de pan compraron en conjunto Arturo y su hermana?
- El precio de las bencinas subió un  $3,5\%$  entre marzo y abril. Si el precio del litro de bencina en marzo era de  $\$ 760$ , ¿cuál fue su precio en abril?

Resolver ecuaciones

3 Resuelve las ecuaciones. (8 puntos)

- |                           |                             |
|---------------------------|-----------------------------|
| a. $t - 8 = 4$            | e. $0,4z + 2 = 0,6$         |
| b. $2y + 5 = 13$          | f. $0,5x - 0,25 = 0,1$      |
| c. $1 + 2h = 8$           | g. $\frac{3}{5}y + 2 = 0,8$ |
| d. $2d = \frac{1}{3} + d$ | h. $y + 1 = 5y - 16$        |

4 Determina, en cada caso, si la solución satisface la ecuación. (4 puntos)

- $2x + 11 = 9 \rightarrow x = 1$
- $3 + y = 3y - 11 \rightarrow y = 6$
- $\frac{j}{3} + j = 12 \rightarrow j = 9$
- $2p - 1 = \frac{2}{5}p + 6 \rightarrow p = -5$

¿Cuáles son los elementos básicos que caracterizan una figura 3D?

¿En qué se diferencian las caras laterales de un prisma y de un cilindro?

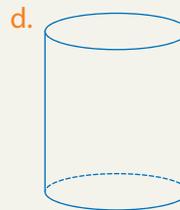
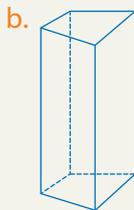
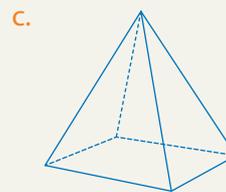
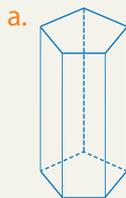
Marca con una x tu nivel de logro:

<b>Logrado</b> <input type="radio"/>	<b>Por lograr</b> <input type="radio"/>
5 correctas o más	menos de 5 correctas

¿Tuviste alguna dificultad?, ¿cuál?

Identificar y caracterizar figuras 3D

5 Caracteriza cada cuerpo geométrico indicando la cantidad de vértices y aristas que posee. (4 puntos)



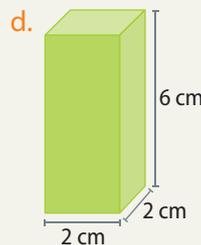
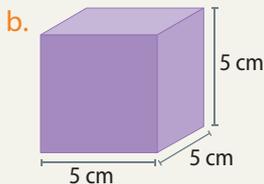
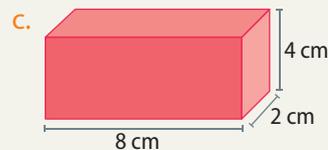
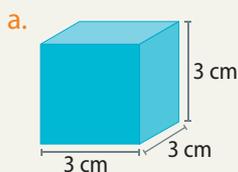
6 Completa la tabla con la información que falta de cada figura 3D. (3 puntos)

Figura 3D	Caras basales	Caras laterales
	2 triángulos	3 rectángulos
Cilindro	2 círculos	
	2 pentágonos	5 rectángulos

¿Cómo calculas el área de un paralelepípedo?

Calcular área de paralelepípedos y resolver problemas

7 Calcula el área de la superficie de cada paralelepípedo. (4 puntos)



8 Resuelve los problemas. (2 puntos)

- El área de una de las caras laterales de un paralelepípedo es  $18 \text{ cm}^2$ . Si su base es un cuadrado de  $12 \text{ cm}^2$  de área, ¿cuánto miden las aristas y el área de la superficie total del paralelepípedo?
- El área de la superficie de un cubo es  $1014 \text{ mm}^2$ . ¿Cuál es la medida de su arista?

Marca con una x tu nivel de logro:

<b>Logrado</b> <input type="radio"/>	<b>Por lograr</b> <input type="radio"/>
4 correctas o más	menos de 4 correctas

¿Qué actividad te tomó más tiempo realizar?, ¿por qué?

► **Propósito**

Estimar el volumen de prismas y cilindros.

¿Para qué?

Los prismas y cilindros son figuras 3D que puedes encontrar frecuentemente en tu entorno: una caja de zapatos y un balón de gas son solo algunos ejemplos. El estimar su volumen te permite, por ejemplo, decidir si caben en un lugar determinado de tu casa.

**Palabras clave**

Prisma

Cilindro

Volumen

Estimación

**Ampliando**

La forma de un dado se asocia a la de un cubo, posee 6 caras cuadradas iguales y paralelas de a pares. Los lados de los cuadrados que forman un cubo se llaman aristas.

**Ayuda**

Si el volumen que ocupa uno de los dados es  $1 \text{ u}^3$ , entonces cada una de sus aristas mide 1 u.

**Ayuda**

Observa que si el cilindro tuviera una mayor altura o su diámetro fuera mayor, podrías ingresar más dados dentro de él.

## ¿Cómo estimar el volumen de prismas y cilindros?

Si observas un objeto cualquiera, por ejemplo el de la imagen, verás que ocupa un determinado espacio de nuestro entorno.



Si tuvieras que estimar el espacio que ocupa esta figura, ¿cómo lo harías?

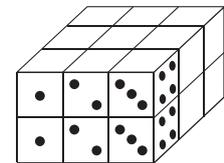
### Situación 1 Armado un prisma con material concreto

¿Cuál es una estimación para el volumen de una torre armada con 18 dados?

Para responder debes conseguir 18 dados (o cubos similares) y considerar que el espacio que ocupa cada dado se puede representar con el símbolo  $\text{u}^3$ .

**Paso 1** Arma una torre con los dados de manera que tenga todas sus caras planas.

Un ejemplo es:



**Paso 2** Estima el espacio que ocupa la torre armada.

Evidentemente cualquier torre que se arme con los 18 dados ocupará el espacio que ocupan en conjunto los 18 dados. Por lo tanto:

**R:** El espacio ocupado por la torre armada, es decir, su volumen, es de  $18 \text{ u}^3$ .

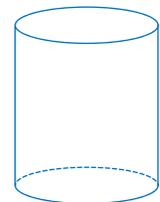
Completa el enunciado:

La torre que armé tiene \_\_\_\_ cubos en un lado de su base y \_\_\_\_ cubos en el otro lado y tiene \_\_\_\_ cubos de altura. Si multiplico estos números obtengo el valor del volumen de la torre, es decir,  $\_\_\_ \cdot \_\_\_ \cdot \_\_\_ = 18$ .

### Situación 2 Representando un cilindro con material concreto

¿Cómo se puede estimar el volumen de un cilindro?

Ocuparemos un tubo de papel higiénico para representar un cilindro.



**Paso 1** Rellena el cilindro de papel higiénico con todos los dados que quepan dentro de él.

**Paso 2** Verifica si el cilindro quedó absolutamente lleno con los dados. Luego, cuenta la cantidad de dados que lograste introducir en él.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

**R:**

► **Para concluir**

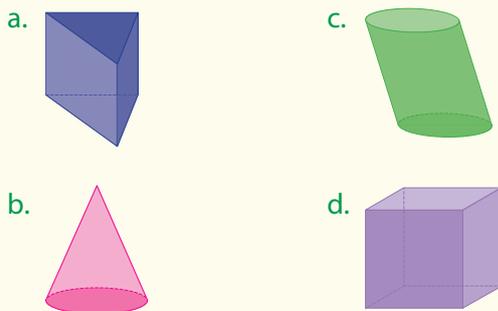
El **volumen** de una figura 3D es la magnitud del espacio que ocupa. Para estimar el **volumen de un prisma o un cilindro** se puede definir una unidad de volumen y comprobar cuántas veces cabe dentro del prisma o cilindro.

**Argumenta y comunica**

¿Podrías construir dos cilindros de igual volumen y base pero de distinta altura? Escribe en tu cuaderno los argumentos que justifican tu respuesta.

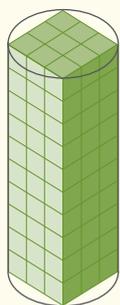
Repaso

1. Identifica y caracteriza las figuras 3D.

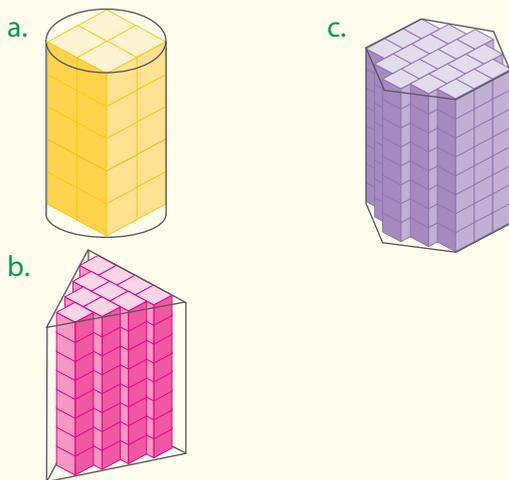


Práctica guiada

2. Estima el volumen de las figuras que están rellenas con cubos de 1 cm<sup>3</sup>.



90 cubos de 1 cm<sup>3</sup> cada uno. Se estima que el volumen del cilindro es mayor que 90 cm<sup>3</sup>.



3. Verifica las afirmaciones escribiendo una V si es verdadera o una F si es falsa.

V  Mientras mayor sea el área de la base de un prisma y mayor sea su altura, mayor será su volumen.

- a.  Conociendo el área de la base de un prisma triangular podemos estimar su volumen.
- b.  Dos prismas distintos no pueden tener el mismo volumen.
- c.  Si modificamos la altura de un prisma, pero no el área de la base, el prisma no varía su volumen.

Aplica

4. Estima el volumen de los objetos usando dados u otro prisma de forma cúbica como unidad de volumen.

- a. Un estuche.
- b. Un bolsillo de tu mochila.
- c. Un vaso.
- d. Un pote de comida.

5. Describe el procedimiento. Si tuvieras que estimar el volumen de tu sala de clases, ¿cómo lo harías? ¿Crees que sería práctico usar dados? Propon un procedimiento y compáralo con los que propongan tus compañeros o compañeras.

6. Conecta con la Física. El famoso pensador y científico griego Arquímedes (287 a.C. - 212 a.C.) descubrió el principio de flotación de los cuerpos mientras estaba inmerso en una tina de baño llena de agua. Investiga sobre esta anécdota y explica cómo podrías estimar el volumen de un cuerpo al sumergirlo en una cubeta colmada de agua.

7. Argumenta. Si tuvieras que transportar en un contenedor de caras planas el máximo número de sandías, ¿qué forma preferirías para las sandías, cilíndrica o prismática? Da argumentos que justifiquen tu elección.

Reflexiono

- 1. Considera un cojín con forma de prisma. Si su cara superior es un cuadrado cuyo lado mide 1 m, el área de su cara superior es 1 m<sup>2</sup>. Si, además, su altura mide 1 m, ¿cuál es su volumen?
- 2. Piensa, completa y explica la siguiente regularidad:
 

Extensión en 1 dimensión	→	m
Extensión en 2 dimensiones	→	m <sup>2</sup>
Extensión en 3 dimensiones	→	_____

Refuerzo

- 1. Explica qué es el volumen y en qué unidades se mide.
- 2. Explica en qué se diferencian los términos estimar y calcular.
- 3. Describe las principales características de un prisma y de un cilindro.
- 4. Nombra tres unidades de volumen o capacidad que conozcas.

► Propósito

Calcular el volumen de prismas y cilindros.

¿Para qué?

En ciertas ocasiones no basta con estimar el valor del volumen de una figura 3D sino que es necesario calcular el valor exacto. Por ejemplo, en la construcción de viviendas y en la fabricación de envases para contener líquidos.

Palabras clave

Prisma

Cilindro

Volumen

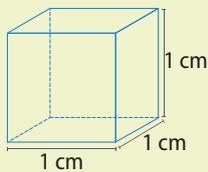
Arista

Ayuda

Para determinar cuántos cubos forman la base cuadrada de la caja puedes contarlos o multiplicar la cantidad de cubos que hay en cada lado de ella.

Ayuda

Los cubos usados por Esteban y Angélica tienen las siguientes características:



¿Cambia el volumen de la caja si la giras de forma que quede apoyada sobre su cara de lados de 2 cm y 4 cm? ¿Cuál sería el cálculo que realizarías en este caso?

## ¿Cómo calcular el volumen de prismas y cilindros?

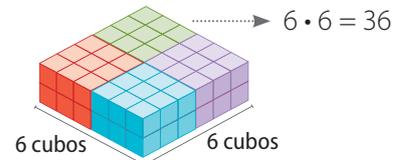
Esteban tiene una caja de base cuadrada como la que se muestra en la figura. Además, dispone de cubos de  $1 \text{ cm}^3$  de volumen.



### Situación 1 Usando cubos de volumen similar a un prisma

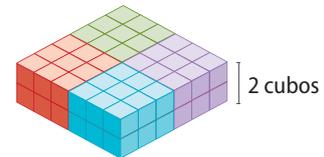
¿Cuál es el volumen de la caja de Esteban?

Calcularemos el volumen usando los cubos de  $1 \text{ cm}^3$  de volumen.



**Paso 1** Cuenta la cantidad de cubos que forman la base de la caja.

**Paso 2** Cuenta la cantidad de cubos que conforman la altura de la caja.



**Paso 3** Multiplica la cantidad de cubos que forman la base por los que conforman la altura, es decir,  $36 \cdot 2 = 72$ .

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

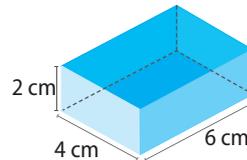
R:

### Situación 2 Usando cubos para determinar aristas de un prisma

¿Cuál es el volumen de la caja de Angélica si con sus cubos no alcanza a cubrir por completo el interior de su caja?

**Paso 1** Determina las medidas de las aristas de la caja usando los cubos de  $1 \text{ cm}^3$ .

Ancho base: 4 cm  
Largo base: 6 cm  
Alto: 2 cm



**Paso 2** Calcula el área de la base de la caja.

$6 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 24 \text{ cm}^2$       hay 24 cubos en la base

**Paso 3** Calcula el volumen de la caja multiplicando el área de su base por su altura.

$24 \text{ cm}^2 \cdot 2 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^3$       caben 48 cubos dentro de la caja

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

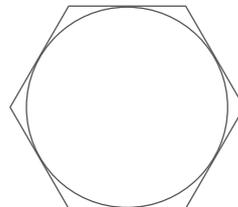
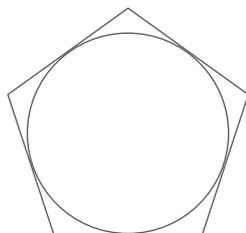
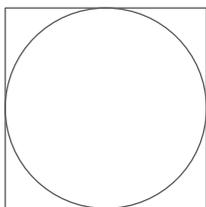
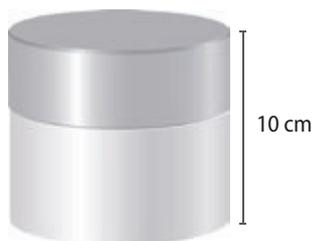
Completa la afirmación:

Para calcular el volumen de un prisma debo calcular el producto del área de su \_\_\_\_\_ por la medida de su \_\_\_\_\_.

### Situación 3 Relacionando el cálculo del volumen de un prisma con el de un cilindro

¿Cómo puedes calcular el volumen del cilindro de la figura, cuyo radio mide 5 cm?

Antes de responder, considera las vistas superiores del cilindro inscrito en tres prismas de su misma altura, con bases cuadrada, pentagonal y hexagonal.



¿Cuál de los tres prismas tiene un área basal más parecida al área basal del cilindro?, ¿cómo lo sabes?

Completa la afirmación:

En la medida que aumenta el número de lados de la \_\_\_\_\_ del prisma, el volumen del prisma se aproxima cada vez más al volumen del cilindro.

**Paso 1** Determina el área  $A$  de la base del cilindro.

Dado que su base es un círculo, puedes aplicar la fórmula correspondiente.

$$A \approx 3,14 \cdot (5 \text{ cm})^2 = 3,14 \cdot 25 \text{ cm}^2 = 78,5 \text{ cm}^2$$

**Paso 2** Aplica la fórmula del volumen de un prisma para calcular el volumen del cilindro.

La fórmula indica que el volumen  $V$  del cilindro es el producto entre el área basal y la altura del cilindro.

$$V \approx 78,5 \text{ cm}^2 \cdot 10 \text{ cm} = 785 \text{ cm}^3$$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

Completa la afirmación:

La fórmula que me permite calcular el volumen  $V$  de un \_\_\_\_\_ de altura  $h$  y cuyo círculo basal tiene un radio que mide  $r$  es  $V = \pi r^2 \cdot h$ .

#### Ayuda

El área  $A$  de un círculo de radio  $r$  es:

$$A = \pi r^2$$

Donde  $\pi$  es un número decimal que se puede aproximar a 3,14.

#### ► Para concluir

El **volumen  $V$  de un prisma o de un cilindro** es el producto entre el área basal  $A_b$  y la medida de su altura  $h$ :

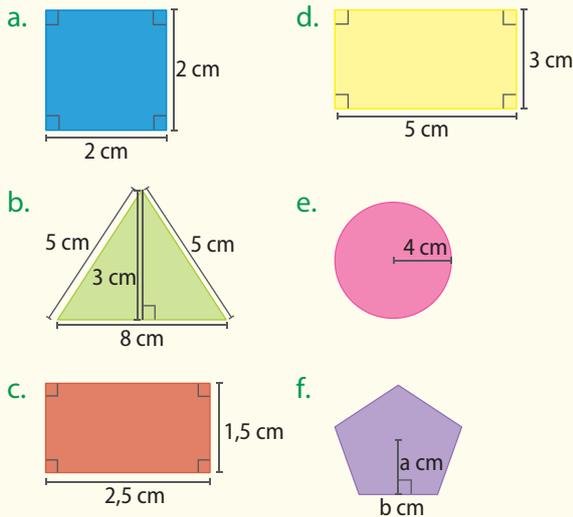
$$V = A_b \cdot h$$

#### Argumenta y comunica

Considera un prisma cuya base es un polígono regular de 100 lados. ¿Cómo serán entre sí los volúmenes del prisma y del cilindro de igual altura? ¿Y si el polígono tiene 1000 lados? Explica y argumenta para justificar tus respuestas.

Repaso

1. Determina el área de cada figura.



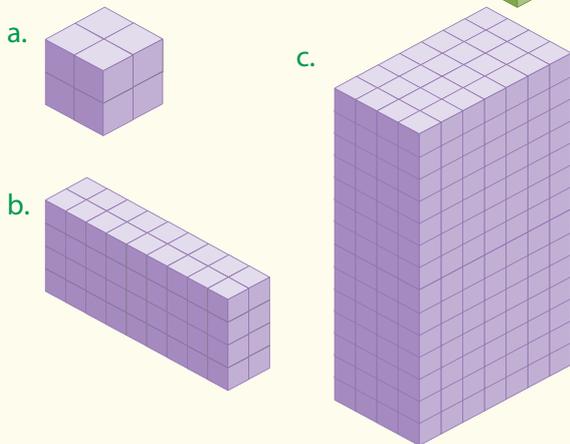
2. Determina la medida de los segmentos descritos.

- a. Lado de un cuadrado de área  $100 \text{ cm}^2$ .
- b. Radio de un círculo de área  $28,26 \text{ dm}^2$ .
- c. Ancho de un rectángulo de largo  $5 \text{ hm}$  y área  $17,5 \text{ hm}^2$ .
- d. Altura de un triángulo de base  $4 \text{ mm}$  y área  $12 \text{ mm}^2$ .
- e. Diámetro de un círculo de área  $314 \text{ cm}^2$ .

Práctica guiada

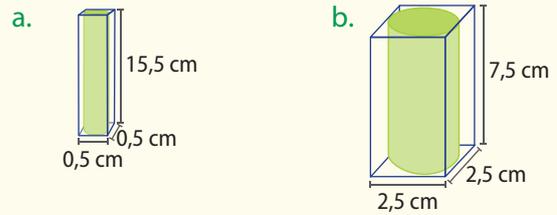
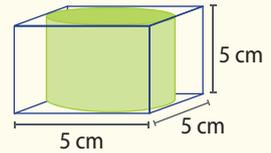
3. Calcula el volumen de los prismas, considerando que el volumen de cada cubo es  $1 \text{ cm}^3$ .

Dos cubos de área basal, tres cubos de altura. El volumen del prisma es:  
 $A_B \cdot h = 2 \text{ cm}^2 \cdot 3 \text{ cm} = 6 \text{ cm}^3$



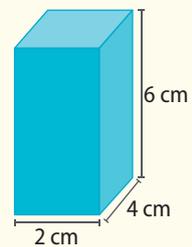
4. Calcula el volumen de cada cilindro.

Altura cilindro:  $5 \text{ cm}$   
 Radio base:  $2,5 \text{ cm}$   
 $A_B \approx (2,5^2 \cdot 3,14) \text{ cm}^2 = 19,625 \text{ cm}^2$   
 $V \approx (5 \cdot 19,625) \text{ cm}^3 = 98,125 \text{ cm}^3$

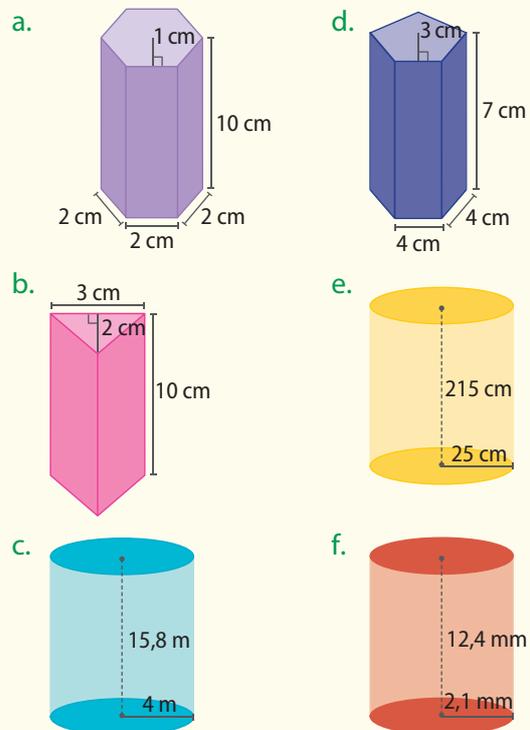
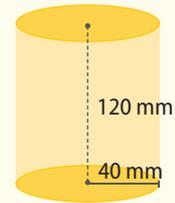


5. Calcula el volumen de cada prisma y cilindro.

$A_B = (2 \cdot 4) \text{ cm}^2$   
 $A_B = 8 \text{ cm}^2$   
 $h = 6 \text{ cm}$   
 $V = (8 \cdot 6) \text{ cm}^3$   
 $V = 48 \text{ cm}^3$



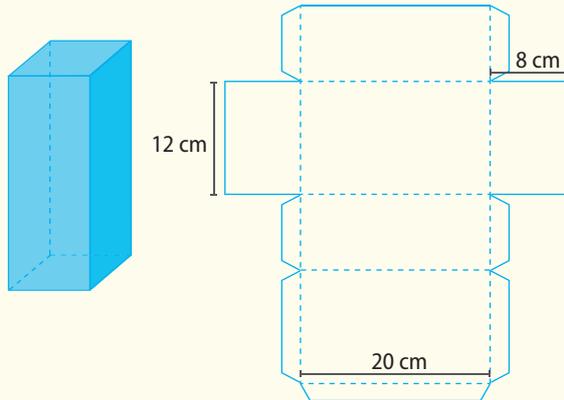
Radio base  $40 \text{ mm}$   
 $A_B \approx 3,14 \cdot (40 \text{ mm})^2$   
 $A_B \approx 5024 \text{ mm}^2$   
 $h = 120 \text{ mm}$   
 $V \approx (120 \cdot 5024) \text{ mm}^3$   
 $V \approx 602880 \text{ mm}^3$



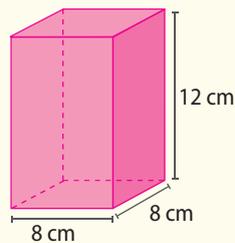
Aplica

6. Resuelve los problemas.

- a. Se tiene la red de un paralelepípedo como la que aparece en la imagen. Ubica las medidas en la figura 3D correspondiente y calcula su volumen.



- b. Miguel tiene una caja con forma de prisma de base cuadrada. Quiere guardar en ella la mayor cantidad de cubos de madera cuya arista mide 2 cm. Si tiene 125 cubos, ¿cuántos de ellos quedarán fuera de la caja?



- c. Juan midió el diámetro y la altura de distintos vasos de forma cilíndrica para saber cuál de ellos tiene una capacidad cercana a  $200 \text{ cm}^3$ . Los vasos tienen las siguientes medidas:

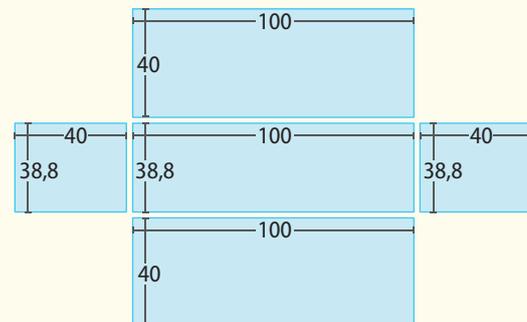
Vaso	Diámetro (cm)	Altura (cm)
1	6	7
2	8	4
3	7	5

¿Cuál de los vasos debiera escoger Juan? Considera  $\pi \approx 3,14$ .

- d. Mide con una regla la red que se muestra, luego señala el nombre de la figura 3D que se podría armar y calcula su volumen aproximado.



- e. Gabriel compró un acuario para armar con las medidas expresadas en centímetros que se indican en la figura.



- ¿Cuál es el volumen del acuario que compró Gabriel?
- Si Gabriel llena de agua el acuario hasta un 70% de su capacidad y al colocar una piedra dentro del acuario, el volumen del agua sube  $1,5 \text{ cm}^3$ , ¿cuál es el volumen de la piedra?

Reflexión

- Calcula el volumen de un cilindro cuyo radio basal mide 8 cm y cuya altura mide 6 cm. Además, calcula el volumen de los siguientes prismas, cuya altura también mide 6 cm:
  - Prisma A: su base es un cuadrado cuyo lado mide 16 cm.
  - Prisma B: su base es un pentágono regular cuya apotema mide 8 cm y cuyo lado mide aproximadamente 11,6 cm.
- Usa los resultados de la parte 1 para calcular qué porcentaje del volumen del cilindro son los volúmenes del prisma A y del prisma B, respectivamente. ¿Cuál de los prismas tiene un volumen más cercano al volumen del cilindro? ¿Lo habías intuido?, ¿por qué?

Refuerzo

- Escribe la fórmula general que permite calcular el volumen de prismas y cilindros.
- Escribe las fórmulas que permiten calcular el volumen de un cilindro cuya altura mide  $h$  y cuyo radio basal mide  $r$  y el volumen de un prisma cuya altura mide  $h$  y cuya base es un cuadrado de lado  $c$ .
- Calcula el volumen de:
  - un cilindro cuya altura mide 1,5 m y cuyo radio basal mide 70 cm.
  - un prisma cuya altura mide 6 m y cuya área basal es  $5 \text{ m}^2$ .

► **Propósito**

Estimar el área de prismas y cilindros.

¿Para qué?

Estimar el área de figuras 3D, como cajas, vasos o botellas, permite determinar, por ejemplo, la cantidad de papel que se necesita para envolverlas o la cantidad de témpera necesaria para pintarlas.

**Palabras clave**

Prisma

Cilindro

Área

Estimación

Si ocuparas un clip para estimar las medidas de la red de la caja de t ,   en qué unidad quedaría expresada su área?

 C mo estimarías el área de la superficie de una caja de cerámica u otro material que no puedas recortar?

##  C mo estimar el área de prismas y cilindros?

Los objetos materiales que ocupan un espacio en nuestro entorno, como los de las figuras, poseen una superficie que delimita este espacio. La medida de esta superficie es el área del objeto.



### Situación 1 Desarmando un prisma

 C mo se puede estimar el área de la superficie de una caja de t ?

Para responder debes conseguir una caja de t  y unas tijeras.

**Paso 1** Corta la caja a lo largo de sus aristas, como se indica en la figura.

**Paso 2** Cuantifica las medidas de la representación en 2D que obtuviste con alguna unidad de longitud arbitraria, como un clip o una goma de borrar, y estima el área de los rectángulos que conforman la red.



Completa la afirmación:

Estimo que el área de la superficie de la red de la caja de t  es \_\_\_\_\_.

**R:** Para estimar el área puedo determinar la red de la caja y cuantificar la medida de su superficie.

### Situación 2 Cubriendo un cilindro

 C mo se puede estimar el área de la superficie de un cilindro?

Para responder debes conseguir un tubo de papel higiénico para representar un cilindro y un pliego de papel lustre.

**Paso 1** Cubre el tubo de papel higiénico con el papel lustre, cubriendo también sus bases, y recorta el papel que sobre.

**Paso 2** Despliega el papel ocupado en cubrir el tubo y cuantifica sus medidas.



Completa la afirmación:

Estimo que el área de la superficie del cilindro es \_\_\_\_\_.

**R:** Para estimar el área puedo determinar la red de un cilindro y cuantificar la medida de su superficie.

► **Para concluir**

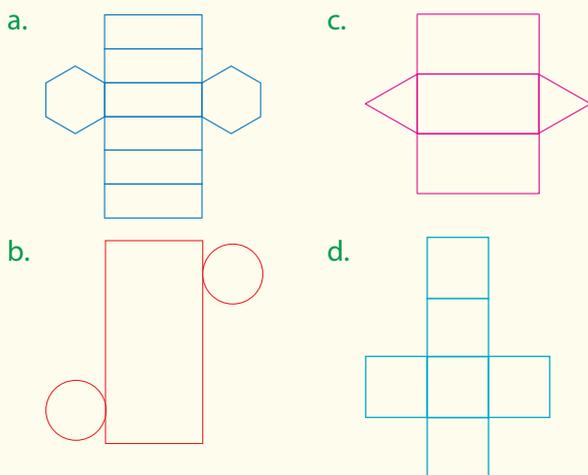
Para estimar el área de un prisma o un cilindro se pueden elaborar sus redes en el plano y estimar el área de las figuras 2D que la forman.

**Argumenta y comunica**

 C mo podrías estimar el área del tubo de papel higiénico sin usar el papel lustre, ocupando solo las tijeras? Responde por escrito en tu cuaderno y comunica tu respuesta al curso.

Repaso

1. Identifica a qué figura 3D corresponden las redes.



Práctica guiada

2. Estima el área de los prismas que se forman con la cantidad de dados de seis caras que se indican. Ayúdate de dibujos o de dados.

Área de un prisma formado por un dado: corresponde a la suma de las superficies de sus 6 caras.

- Área de un prisma formado por tres dados.
- Área de un prisma formado por cuatro dados.
- Área de un prisma formado por ocho dados.
- Área de un prisma formado por doce dados.
- Compara tus respuestas anteriores con las de tus compañeros o compañeras, ¿coinciden sus respuestas? ¿Por qué crees que ocurre esto?
- Estima el volumen de los prismas que formaste con los dados.
- Compara ahora tus respuestas con las de tus compañeros o compañeras. ¿Ocurre lo mismo con el volumen que con el área?, ¿por qué?

Reflexiono

- Considera un prisma de base cuadrada y un cilindro de la misma altura. Además, considera que el diámetro de la base del cilindro y el lado del cuadrado basal del prisma miden lo mismo. Entonces, ¿cuál de las dos figuras crees que tiene mayor área? Piénsalo y justifica tu respuesta.
- Considera un cubo de hielo y una estimación de su área. Si lo divides por la mitad, ¿la suma de las áreas de las superficies de los cubos que obtienes es mayor, menor o igual que el área del cubo original? Justifica tu respuesta.

Aplica

- Estima la superficie de cada objeto dibujando su red sobre un papel y señalando el área de las figuras 2D que debes sumar.
  - Una goma.
  - Un sacapuntas.
  - Un vaso.
  - Un lápiz corrector.
  - La tapa de una botella.
- Identifica qué redes deben considerar los artesanos para estimar las superficies de las figuras 3D que tapizarán.
  - Rocío debe tapizar el cojín.
  - María debe tapizar la caja.
  - Miguel debe tapizar el baúl.



- Describe el procedimiento.** Señala cómo estimarías la cantidad de género necesario para confeccionar dos mangas para una polera.
- Conecta con la Construcción.** Un cuerpo sufre una dilatación de área cuando por efecto del calor aumenta su largo y ancho. Si por un aumento de temperatura, una pieza de acero con forma de cubo dilata la superficie de cada una de sus caras en un 10%, señala qué ocurre con el área total de dicha pieza.

Refuerzo

- Explica qué es el área y en qué unidades se mide.
- Enumera las figuras 2D que conforman la red de un cilindro, de un prisma de base cuadrada, de un prisma de base pentagonal y de un prisma de base heptagonal.
- Desarma una caja de pasta de dientes y estima el área de su red.

**Propósito**

Calcular el área de prismas y cilindros.

**¿Para qué?**

Calcular el valor del área de una figura 3D permite determinar, por ejemplo, la cantidad de material que se necesita para construir una tubería, un estanque o una caja de cartón.

**Palabras clave**

- Prisma
- Cilindro
- Área
- Superficie

## ¿Cómo calcular el área de prismas y cilindros?

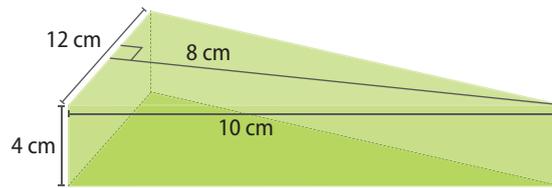
Sofía quiere confeccionar una caja de cartón para envolver un regalo para su madre, que está de cumpleaños. La caja que necesita tiene la forma que se indica en la figura.



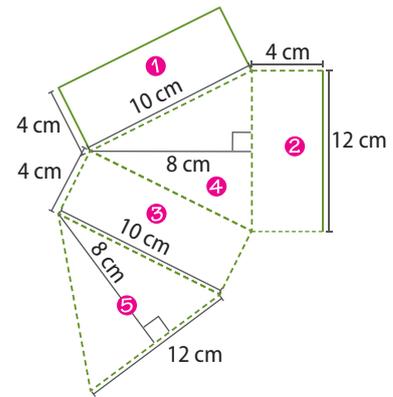
**Situación 1** Desplegando la red de un prisma

¿Cuánto cartón necesita Sofía para confeccionar su caja?

Para responder dibujaremos la caja con forma de prisma y sus medidas:



**Paso 1** Dibuja la red de la caja de Sofía con sus medidas e identifica las figuras 2D que la integran: tres rectángulos y dos triángulos. Identifícalos con los números del 1 al 5 como se indica en la figura.



**Paso 2** Calcula el área de cada figura 2D identificada en la red del prisma:  $A_1, A_2, A_3, A_4$  y  $A_5$ .

$$A_1 = A_3 = 10 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 40 \text{ cm}^2$$

$$A_2 = 12 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^2$$

$$A_4 = A_5 = \frac{12 \text{ cm} \cdot 8 \text{ cm}}{2} = \frac{96 \text{ cm}^2}{2} = 48 \text{ cm}^2$$

**Paso 3** Calcula la suma de las áreas de las figuras definidas.

$$\text{Área total del prisma } A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5$$

$$A = 40 \text{ cm}^2 + 48 \text{ cm}^2 + 40 \text{ cm}^2 + 48 \text{ cm}^2 + 48 \text{ cm}^2 = 224 \text{ cm}^2$$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

Completa la afirmación:

Puedo calcular el área de la superficie de un prisma sumando el \_\_\_\_\_ de cada una de las figuras 2D que conforma su \_\_\_\_\_ en el plano.

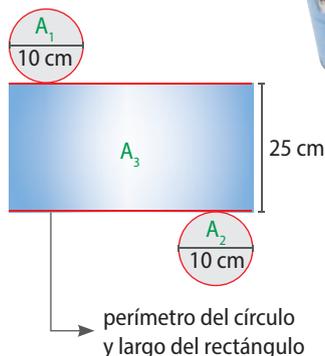
**Ayuda**

- El área **A** de un rectángulo de lados **a** y **b** se calcula como:  
 $A = ab$
- El área **A** de un triángulo de base **b** y altura correspondiente **h** se calcula como:  
 $A = \frac{bh}{2}$

¿Cuánto mediría aproximadamente el lado de un cuadrado de área  $224 \text{ cm}^2$ ?

**Situación 2** Desplegando la red de un cilindro

Además del regalo para su madre, Sofía compró las papas fritas favoritas de su hermana menor, que se muestran en la figura, y las envolverá en papel celofán. Como mínimo, ¿cuánto papel ocupará, aproximadamente?



**Paso 1** Dibuja la red del envase de papas fritas con sus medidas e identifica las figuras 2D que la integran: dos círculos y un rectángulo.

**Paso 2** Calcula el área de cada figura 2D identificada en la red del cilindro:  $A_1$ ,  $A_2$  y  $A_3$ . Aproxima el valor de  $\pi$  a 3,14.

$$A_1 = A_2 = \pi \cdot (5 \text{ cm})^2 \approx 3,14 \cdot 25 \text{ cm}^2 = 78,5 \text{ cm}^2$$

$$A_3 = 2\pi \cdot 5 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm} \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 5 \text{ cm} \cdot 25 \text{ cm} = 785 \text{ cm}^2$$

**Paso 3** Calcula la suma de las áreas de las figuras definidas.

$$\text{Área total del cilindro } A \approx A_1 + A_2 + A_3.$$

$$A \approx 78,5 \text{ cm}^2 + 78,5 \text{ cm}^2 + 785 \text{ cm}^2$$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

Completa la afirmación:

Puedo calcular el \_\_\_\_\_ de la superficie de un cilindro sumando el área de cada una de las \_\_\_\_\_ que conforma su red en el plano.

**Ayuda**

Observa que la medida de uno de los lados del rectángulo coincide con la medida del perímetro del círculo basal del cilindro y que el otro coincide con la medida de su altura.

¿Cuál es el área de un círculo de radio  $r$ ?

**Ayuda**

El perímetro  $P$  de un círculo de radio  $r$  es:

$$A = 2\pi r$$

Donde  $\pi$  es un número decimal que se puede aproximar a 3,14.

¿Cuánto mediría aproximadamente el lado de un cuadrado de área  $785 \text{ cm}^2$ ?

**Para concluir**

- Para calcular el área  $A$  de la superficie de un prisma se deben sumar las áreas de sus caras laterales  $A_L$  y basales  $2A_B$ :

$$A = A_L + 2A_B$$

- Para calcular el área  $A$  de la superficie de un cilindro se deben sumar las áreas de sus caras laterales  $A_L$ , que es una y corresponde a un rectángulo cuyos lados coinciden con la altura del cilindro  $h$  y el perímetro de su base circular; y basales  $2A_B$ , que corresponden a dos círculos de radio  $r$ :

$$A = A_L + 2A_B$$

$$A = 2\pi r \cdot h + 2\pi r^2$$

**Argumenta y comunica**

Consigue una caja de zapatos que ya no uses y calcula el área de la superficie de dos formas:

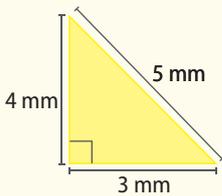
- Usando tijeras para desplegar el cartón con que está hecha.
- Cubriéndolo con papel y recortando el material sobrante.

¿Coinciden las dos medidas o hay una diferencia apreciable? Explica a qué factores podría deberse la diferencia existente, en caso de haberla, entre ambas medidas.

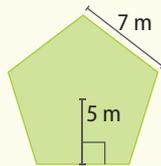
Repaso

- Calcula el perímetro de cada circunferencia, a partir de la información proporcionada.
  - Su diámetro mide 6 cm.
  - Su diámetro mide 32 cm.
  - Su radio mide 3 cm.
  - Su radio mide 11 dm.
  - Su diámetro mide 2,5 m.
  - Su radio mide 1,1 mm.
  - Su diámetro mide  $x$ .
  - Su radio mide  $\frac{y}{4}$ .
- Calcula el área de cada figura.

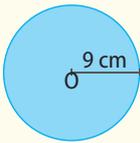
a. Triángulo.



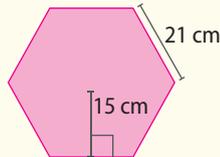
c. Pentágono regular.



b. Círculo de centro O.



d. Hexágono regular.



Práctica guiada

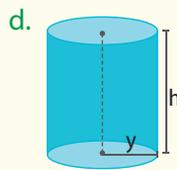
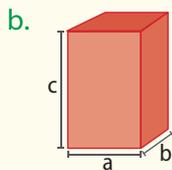
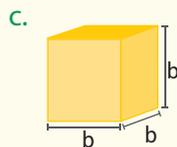
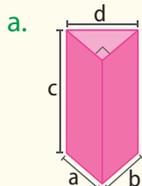
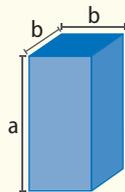
- Identifica cada figura 3D y determina la expresión que representa su área  $A$ , siendo  $2A_B$  su área basal y  $A_L$  su área lateral.

Prisma de base cuadrada:

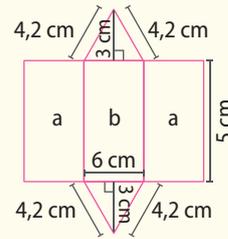
$$A_B: b \cdot b = b^2$$

$$A_L: a \cdot b = ab. \text{ Son 4 caras laterales, } 4ab.$$

$$A = A_L + 2A_B = 4ab + 2b^2$$



- Calcula el área de la superficie de la figura 3D que se puede armar con cada red.



$$A_{\text{triángulo}} = (6 \cdot 3 : 2) \text{ cm}^2 = 9 \text{ cm}^2$$

$$A_{\text{rectángulo a}} = (5 \cdot 4,2) \text{ cm}^2 = 21 \text{ cm}^2$$

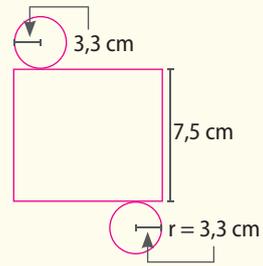
$$A_{\text{rectángulo b}} = (5 \cdot 6) \text{ cm}^2 = 30 \text{ cm}^2$$

$$A = 2 \cdot A_{\text{triángulo}} + 2 \cdot A_{\text{rectángulo a}} + A_{\text{rectángulo b}}$$

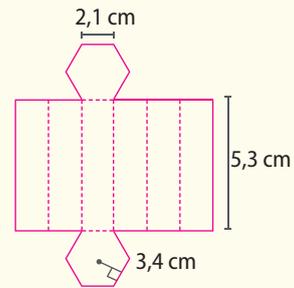
$$= (2 \cdot 9 + 2 \cdot 21 + 30) \text{ cm}^2$$

$$= 90 \text{ cm}^2$$

a. Cilindro.



b. Prisma de base regular hexagonal.



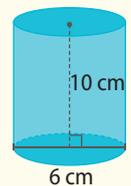
- Calcula el área de la superficie de cada figura 3D.

$$A_B = (\pi \cdot 3^2) \text{ cm}^2 \approx 28,26 \text{ cm}^2$$

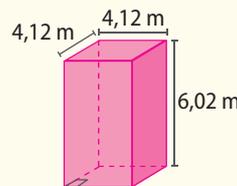
$$A_L = (\pi \cdot 6 \cdot 10) \text{ cm}^2 \approx 188,4 \text{ cm}^2$$

$$A = 2A_B + A_L \approx (2 \cdot 28,26 + 188,4) \text{ cm}^2$$

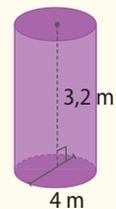
$$A \approx 244,92 \text{ cm}^2$$



a. Prisma de base cuadrada.



b. Cilindro.



## Aplica

## 6. Resuelve los problemas.

- Lorenzo quiere forrar con papel lustre 6 tubos de papel higiénico, por dentro y por fuera. Si el diámetro del tubo mide 6 cm y su altura 10 cm, ¿cuántos centímetros cuadrados de papel necesitará Lorenzo?
- La razón entre el área de dos cubos es 8 : 1. Si el área del más pequeño es  $8 \text{ mm}^2$ , ¿cuál es la longitud aproximada de la arista del más grande?
- Observa la lata de conservas y responde:

- ¿Cuál es el área de la etiqueta del tarro?
- Si se etiquetarán 80 tarros, ¿cuántos centímetros cuadrados de etiquetas se ocuparán?
- Si se reduce el diámetro de la lata en 1 cm, ¿en qué porcentaje disminuye el área de la etiqueta del tarro?

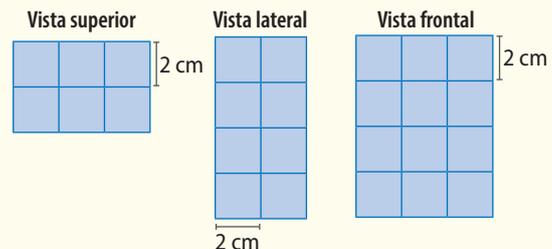


- Describe el procedimiento.** Señala el procedimiento que usarías para calcular la cantidad de papel que se necesita para envolver dos rollos de papel higiénico, uno sobre otro apoyados en sus caras basales, si el diámetro menor es un tercio del diámetro mayor y la altura de un rollo es el doble del diámetro menor.



- Argumenta.** Dibuja la red de tres prismas rectangulares cuyo volumen sea  $24 \text{ cm}^3$ . Calcula el área de los prismas y constata si sus valores coinciden. A partir de tus resultados, explica en forma escrita si existe alguna relación que permita asociar el área y el volumen de una figura 3D.
- Crea.** Dibuja sobre un cartón las redes de un cilindro y de un prisma rectangular cuyas áreas sean aproximadamente  $100 \text{ cm}^2$ . A continuación, calcula sus volúmenes y luego arma las figuras. Compara tus resultados con los de tus compañeros o compañeras.
- Argumenta.** Andrea y Javier discuten sobre el área de un cilindro. Andrea dice que el área de un cilindro cuyo radio mide  $a$  y cuya altura mide  $b$  es distinta al área de un cilindro cuyo radio mide  $b$  y cuya altura mide  $a$ . Javier dice, en cambio, que ambos cilindros tienen la misma área. ¿Quién tiene la razón? ¿Cómo harías para verificar el razonamiento correcto?

- Desafío.** Observa las vistas de un prisma y responde.



- ¿Cuál es el volumen del prisma representado?
- ¿Cuál es el área de la superficie del prisma representado?

- Analiza.** Si dos figuras 3D poseen el mismo volumen, ¿tienen también la misma área superficial? Y si tienen la misma área superficial, ¿poseen el mismo volumen? Piensa y justifica.

## Reflexiono

- Para mejorar y acelerar la cocción de los alimentos se recomienda dividirlos en varias partes, por ejemplo, en lugar de cocer una papa entera es aconsejable trozarla. Explica por qué. ¿Qué relación tiene este hecho con el concepto de área superficial? Para concretar esta idea, consigue un zapallo italiano de forma cilíndrica y calcula su área superficial en forma aproximada. Luego, divídelo transversalmente, de manera de obtener cuatro cilindros de la misma base que el zapallo original. Finalmente, estima el área conjunta de estos zapallos y compárala con el área del zapallo original.

## Refuerzo

- Escribe la fórmula general que permite calcular el área de prismas y cilindros.
- Escribe las fórmulas que permiten calcular el área de un cilindro cuya altura mide  $h$  y cuyo radio basal mide  $r$  y el área de un prisma cuya altura mide  $h$  y cuya base es un cuadrado de lado  $c$ .
- Calcula el área de un cilindro cuya altura mide 5 cm y cuyo radio basal mide 5 cm. ¿Es mayor o menor que la de un cubo cuya arista mide 5 cm?

► **Propósito**

Realizar aplicaciones del cálculo de volumen y área de prismas y cilindros.

¿Para qué?

La aplicación de las fórmulas de volumen y de área de cilindros y prismas permite resolver muchos problemas geométricos de la vida cotidiana.

**Palabras clave**

Prisma

Cilindro

Área

Volumen

## ¿Qué aplicaciones tiene el cálculo del volumen y área de prismas y cilindros?

Una empresa de vidrios está diseñando un nuevo vaso, cuya capacidad aproximada debe ser de  $300 \text{ cm}^3$ . La forma y la medida del diámetro del vaso se indican en la figura.



**Situación 1** Calculando la altura de un cilindro

¿Cuál debe ser la altura del vaso?

Para responder, primero identificamos que la forma del vaso corresponde a la de un cilindro cuyo volumen  $V$  es  $300 \text{ cm}^3$  y cuyo radio basal  $r$  mide  $3 \text{ cm}$ .

**Ayuda**

Recuerda que el radio de un círculo mide la mitad de su diámetro.

**Paso 1** Define la incógnita  $h_1$  como la altura del vaso.

**Paso 2** Reemplaza los datos del problema en la fórmula de volumen

$$V = A_B \cdot h = \pi r^2 \cdot h:$$

$$300 \approx 3,14 \cdot 3^2 \cdot h_1$$

$$300 \approx 3,14 \cdot 9 \cdot h_1$$

$$300 \approx 28,26 \cdot h_1 \quad /: 28,26$$

$$\frac{300}{28,26} \approx h_1$$

$$10,62 \approx h_1$$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Ayuda**  
Observa que en los cálculos se han omitido las unidades  $\text{cm}$ ,  $\text{cm}^2$ ,  $\text{cm}^3$  para facilitar el desarrollo. Pero en la respuesta completa debes usar las unidades correctas.

**Situación 2** Relacionando la altura y el volumen de un cilindro

Si se desea duplicar el volumen del vaso manteniendo el diámetro de su base, ¿se debe duplicar su altura?

Ahora consideraremos que el volumen del vaso es  $600 \text{ cm}^3$ , para el mismo radio basal de  $3 \text{ cm}$ .

**Paso 1** Define la incógnita  $h_2$  como la nueva altura del vaso.

**Paso 2** Reemplaza los nuevos datos del problema en la fórmula de volumen:

$$600 \approx 28,26 \cdot h_2 \quad /: 28,26$$

$$\frac{600}{28,26} \approx h_2$$

$$21,23 \approx h_2$$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

Completa la afirmación:

Si duplico la altura de un \_\_\_\_\_, conservando constante la base, se duplica también su \_\_\_\_\_.

**Ayuda**  
Observa que como la base del cilindro se conserva, el área basal sigue siendo:  
 $\pi r^2 \approx 28,26 \text{ cm}^2$

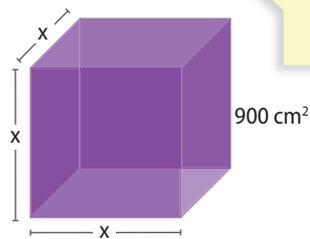
Si se duplica el diámetro de la base de un cilindro, ¿en qué porcentaje aumenta su volumen?

**Situación 3** Calculando el volumen de un cubo

¿Cuál es el volumen de un cubo si el área de cada una de sus caras es 900 cm<sup>2</sup>?

El cubo está compuesto por 6 caras cuadradas de área 900 cm<sup>2</sup>.

**Paso 1** Determina la medida de cada arista (x): como cada cara del cubo es un cuadrado de área 900 cm<sup>2</sup>, entonces,  $x^2 = 900 \Rightarrow x = \sqrt{900}$ . Luego, cada arista del cubo mide  $\sqrt{900}$  cm.



**Paso 2** Define la incógnita **V** como el volumen del cubo y constata que cada una de sus caras corresponde a un cuadrado como el de la figura.

Observa que la medida del lado del cuadrado se debe considerar como la altura **h** del cubo.

**Paso 3** Reemplaza los datos en la fórmula de volumen de un prisma.

$$V = A_B \cdot h:$$

$$V = 900 \cdot \sqrt{900} = 900 \cdot 30 = 27\,000$$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

¿Cuál es el área del cubo? ¿Se duplica su área si duplicamos la longitud de su arista?

**Situación 4** Calculando la altura de un prisma

Si la piscina de un colegio se llena con 96 m<sup>3</sup> de agua y su forma corresponde a la de un prisma cuya base es un rectángulo de lados de 10 y 6 metros, ¿cuál es su profundidad y su área interior?

Para responder, aplicaremos las fórmulas de volumen y de área de un prisma.

**Paso 1** Define las incógnitas **h** como la profundidad de la piscina y **A** como el área interior.

**Paso 2** Reemplaza los datos en las fórmulas del volumen de un prisma y del área A.

Cálculo de la profundidad h	Cálculo del área superficial A
$V = 10 \cdot 6 \cdot h$ $96 = 10 \cdot 6 \cdot h$ $96 = 60 \cdot h \quad /: 60$ $\frac{96}{60} = h$ $1,6 = h$	$A = 10 \cdot 6 + 2 \cdot 10 \cdot h + 2 \cdot 6 \cdot h$ $A = 60 + 20h + 12h$ $A = 60 + 32h$ <p>Reemplazando el valor de h:</p> $A = 60 + 32 \cdot 1,6$ $A = 111,2$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

¿A cuántos litros equivalen 96 m<sup>3</sup>, si 1 m<sup>3</sup> equivale a 1000 litros?

**Ayuda**

La equivalencia entre el litro (L) y el centímetro cúbico (cm<sup>3</sup>) está dada por:  
1 L = 1000 cm<sup>3</sup>

¿Qué figuras 2D se consideraron para el cálculo del área interior de la piscina?

**Para concluir**

Para resolver las diversas situaciones geométricas se deben ocupar las **fórmulas generales de volumen**  $V = A_B \cdot h$  y de **área**  $A = A_L + 2A_B$ , donde **h** es la altura del prisma o cilindro,  $A_L$  su área lateral y  $A_B$  el área de una base.

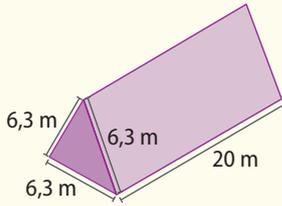
**Argumenta y comunica**

¿Cómo calcularías la cantidad de litros de agua necesaria para llenar una piscina cilíndrica de 1,4 m de profundidad y cuyo radio basal mide 1,2 m? Explica por escrito en tu cuaderno y luego en forma verbal a un compañero o a una compañera.

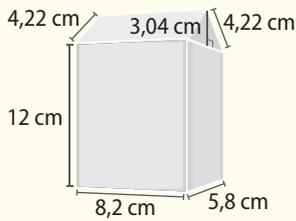
Repaso

1. Calcula el área y el volumen de cada figura.

a.



b.

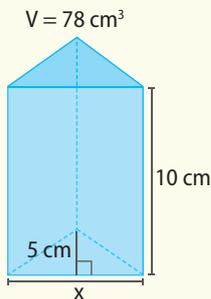


Práctica guiada

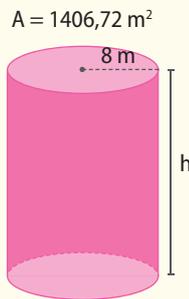
2. Determina la medida desconocida a partir de los valores de área A o volumen V.

$A = 150,72 \text{ cm}^2$      $A_B = \pi \cdot r^2 \approx 3,14 \cdot 3^2$   
 $A_B \approx 28,26 \text{ cm}^2$   
 $A_L = 2 \cdot \pi \cdot r \cdot h \approx 2 \cdot 3,14 \cdot 3 \cdot h$   
 $A_L \approx 18,84 h$   
 $A = 2 \cdot A_B + A_L$   
 $150,72 \approx 2 \cdot 28,26 + 18,84 h$   
 $150,72 \approx 56,52 + 18,84 h$   
 $94,2 \approx 18,84 h$   
 $5 \approx h$

a. Prisma de base regular triangular.



b. Cilindro.



Aplica

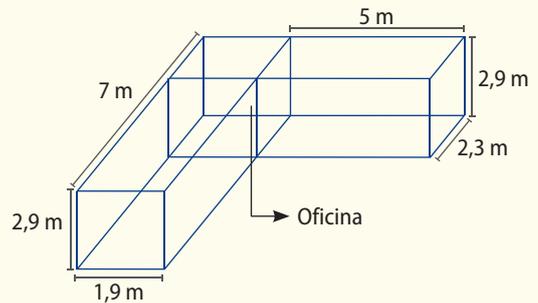
3. Resuelve los problemas.

a. Se quiere cubrir con un material antiadherente el interior de cada molde para hacer chocolates, como se muestra en este portamoldes.



Si la cantidad de antiadherente que se tiene alcanza para cubrir una superficie de  $70 \text{ cm}^2$ , ¿cuántos moldes podrán cubrirse?

b. El siguiente esquema muestra la intersección de dos pasillos de un colegio, donde se construirá la sala de atención para apoderados. ¿Cuál será el espacio habilitado para dicha oficina?



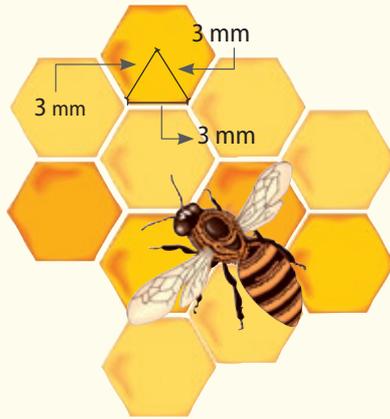
c. La altura del neumático que se muestra en la figura corresponde a un 260% de la medida de su ancho. ¿Cuál es el área de la superficie del ancho del neumático?



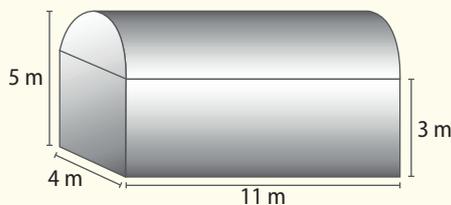
d. ¿Cuál es el volumen que ocupa el siguiente molde con un queque en su interior?



- e. Las celdas de un panal de abejas tienen la forma de un prisma de base regular hexagonal, cuyas dimensiones se muestran en la imagen.

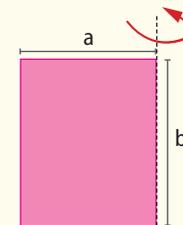


- Calcula el área de un triángulo central de una celda, sabiendo que la altura mide aproximadamente el 85% de su lado.
  - Calcula el área de una celda.
  - Calcula el volumen de una celda si la altura mide 12 mm.
- f. Una empresa distribuidora de combustible necesita construir un depósito cuya forma es la de un prisma recto de base rectangular y en la parte superior tiene la forma de un semicilindro, como se muestra en la figura.



¿Cuál es el volumen de combustible que puede almacenar este tipo de depósito?

4. **Conecta con la Ingeniería.** En el norte de nuestro país existen acueductos que abastecen de agua a los pueblos altioplánicos. Uno de ellos tiene forma semicilíndrica cuyo diámetro mide 2,3 m y tienen una longitud de 4 km. ¿Cuál es el volumen máxima de agua que puede soportar el acueducto?
5. **Conecta con la Anatomía.** La cantidad de sangre que tiene el cuerpo de una persona adulta, es de 5 litros aproximadamente. La sangre se transporta por medio de venas, arterias y capilares que se pueden suponer de forma cilíndrica, donde las venas contienen el 70% del volumen sanguíneo total. La vena cava inferior tiene una longitud de 22 cm y un diámetro promedio que mide de 2,5 cm.
- ¿Cuál es el volumen máximo de sangre que puede circular por esta vena?
  - ¿Cuál es la razón entre el volumen de sangre en la vena cava inferior y el volumen de sangre que circula por las venas?
6. **Desafío.** Si se rotara un rectángulo de ancho  $a$  y largo  $b$  sobre uno de sus lados, señala:
- ¿Qué figura 3D se formaría?
  - ¿Cómo se expresaría su volumen y su área?
- Compara tu respuesta con tus compañeros y compañeras. Luego, comunícala a tu profesor o profesora.



### Reflexión

- Si se inscribe un cilindro de radio  $a$  dentro de un cubo, ¿cuál es la razón entre los volúmenes de ambas figuras? Piénsalo y justifica tu respuesta.
- Si se desea aumentar al doble el volumen de un cilindro manteniendo su radio, ¿cuánto debe variar su altura? Explica.

### Refuerzo

- Describe el procedimiento que utilizarías para determinar el área de la superficie de una pieza metálica cuya forma es un prisma de base regular pentagonal.
- Inventa un problema en donde se calcule el volumen de un cilindro de radio 4,5 cm y de altura 12 cm.
- Señala y describe dos situaciones en las que sea necesario aplicar el cálculo de volumen y de área de prismas y cilindros.

# Agua potable

## Su producción industrial

El agua que consumes diariamente ha debido pasar por una serie de procesos físicos y químicos para eliminar la suciedad que trae, después de ser captada en forma cruda desde los lechos de ríos o lagos. Al proceso completo que hace del agua un producto apto para el consumo humano se le llama potabilización. Aunque existen algunas diferencias en los métodos de purificación, las etapas generales son:

### 1. Captación

Se realiza mediante el uso de bombas que extraen el agua desde fuentes naturales como ríos o lagos.



### 2. Decantación

Se lleva a cabo en piscinas de decantación. Consiste en agregar agentes químicos que favorecen la aglomeración de las sustancias sólidas. Estas aglomeraciones caen al fondo de la piscina y, posteriormente, son removidas.



### 5. Distribución

Se dirige el agua potable a la población a través de un sistema de acueductos y de tuberías subterráneas.



### 3. Filtración

Se hace pasar el agua decantada por un lecho de arena que retiene aquellos sólidos que no fueron removidos en la decantación.



### 4. Desinfección

Se agrega cloro al agua filtrada cuidando su pH para luego desinfectarla, y flúor para prevenir las caries en la dentadura de los consumidores.



Las principales empresas que se dedican a la potabilización de aguas en Chile son:

- Aguas Andinas: abastece a la región Metropolitana.
- Essbio: abastece a las regiones de O'Higgins y del Bío Bío.
- Esva: abastece a la región de Valparaíso.
- Aguas del Altiplano: abastece a las regiones de Arica y Parinacota y Tarapacá.
- Aguas Araucanía: abastece a la región de La Araucanía.

### Sabías que...

Los principales contaminantes sólidos que se encuentran en el agua cruda son los siguientes: bolsas, papeles, ramas, rípios, arenas y gravillas.

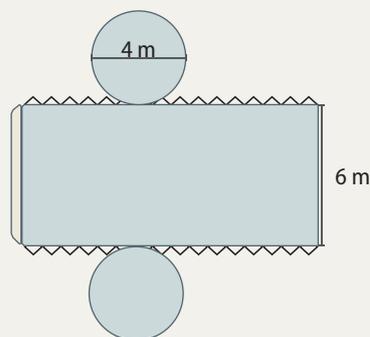
### Actividad grupal

Reúnanse en grupos de 3 o 4 estudiantes para realizar las actividades. Luego, comuniquen sus respuestas al curso.

1. Averigüen qué empresa de potabilización de agua abastece a su ciudad. Ingresen a su página web y anoten el número de clientes y la cantidad de agua que puede tratar diariamente.
2. Supongan que una piscina de decantación con forma cilíndrica está llena hasta el 75 % de su capacidad y que sus dimensiones son 10,8 m de diámetro y 4 m de altura. Con estos datos, ¿cuántos litros de agua están siendo tratados en la piscina? Usen la equivalencia:

$$1 \text{ m}^3 = 1000 \text{ L}$$

3. Supongan que un estanque de almacenamiento de agua potable se puede armar a partir de la siguiente red:



- Calculen el área de la superficie del estanque.
- En una cartulina, dibujen la red usando la escala 1 m  $\rightarrow$  1 cm (es decir, 100 : 1). Luego, recorten y armen la figura 3D.

## Lección 29: ¿Cómo estimar el volumen de prismas y cilindros?

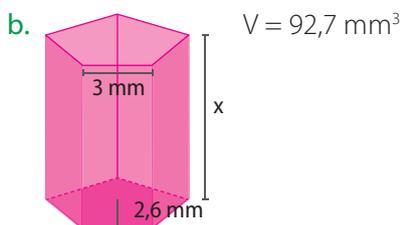
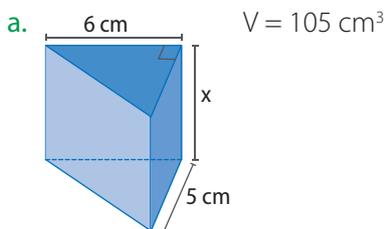
- 1 Estima el volumen de cada prisma y cilindro, si en su interior tiene cubos cuyas aristas miden 1 cm.
  - a. Prisma de base cuadrada con 25 cubos en la base y 6 cubos de altura.
  - b. Cilindro con 10 cubos de diámetro, de manera que 7 cubos equivalen a la mitad de su altura.
  - c. Paralelepípedo con 12 cubos en la base y con 5 cubos de altura.
  - d. Cilindro con 8 cubos de diámetro, de manera que 3 cubos equivalen al 25% de su altura.

## Lección 30: ¿Cómo calcular el volumen de prismas y cilindros?

- 2 Completa la tabla.

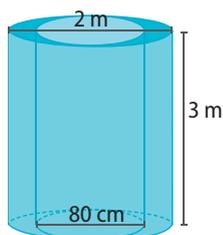
Cara basal	Cara lateral	Volumen
Triángulo cuya área es $16 \text{ cm}^2$ .	Rectángulo cuyo largo mide $12 \text{ cm}$ .	
Círculo cuyo radio mide $3,5 \text{ cm}$ .	Rectángulo cuyo largo mide $10 \text{ cm}$ .	
Cuadrado cuyo lado mide $4,3 \text{ mm}$ .	Rectángulo cuya altura mide $31,2 \text{ mm}$ .	

- 3 Encuentra las medidas que faltan.



- 4 Resuelve los problemas.

- a. Se tienen dos cilindros, uno dentro de otro, como se muestra en la figura. ¿Cuál es el espacio que hay entre ellos?



- b. Se tiene un recipiente con  $900 \text{ cm}^3$  de agua y un vaso cuyas medidas son  $15 \text{ cm}^2$  de área basal y  $8 \text{ cm}$  de altura. ¿Cuántos vasos como el anterior se necesitan para vaciar los  $900 \text{ cm}^3$ ? Señala la cantidad de agua que tendrá el último vaso.
- c. La altura de un cilindro mide el doble de su radio basal. Si su área total es  $384\pi \text{ m}^2$ , ¿cuál es su volumen?

## Lección 31: ¿Cómo estimar el área de prismas y cilindros?

- 5 En cada caso, describe cómo estimarías el área de la superficie de la figura 3D.

- a. Caja de bombones de base hexagonal.



- b. Envase de leche.



- c. Florero de base cuadrada.



- d. Torre de Pisa.



**Lección 32: ¿Cómo calcular el área de prismas y cilindros?**

- 6 Observa la red que forma el envoltorio de un chocolate y responde.

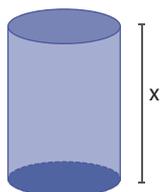


- ¿De qué prisma se trata?
- ¿Cuál es el área total del envoltorio? No consideres las pestañas donde se pegan las caras del prisma.

- 7 Determina la medida de cada incógnita.

- a. Cilindro.

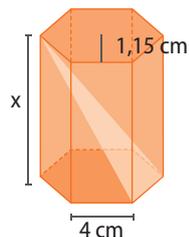
$A_L$ : área lateral.  
 $A_B$ : área basal.



$A_L = 251,2 \text{ mm}^2$   
 $A_B = 200,96 \text{ mm}^2$

- b. Prisma de base regular hexagonal.

A: área total.

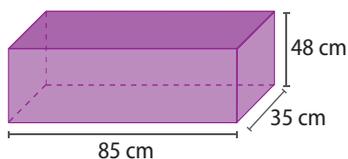


$A = 96,6 \text{ cm}^2$

**Lección 33: ¿Qué aplicaciones tiene el cálculo del volumen y área de prismas y cilindros?**

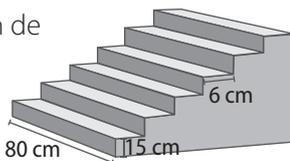
- 8 Resuelve los problemas.

- a. Una pecera tiene la forma y las dimensiones que se indican en la figura:

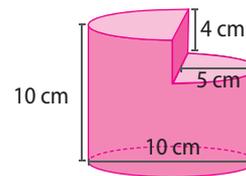


- ¿Cuál es su capacidad expresada en centímetros cúbicos?, ¿y en litros?
- Si una persona quiere una pecera con el doble de capacidad, ¿cuáles son las posibles medidas que puede tener?

- b. ¿Cuál es el volumen de la escalera, si todos los escalones miden lo mismo?



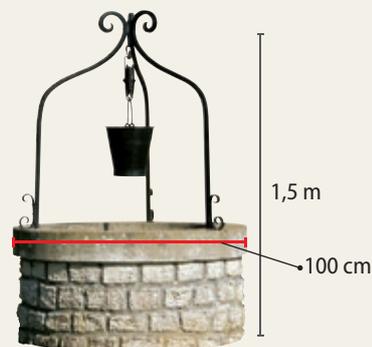
- c. La siguiente figura pertenece a una pieza cilíndrica de un juguete desarmable.



¿Cuál es el área de la superficie de esta pieza?

**Desafíos de integración**

- a. Un pozo tiene una profundidad total de 5 metros y su parte superior tiene las medidas que aparecen en la imagen. Si la cantidad de agua que posee alcanza una altura de 3,8 metros.



- ¿Cuál es el volumen de agua que contiene el pozo?
- ¿Cuánta agua falta para que se llene?

- b. Alejandro dispone de las siguientes partes para armar una mesa:



Si antes de armarla quiere barnizar completamente sus partes y el barniz alcanza para pintar  $3 \text{ m}^2$ , ¿le falta o sobra barniz?, ¿cuánto?

**Trabajo en grupo**

Elige el desafío que más te costó resolver. Explica verbalmente a tus compañeros o compañeras las dificultades que hallaste. Luego, resuélvelo nuevamente, pero esta vez trabajando en forma grupal.

## Descartar información irrelevante

Este proceso permite identificar los datos del problema que actúan como distractores y que no debes utilizar para resolver el problema.

### Algunas estrategias

- Usar un proceso de ensayo y error.
- Aplicar procesos reversibles.
- **Descartar información irrelevante.**
- Usar un problema similar pero más sencillo.
- Construir un esquema, diagrama o tabla.
- Encontrar un patrón.
- Usar modelos matemáticos.
- Usar razonamiento lógico.
- Identificar submetas.

Una empresa vende dos tipos de contenedores metálicos que sirven para guardar gas licuado de petróleo. Sus especificaciones técnicas son:

Contenedor 1	Contenedor 2
Diámetro basal: 0,6 m. Composición: acero (90%), níquel (10%). Forma: cilíndrica. Longitud: 1,1 m. Color: gris. Precio sin IVA: \$ 700 000.	Forma: prismática de base pentagonal. Composición: acero (92%), níquel (8%). Color: morado. Longitud: 0,9 m. Apotema de la base: 0,4 m. Lado de la base: 0,5 m. Precio sin IVA: \$ 700 000.

Contenedor 1



Contenedor 2



¿Cuál de los contenedores se debe comprar si se desea que contenga el máximo de combustible posible?

¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema? Escribe tú

Cuál de los contenedores puede almacenar un mayor volumen de combustible.

¿Qué datos tengo para resolver? Escribe tú

Crea un plan para resolver

Para resolver este problema puedes usar la estrategia **Descartar información irrelevante** para discriminar los datos que no usarás en la resolución del problema de los que sí usarás.

Aplica la **estrategia** y resuelve

La información irrelevante respecto de los contenedores es:

- el material de construcción.
- su color.
- su precio.

Con el resto de los datos calculamos el volumen de los contenedores:

Volumen contenedor 1	Volumen contenedor 2
$V = A_b \cdot h$ $V \approx 3,14 \cdot (0,3 \text{ m})^2 \cdot 1,1 \text{ m}$ $V \approx 0,31 \text{ m}^3$	$V = A_b \cdot h$ $V = \frac{2,5 \text{ m} \cdot 0,4 \text{ m}}{2} \cdot 0,9 \text{ m}$ $V = 0,45 \text{ m}^3$

Verifica la respuesta

Para corroborar los cálculos puedes expresar las medidas de los contenedores en centímetros y comparar luego los volúmenes expresados en centímetros cúbicos.

Comunica la respuesta

Escribe tú

¿De qué otra forma resolverías este problema? Explica.

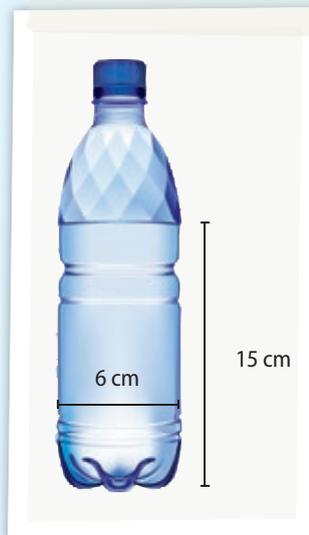
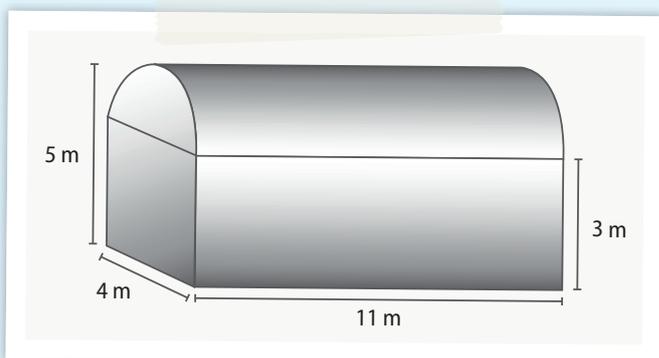
### Vuelvo a mis procesos

Responde de acuerdo a tu apreciación.

¿Cuál de los objetos tiene forma de prisma, cuál de cilindro y cuál está compuesto por partes de ambas figuras 3D?

¿Qué volumen de agua contiene la botella, aproximadamente? ¿Cómo lo expresas en litros?

¿Cómo puedes estimar la cantidad de cartón que se utilizó para fabricar la caja de té?



¿Lograste alcanzar las metas que te propusiste al iniciar el trabajo de esta sección?, ¿cómo?

¿Qué tema, de los estudiados en la sección, fue el que más te gustó?, ¿por qué?

¿Tuviste alguna dificultad para calcular el área y el volumen de prismas y cilindros?, ¿cuál?

## Teorema de Pitágoras

## Activo ideas previas

1. Lee la información y coméntala con un compañero o una compañera.

El teorema de Pitágoras es una de las relaciones matemáticas más populares de la historia, debido a su simpleza y a sus múltiples aplicaciones cotidianas. Su formalización se le atribuye al matemático griego Pitágoras de Samos (580 – 500 a. C.). Sin embargo, en muchas culturas anteriores a la griega ya se ocupaba este teorema, fundamentalmente en cálculos relacionados con la agricultura.

Es así como existen documentos arqueológicos que muestran la utilización del teorema de Pitágoras en culturas como la babilónica, egipcia, india y china. Un milenarismo problema chino relacionado con el teorema de Pitágoras dice: "Hay un bambú de diez pies de altura que se ha roto de tal manera que su extremo superior se apoya en el suelo a una distancia de tres pies de la base. ¿A qué altura se produjo el quiebre?"



Responde las preguntas junto con tu compañero o compañera.

- a. ¿Han escuchado hablar de Pitágoras?, ¿y de su famoso teorema? ¿Sabes para qué se utiliza este teorema? Investiguen y describan alguna aplicación cotidiana del teorema de Pitágoras.
- b. ¿A cuántos centímetros equivale 1 pie? ¿Cuál es el origen de esta unidad de medida? Investiguen y nombren 3 unidades de longitud que no se ocupen habitualmente en nuestro país.
- c. ¿Cómo resolverían el problema de la caña de bambú? Propongan un procedimiento que les permita resolverlo y compártanlo con sus compañeros o compañeras.

## Activo conceptos clave

2. A continuación, se presentan algunos conceptos clave de esta sección. Úsalos para completar las afirmaciones.

triángulo  
GeoGebra

teorema de Pitágoras  
cateto

hipotenusa  
triángulo rectángulo

- a. Al lado de mayor longitud de un triángulo rectángulo se le llama \_\_\_\_\_.
- b. \_\_\_\_\_ es un software que permite realizar construcciones geométricas.
- c. A un polígono cerrado de 3 lados se le llama \_\_\_\_\_.

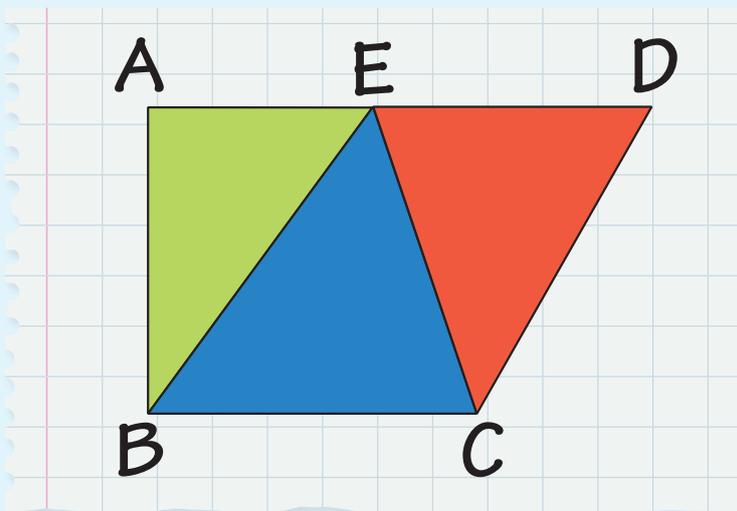
### Pienso mis procesos

Responde de acuerdo a lo que conoces.

¿En cuál de los triángulos crees que se verifica el teorema de Pitágoras?, ¿cómo lo sabes?

¿Cuáles son los catetos y cuál la hipotenusa del triángulo que identificaste en la pregunta anterior?, ¿cómo lo sabes?

Mide los catetos y la hipotenusa del triángulo que identificaste. ¿Puedes establecer una relación entre estas medidas?, ¿cuál sería?



¿Qué aplicación cotidiana piensas que podría tener el teorema de Pitágoras?

¿Te interesa usar un software geométrico para realizar construcciones geométricas?, ¿por qué?

¿Cuáles son las metas que te propones cumplir en esta sección? ¿Crees que podrás conseguirlas?, ¿por qué?

Activa tus conocimientos previos respondiendo las preguntas laterales y luego resuelve las actividades. Para terminar, registra tus logros.

¿Cómo obtienes una raíz cuadrada?  
¿Cuál es su relación con las potencias de exponente 2?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
6 correctas o más	menos de 6 correctas

¿Qué errores cometiste?, ¿por qué?

Calcular raíces cuadradas exactas

1 Señala el valor de cada raíz cuadrada. (8 puntos)

- |                 |                 |
|-----------------|-----------------|
| a. $\sqrt{100}$ | e. $\sqrt{361}$ |
| b. $\sqrt{144}$ | f. $\sqrt{169}$ |
| c. $\sqrt{256}$ | g. $\sqrt{441}$ |
| d. $\sqrt{900}$ | h. $\sqrt{625}$ |

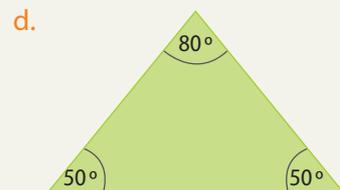
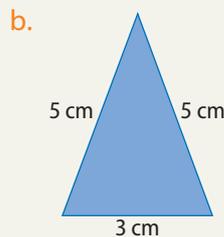
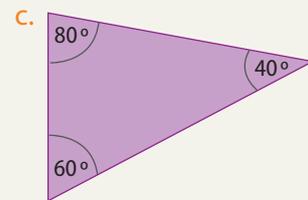
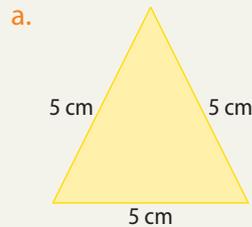
2 Resuelve los problemas. (2 puntos)

- ¿Cuánto mide el lado de un cuadrado cuya área es  $121 \text{ cm}^2$ ?
- El piso de una casa corresponde a una superficie cuadrada cuya área es  $225 \text{ m}^2$ . Si se quiere colocar un guardapolvo a lo largo de uno de sus lados, ¿cuántos metros de extensión deberá tener?

¿Cómo se clasifican los triángulos de acuerdo a la medida de sus lados? ¿Y de acuerdo a la medida de sus ángulos?

Clasificar e identificar triángulos

3 Clasifica cada triángulo según la medida de sus lados o ángulos. (4 puntos)

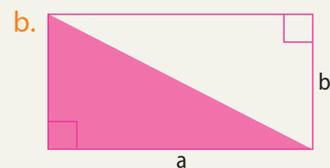
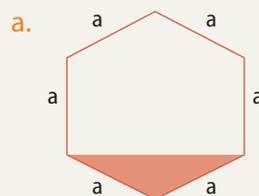


Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
4 correctas o más	menos de 4 correctas

¿Cometiste algún error?, ¿cuál?

4 Identifica el tipo de triángulo pintado en cada figura. (2 puntos)



¿Qué propiedad puedes aplicar para verificar si es posible construir un triángulo dados 3 segmentos?

¿Qué condición debe cumplir la suma de los ángulos interiores de un triángulo?

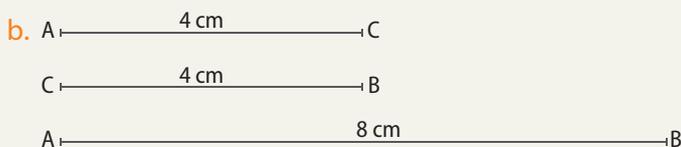
Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
5 correctas o más	menos de 5 correctas

¿Tuviste algún error?, ¿cuál?

### Construir triángulos

5 Evalúa si es posible construir los triángulos a partir de los segmentos. (2 puntos)



6 Verifica, en cada caso, si los triángulos se pueden construir. (6 puntos)

- Sus lados miden 7 cm, 9 cm y 5 cm.
- Sus lados miden 1 cm, 4 cm y 10 cm.
- Sus lados miden 3 cm, 3 cm y 3 cm.
- El triángulo es equilátero y rectángulo.
- El triángulo es isósceles con un ángulo de  $90^\circ$ .
- El triángulo es obtusángulo e isósceles.

¿Qué expresión te permite calcular el área de un triángulo?

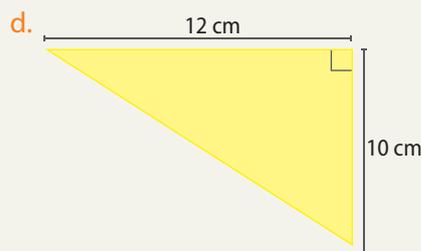
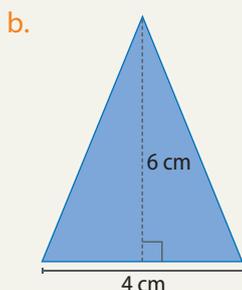
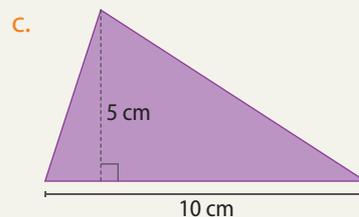
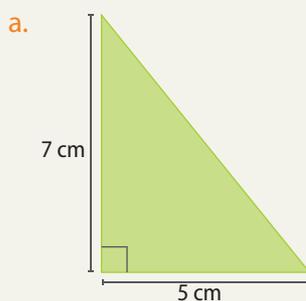
Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
2 correctas o más	menos de 2 correctas

¿Tuviste alguna dificultad?, ¿cuál?

### Calcular áreas de triángulos

7 Calcula el área de cada triángulo. (4 puntos)



► Propósito

Explicar la validez del teorema de Pitágoras.

¿Para qué?

El teorema de Pitágoras tiene múltiples aplicaciones cotidianas, ya que permite relacionar la longitud de los lados de un triángulo rectángulo, de uso común tanto en construcciones naturales como artificiales.

Palabras clave

Teorema de Pitágoras

Triángulo rectángulo

Cateto

Hipotenusa

Software

GeoGebra

## ¿Qué es y cómo se verifica el teorema de Pitágoras?

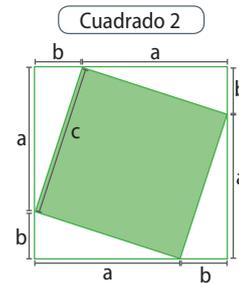
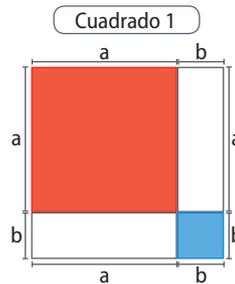
Un triángulo rectángulo está formado por dos ángulos agudos y uno recto. El lado opuesto al ángulo recto es la hipotenusa del triángulo y los otros dos lados son sus catetos.

### Situación 1 Representando de manera pictórica

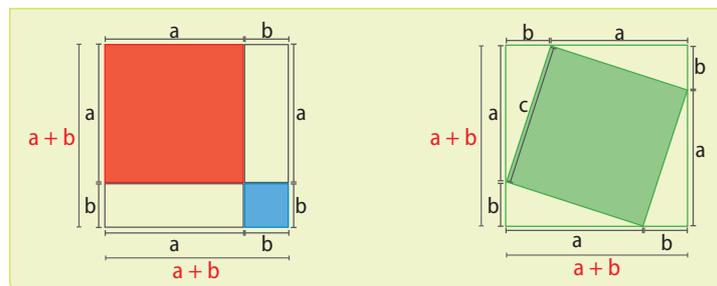
¿Cuál es la expresión que define al teorema de Pitágoras?



**Paso 1** Utilizando las medidas del triángulo, construimos los siguientes cuadrados:

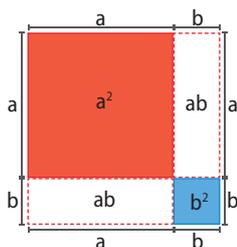


Constata que los cuadrados 1 y 2 son congruentes ya que, en ambos casos, los lados miden  $(a + b)$ .

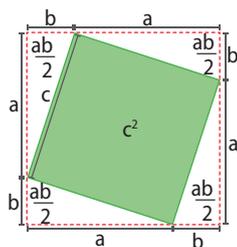


Además, es posible afirmar que el área del cuadrado de lado  $(a + b)$  es  $(a + b)^2$ .

**Paso 2** Identifica los polígonos que forman cada cuadrado y calcula sus áreas.



Hay 2 rectángulos de área  $ab$ .  
 Hay 1 cuadrado de área  $a^2$ .  
 Hay 1 cuadrado de área  $b^2$ .



Hay 4 rectángulos de área  $\frac{ab}{2}$ .  
 Hay 1 cuadrado de área  $c^2$ .

**Ayuda**

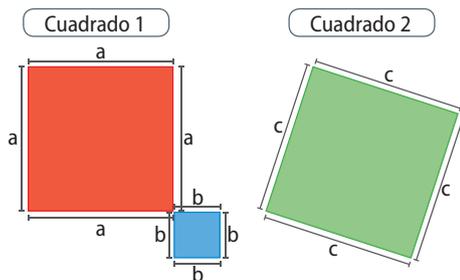
Recuerda que el área de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden  $a$  y  $b$  se puede calcular como  $\frac{ab}{2}$ .

**Paso 3** Constata que los dos rectángulos del cuadrado 1 tienen igual área que los cuatro triángulos del cuadrado 2:

$$ab + ab = \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} + \frac{ab}{2}$$

Si tienes dudas sobre este paso, puedes calcar los triángulos del cuadrado 2 y superponerlos en los rectángulos que forman parte del cuadrado 1.

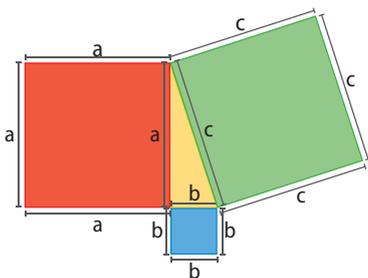
**Paso 4** Si retiras los rectángulos y los triángulos, queda así:



El cuadrado 1 y el cuadrado 2 tenían igual área y a ambos cuadrados se les retiraron partes que en total tenían igual área. Por lo tanto, las figuras que quedan tienen igual área, esto es:

$$a^2 + b^2 = c^2$$

**Paso 5** Dispón las figuras que quedaron como se indica a continuación y verifica el teorema.



¿Cuánto miden los catetos y la hipotenusa del triángulo amarillo que se formó?

R:

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

**Ayuda**

Puedes descargar GeoGebra ingresando el código TM8P226 en <http://codigos.auladigital.cl>

**Ayuda**

La finalidad de estas actividades es mostrar, usando GeoGebra, que la suma de las áreas de los cuadrados que se pueden definir sobre los catetos de un triángulo rectángulo equivale al área del cuadrado que se puede definir sobre su hipotenusa.

¿Qué características presentan dos rectas que son perpendiculares?  
¿Y dos rectas que son paralelas?

**Ayuda**

Para ocultar las rectas que forman el triángulo, coloca el puntero sobre estas, haz clic con el botón derecho del mouse y marca "ocultar objeto".

El *software* gratuito GeoGebra permite realizar construcciones geométricas y aplicaciones muy variadas. A continuación se usará para verificar el teorema de Pitágoras.

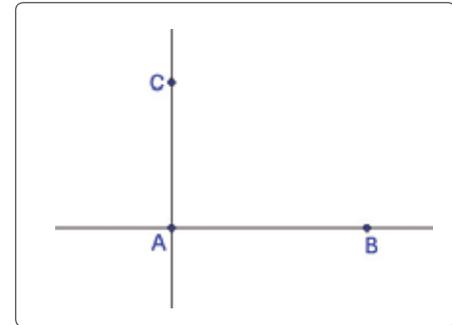
**Situación 2 Usando un software (parte 1)**

**Construcción de un triángulo rectángulo y de cuadrados sobre sus catetos.**

**Paso 1** Dibuja una recta utilizando la herramienta .

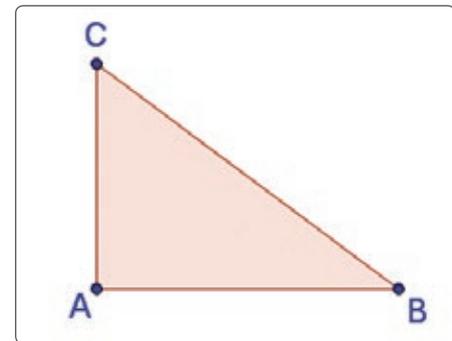


**Paso 2** Con el botón  traza una recta perpendicular que pase por A. Para ello, presiónalo, haz clic en la recta AB y luego en el punto A.

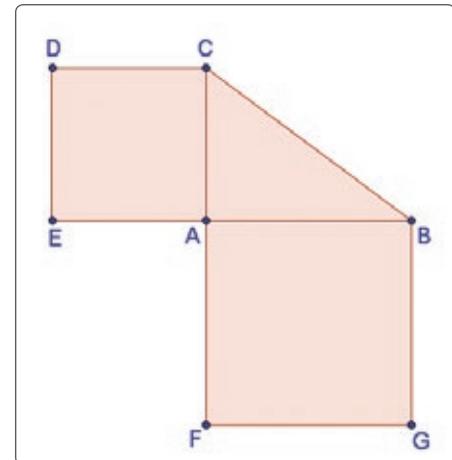


Marca un punto C sobre la recta perpendicular al segmento AB, con la herramienta .

**Paso 3** Utilizando la herramienta  dibuja un triángulo rectángulo de vértices ABC y oculta las rectas iniciales.



**Paso 4** Dibuja dos cuadrados, cada uno a partir de los catetos del triángulo ABC. Para ello, utiliza la herramienta .

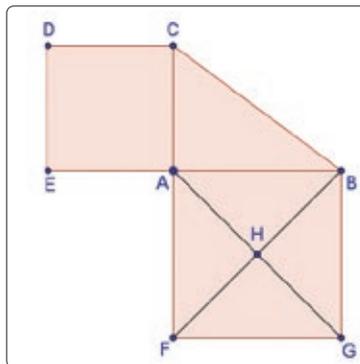


### Situación 3 Usando un software (parte 2)

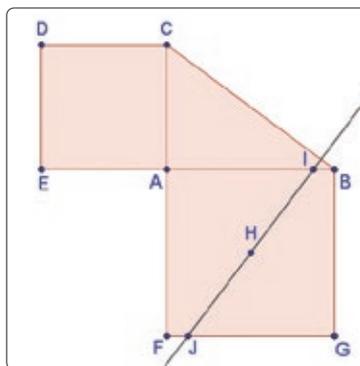
#### Descomposición en trapezoides de los cuadrados sobre los catetos.

¿Qué es un trapezoide?

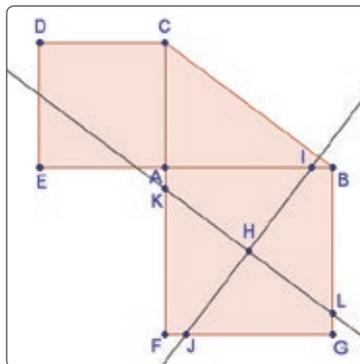
**Paso 1** Sobre el cuadrado del cateto de mayor longitud marca su centro trazando sus diagonales con la herramienta  y marcando la intersección con el ícono . Luego, oculta las diagonales.



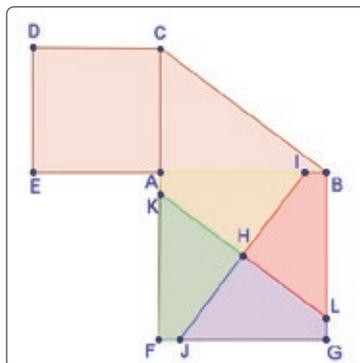
**Paso 2** Traza una recta perpendicular a la hipotenusa y que pase por el centro del cuadrado mayor con la opción . Luego marca las intersecciones entre esta recta y los lados del cuadrado y oculta las diagonales.



**Paso 3** Dibuja una recta paralela a la hipotenusa y que pase por el centro del cuadrado mayor, utilizando el ícono . Luego, marca las intersecciones entre esta recta y los lados del cuadrado, igual que en el paso anterior.



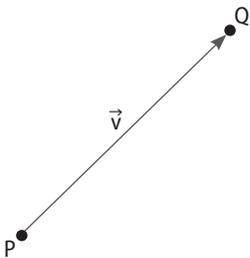
**Paso 4** Con la opción  marca los trapezoides AKHI, KFJH, JGLH y LBIH y oculta las rectas. Puedes cambiar de color cada trapezoide utilizando el botón derecho del mouse y la opción "propiedades del objeto".



**Situación 4 Usando un software (parte 3)**

**Ampliando**

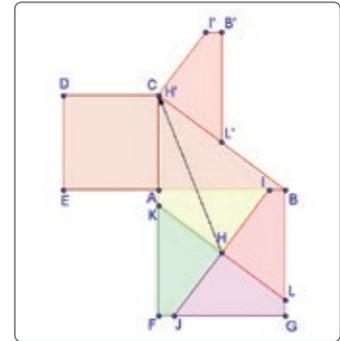
Un vector puede representarse por una flecha con una longitud característica, llamada magnitud y que define, de manera única, un inicio y un final. Además, un vector tiene dirección, relacionada con la pendiente de la recta a la que pertenece, y sentido, indicado por la punta de la flecha. Por ejemplo, el movimiento de un punto de **P** a **Q** según el vector  $\vec{v}$ , se puede representar como:



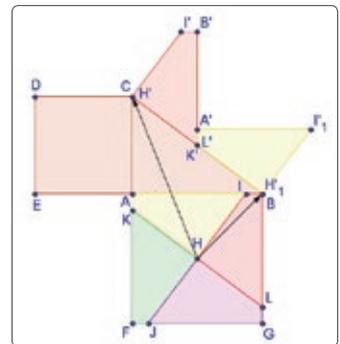
Podemos decir, entonces, que el punto se ha trasladado de **P** a **Q** según el vector  $\vec{v}$ .

**Construcción de cuadrado sobre la hipotenusa del triángulo rectángulo y verificación del teorema de Pitágoras.**

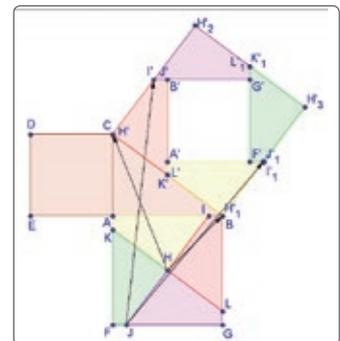
**Paso 1** Para trasladar los trapezoides, utiliza la opción  y traza el vector  $\vec{HC}$  (desde H hasta C). Asegúrate que las letras coincidan con las de tu figura. Luego, haz clic en el ícono  y traslada el trapecio de color rojo LBIH, haciendo clic en ambos objetos.



**Paso 2** Posteriormente, traza el vector  $\vec{HB}$  con la misma opción anterior y traslada el trapecio AKHI de color amarillo.



**Paso 3** Repite el procedimiento anterior para el vector  $\vec{J'I'}$  y el trapecio JGLH (azul) y para el vector  $\vec{J_1I_1'}$  y el trapecio KFIH (verde). Finalmente, traslada el cuadrado que se ubica sobre el cateto de menor longitud utilizando el vector  $\vec{AF'}$ .

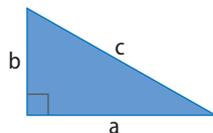


**Paso 4** Como puedes observar, a partir de los cuadrados que se construyeron en los catetos, se pudo formar el cuadrado sobre la hipotenusa y, de esta manera, se verificó el teorema de Pitágoras.

**► Para concluir**

En **todo triángulo rectángulo se cumple el teorema de Pitágoras** que establece que el cuadrado de la medida de la hipotenusa equivale a la suma de los cuadrados de las medidas de los catetos:

$$c^2 = a^2 + b^2$$



Usando las herramientas geométricas del software GeoGebra es posible verificar el teorema de Pitágoras.

**Argumenta y comunica**

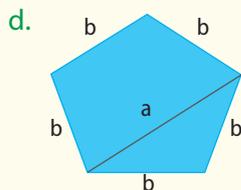
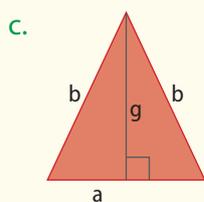
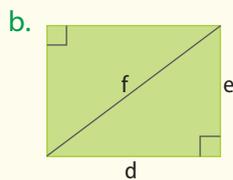
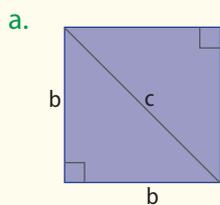
Considera un triángulo rectángulo cuyos lados miden 5 cm, 3 cm y 4 cm. ¿Cumplen la formulación del teorema de Pitágoras? ¿Qué significa esto? ¿De qué tipo es el triángulo? Explica y da argumentos que den consistencia a tus respuestas.

Repaso

1. Calcula las raíces cuadradas. Usa una calculadora cuando sea necesario y aproxima a la décima.

- a.  $\sqrt{81}$                       c.  $\sqrt{121}$                       e.  $\sqrt{400}$
- b.  $\sqrt{78}$                         d.  $\sqrt{240}$                       f.  $\sqrt{560}$

2. Señala las variables que representan la medida de los catetos e hipotenusa, si es que existen, en los triángulos de cada figura.



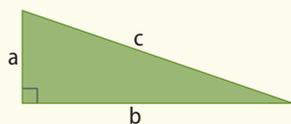
3. Dibuja en GeoGebra las figuras pedidas.

- a. Cuadrado de lado de 4 unidades.
- b. Rectángulo de lados de 2 y 5 unidades.
- c. Triángulo rectángulo de lados de 6, 8 y 10 unidades.

Práctica guiada

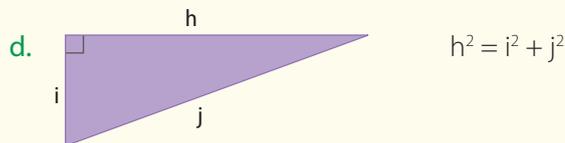
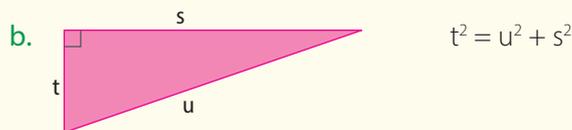
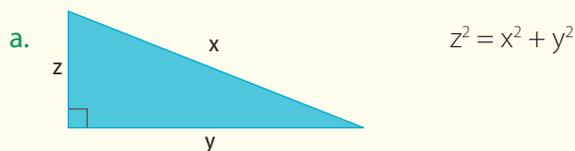
4. Determina si las relaciones son correctas. Justifica.

$$a^2 = b^2 + c^2$$



No es correcta la afirmación, ya que  $a$  no es la medida de la hipotenusa. La relación correcta es:

$$c^2 = b^2 + a^2$$



5. A partir de la expresión  $c^2 = a^2 + b^2$ , encuentra las expresiones que determinan los valores pedidos.

Para la medida del cateto  $a$  se tiene:

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$c^2 - b^2 = a^2 \quad /\sqrt{\quad}$$

$$\sqrt{c^2 - b^2} = a$$

- a. Cateto  $b$ .
- b. Hipotenusa  $c$ .

6. Calcula la medida que falta en cada caso. Considera que  $a$  y  $b$  son las medidas de los catetos y  $c$  la de la hipotenusa.

$b = 30$  cm y  $c = 34$  cm, reemplazando en la expresión  $\sqrt{c^2 - b^2} = a$ , se obtiene:

$$\sqrt{34^2 - 30^2} = a$$

$$\sqrt{1156 - 900} = a$$

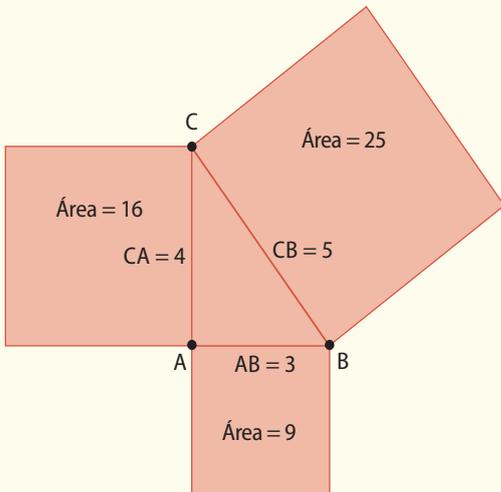
$$\sqrt{256} = a$$

$$16 = a$$

Entonces  $a = 16$  cm.

- a.  $b = 24$  cm y  $c = 26$  cm.
- b.  $a = 24$  mm y  $c = 40$  mm.
- c.  $a = 12$  m y  $b = 9$  m.
- d.  $a = 36$  m y  $c = 60$  m.
- e.  $a = 18$  cm y  $b = 24$  cm.
- f.  $a = 16$  mm y  $b = 12$  mm.

7. Verifica en GeoGebra el teorema de Pitágoras construyendo los triángulos con las medidas dadas. Justifica.

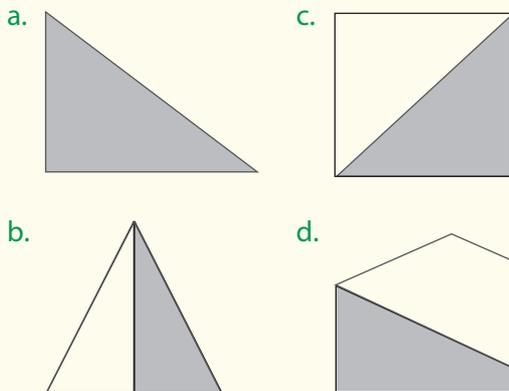


Sí se verifica el teorema, ya que la suma de las áreas de los cuadrados de lados 3 y 4 unidades, es igual al área del cuadrado de lado 5 unidades.

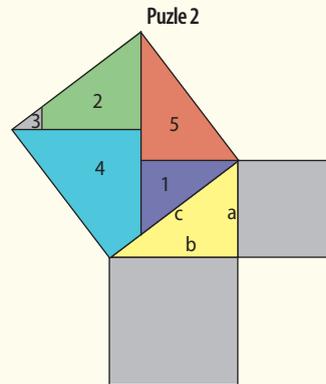
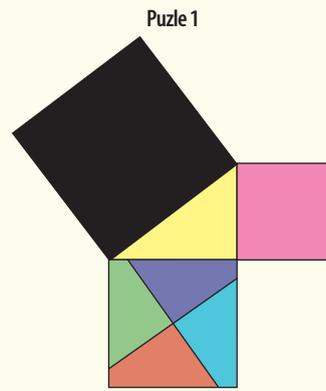
- Triángulo de lados 10 unidades, 24 unidades y 26 unidades.
- Triángulo de lados 20 unidades, 21 unidades y 29 unidades.
- Triángulo de lados 8 unidades, 15 unidades y 17 unidades.

Aplica

8. Verifica que se cumpla el teorema de Pitágoras en los triángulos grises. Para ello, mide sus lados con una regla.

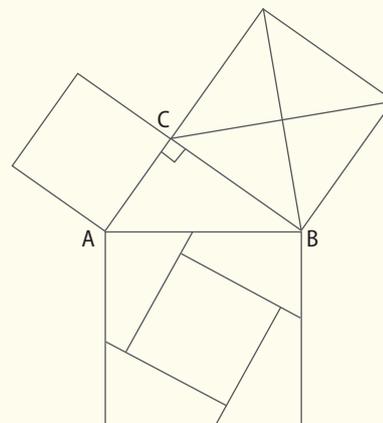


9. Averigua en sitios confiables de internet qué son los puzles pitagóricos y para qué sirven. Luego, copia en tu cuaderno cada uno de los puzles que están a continuación, recórtalos y responde las preguntas.



- En el puzle 1, ¿qué movimientos deberías realizar en las piezas de los cuadrados más pequeños para formar el cuadrado de color negro?
- ¿Cómo puedes mostrar con las figuras que se cumple el teorema de Pitágoras?
- En el puzle 2, ¿qué movimientos deberías realizar en las piezas del cuadrado grande para formar los cuadrados de color gris?
- ¿Cómo puedes mostrar con las figuras que se cumple el teorema de Pitágoras?

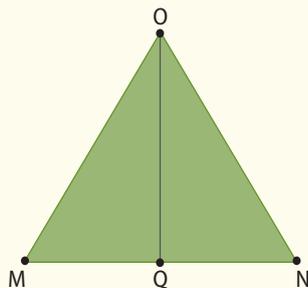
10. Pinta de un color diferente las figuras congruentes del puzle y responde.



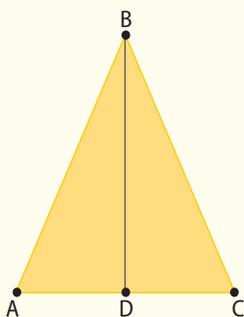
¿Se verifica el teorema de Pitágoras?, ¿por qué?

11. Dibuja en Geogebra cada figura, traza la altura señalada y comprueba que se forman dos triángulos rectángulos.

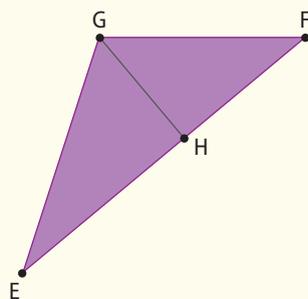
a. Triángulo equilátero.



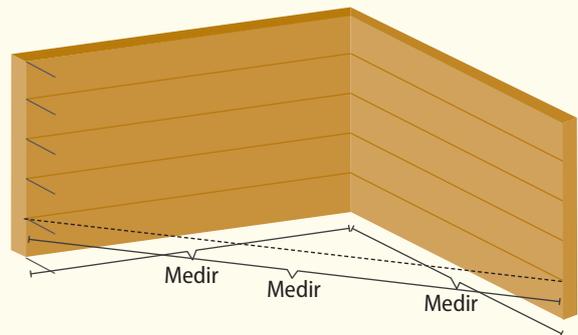
b. Triángulo isósceles.



c. Triángulo escaleno.



12. **Conecta con la Construcción.** Muchos albañiles aplican el teorema de Pitágoras para asegurarse de que las paredes de una habitación sean perpendiculares entre sí. Mide cada una de las esquinas de tu habitación o de las salas de tu colegio y verifica que se cumpla el teorema. Comprueba utilizando Geogebra.



13. **Descubre el error.** Gabriel señala que si  $a^2 + b^2 = c^2$ , entonces  $(a + b)^2 = c^2$ . ¿Cuál es el error que cometió? Coméntalo con tus compañeros o compañeras.
14. **Investiga.** Busca en internet o en libros relacionados con la matemática información acerca de la vida de Pitágoras y la escuela que fundó. Nombra dos aportes que Pitágoras hizo al conocimiento humano, además de su famoso teorema.
15. **Describe el procedimiento.** Señala paso a paso cómo determinarías la longitud de los catetos de un triángulo rectángulo isósceles cuya hipotenusa mide  $\sqrt{18}$  cm. ¿Son estos valores enteros o decimales? ¿Cómo podrías saberlo antes de hacer los cálculos?

### Reflexiono

1. El teorema de Pitágoras, ¿se puede aplicar en cualquier triángulo? Piénsalo y da argumentos que justifiquen tu respuesta.
2. ¿Cuáles son las ventajas y desventajas de utilizar un software geométrico para verificar el teorema de Pitágoras? Justifica tu respuesta.
3. ¿Cuántos tríos de números enteros cumplen la relación matemática del teorema de Pitágoras? Nombra al menos dos tríos que la cumplan.

### Refuerzo

1. Enuncia por escrito el teorema de Pitágoras y muestra un ejemplo numérico.
2. Explica cómo determinarías la longitud de la diagonal de un cuadrado cuyo lado mide 4 cm.
3. Explica cómo determinarías la longitud de la diagonal de un rectángulo cuyos lados miden 30 cm y 40 cm.
4. Dibuja en Geogebra un rectángulo y verifica que trazando una diagonal se forman dos triángulos rectángulos.

► Propósito

Aplicar el teorema de Pitágoras a la resolución de problemas.

¿Para qué?

Observar y analizar diversas situaciones en que se aplica el teorema de Pitágoras permite comprender y dimensionar su importancia como herramienta para acceder a información desconocida.

Palabras clave

Teorema de Pitágoras

Triángulo rectángulo

Cateto

Hipotenusa

Teorema recíproco de Pitágoras

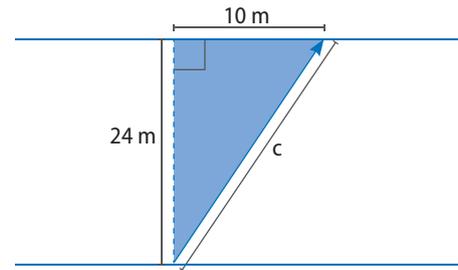
Si el ancho del río fuera el doble del original, ¿sería el doble la distancia recorrida por la nadadora?, ¿cómo lo sabes?

¿Qué características relacionadas con las medidas de sus lados tiene un triángulo isósceles?

¿Cómo comprobarías este resultado?

## ¿Qué aplicaciones tiene el teorema de Pitágoras?

Una nadadora decide cruzar el río que se representa en la figura, siguiendo la trayectoria que se señala.

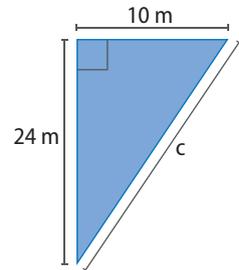


### Situación 1 Calculando la medida de la hipotenusa

¿Qué distancia recorre la nadadora al cruzar el río?

Para responder, aplicaremos el teorema de Pitágoras al triángulo de la figura:

¿Por qué piensas que la trayectoria de la nadadora no fue perpendicular al río sino que diagonal?



**Paso 1** Plantea el teorema de Pitágoras a partir de los datos del problema.

$$c^2 = a^2 + b^2 = 24^2 + 10^2$$

**Paso 2** Determina el valor desconocido  $c$ .

$$c^2 = 24^2 + 10^2 = 576 + 100 = 676$$

$$c = \sqrt{676} = 26$$

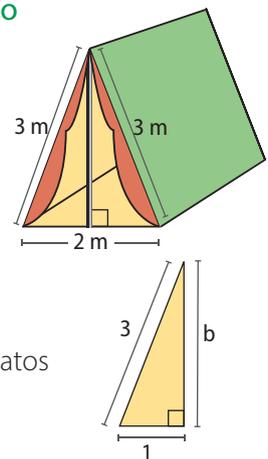
Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

### Situación 2 Calculando la medida de un cateto

Se desea sostener una carpa con una varilla a la entrada, como se muestra en la figura. ¿Cuál debe ser la longitud de la varilla?

Para responder, constata que la entrada de la carpa tiene forma de triángulo isósceles que queda dividido por la varilla en dos triángulos rectángulos congruentes, uno de los cuales se muestra en la figura.



**Paso 1** Plantea el teorema de Pitágoras a partir de los datos del problema.

$$a^2 + b^2 = c^2$$

$$1^2 + b^2 = 3^2 \quad /- 1^2$$

$$b^2 = 3^2 - 1^2$$

**Paso 2** Determina el valor desconocido  $b$ .

$$b^2 = 3^2 - 1^2 = 9 - 1 = 8$$

$$b = \sqrt{8} \approx 2,83$$

**Ayuda**

Usa una calculadora para estimar el valor de  $\sqrt{8}$  y redondea tu resultado a la centésima.

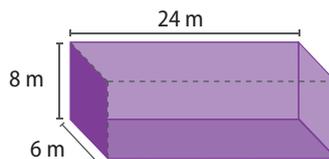
Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

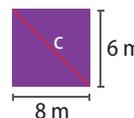
**Situación 3** Calculando la medida de la diagonal de un ortoedro

¿Cuál es la longitud de la diagonal del ortoedro de la figura?

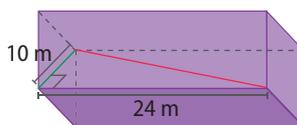
Para responder, habrá que aplicar el teorema de Pitágoras dos veces: primero para determinar la medida de la diagonal de la cara que se destaca del ortoedro y luego para determinar la medida de la diagonal.



**Paso 1** Aplica el teorema de Pitágoras para determinar la longitud de la diagonal de la cara destacada de la figura.  
 $c^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100$   
 $c = \sqrt{100} = 10$



**Paso 2** Aplica el teorema de Pitágoras para determinar la longitud de la diagonal del ortoedro.  
 $d^2 = 24^2 + 10^2 = 576 + 100 = 676$   
 $d = \sqrt{676} = 26$



Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Ayuda**

Un ortoedro es un paralelepípedo recto rectangular cuyas caras forman ángulos rectos. Cotidianamente, se le asocia con una caja de zapatos.



¿Cómo comprobarías este resultado?

**Situación 4** Constatando el teorema recíproco de Pitágoras

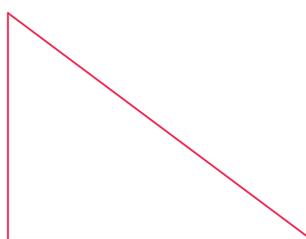
Lucía tiene tres varillas cuyas longitudes son 3 cm, 4 cm y 5 cm. ¿Puede formar un triángulo rectángulo con ellas?

Para responder, dibujaremos las varillas y trataremos de formar un triángulo rectángulo con ellas.

**Paso 1** Dibuja las varillas de las medidas indicadas.



**Paso 2** Intenta formar un triángulo rectángulo con ellas.



Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Ampliando**

El teorema recíproco de Pitágoras señala que si en un triángulo de lados a, b y c se cumple  $a^2 + b^2 = c^2$ , entonces el triángulo es rectángulo.

**Para concluir**

El **teorema de Pitágoras** tiene múltiples **aplicaciones en ámbitos cotidianos**, ya que los triángulos rectángulos son muy comunes tanto en la naturaleza como en las construcciones humanas.

**Argumenta y comunica**

Se denomina **trío pitagórico** al conjunto de tres números que satisfacen la relación matemática del teorema de Pitágoras. Por ejemplo, los números 5, 12 y 13 conforman un trío pitagórico, ya que se cumple  $5^2 + 12^2 = 13^2$ . Comprueba que también son tríos pitagóricos números múltiplos de los anteriores, como 10, 24 y 26 o 15, 36 y 39 y comunica este hecho a tu curso.

Repaso

1. Completa la tabla con las medidas de los lados desconocidos.

Cateto 1	Cateto 2	Hipotenusa
3 cm		5 cm
6 cm	8 cm	
	12 mm	15 mm
12 cm		20 cm

Práctica guiada

2. Determina, en cada caso, si las medidas de los lados de los triángulos cumplen el teorema de Pitágoras.

$h = 125 \text{ cm}; i = 120 \text{ cm}; j = 25 \text{ cm}.$

$25^2 + 120^2 \square 125^2$

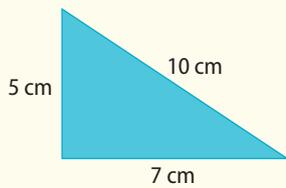
$625 + 14400 \square 15625$

$15025 \neq 15625$

No se cumple el teorema de Pitágoras.

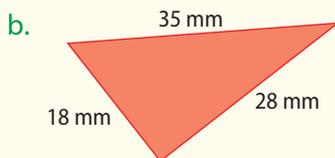
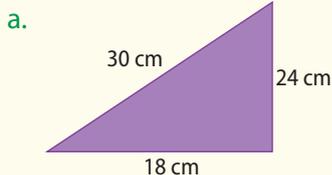
- a.  $x = 7 \text{ cm}; y = 25 \text{ cm}; z = 20 \text{ cm}.$
- b.  $q = 21 \text{ cm}; r = 20 \text{ cm}; s = 29 \text{ cm}.$
- c.  $k = 24 \text{ cm}; l = 26 \text{ cm}; m = 12 \text{ cm}.$
- d.  $n = 60 \text{ cm}; o = 80 \text{ cm}, p = 100 \text{ cm}.$

3. Determina, en cada caso, si el triángulo es rectángulo.



$5^2 + 7^2 = 74 \text{ y } 10^2 = 100$

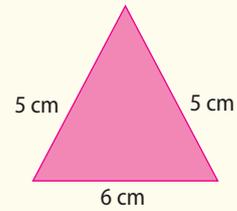
Por lo tanto, el triángulo no es rectángulo.



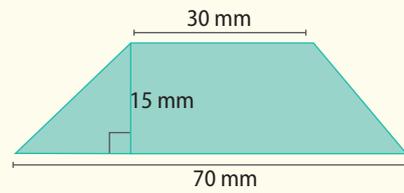
Aplica

4. Resuelve los problemas.

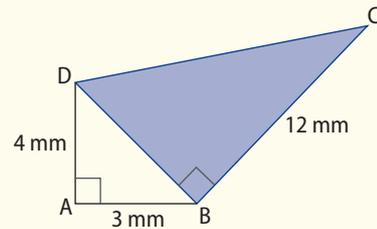
- a. ¿Cuál es el área del triángulo de la figura?



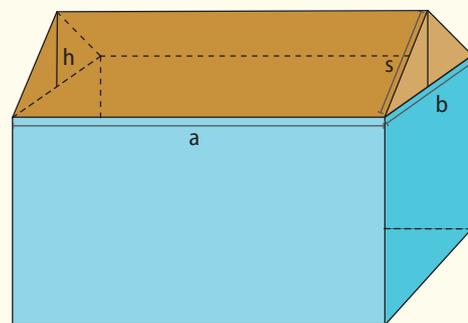
- b. Si el trapecio de la figura es isósceles, ¿cuál es su perímetro?



- c. ¿Cuál es el perímetro de la figura ABCD?

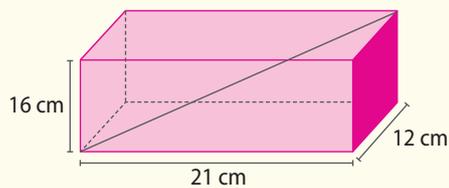


- d. El largo **a** de la casa de la figura mide 10 m, el ancho **b** mide 8 m y la altura **h** del techo mide 3 m.



- ¿Cuál es la medida **s** del techo de la casa?
- ¿Cuál es el área total del techo?
- Si se quiere aplicar una pintura de protección al techo y un envase de pintura rinde  $80 \text{ m}^2$ , ¿cuántos envases de pintura se deben comprar? ¿Sobrará pintura?, ¿cuánta?

- e. La figura muestra las dimensiones de una caja que tiene forma de ortoedro.



- ¿Cuál es la medida de las diagonales de cada una de las caras de la caja?
  - ¿Cuál es la medida de la diagonal de la caja?
- f. El mapa muestra la trayectoria que realizó una persona que paseaba por el centro de la ciudad de Rancagua, de **A** hasta **B** y luego de **B** hasta **C**.

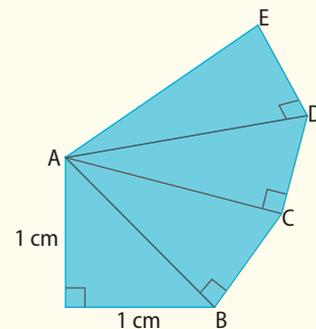


Si se asume que las calles en el punto **B** son perpendiculares, ¿cuál es la medida del vector desplazamiento dibujado en el mapa? Usa una calculadora y aproxima el resultado a la centésima.

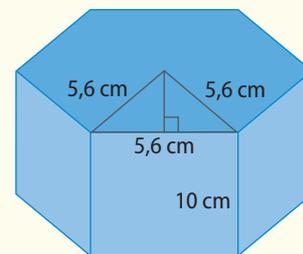
- g. Un poste telefónico de 4,68 m de alto está sujeto mediante un cable de acero que une su extremo superior con un punto situado en el suelo a 1,76 m de la base del poste. ¿Cuál es la longitud del cable?

### 5. Desafío.

- a. Utilizando una calculadora, calcula las longitudes de  $\overline{AB}$ ,  $\overline{AC}$ ,  $\overline{AD}$  y  $\overline{AE}$ . Considera que el cateto menor de cada triángulo mide 1 cm.



- b. Calcula el volumen del prisma de base regular hexagonal de la figura.



6. **Descubre el error.** Una maestra mueblista tiene que construir una mesa rectangular con las medidas que el cliente le da:

1,6 m de largo.

1,2 m de ancho.

1,9 m de diagonal.

Ella hace unas comprobaciones y dice que la mesa no es rectangular. ¿Cuál fue el error que cometió el cliente? Coméntalo con un compañero o una compañera y escriban en su cuaderno las medidas correctas que podría tener la mesa.

### Reflexiono

1. ¿Pueden las medidas de los lados de un triángulo rectángulo estar en la razón 4 : 2 : 1? Piénsalo y justifica tu respuesta con un ejemplo.
2. La medida de la diagonal de un cubo, ¿podría ser menor a la medida de su arista?, ¿por qué? Reflexiona, busca un caso y explica por escrito tu desarrollo.

### Refuerzo

1. Describe el procedimiento que aplicarías para hallar la altura de un triángulo isósceles cuyos lados miden 8 cm, 5 cm y 5 cm.
2. Explica en qué consiste el teorema recíproco de Pitágoras y ejemplifícalo.
3. Escribe dos ejemplos de situaciones en donde se aplique el teorema de Pitágoras.

# GPS

## ¿Dónde nos encontramos?

El GPS (en español, Sistema de Posicionamiento Global) es un sistema de radionavegación que nos permite determinar la posición en cualquier parte del planeta del dispositivo que lo tiene incorporado.

Este sistema funciona mediante una red de 24 satélites que están en órbita sobre el planeta Tierra. Estos envían señales de radio a la superficie de la Tierra que son recibidas por los receptores GPS lo que nos permite saber dónde nos encontramos en 3 dimensiones (longitud, latitud y altura).



El funcionamiento del GPS consiste en determinar la distancia entre el receptor y al menos tres satélites, como se detalla a continuación:

El GPS envía una señal de radio al primer satélite, este traza una esfera virtual o imaginaria cuyo centro es el propio satélite, entonces la distancia entre su centro y la superficie es la misma que separa al satélite del GPS.

Luego, se repite el procedimiento anterior con un segundo satélite, generándose otra esfera que se interseca con la anterior y determina dos puntos en el plano imaginario al que pertenecen los satélites y el GPS.

### Sabías que...

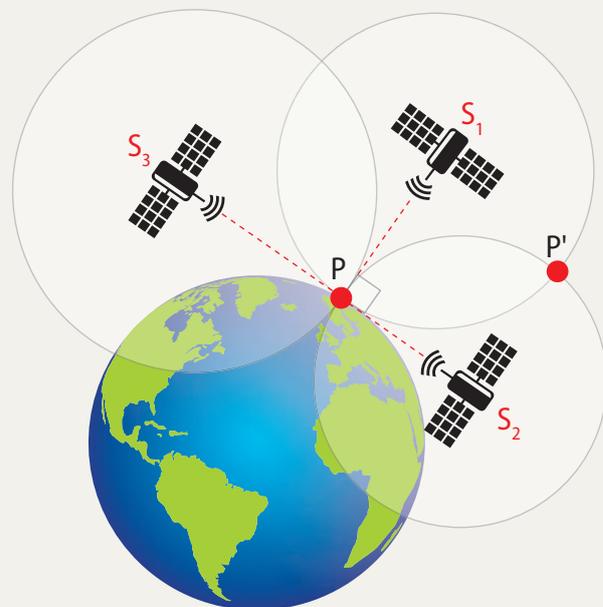
El GPS nació como una aplicación militar del Departamento de Defensa de Estados Unidos y su diseño tuvo un costo aproximado de 12 000 millones de dólares.

Finalmente, el GPS calcula la distancia a un tercer satélite, creando dos puntos; uno en el espacio y otro que es común con las otras esferas. Este último punto se ubica en la superficie de la Tierra y corresponde a la posición del GPS receptor.

### Actividad grupal

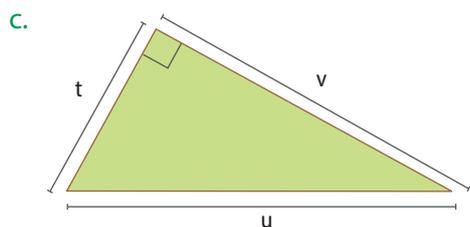
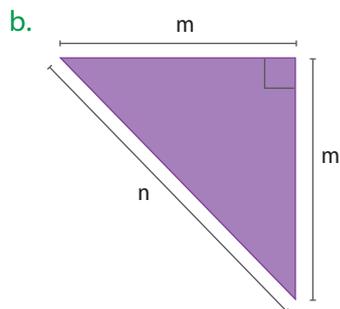
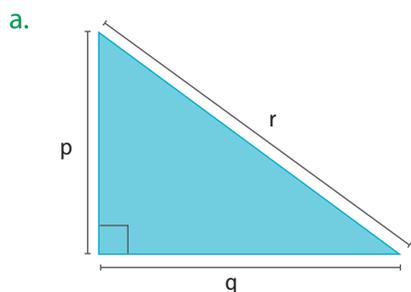
Reúnanse en grupos de 3 o 4 integrantes para realizar las actividades. Luego, comuniquen sus respuestas al curso.

- Consideren la figura que muestra la representación en el plano de la localización de una persona que está en un punto  $P$  de la superficie de la Tierra. Este se ubica a una distancia de 20 km del satélite 1 ( $S_1$ ) y a una distancia de 18 km del satélite 2 ( $S_2$ ).
  - Calculen la distancia que existe entre ambos satélites. Usen una calculadora y redondeen a la centésima el resultado obtenido.
  - ¿Por qué creen que no se considera el punto  $P'$  para determinar la ubicación de la persona? Justifiquen su respuesta y coméntenla con otros grupos.
- Investiguen sobre otras aplicaciones que en la actualidad tiene el GPS. Elaboren un listado y expongan los resultados de su búsqueda al resto del curso.



**Lección 34: ¿Qué es y cómo se verifica el teorema de Pitágoras?**

- 1 Escribe V si la afirmación es verdadera y F si es falsa.
  - a. \_\_\_\_ En un triángulo rectángulo el lado mayor recibe el nombre de hipotenusa.
  - b. \_\_\_\_ El teorema de Pitágoras se verifica solo en los triángulos rectángulos.
  - c. \_\_\_\_ El teorema de Pitágoras indica que en un triángulo rectángulo la suma de las medidas de los catetos es igual a la medida de la hipotenusa.
  - d. \_\_\_\_ En un triángulo rectángulo cuyos catetos miden a y b y cuya hipotenusa mide c, el teorema de Pitágoras permite calcular el valor de a según la fórmula  $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ .
- 2 Expresa la relación matemática del teorema de Pitágoras en cada triángulo.

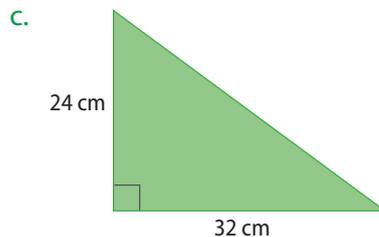
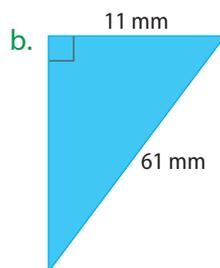
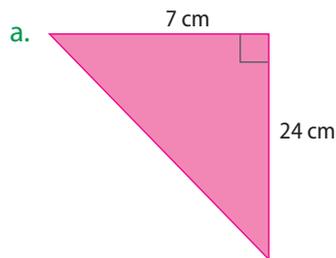


- 3 Construye usando GeoGebra cada triángulo rectángulo descrito y verifica que la medida de la hipotenusa es la que predice el teorema de Pitágoras.
  - a. Sus catetos miden 12 y 35 unidades.
  - b. Sus catetos miden 11 y 60 unidades.
  - c. Sus catetos miden 16 y 63 unidades.

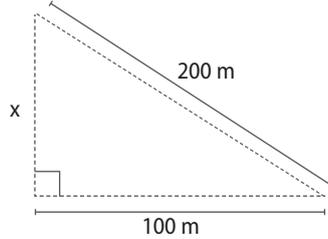
**Lección 35: ¿Qué aplicaciones tiene el teorema de Pitágoras?**

- 4 Identifica con un **✓** los tríos de números que son pitagóricos y con una **✗** los que no lo son. Justifica tus respuestas.
 

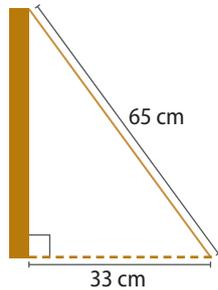
a. 3, 4 y 5.	e. 10, 24 y 26.
b. 5, 12 y 13.	f. 30, 40 y 50.
c. 6, 7 y 9.	g. 40, 50 y 70.
d. 9, 16 y 25.	h. 9, 40 y 41.
- 5 Determina el valor del lado desconocido en cada triángulo.



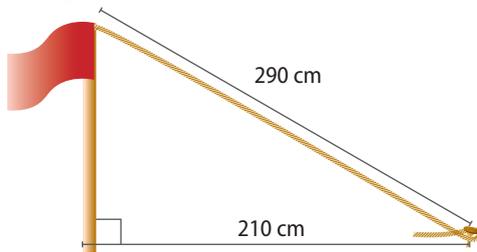
- 6 La imagen muestra la vista superior de un terreno cubierto de césped que se quiere rodear con una cerca pero se desconoce el valor del lado indicado con una  $x$ . ¿Cuál es su valor?



- 7 Calcula a qué altura del suelo quedará el extremo superior de una vara de 65 cm de longitud que está apoyada sobre una pared con su base a 33 cm de ella.



- 8 La cuerda que va desde la punta de un mástil hasta el lugar donde se amarra mide 290 cm. La distancia entre el lugar donde se amarra la cuerda del mástil y la base de este es de 210 cm. ¿Cuánto mide el mástil?

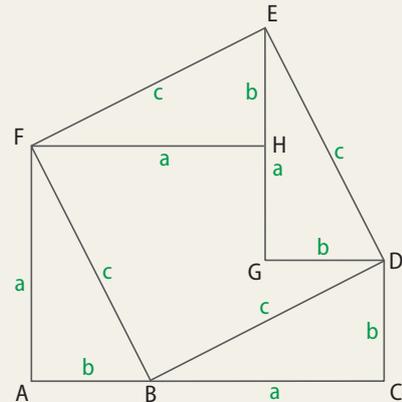


- 9 Elisa quiere poner un adorno sobre su mesa de centro. El adorno consiste en una línea bordada que cruza la mesa en forma diagonal uniendo cada uno de sus extremos. ¿Cuál es la medida del bordado si la mesa tiene las medidas que se indican en la figura?

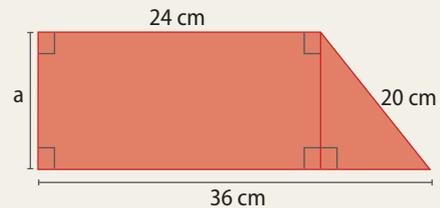


Desafíos de integración

- a. Considera el siguiente polígono ABCDEF:



- Calcula el área de la figura que resulta tras quitar al polígono ABCDEF los triángulos rectángulos ABF y BCD.
  - Calcula el área de la figura que resulta tras quitar al polígono ABCDEF los triángulos rectángulos GDE y EFH.
  - ¿Son iguales las dos áreas que calculaste anteriormente?, ¿por qué?
  - ¿Qué relación tiene el desarrollo hecho con el teorema de Pitágoras? Explica.
- b. Calcula la altura de los triángulos que a continuación se describen. Redondea los resultados a la cifra de las centésimas:
- Equilátero cuyos lados miden 8 cm.
  - Equilátero cuyos lados miden 10 cm.
  - Isósceles cuya base mide 60 cm y sus lados de igual medida miden 40 cm.
- c. Calcula el valor de  $a$ .



Coevaluación

Escoge uno de los desafíos y compara la estrategia que ocupaste para resolverlo con la que haya usado un compañero o una compañera. En conjunto, destaquen las virtudes y desventajas de cada estrategia utilizada y escriban sus conclusiones en sus cuadernos.

## Identificar submetas

Este proceso consiste en tratar de establecer submetas e ir resolviendo el problema parcialmente hasta llegar a la solución final.

### Algunas estrategias

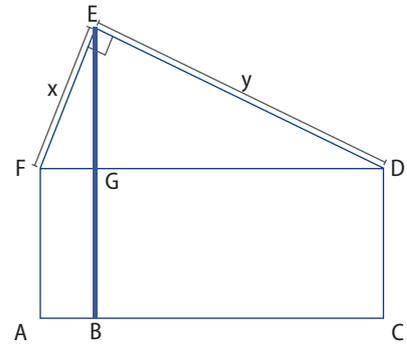
- Usar un proceso de ensayo y error.
- Aplicar procesos reversibles.
- Descartar información irrelevante.
- Usar un problema similar pero más sencillo.
- Construir un esquema, diagrama o tabla.
- Encontrar un patrón.
- Usar modelos matemáticos.
- Usar razonamiento lógico.
- **Identificar submetas.**

Juan desea comprar dos listones de madera para reforzar la parte frontal del techo de su casa. Para hacer algunas mediciones, él utiliza una vara que ubica perpendicularmente al suelo, como se indica en la figura. Luego, mide la distancia que existe entre la vara y los extremos de la base de la casa (puntos A y C) y las alturas que necesitará para sus cálculos.

Sus mediciones son las siguientes:

- Distancia BE: 10 m.
- Distancia BC: 8 m.
- Distancia AB: 2 m.
- Distancia AF: 6 m.

¿Cuánto deben medir los listones de madera que debe comprar Juan?



¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema? Escribe tú

¿Qué datos tengo para resolver? Escribe tú

Crea un plan para resolver

Para resolver este problema puedes usar la estrategia **Identificar submetas** para determinar las longitudes de los listones de madera.

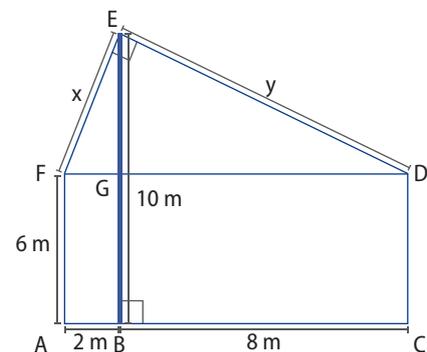
### Aplica la estrategia y resuelve

Para determinar las medidas de los listones del techo de la casa, es necesario trabajar sobre el triángulo rectángulo superior e ir alcanzando submetas:

- Determinar distancia entre los puntos E y G.
- Para ello, se restan las alturas BE y AF:  $10 - 6 = 4$ .
- Identificar que los segmentos FG y GD miden lo mismo que los segmentos AB y BC, respectivamente.
- Aplicar el teorema de Pitágoras en el  $\triangle FGE$  y luego en el  $\triangle EGD$ .

$\triangle FGE$	$\triangle EGD$
$x^2 = 2^2 + 4^2$	$y^2 = 4^2 + 8^2$
$x^2 = 20$	$y^2 = 80$
$x = \sqrt{20}$	$y = \sqrt{80}$
$x \approx 4,47$	$y \approx 8,94$

En la imagen se muestran las mediciones realizadas por Juan:



### Verifica la respuesta

Se puede confirmar la respuesta aplicando el teorema de Pitágoras con las medidas calculadas en el triángulo FDE:

$$FD^2 = 4,47^2 + 8,94^2$$

$$FD^2 = 99,90$$

$$FD \approx 10$$

### Comunica la respuesta

Escribe tú

¿De qué otra forma resolverías este problema? Explica.

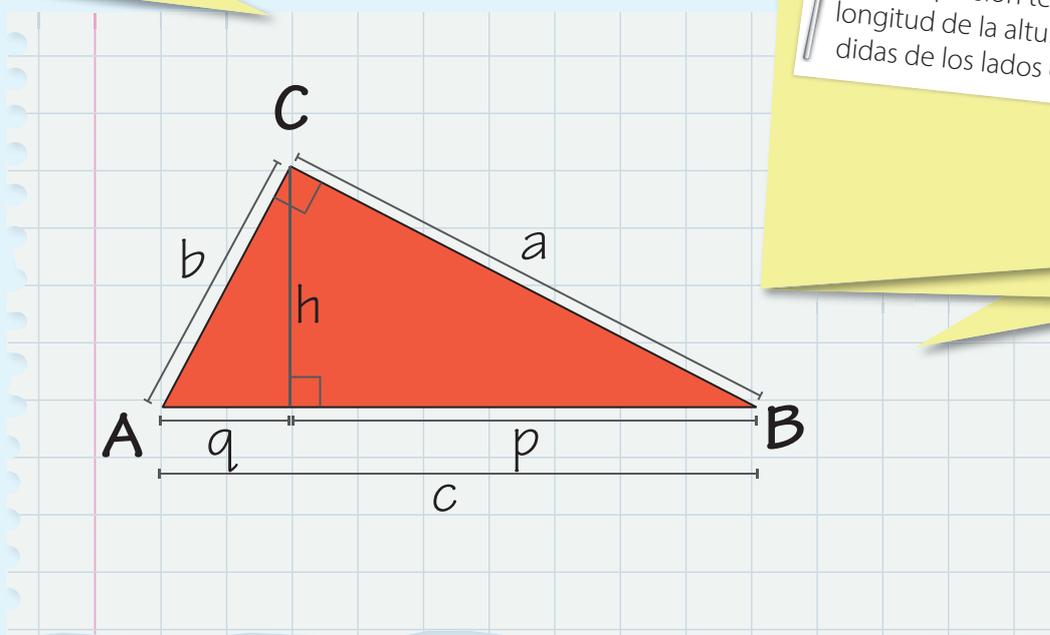
### Vuelvo a mis procesos

Responde de acuerdo a tu apreciación.

¿Cuántos triángulos rectángulos puedes distinguir en la figura?, ¿cuáles son?

¿Qué expresiones matemáticas muestran la aplicación del teorema de Pitágoras a los triángulos rectángulos que identificaste en la figura?

¿Qué expresión te permite conocer la longitud de la altura  $h$  usando las medidas de los lados del triángulo  $ABC$ ?



¿Te pareció interesante el tratamiento que se hizo del contenido de esta sección?, ¿por qué?

¿Tuviste dificultades durante el uso del software geométrico?, ¿cuáles? ¿Cómo las superaste?

¿Alcanzaste las metas que te propusiste al inicio de esta sección?, ¿cuál por ejemplo?

# Transformaciones isométricas

## Activo ideas previas

1. Lee la información y coméntala con un compañero o una compañera.

La cristalografía es la ciencia que estudia las propiedades, el crecimiento y la geometría de los cristales, que son estructuras sólidas en cuya presentación se puede identificar un patrón o regularidad. Un ejemplo de estructura cristalina son los cristales de hielo, como el que se muestra en la figura. En ella se aprecia una de las 12 estructuras o fases que presenta el hielo, cada una de las cuales depende de las condiciones de temperatura y presión a las que ocurre la cristalización.



Responde las preguntas junto con tu compañero o compañera.

- a. ¿Cómo se llama el fenómeno que ocurre cuando observan sus rostros en un espejo? ¿Qué similitudes hay entre las imágenes que se ven en el espejo y los objetos reales?
- b. ¿Pueden trazar una línea recta que divida el cristal de hielo de la figura en dos mitades iguales? ¿Cómo pueden saber si realmente son iguales? Expliquen y relacionen sus respuestas con el concepto de simetría. Luego, compárenlas con las de sus compañeros o compañeras.
- c. Consideren las 6 ramas largas del cristal. Aproximadamente, ¿qué ángulo forman dos de estas ramas adyacentes? ¿Cómo lo saben? Si unieran los extremos de estas ramas, ¿qué figura formarían?




## Activo conceptos clave

2. A continuación, se presentan algunos conceptos clave de esta sección. Úsalos para responder las preguntas.

reflexión

composición de movimientos

teselación

rotación

traslación

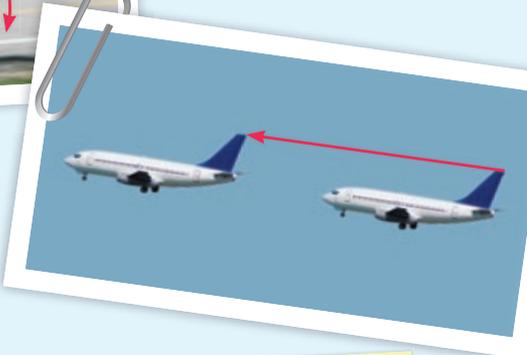
plano cartesiano

- a. ¿Cuáles de estos conceptos son nuevos para ti? \_\_\_\_\_
- b. ¿Cuáles son movimientos del planeta Tierra? \_\_\_\_\_
- c. ¿Cuál se puede asociar con el concepto de simetría? \_\_\_\_\_

### Pienso mis procesos

Responde de acuerdo a lo que conoces.

¿Qué transformaciones puedes identificar en cada imagen?



¿Has utilizado algún *software* matemático para realizar transformaciones de figuras 2D? ¿Crees que es importante el trabajo con estas herramientas digitales?, ¿por qué?

¿Qué meta quieres alcanzar al finalizar el estudio de esta sección?, ¿por qué?

¿Qué herramientas matemáticas ocupaste en cursos anteriores para efectuar transformaciones de figuras 2D? ¿Crees que te servirán para trabajar en esta sección?, ¿por qué?

¿En cuál de ellas puedes dibujar un eje de simetría?

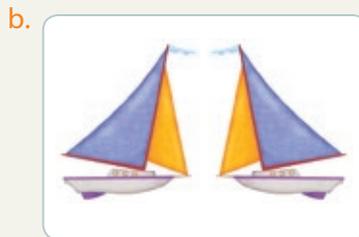
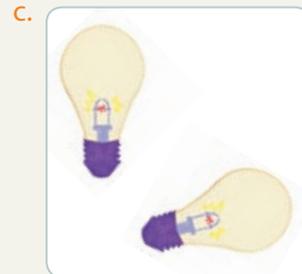
¿Cuál de las transformaciones ilustradas en las imágenes puedes asociar a alguna situación que vivas cotidianamente?

Activa tus conocimientos previos respondiendo las preguntas laterales y luego resuelve las actividades. Para terminar, registra tus logros.

¿Qué son una traslación, una reflexión y una rotación?

Identificar traslaciones, reflexiones y rotaciones

1 En cada caso, identifica la transformación que pudo haberse aplicado a la figura. (4 puntos)



Marca con una x tu nivel de logro:

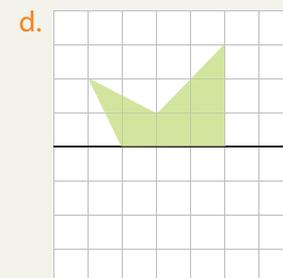
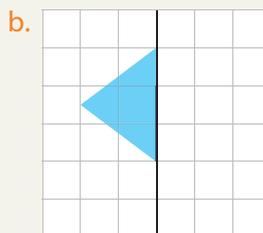
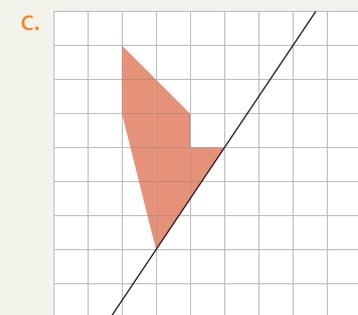
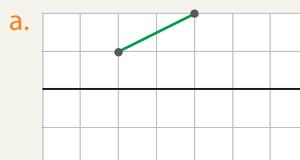
Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
3 o 4 correctas	menos de 3 correctas

¿Qué errores cometiste?

¿Cómo describirías un eje de simetría de una figura 2D? ¿Todas las figuras 2D tienen al menos un eje de simetría?, ¿por qué?

Reflejar figuras dado un eje de simetría

2 Refleja cada figura en el eje de simetría que se señala. (4 puntos)



Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
3 o 4 correctas	menos de 3 correctas

¿Tuviste algún error?, ¿cuál o cuáles?

¿Qué necesitas saber para dibujar una figura 2D en el plano cartesiano?

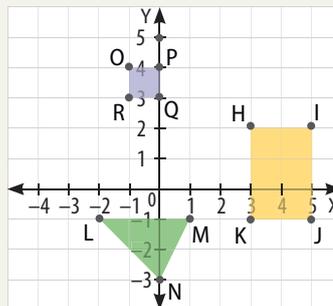
¿Cómo reconoces la ubicación que tiene un punto en el plano cartesiano?

Representar e identificar puntos y figuras en el plano cartesiano

3 Dibuja un plano cartesiano y ubica los puntos o figuras, según corresponda. (6 puntos)

- a.  $B(2, 3)$
- b.  $D(-5, 0)$
- c.  $E(-2, -4)$
- d. Un triángulo cuyos vértices sean:  
 $Q(-2, -1)$                        $R(1, -1)$                        $S(-1, -4)$
- e. Un cuadrado cuyos vértices sean:  
 $M(-3, 4)$                        $N(-1, 4)$                        $Ñ(-1, 2)$                        $O(-3, 2)$
- f. Un cuadrilátero cuyos vértices sean:  
 $T(4, 3)$                        $U(6, 3)$                        $V(4, -2)$                        $W(2, 1)$

4 Identifica las coordenadas de los vértices de cada figura. (3 puntos)



- a. Rectángulo KJIH.
- b. Triángulo LNM.
- c. Cuadrado RPQO.

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
6 correctas o más	menos de 6 correctas

¿Qué errores cometiste?

¿Qué propones para corregirlos?

¿Qué condiciones deben cumplir dos figuras que son congruentes?

Identificar figuras congruentes

5 En cada caso, identifica las figuras que son congruentes y pínталas del mismo color. Puedes calcar, recortar y superponer las figuras. (3 puntos)

- a.
- b.
- c.

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
2 o 3 correctas	0 o 1 correcta

¿Con qué dificultades te encontraste?

► **Propósito**

Describir la posición y el movimiento de figuras 2D al trasladarlas.

¿Para qué?

En nuestro entorno todos los objetos se trasladan, las personas van de un lugar a otro, la Tierra se traslada alrededor del Sol y este, a su vez, se traslada por el espacio junto con la galaxia. Saber describir traslaciones nos permite entender los cambios que involucran y también sus elementos constantes.

**Palabras clave**

Transformación isométrica

Traslación

Vector

Plano cartesiano

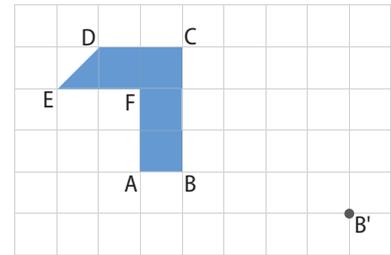
Congruencia

**Ampliando**

- Una transformación es isométrica si conserva el tamaño y la forma de la figura sobre la que se aplica.
- Un vector se representa con una flecha y está definido por su longitud, su dirección y su sentido.

## ¿Qué es y cómo se realiza una traslación?

Un estudiante dibujó el polígono ABCDEF de la figura, pero luego se percató de que tendría que haber hecho su dibujo en otro lugar de la hoja, con el vértice B en la posición que se señala con la letra B'.



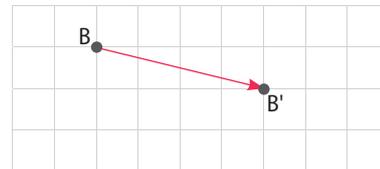
**Situación 1** **Trasladando un polígono según un vector dado**

¿Cuál es el nuevo polígono que tendrá que dibujar el estudiante?

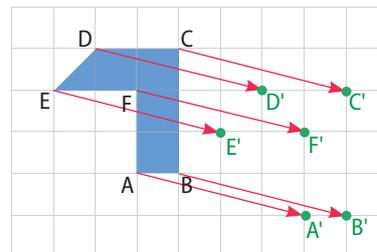
Para responder hay que determinar el vector que permite trasladar el vértice B a la posición de B'.

**Paso 1** Traza un segmento que una B y B' indicando con una punta de flecha el sentido del movimiento. Llama  $\vec{v}$  al vector que acabas de dibujar.

¿Cómo se clasifica el polígono ABCDEF, de acuerdo al número de lados que posee?

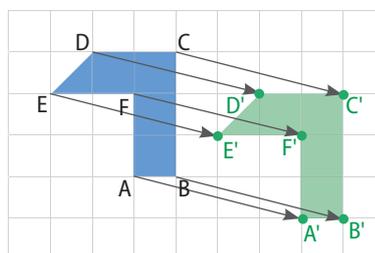


**Paso 2** Ayudándote con una regla, dibuja el vector  $\vec{v}$  con su origen en cada uno de los vértices del polígono ABCDEF. La punta del vector define los vértices del polígono resultante A'B'C'D'E'F'.



Responde a la pregunta inicial uniendo los vértices A', B', C', D', E' y F':

R:



¿Cómo son entre sí la figura original ABCDEF y la figura resultante?

Escribe para completar la afirmación:

Al \_\_\_\_\_ el polígono ABCDEF según el vector  $\vec{v}$  obtengo como figura resultante un polígono A'B'C'D'E'F' que tiene la misma forma y tamaño que el original.

**Situación 2** Determinando las coordenadas de la figura resultante de una traslación

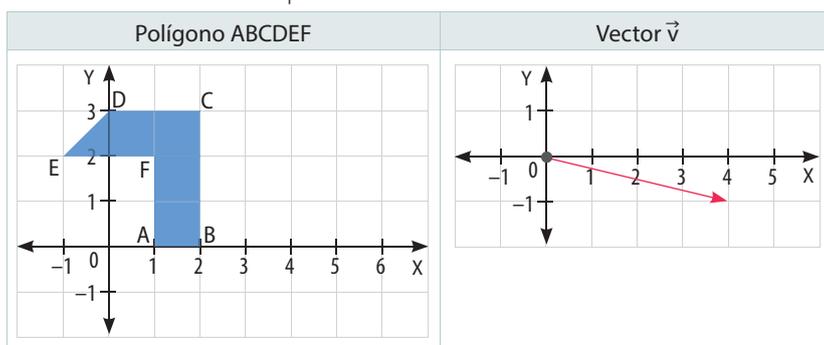
¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del polígono A'B'C'D'E'F' que resulta de trasladar el polígono ABCDEF según el vector  $\vec{v}$ ?

A(1, 0)	B(2, 0)	C(2, 3)	$\vec{v} = (4, -1)$
D(0, 3)	E(-1, 2)	F(1, 2)	

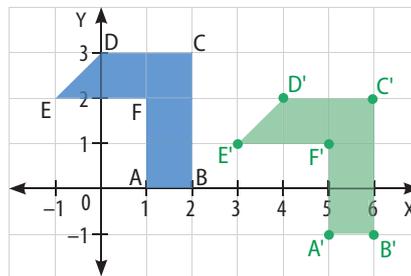
**Paso 1** Súmale a cada coordenada de los vértices del polígono ABCDEF las respectivas coordenadas del vector  $\vec{v}$ . Entonces, las coordenadas que obtienes definen las coordenadas de A'B'C'D'E'F'.

$$\begin{aligned}
 A' &\rightarrow A + \vec{v} = (1, 0) + (4, -1) = (1 + 4, 0 + (-1)) = A'(5, -1) \\
 B' &\rightarrow B + \vec{v} = (2, 0) + (4, -1) = (2 + 4, 0 + (-1)) = B'(6, -1) \\
 C' &\rightarrow C + \vec{v} = (2, 3) + (4, -1) = (2 + 4, 3 + (-1)) = C'(6, 2) \\
 D' &\rightarrow D + \vec{v} = (0, 3) + (4, -1) = (0 + 4, 3 + (-1)) = D'(4, 2) \\
 E' &\rightarrow E + \vec{v} = (-1, 2) + (4, -1) = (-1 + 4, 2 + (-1)) = E'(3, 1) \\
 F' &\rightarrow F + \vec{v} = (1, 2) + (4, -1) = (1 + 4, 2 + (-1)) = F'(5, 1)
 \end{aligned}$$

**Paso 2** Dibuja el polígono ABCDEF en el plano cartesiano e identifica las coordenadas de sus vértices. Luego, dibuja el vector  $\vec{v}$  en el origen y anota las coordenadas que lo definen.



**Paso 3** Dibuja los vértices A', B', C', D', E' y F' así definidos y verifica que al unirlos se obtenga el polígono A'B'C'D'E'F', figura resultante de la traslación del polígono ABCDEF.



**Ayuda**

Observa que se ha usado el símbolo + para señalar la suma de vectores (componente a componente) y también la suma de números que ya conoces.

**Ampliando**

Dos figuras son congruentes si tienen la misma forma y el mismo tamaño.

¿Cómo son el tamaño y la forma de ambas figuras?, ¿iguales o diferentes?

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

Si hubieras resuelto gráficamente esta situación, ¿qué solución habrías obtenido?

**Ampliando**

Para un vector de traslación  $\vec{v} = (v_1, v_2)$ , se considera que su coordenada  $v_1$  representa el desplazamiento según el eje X (desplazamiento horizontal) y que su coordenada  $v_2$  representa el desplazamiento según el eje Y (desplazamiento vertical).

**Ayuda**

Observa que como se ha definido que  $P + \vec{v} = P'$ , entonces:  
 $\vec{v} = P' - P$

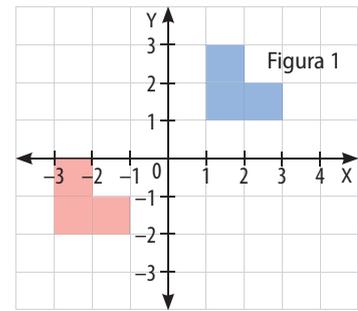
¿Qué vector obtienes si seleccionas otro par de puntos, como (1, 1) y (-3, -2)?

¿Cuáles son las coordenadas del vector que transforma el punto P' en el punto P?

**Situación 3** Determinando el vector que define una traslación

¿Cuáles son las coordenadas del vector que define la traslación de la figura 1 en el plano cartesiano?

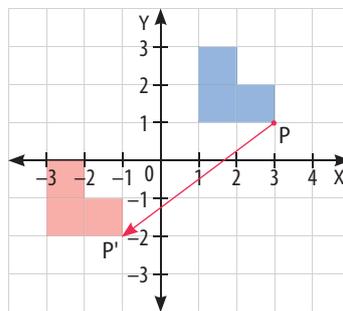
Responderemos la pregunta resolviendo en forma gráfica y también usando las coordenadas de los puntos de las figuras.



**Paso 1**

Determina un punto P de la figura 1 y su punto P' en la figura resultante y únelos con un vector.

Determina las coordenadas de los puntos P y P'.

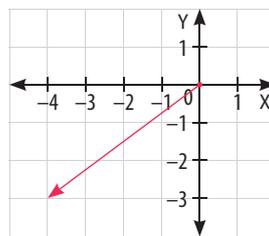


Las coordenadas de los puntos son P(3, 1) y P'(-1, -2).

**Paso 2**

Ubica el origen del vector en el origen del plano cartesiano y determina sus coordenadas.

Resta las coordenadas respectivas de los puntos definidos, en el orden  $P' - P$ .



$$\vec{v} = P' - P = (-1, -2) - (3, 1) = (-4, -3)$$

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Para concluir**

Una **traslación** es una transformación isométrica definida por un vector  $\vec{v}$  que asigna a cada punto P un punto P', tal que:

$$P' = P + \vec{v}$$

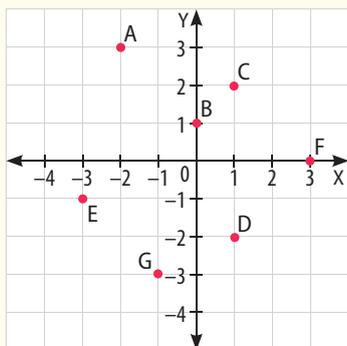
Para trasladar una figura 2D basta con trasladar cada uno de sus vértices según el vector  $\vec{v}$  y luego unirlos. La figura resultante es congruente con la figura original.

**Argumenta y comunica**

- ¿Qué transformación sufre una figura 2D si se le aplica una traslación definida por el vector  $\vec{u} = (0, 0)$ ? Justifica tu respuesta y da un ejemplo.
- ¿Qué significa que una figura y la figura que resulta al trasladarla, sean congruentes? Escribe la respuesta en tu cuaderno.

Repaso

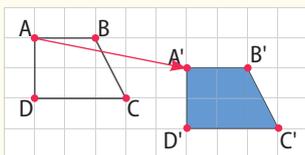
- Identifica las coordenadas de los puntos marcados en el plano cartesiano.



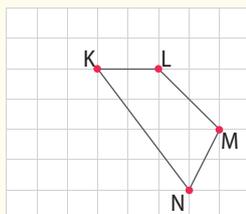
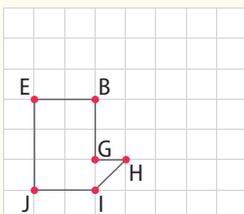
Práctica guiada

- Aplica una traslación a cada figura a partir del vector dado.

Vector  $\vec{d} = (5, -1)$ .



- Vector  $\vec{p} = (3, 3)$ .
- Vector  $\vec{u} = (-3, 1)$ .



- Calcula las coordenadas del punto resultante considerando el original y su vector de traslación.

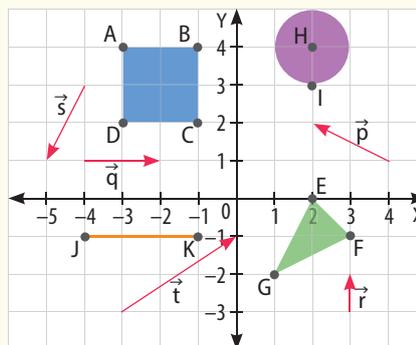
$Q(2, 5)$  y  $\vec{m} = (-8, -2)$ .  
 $Q' = Q + \vec{m} = [2 + (-8), 5 + (-2)]$ ;  $Q'(-6, 3)$

- $D(3, -4)$  y  $\vec{w} = (-9, 0)$ .
- $E(0, 7)$  y  $\vec{x} = (-4, -6)$ .

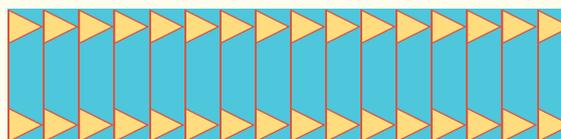
- $F(6, 2)$  y  $\vec{a} = (5, -5)$ .
- $G(1, -3)$  y  $\vec{a} = (-1, 3)$ .

Aplica

- Determina, en cada caso, las coordenadas de la figura, punto o segmento trasladado según el vector indicado.



- El punto I según el vector  $\vec{p}$ .
  - La circunferencia de radio  $\overline{HI}$  según el vector  $\vec{q}$ .
  - El triángulo GFE según el vector  $\vec{r}$ .
  - El cuadrado DCBA según el vector  $\vec{s}$ .
  - El segmento JK según el vector  $\vec{t}$ .
- Conecta con el Arte.** Los frisos son figuras que se generan a partir de sucesivas traslaciones de una misma figura, como se muestra a continuación:



Ejemplo de friso

Los frisos han sido utilizados para adornar grandes construcciones, pequeños utensilios y también algunos textiles, como los ponchos mapuches. Con un polígono cuyos vértices son  $D(0, 3)$ ,  $E(1, 5)$ ,  $F(0, 6)$  y  $G(-1, 5)$ , construye un friso usando los vectores apropiados.

Reflexiono

- ¿Cómo trasladarías el punto  $Q(x, y)$  según el vector  $\vec{a} = (1, 2)$  y luego según el vector  $\vec{b} = (-3, 4)$ ? Explica tu respuesta y compárala con la de un compañero o una compañera.
- Considera dos figuras, una de coordenadas  $T(1, 1)$ ,  $U(3, 0)$ ,  $V(4, 3)$ ,  $W(2, 5)$ ,  $X(1, 3)$  y  $Y(2, 2)$  y la otra de coordenadas  $F(-1, -7)$ ,  $G(1, -8)$ ,  $H(2, -5)$ ,  $I(0, -3)$ ,  $J(-1, -5)$  y  $K(0, -6)$ . ¿Son congruentes?, ¿se realizó una traslación?, ¿cómo lo sabes?

Refuerzo

- Señala las características que tienen en común una figura y la figura que resulta tras aplicarle una traslación.
- Describe el procedimiento que seguirías para obtener el punto resultante  $O'(-6, 4)$  a partir del punto  $O(4, 1)$ .
- Dibuja en tu cuaderno la figura que se obtiene al trasladar la figura de coordenadas  $A(-1, 1)$ ,  $B(0, 2)$ ,  $C(1, 2)$  y  $D(-1, 1)$  según el vector  $\vec{v} = (2, -1)$ .

► Propósito

Describir la posición y el movimiento de figuras 2D al reflejarlas.

¿Para qué?

Puede observarse que la estructura de muchos seres vivos y la de numerosas construcciones artificiales es casi simétrica. En las ciencias y en las artes, como la arquitectura, se aplican los principios básicos de la reflexión para elaborar representaciones, por lo que comprender conceptos como el de eje de simetría es de gran importancia para su desarrollo.

Palabras clave

Transformación isométrica

Reflexión

Simetría

Eje de simetría

Congruencia

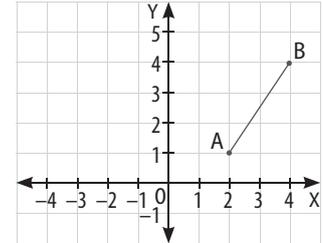
## ¿Qué es y cómo se realiza una reflexión?

Cuando miras tu rostro en un espejo, eres testigo de una transformación isométrica llamada reflexión.

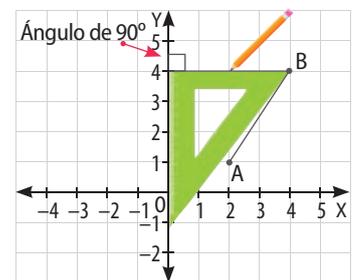
### Situación 1 Reflejando un segmento respecto del eje Y

¿Cuál es el segmento que resulta si  $\overline{AB}$  es reflejado respecto del eje Y?

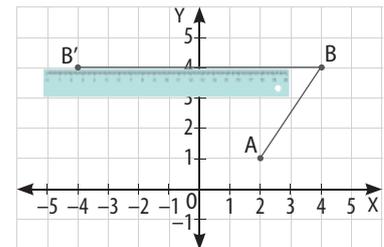
Realizaremos la reflexión usando una regla, una escuadra y lápices.



**Paso 1** Usa una escuadra para trazar un segmento con un extremo en el punto B y el otro en el eje Y, de manera que sea perpendicular a dicho eje.



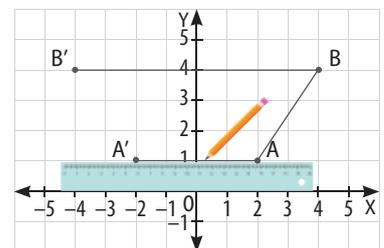
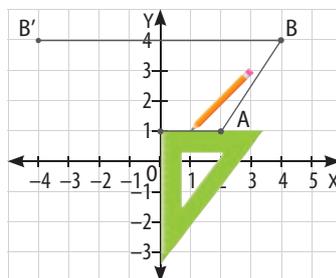
**Paso 2** Copia el segmento dibujado en el paso anterior y ubícalo sobre su prolongación, atravesando el eje Y. En su extremo, marca el punto B'.



**Ayuda**

También puedes usar un compás para copiar la medida del segmento y trasladarla a la prolongación.

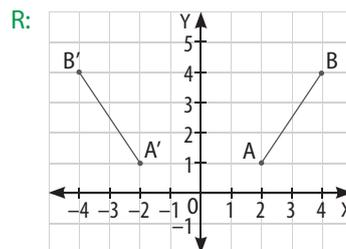
**Paso 3** Repite el procedimiento con el punto A.



**Ayuda**

En este caso, decimos que el eje Y es el eje de simetría o de reflexión de la transformación realizada.

Por lo tanto, el segmento A'B' que resulta es:

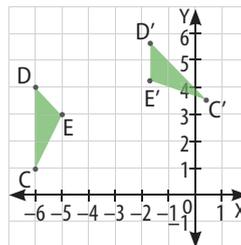


¿Cuáles son las coordenadas de los puntos A, B, A' y B'? ¿Qué relación hay entre las coordenadas de los puntos A y A', y entre las coordenadas de los puntos B y B'?

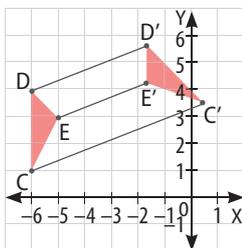
**Situación 2** Determinando el eje de simetría de una reflexión

¿Cuál es el eje de simetría de la reflexión que transforma la figura 1 en la figura 2?

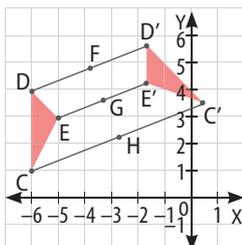
Para responder, analizaremos la reflexión usando nuevamente una regla, una escuadra y lápices.



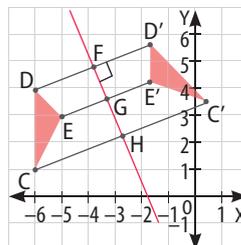
**Paso 1** Traza segmentos que unan los vértices DD', EE' y CC'.



**Paso 2** Mide con tu regla cada segmento y marca su punto medio. Llámalos F, G y H.

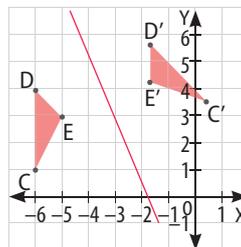


**Paso 3** Traza una línea recta que una los puntos medios F, G y H determinados en el paso anterior.



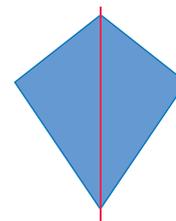
**Paso 4** Verifica con tu escuadra que esta línea recta sea perpendicular a cada uno de los segmentos, DD', EE' y CC', trazados anteriormente.

Entonces, podemos afirmar que el eje de simetría es: **R:**



**Ampliando**

Una figura posee un eje de simetría cuando es posible dividirla en dos mitades congruentes entre sí, mediante una línea recta.



**Ayuda**

También puedes ocupar un transportador para verificar que el ángulo que se forma mide 90°.

**Ampliando**

La reflexión definida respecto de un eje de simetría recibe el nombre de simetría axial. También existe la simetría central, en la que la reflexión se define según un punto de reflexión.

**Para concluir**

Una **reflexión es una transformación isométrica** que se puede definir respecto de una recta llamada eje de simetría, de manera que:

- La distancia de un punto P de la figura original al eje de simetría, es igual a la distancia del punto P' de la figura resultante al eje de simetría.
- El segmento que une un punto P de la figura original con el punto P' de la figura resultante, es perpendicular al eje de simetría.

Para **reflejar un punto con respecto a los ejes X e Y**, se puede usar la siguiente regla:

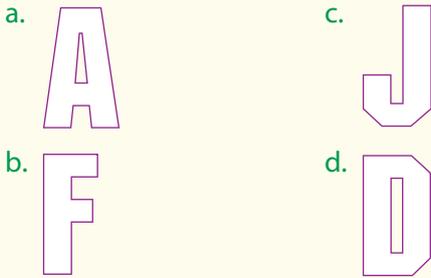
- Reflexión respecto del eje X:  $(x, y) \rightarrow (x, -y)$
- Reflexión respecto del eje Y:  $(x, y) \rightarrow (-x, y)$

**Argumenta y comunica**

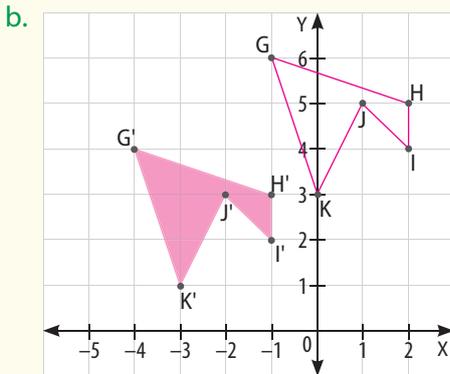
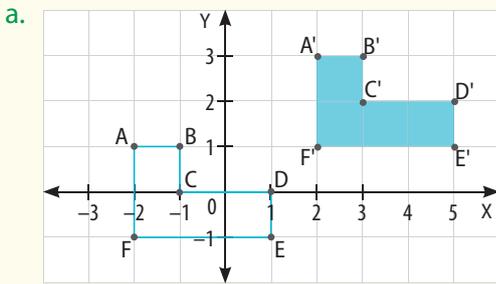
- ¿Puede una figura 2D tener más de un eje de simetría? Da un ejemplo. ¿Puede una figura 2D tener infinitos ejes de simetría?, ¿cuál, por ejemplo? Escribe una justificación para cada una de tus respuestas.
- Verifica la regla establecida para la reflexión con respecto a los eje X e Y en forma manual.

Repaso

1. Dibuja en cada letra el eje de simetría si es que existe.



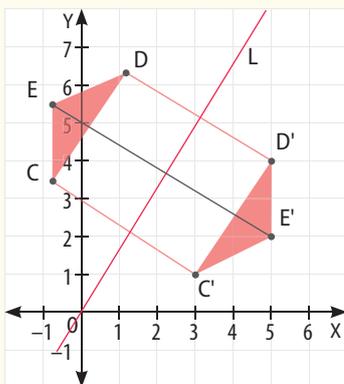
2. Determina el vector de traslación que permite transformar cada figura.



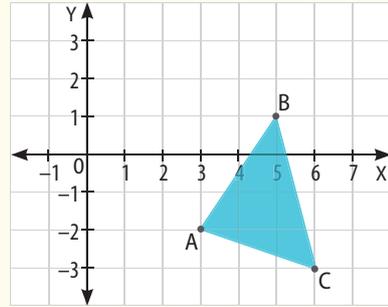
Práctica guiada

3. Refleja cada figura respecto al eje indicado.

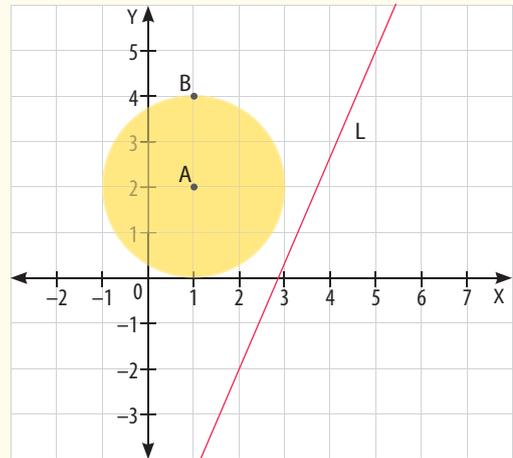
Reflejar el triángulo CDE respecto a la recta L.



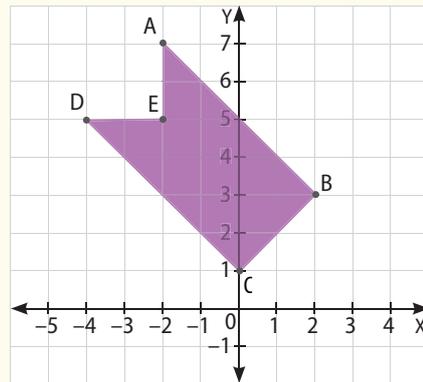
a. Reflejar el triángulo ACB respecto al eje X.



b. Reflejar el círculo respecto a la recta L.

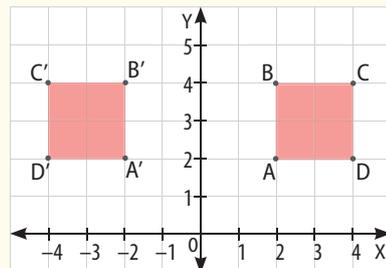


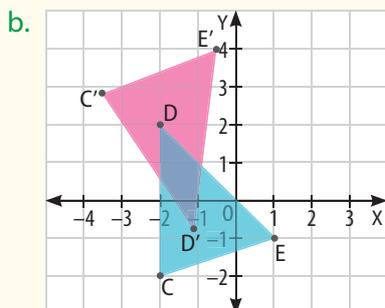
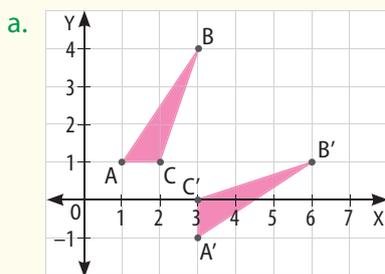
c. Reflejar el pentágono EDCBA respecto al eje Y.



4. Determina y dibuja el eje de simetría en cada caso.

El eje de simetría es el eje Y.





5. Determina las coordenadas del punto resultante considerando el eje de simetría dado en cada caso.

	Reflexión eje X	Reflexión eje Y
Punto original	Resultante	Resultante
$C(3, 4)$	$C'(3, -4)$	$C''(-3, 4)$

- $D(0, 6)$  se refleja respecto al eje Y.
- $G(-4, -2)$  se refleja respecto al eje X.
- $M(-5, 8)$  se refleja respecto al eje Y.
- $P(9, 7)$  se refleja respecto al eje X.

Aplica

6. Resuelve los problemas.

- Si a un rectángulo RSTU se le aplicó una reflexión respecto al eje X, obteniéndose la figura resultante de coordenadas  $R'(4, 1)$ ,  $S'(4, 5)$ ,  $T'(1, 5)$ ,  $U'(1, 1)$ , entonces, ¿cuáles son las coordenadas de los vértices del rectángulo RSTU?

- Considera el triángulo de coordenadas  $J(-2, 0)$ ,  $K(0, 0)$  y  $L(0, 2)$  y el resultante  $J'K'L'$  tras reflejarlo respecto al eje X. ¿Cuál es el perímetro del triángulo compuesto por los triángulos JKL y  $J'K'L'$ ?

7. **Conecto con la Arquitectura.** La torre Eiffel es una construcción de hierro que tiene una altura aproximada de 324 m y es considerada el monumento símbolo de Francia.



¿Se podrían trazar ejes de simetría sobre esta imagen?, ¿cuántos? Si tu respuesta es afirmativa, dibújalos sobre la imagen.

- Argumenta.** Se dibujan dos rectas paralelas,  $L_1$  y  $L_2$ , y a un punto P se le aplica una reflexión con respecto a  $L_1$  y luego, otra reflexión al punto resultante  $P'$  con respecto a  $L_2$ . ¿Se obtendrá el mismo resultado si primero se aplica una reflexión al punto P respecto a  $L_2$  y luego, una reflexión al punto  $P'$  respecto a  $L_1$ ?, ¿por qué? Realiza el procedimiento y comenta tu resultado con tus compañeros y compañeras. Justifica tus respuestas.
- Desafío.** Dibuja en tu cuaderno figuras que satisfagan las siguientes condiciones:
  - Un hexágono con dos ejes de simetría.
  - Un cuadrilátero con solo un eje de simetría.
  - Una figura sin ejes de simetría.

Reflexiono

- ¿Por qué crees que la reflexión es una transformación isométrica? Justifica tu respuesta y coméntala con tus compañeros y compañeras.
- Considera un punto  $(x, y)$ . ¿Qué regla te permite determinar de forma inmediata el punto resultante tras reflejarlo respecto al eje Y y luego, respecto al eje X? Y si inviertes el orden de las reflexiones, ¿obienes la misma figura? Explica y extrae una conclusión de esta actividad.

Refuerzo

- Explica paso a paso cómo reflejarías una figura respecto a una recta usando una escuadra y una regla.
- Explica cómo determinas los ejes de simetría de una figura 2D.
- Escribe la regla para reflejar un punto respecto a los ejes del plano cartesiano.

► **Propósito**

Describir la posición y el movimiento de figuras 2D al rotarlas.

¿Para qué?

Las rotaciones, al igual que otras transformaciones isométricas, son movimientos comunes que puedes apreciar en tu entorno. Por ejemplo, la Tierra rota sobre su eje generando los días y las noches. Entonces, conceptos como los de centro y ángulo de rotación son fundamentales para comprender este y otros fenómenos, así como también para desarrollar técnicas artísticas.

**Palabras clave**

Transformación isométrica

Rotación

Centro de rotación

Ángulo de rotación

Congruencia

**Ayuda**

En este paso rotarás el punto A' en 90° en sentido positivo o antihorario.

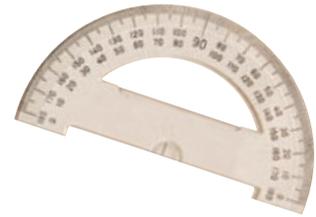
**Ampliando**

Para definir una rotación es necesario establecer un centro y un ángulo de rotación. Se dice que una rotación y su ángulo son positivos cuando el giro es en sentido antihorario y son negativos cuando el giro es en sentido horario. Por ejemplo, los ángulos  $-90^\circ$  y  $270^\circ$  son equivalentes.



## ¿Qué es y cómo se realiza una rotación?

Una profesora propuso a sus estudiantes el desafío geométrico de construir un cuadrado usando solo un transportador.



**Situación 1 Rotando un punto en 90°**

¿Qué cuadrado puede construirse solo con estas herramientas geométricas?

Resolveremos este problema definiendo un centro de rotación O y uno de los vértices del cuadrado A.

**Paso 1** Dibuja un punto O y un punto A.

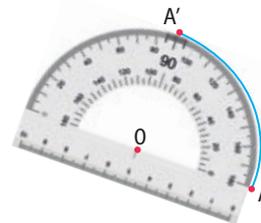


**Paso 2** Ubica el centro del transportador sobre el punto O y coloca el extremo sobre A. Luego, mide 90° sobre el arco y nombra A' al punto así definido.

**Ayuda**

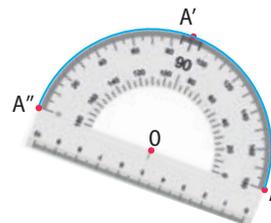
En este paso rotarás el punto A en 90° en sentido positivo o antihorario.

¿Cómo son entre sí los segmentos OA y OA'?

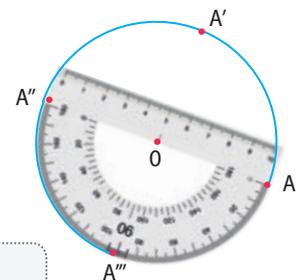


**Paso 3** Repite el paso 2, pero ahora rotando en 90° el punto A'. Llama A'' al punto así obtenido.

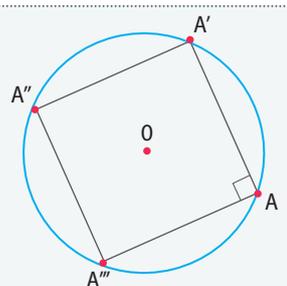
¿Cómo son entre sí los segmentos OA' y OA''?



**Paso 4** Repite el paso 2, pero ahora rotando en 90° el punto A''. Llama A''' al nuevo punto obtenido. Finalmente, para dibujar el cuadrado únete con líneas rectas los puntos que obtuviste.



**R:** Entonces, el cuadrado es:



**Situación 2** Determinando el centro y el ángulo de una rotación

El triángulo A'B'C' resulta tras aplicar una rotación al triángulo ABC. ¿Cuáles son las coordenadas del centro de rotación? ¿Cuál es el ángulo de rotación que permite transformar el triángulo rojo en el azul?

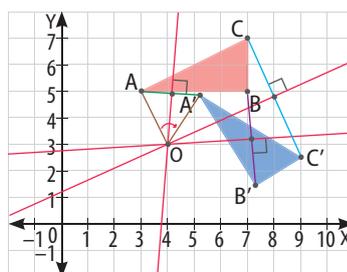
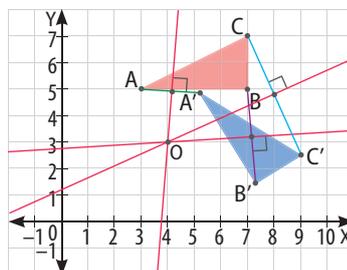
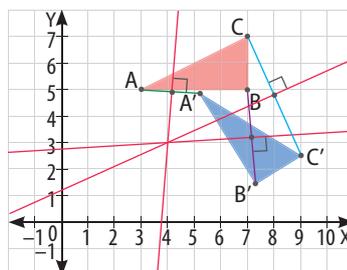
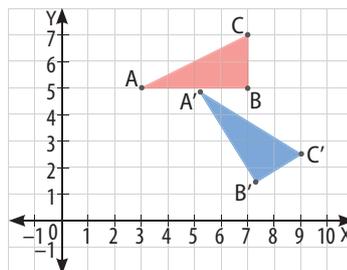
**Paso 1** Une los puntos correspondientes, A-A', B-B' y C-C', mediante segmentos y traza rectas perpendiculares a estos segmentos de manera que los corten en su punto medio.

**Paso 2** Marca el punto de intersección de las rectas perpendiculares a los segmentos AA', BB' y CC'. Este punto es el centro de rotación.

**Paso 3** Dibuja los segmentos AO y A'O y mide con un transportador el ángulo que forman. Este es el ángulo de rotación.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:



**Ayuda**

Se llama simetral o mediatriz a la recta perpendicular que pasa por el punto medio de un segmento.

¿La rotación realizada fue en sentido positivo o negativo?, ¿por qué?

¿Cómo cambia esta respuesta si consideras que el triángulo que rotó es el azul y que el triángulo resultante es el rojo?

**Para concluir**

Una **rotación es una transformación isométrica** que mueve los puntos de una figura 2D a lo largo de un arco de circunferencia. Una rotación está definida por un **centro de rotación** y un **ángulo de rotación**.

Una rotación en 180° también es llamada **reflexión respecto a un punto**.

**Argumenta y comunica**

Un estudiante llegó a la siguiente conclusión:

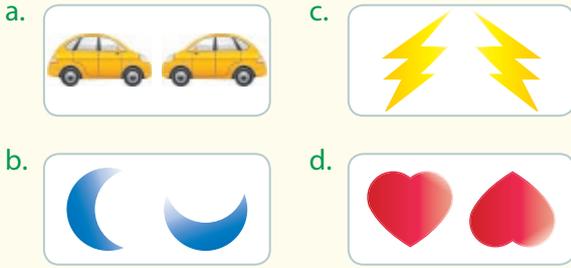
Cuando se **rota un punto (x, y) respecto al origen** del plano cartesiano (0, 0), se puede utilizar la siguiente regla:

- Rotación en 90°:  $(x, y) \rightarrow (-y, x)$
- Rotación en 180°:  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$
- Rotación en 270°:  $(x, y) \rightarrow (y, -x)$
- Rotación en 360°:  $(x, y) \rightarrow (x, y)$

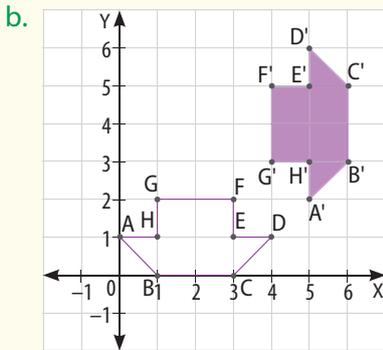
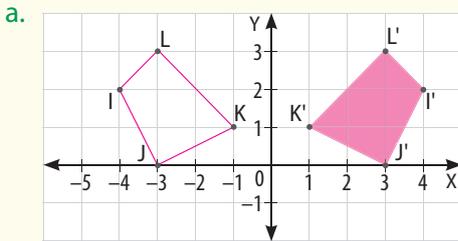
¿Estás de acuerdo con este estudiante?

Repaso

1. Identifica las figuras a las que se les aplicó una rotación.



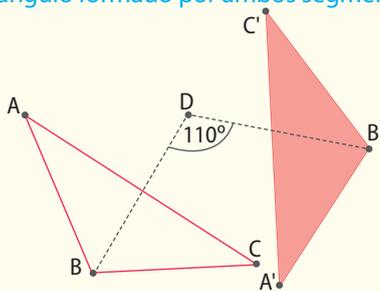
2. Determina el eje de simetría en cada caso.



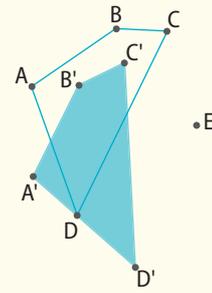
Práctica guiada

3. Determina el ángulo de rotación de cada figura respecto del punto que se indica.

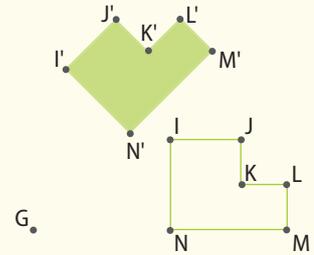
Se traza un segmento desde un vértice hasta D, y otro desde el vértice correspondiente de la figura resultante hasta D. Luego, con un transportador se mide el ángulo formado por ambos segmentos.



a. Centro de rotación E.



b. Centro de rotación G.



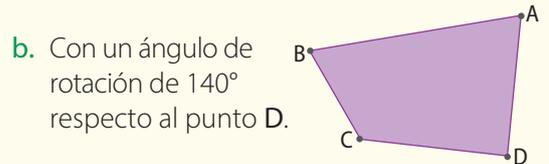
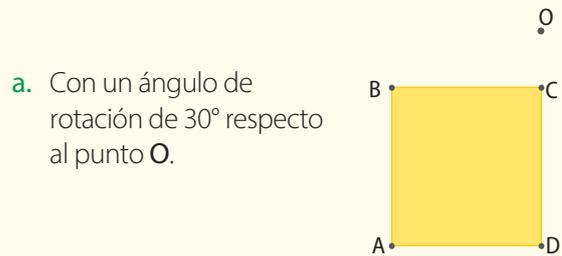
4. Determina las coordenadas del punto que resulta tras aplicar la rotación descrita, considerando que el centro de rotación es el origen del plano cartesiano.

Rotación de  $P(-2, 6)$  en  $90^\circ$ .  
 $P(-2, 6) \rightarrow P'(-6, -2)$

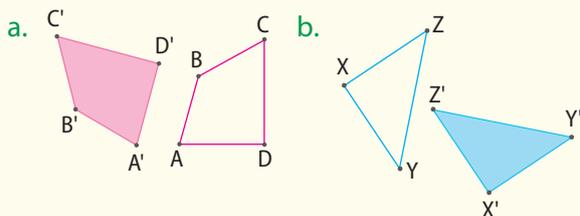
- a.  $P(2, 7)$  en  $180^\circ$ .
- b.  $Q(3, -5)$  en  $270^\circ$ .
- c.  $R(-4, 0)$  en  $360^\circ$ .
- d.  $S(-1, -1)$  en  $90^\circ$ .
- e.  $T(5, -6)$  en  $180^\circ$ .

Aplica

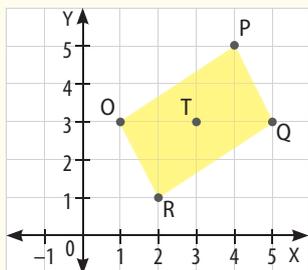
5. Aplica las rotaciones descritas.



6. Identifica el centro y el ángulo de rotación en cada caso.

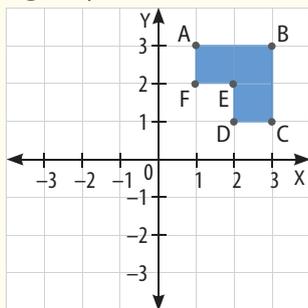


7. Aplica una rotación a la figura ORQP con centro en T y en un ángulo de  $180^\circ$ . Luego, responde.



- ¿Cómo son entre sí la figura ORQP y la que resulta tras la rotación?
- ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de la figura resultante?
- ¿Qué vértices de la figura original coinciden con los de la resultante?

8. Observa la figura y realiza las actividades.

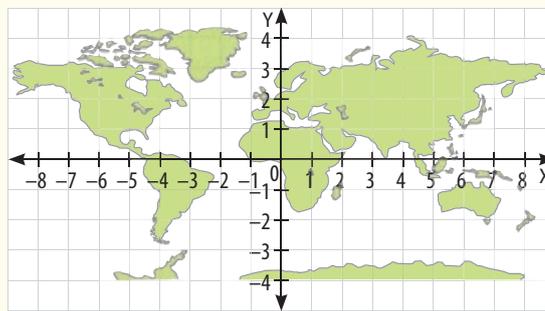


- Aplica una rotación de  $180^\circ$  respecto al origen del plano.

- Aplica una reflexión respecto a la recta  $y = -x$ .
- De acuerdo a los resultados obtenidos, ¿qué puedes concluir?

9. Un buscador de tesoros utiliza un mapa con coordenadas cartesianas. La búsqueda se inicia en el punto  $(-1, 3)$  y debe realizar las siguientes rotaciones en sentido antihorario y respecto al origen:

- Desde la posición inicial hay que girar en  $180^\circ$ .
- Desde ahí, rotar en  $90^\circ$ .
- Finalmente, para llegar al tesoro hay que girar en  $180^\circ$ .



- ¿En qué continente se ubica el tesoro?
- ¿Qué continentes u océanos visitó el buscador en cada una de las posiciones?
- ¿Qué rotación o rotaciones le permitirían al buscador llegar directamente desde el punto de partida hasta el lugar del tesoro? Coméntalo con un compañero o una compañera.

10. Argumenta. Isidora le dice a Rodrigo que aplicar una rotación en  $180^\circ$  es equivalente a aplicar una en  $-180^\circ$ . Luego, Rodrigo le responde a Isidora: "Entonces, aplicar una rotación en  $-90^\circ$  es lo mismo que aplicar una rotación en  $90^\circ$ ". ¿Es correcta la conclusión de Rodrigo? Da argumentos que justifiquen tu respuesta.

Reflexión

- ¿La regla para obtener directamente las coordenadas del punto resultante tras rotar un punto  $(x, y)$  respecto al origen del plano, se cumple también si el centro de rotación es un punto diferente al origen? Fundamenta tu respuesta con un ejemplo.
- Considera un punto P y aplícale una rotación de  $\alpha$  grados respecto al origen del plano en sentido antihorario. Llama al punto resultante P'. ¿Obtendrás la posición del punto P si aplicas a P' una rotación respecto al origen de igual ángulo, pero en sentido horario? Justifica tu respuesta en tu cuaderno.

Refuerzo

- Señala los instrumentos geométricos que podrías utilizar para aplicar una rotación a una figura 2D.
- Describe el procedimiento que seguirías para determinar el centro y el ángulo de una rotación.
- Escribe la regla que permite determinar en forma directa el punto resultante tras rotar un punto  $(x, y)$  respecto al origen del plano en ángulos de  $90^\circ$ ,  $180^\circ$ ,  $270^\circ$  y  $360^\circ$ .

► Propósito

Realizar transformaciones isométricas en un *software* y verificar sus propiedades.

¿Para qué?

El uso de un *software* para visualizar relaciones y movimientos en el plano cartesiano permite explorar, predecir y demostrar relaciones y propiedades de forma rápida y precisa.

Palabras clave

Transformación isométrica

Traslación

Reflexión

Rotación

Vector de traslación

Eje de simetría

Centro y ángulo de rotación

Software

¿Por qué tras seleccionar un vértice debes seleccionar un punto que se encuentre 5 unidades a su derecha y 2 unidades por encima?

¿Son paralelos los vectores que dibujaste? ¿Siempre ocurre esto en una traslación?

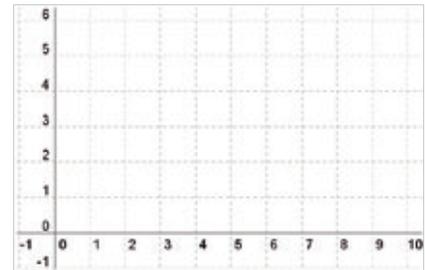
¿Son congruentes los rectángulos ABCD y A'B'C'D'? ¿cómo lo sabes?

Ayuda

Para calcular el perímetro y el área de figuras 2D dibujadas en GeoGebra puedes usar las opciones Distancia o Longitud y Área respectivamente.

## ¿Cómo realizar transformaciones isométricas en un software?

En el *software* GeoGebra es posible realizar transformaciones isométricas y verificar algunas de sus propiedades. Tras acceder al programa, con el botón derecho del *mouse* selecciona Cuadrícula para incorporar la cuadrícula del plano cartesiano.

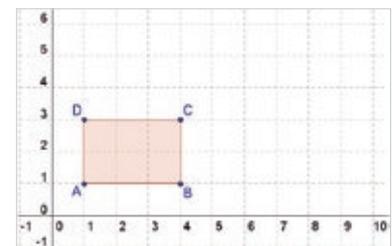


### Situación 1 Trasladando un rectángulo

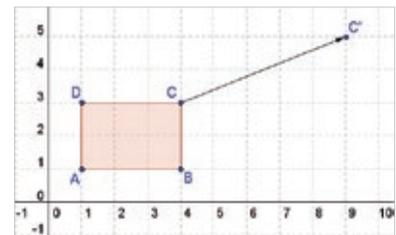
¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de la figura que resulta de trasladar un rectángulo de vértices A(1, 1), B(4, 1), C(4, 3) y D(1, 3) según el vector  $\vec{v} = (5, 2)$ ?

Para responder se usará el *software* GeoGebra.

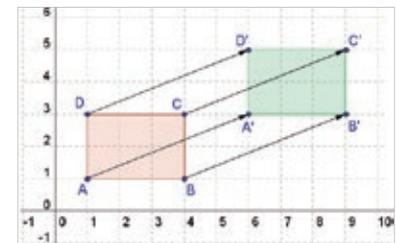
**Paso 1** Dibuja el rectángulo ABCD usando la herramienta Polígono .



**Paso 2** Dibuja el vector  $\vec{v}$  que definirá la traslación. Para ello, selecciona la opción Vector , haz clic en un punto cualquiera del plano y luego en el punto que se ubica 5 unidades a su derecha y 2 unidades por encima.



**Paso 3** Traslada el rectángulo ABCD según el vector  $\vec{v}$ . Para ello, selecciona Traslación , luego haz clic en el rectángulo y finalmente en el vector. Para verificar que la construcción está correcta, dibuja el vector  $\vec{v}$  a continuación de los otros vértices del rectángulo.



¿Qué ocurre si ocupas la herramienta Elige y Mueve para aumentar o disminuir la longitud del vector que define la traslación?

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

Completa la afirmación:

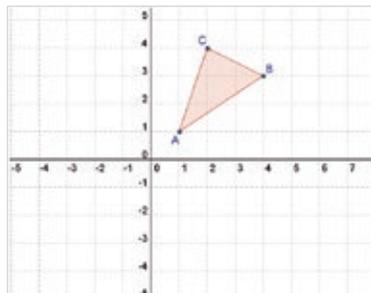
El perímetro del rectángulo ABCD es \_\_\_\_ u y el de su imagen es \_\_\_\_ u, por lo tanto, los perímetros son \_\_\_\_\_. El área del rectángulo ABCD es \_\_\_\_ u<sup>2</sup> y la de su imagen es \_\_\_\_ u<sup>2</sup>, por lo tanto, las áreas son \_\_\_\_\_.

**Situación 2** Reflejando un triángulo

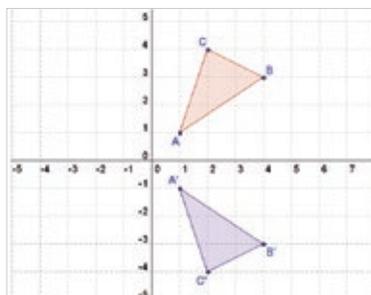
¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de las figuras resultantes de un triángulo de vértices A(1, 1), B(4, 3) y C(2, 4) que se refleja respecto al eje X, al eje Y y a la recta de ecuación  $y = x - 3$ ?

Resolveremos usando GeoGebra.

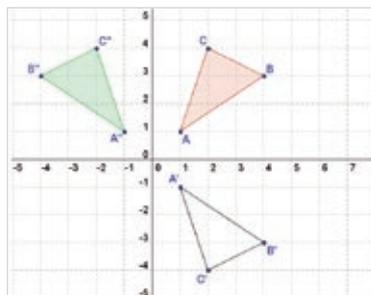
**Paso 1** Dibuja el triángulo ABC usando la herramienta Polígono .



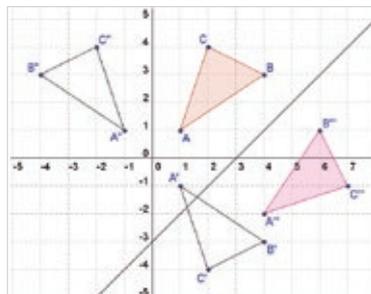
**Paso 2** Dibuja la figura que resulta de reflejar el triángulo ABC respecto al eje X con la opción Simetría axial , seleccionando primero el triángulo y luego el eje X.



**Paso 3** Dibuja la figura que resulta de reflejar el triángulo ABC respecto al eje Y también con la herramienta Simetría axial , pero ahora seleccionando el eje Y en lugar del eje X.



**Paso 4** Traza la recta de ecuación  $y = x - 3$ . Luego, dibuja la figura que resulta de reflejar el triángulo ABC respecto a esta recta también con la opción Simetría axial , seleccionando primero el triángulo y después la recta.



Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Ampliando**

Cuando una reflexión se realiza respecto a un eje de simetría, se habla de simetría axial.

Si trazas los segmentos AA', BB' y CC', ¿son perpendiculares al eje X?, ¿por qué? ¿Es siempre así en una reflexión?

Si trazas los segmentos AA'', BB'' y CC'', ¿son paralelos entre sí? ¿Es siempre así para una reflexión?

¿Son congruentes los triángulos ABC, A'B'C', A''B''C'' y A'''B'''C'''?, ¿cómo lo sabes?

**Ayuda**

Recuerda que para graficar una recta en GeoGebra debes digitar en la barra inferior de Entrada la ecuación que la define. En este caso, tienes que escribir  $y = x - 3$ .

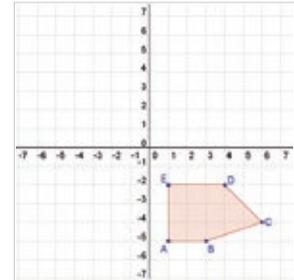
¿Se verifica la regla que dice que si un punto (x, y) se refleja respecto al eje X se obtiene el punto (x, -y), y si se refleja respecto al eje Y se obtiene el punto (-x, y)?

**Situación 3** Rotando un pentágono

¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de las figuras resultantes de rotar un pentágono de vértices  $A(1, -5)$ ,  $B(3, -5)$ ,  $C(6, -4)$ ,  $D(4, -2)$  y  $E(1, -2)$  en ángulos de  $90^\circ$ ,  $-120^\circ$  y  $270^\circ$  respecto al origen?

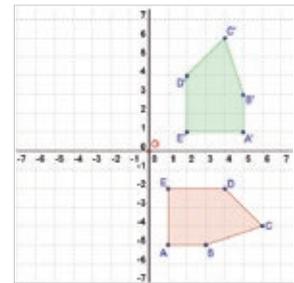
Nuevamente resolveremos usando GeoGebra.

**Paso 1** Dibuja el pentágono ABCDE usando la herramienta Polígono .



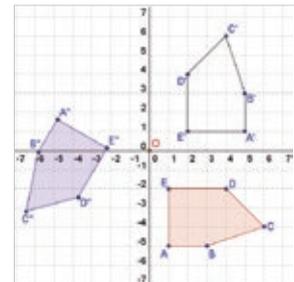
¿Es este pentágono una figura regular?, ¿por qué?

**Paso 2** Realiza la rotación en  $90^\circ$  respecto al origen del plano usando la opción Rota Objeto  haz clic en el pentágono, luego en el origen y, finalmente, escribe el ángulo en la ventana que emerge.



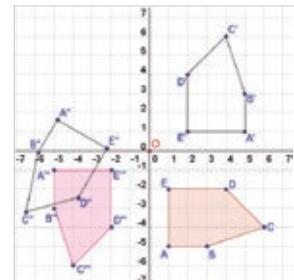
**Ayuda**  
Puedes usar la herramienta Ángulo  para confirmar la medida de los ángulos.

**Paso 3** Realiza la rotación en  $-120^\circ$  respecto al origen del plano usando nuevamente la opción Rota Objeto , y seleccionando los mismos elementos que se describieron en el paso anterior, pero cambiando el ángulo por  $120^\circ$  en sentido horario.



¿A qué rotación en sentido positivo equivale esta rotación?

**Paso 4** Realiza la rotación en  $270^\circ$  respecto al origen del plano usando nuevamente la opción Rota Objeto , y seleccionando los mismos elementos que se describieron en el paso 2, pero cambiando el ángulo por  $270^\circ$ .



¿A qué rotación en sentido negativo equivale esta rotación?

¿Se verifica la regla que dice que si un punto  $(x, y)$  se rota respecto al origen en  $90^\circ$  se obtiene el punto  $(-y, x)$ , y si se hace en  $270^\circ$ , se obtiene el punto  $(y, -x)$ ?

¿Cuáles son los valores aproximados de las coordenadas de los vértices  $A''$ ,  $B''$ ,  $C''$ ,  $D''$  y  $E''$ ?

Completa para responder:

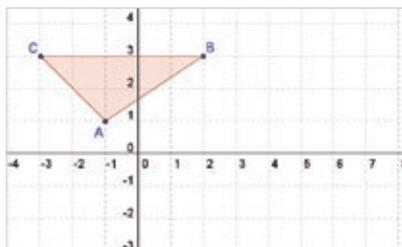
**R:** Las coordenadas de la figura que se obtiene al rotar el pentágono ABCDE en  $90^\circ$  son  $A'(\_, \_)$ ,  $B'(\_, \_)$ ,  $C'(\_, \_)$ ,  $D'(\_, \_)$  y  $E'(\_, \_)$ .  
Las coordenadas de la figura  $A''B''C''D''E''$  que se obtiene al rotar el pentágono ABCDE en  $-120^\circ$  no son números \_\_\_\_\_.  
Las coordenadas de la figura que se obtiene al rotar el pentágono ABCDE en  $270^\circ$  son  $A'''(\_, \_)$ ,  $B'''(\_, \_)$ ,  $C'''(\_, \_)$ ,  $D'''(\_, \_)$  y  $E'''(\_, \_)$ .

### Situación 4 Rotando un triángulo en $180^\circ$ respecto a un punto cualquiera

¿Qué transformación isométrica es equivalente a una rotación en  $180^\circ$ ?

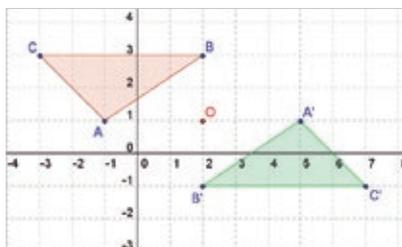
Responderemos rotando el triángulo de vértices  $A(-1, 1)$ ,  $B(2, 3)$  y  $C(-3, 3)$  respecto al punto  $(2, 1)$  con GeoGebra.

**Paso 1** Dibuja el triángulo ABC.



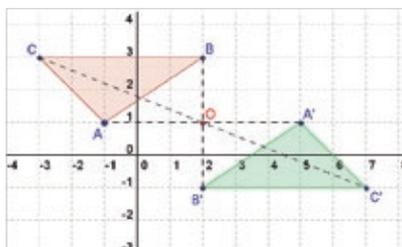
¿Qué herramienta de GeoGebra debes usar para dibujar el triángulo ABC? ¿Se te ocurre otra forma de construir el triángulo?, ¿cuál?

**Paso 2** Realiza la rotación del triángulo ABC en  $180^\circ$  respecto al punto  $(2, 1)$ .



¿Qué opción de GeoGebra debes usar para realizar la rotación del triángulo ABC?

**Paso 3** Une los vértices  $AA'$ ,  $BB'$  y  $CC'$  y constata que obtienes líneas rectas que se intersectan en el centro de rotación  $O$ .



Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

Observa la figura del paso 3 y completa el enunciado:

Al aplicar una rotación de \_\_\_\_ al triángulo ABC, observo que:

- cada vértice del triángulo está a la misma distancia del centro de rotación que el vértice correspondiente de la figura resultante.
- los segmentos  $AO$  y  $A'O$ ,  $BO$  y  $B'O$  y  $CO$  y  $C'O$  están sobre las mismas líneas rectas.

#### Ayuda

Estas condiciones definen una reflexión respecto a un punto llamado punto de simetría. La transformación isométrica resultante recibe el nombre de simetría central.

#### ► Para concluir

El uso de **softwares** geométricos como GeoGebra permite realizar transformaciones isométricas y analizar, verificar y descubrir muchas de sus propiedades.

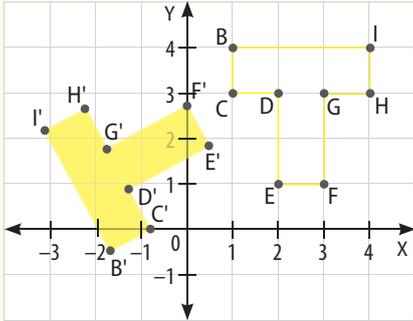
#### Argumenta y comunica

Usa la herramienta Simetría Central  de GeoGebra para realizar la transformación descrita en la situación 4. Tras seleccionar la opción, debes pinchar la figura a reflejar y el centro de simetría. Redacta por escrito las conclusiones de este trabajo y comunícalas a tu curso.

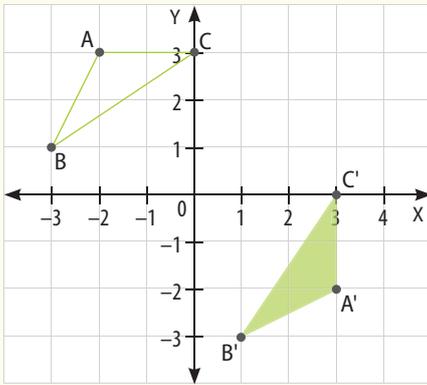
Repaso

1. Identifica, en cada caso, la transformación isométrica aplicada a la figura señalada e indica sus características.

a. Figura original: octógono BCDEFGHI.



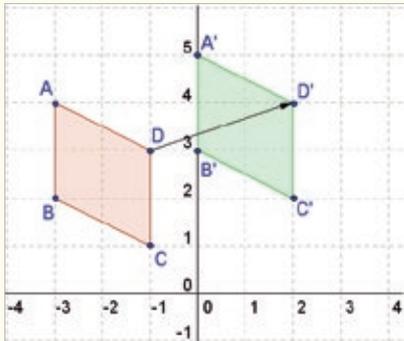
b. Figura original: triángulo ABC.



Práctica guiada

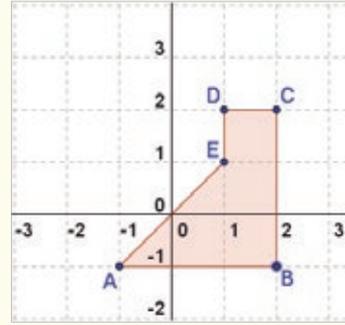
2. Utilizando GeoGebra, determina las coordenadas de los vértices de la figura que resulta de aplicar la transformación isométrica indicada a cada una de las figuras iniciales.

Trasladar la figura ABCD según el vector  $\vec{v} = (3, 1)$ .

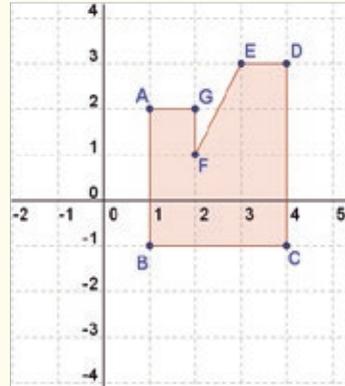


$A'(0, 5)$ ,  $B'(0, 3)$ ,  $C'(2, 2)$  y  $D'(2, 4)$ .

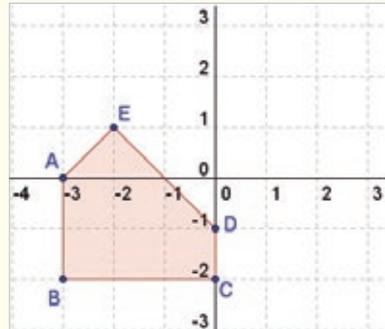
a. Reflejar la figura ABCDE respecto a la recta  $y = 2x$ .



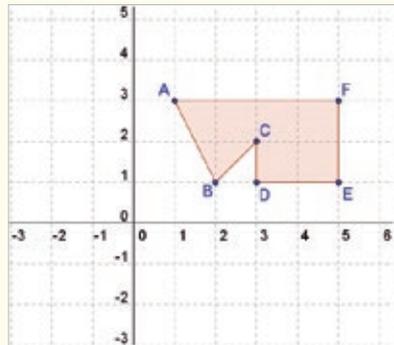
b. Rotar la figura ABCDEFG en  $-90^\circ$  respecto al origen del plano cartesiano.



c. Trasladar la figura ABCDEF según el vector  $\vec{u} = (1, 1)$ .

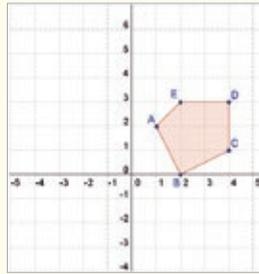


d. Rotar la figura ABCDEF en  $45^\circ$  respecto al punto  $(1, -2)$ .

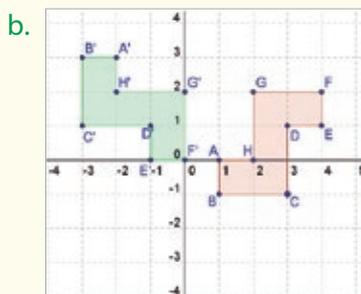
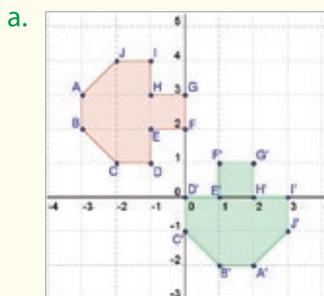


## Aplica

3. Dibuja en GeoGebra la siguiente figura y aplica sobre ella las transformaciones que se indican.



- Traslación según el vector  $\vec{v} = (-1, 3)$ .
  - Reflexión respecto al eje X.
  - Reflexión respecto al eje Y.
  - Rotación en  $90^\circ$  respecto al punto  $(0, 2)$ .
4. Usa GeoGebra para determinar el área y el perímetro de la figura inicial y de la figura resultante para cada transformación isométrica.



5. Realiza las actividades en GeoGebra considerando un triángulo de vértices  $A(3, 2)$ ,  $B(3, -1)$  y  $C(0, -1)$ .

- Verifica si las rotaciones con centro en el origen son equivalentes.
  - $90^\circ$  y  $-270^\circ$ .
  - $180^\circ$  y  $-180^\circ$ .
  - $270^\circ$  y  $-90^\circ$ .
  - $360^\circ$  y  $0^\circ$ .
- Trasládalo según el vector  $\vec{p} = (2, 3)$  y traslada la figura resultante según el vector  $\vec{q} = (-2, -3)$ . ¿En qué posición queda la figura final?
- Considerando como centro de rotación el punto  $A(1, 1)$ , rota el triángulo  $60^\circ$  en sentido antihorario y luego rota el triángulo resultante  $60^\circ$  en sentido horario. ¿En qué posición queda la figura final?

6. **Investiga.** Además de GeoGebra, existen otros *softwares* que pueden utilizarse para hacer construcciones geométricas. Un ejemplo es el *software* Cabri. Investiga cómo usar este *software* para realizar transformaciones isométricas. Puedes descargarlo ingresando el código TM8P263 en <http://codigos.auladigital.cl>

7. **Descubre el error.** Arturo dibujó un segmento AB con  $A(-3, 3)$  y  $B(-1, 4)$ . Él afirma que aplicarle a este segmento una rotación de  $180^\circ$  respecto al punto  $(1, 3)$  es equivalente a aplicarle una rotación de  $-180^\circ$  respecto al punto  $(-1, -3)$ . ¿Es correcto lo que afirma Arturo?, ¿por qué?

8. **Describe el procedimiento.** Aplica al triángulo de vértices  $A(0, 0)$ ,  $B(0, 5)$  y  $C(3, 1)$  una simetría central respecto al punto  $(-4, 7)$ , detallando cada uno de los pasos que debes seguir.

## Reflexiono

- Si consideras que las coordenadas de un trapecio dibujado en GeoGebra son  $A(2, 1)$ ,  $B(4, 3)$ ,  $C(4, 6)$  y  $D(2, 8)$ , ¿cómo podrías construir un hexágono aplicándole una transformación isométrica? Piénsalo y compara tu respuesta con la de tus compañeros y compañeras.
- Si tienes un cuadrado de vértices  $A(1, 3)$ ,  $B(1, 1)$ ,  $C(3, 1)$  y  $D(3, 3)$ , y lo rotas en  $90^\circ$  respecto al punto  $(2, 2)$ , ¿qué observas?, ¿qué sucede con la figura resultante?

## Refuerzo

- Indica los botones del *software* GeoGebra que son utilizados para aplicar una:
  - traslación.
  - reflexión axial.
  - rotación.
  - simetría central.
- Señala las ventajas que tiene utilizar un *software* como GeoGebra para realizar transformaciones isométricas a figuras 2D.
- Escribe las regularidades de la traslación, la reflexión y la rotación que se pueden verificar mediante GeoGebra.

**Propósito**

Resolver problemas relacionados con la composición de transformaciones isométricas.

**¿Para qué?**

Para realizar algunas construcciones del arte y de la ciencia es necesario aplicar sucesivamente más de una transformación isométrica, es decir, una composición de ellas. Además, es importante conocer las equivalencias que existen entre las transformaciones, ya que simplifican los procedimientos.

**Palabras clave**

Transformación isométrica

Composición

Software

Equivalencia

¿Cuáles son las coordenadas del vector que debes trazar en los vértices del triángulo ABC?

**Ayuda**

Para sumar dos vectores debes sumar sus respectivas coordenadas. Por ejemplo, si las coordenadas de dos vectores son  $(a, b)$  y  $(c, d)$ , entonces las del vector suma son  $(a + c, b + d)$ .

## ¿Cómo componer transformaciones isométricas?

Es posible realizar varias transformaciones isométricas, una tras otra, a una figura 2D.

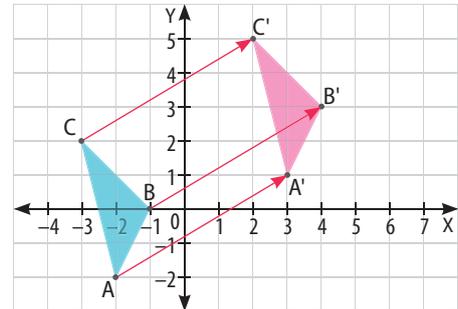
### Situación 1 Componiendo traslaciones manualmente

¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de la figura que resulta de aplicar sucesivamente al triángulo de coordenadas  $A(-2, -2)$ ,  $B(-1, 0)$  y  $C(-3, 2)$  las traslaciones definidas por los vectores  $\vec{u} = (5, 3)$  y  $\vec{v} = (2, -4)$ ?

Resolveremos este problema trasladando manualmente el triángulo ABC en el plano cartesiano.

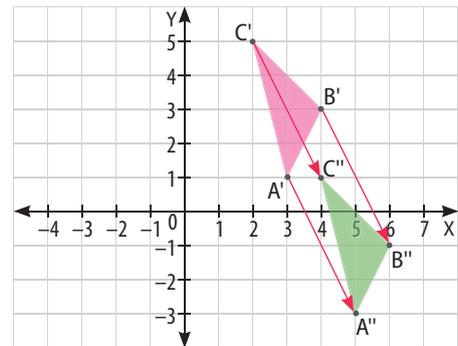
**Paso 1** Realiza la traslación del triángulo ABC según el vector  $\vec{u}$ . La figura resultante será el triángulo A'B'C'.

¿Cómo realizas esta transformación?



**Paso 2** Realiza la traslación del triángulo A'B'C' según el vector  $\vec{v}$ . La figura resultante será el triángulo A''B''C''.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:



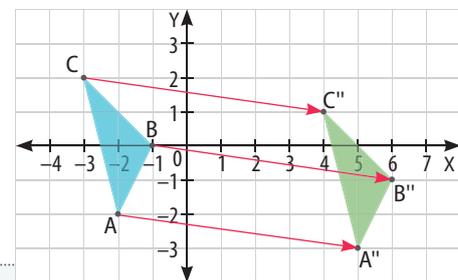
R:

**Paso 3** Dibuja ahora los triángulos ABC y A''B''C''. Luego, en cada uno de los vértices del triángulo ABC traza el vector que permite transformarlo en el triángulo A''B''C''.

Completa la afirmación:

Al aplicar al triángulo ABC las \_\_\_\_\_ definidas por los vectores  $\vec{u} = (5, 3)$  y  $\vec{v} = (2, -4)$ , estoy componiendo dos traslaciones. La figura resultante de esta composición se puede obtener directamente aplicando la traslación definida por el vector  $\vec{w}$ , que es la suma de los vectores de las traslaciones parciales, es decir:

$$(5, 3) + (2, -4) = (5 + 2, 3 - 4) = \vec{w} = ( \_, \_ )$$

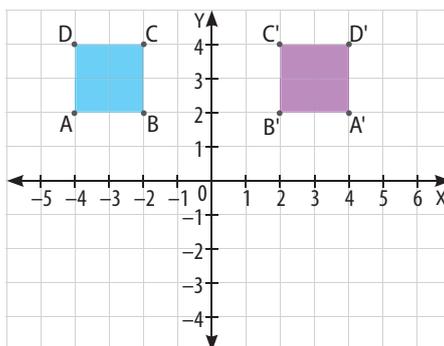


**Situación 2** Componiendo reflexiones manualmente

¿Cuáles son las coordenadas de los vértices de la figura que resulta de aplicar dos reflexiones sucesivas al cuadrado de vértices  $A(-4, 2)$ ,  $B(-2, 2)$ ,  $C(-2, 4)$  y  $D(-4, 4)$ , una respecto al eje  $Y$  y otra respecto al eje  $X$ ?

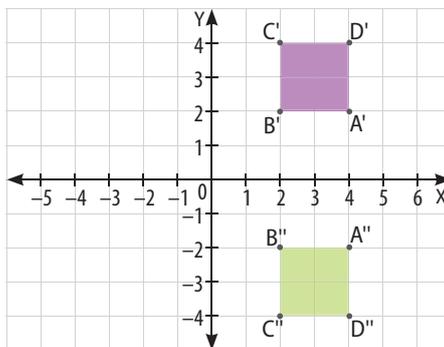
Resolveremos este problema usando lápiz y regla para reflejar el cuadrado en el plano cartesiano.

**Paso 1** Realiza la reflexión del cuadrado  $ABCD$  respecto al eje  $Y$ . La figura resultante será el cuadrado  $A'B'C'D'$ .



¿Cómo realizas esta transformación?

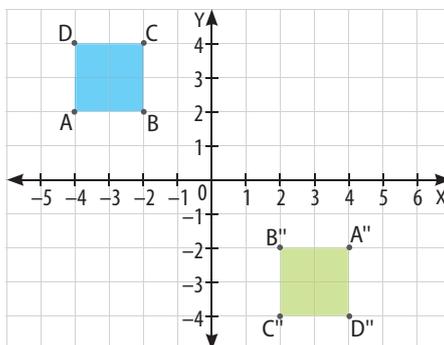
**Paso 2** Realiza la reflexión del cuadrado  $A'B'C'D'$  respecto al eje  $X$ . La figura resultante será el cuadrado  $A''B''C''D''$ .



Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Paso 3** Dibuja ahora los cuadrados  $ABCD$  y  $A''B''C''D''$ . Luego, analiza las figuras y determina qué transformación isométrica permitiría transformar directamente la primera figura en la segunda.



Completa la afirmación:

La composición de reflexiones respecto a los ejes  $X$  e  $Y$ , realizada al cuadrado  $ABCD$  equivale a:

- una \_\_\_\_\_ en  $-180^\circ$  respecto al origen del plano cartesiano.
- una simetría \_\_\_\_\_ respecto al origen del plano cartesiano.

¿Cuántos tipos de reflexiones conoces?,  
¿cuáles son?

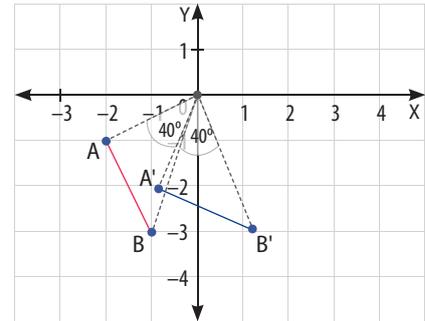
**Situación 3** Componiendo rotaciones manualmente

¿Cuáles son las coordenadas de los vértices del segmento resultante tras aplicar al segmento AB, cuyos extremos son  $A(-2, -1)$  y  $B(-1, -3)$ , dos rotaciones sucesivas, una de  $40^\circ$  y otra de  $50^\circ$  respecto al origen del plano?

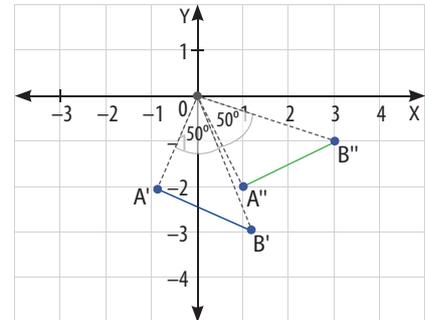
Resolveremos este problema usando lápiz y regla para rotar el segmento en el plano cartesiano.

¿Esta rotación debes realizarla en sentido horario o antihorario?, ¿por qué?

**Paso 1** Realiza la rotación del segmento AB de  $40^\circ$  respecto al origen. La figura resultante será el segmento  $A'B'$ .



**Paso 2** Realiza la rotación del segmento  $A'B'$  de  $50^\circ$  respecto al origen. La figura resultante será el segmento  $A''B''$ .



Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

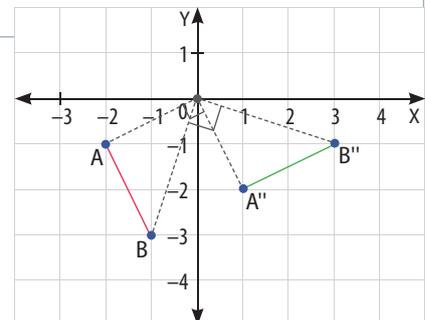
R:

**Ayuda**

Recuerda que si un punto  $(x, y)$  es sometido a una rotación de  $90^\circ$  respecto al origen, entonces el punto resultante es  $(-y, x)$ .

¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos que definen las rotaciones del segmento AB respecto al origen descritas en los pasos 1 y 2? ¿Cómo se relaciona esta suma con la medida del ángulo de la rotación del segmento AB realizada en el paso 3?

**Paso 3** Dibuja ahora los segmentos AB y  $A''B''$ . Luego, analiza las figuras y determina qué transformación isométrica permitiría transformar directamente la primera figura en la segunda.



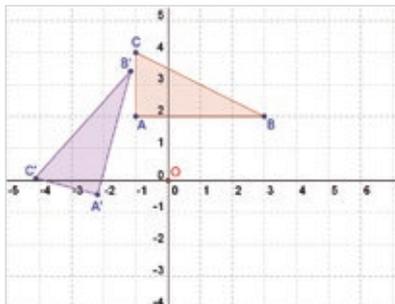
Completa la afirmación:

La composición de rotaciones realizada al segmento AB equivale a una rotación de \_\_\_\_\_ respecto al origen del plano cartesiano.

### Situación 4 Componiendo transformaciones isométricas con un software

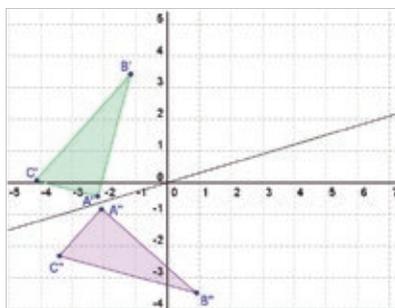
¿Cuál es el resultado de rotar  $75^\circ$  respecto al origen del plano un triángulo de vértices  $A(-1, 2)$ ,  $B(3, 2)$  y  $C(-1, 4)$ , luego reflejarlo respecto a la recta de ecuación  $y = 0,3x$ , y finalmente, trasladarlo según el vector  $\vec{v} = (5, 2)$ ?

**Paso 1** Realiza la rotación del triángulo ABC de  $75^\circ$  respecto al origen. La figura resultante será el triángulo  $A'B'C'$ .



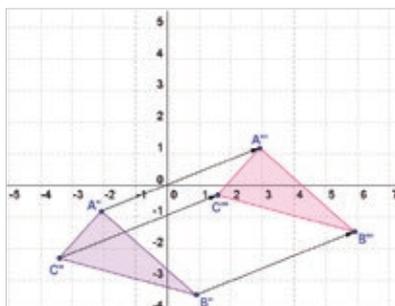
¿Cómo realizas esta rotación en GeoGebra?

**Paso 2** Realiza la reflexión del triángulo  $A'B'C'$  respecto a la recta de ecuación  $y = 0,3x$ . La figura resultante será el triángulo  $A''B''C''$ .



¿Cómo realizas esta reflexión en GeoGebra?

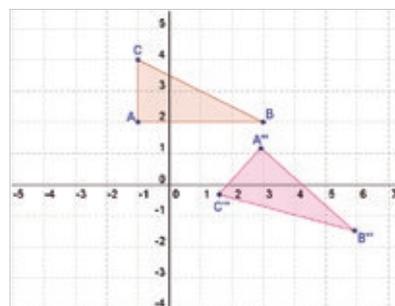
**Paso 3** Realiza la traslación del triángulo  $A''B''C''$  definida por el vector  $\vec{v} = (5, 2)$ . La figura resultante será el triángulo  $A'''B'''C'''$ .



¿Cómo realizas esta traslación en GeoGebra?

Por lo tanto, el resultado de la aplicación de las tres transformaciones isométricas al triángulo ABC es el triángulo  $A'''B'''C'''$ :

R:



Si aplicas las tres transformaciones isométricas en orden inverso, ¿obtienes el mismo resultado? ¿Qué puedes deducir de tu respuesta?

#### ► Para concluir

Una **composición de transformaciones isométricas** consiste en realizar sucesivas transformaciones a una misma figura.

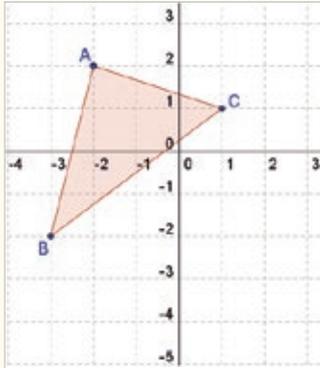
#### Argumenta y comunica

Una estudiante dice que la aplicación de traslaciones a una figura 2D es conmutativa, pero que la aplicación de dos transformaciones isométricas cualesquiera no lo es. ¿Son correctas estas afirmaciones? Justifica tus respuestas y compáralas con las de tus compañeros o compañeras.

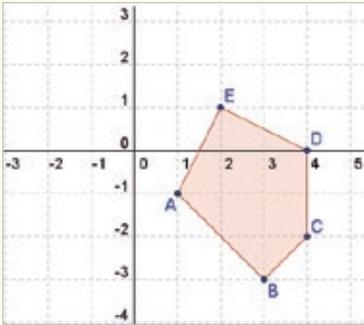
Repaso

1. Usa GeoGebra para aplicar la transformación isométrica señalada a cada figura.

a. Traslada el triángulo ABC según el vector  $\vec{v} = (1, -3)$ .



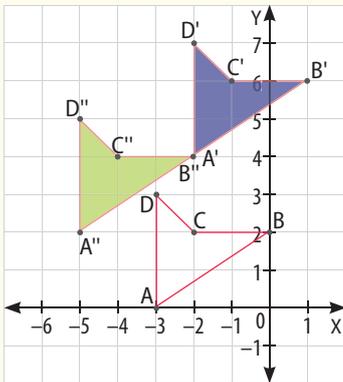
b. Refleja el pentágono ABCDE respecto a la recta  $y = x - 2$ .



Práctica guiada

2. Determina la figura resultante de la composición isométrica que se indica.

Traslada la figura ABCD según el vector  $\vec{p} = (1, 4)$  y la figura resultante, según el vector  $\vec{q} = (-3, -2)$ .



a. Aplica rotaciones sucesivas al triángulo de coordenadas A(3, 1), B(4, 3) y C(2, 3) con centro en el origen y con ángulos de rotación de  $120^\circ$  y  $-60^\circ$ .

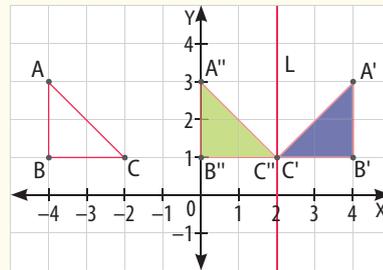
b. Refleja el cuadrado de vértices I(1, 0), J(4, 0), K(4, 3) y L(1, 3) respecto al eje Y, y luego rota la figura resultante en  $270^\circ$  con centro en el origen del plano.

3. Realiza la composición de reflexiones e indica el vector que permite transformar la figura original en la final.

Refleja el triángulo ABC respecto al eje Y. Luego, refleja la figura resultante respecto a la recta L. Figura inicial: triángulo ABC.

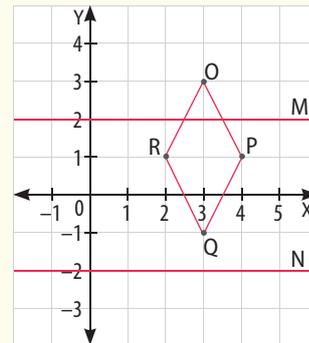
Primera figura resultante: triángulo A'B'C'.

Segunda figura resultante: triángulo A''B''C''.

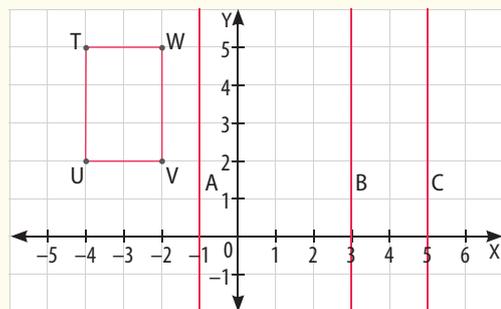


Vector  $\vec{v} = (4, 0)$

a. Refleja el rombo OPQR respecto a la recta M. Luego, refleja la figura resultante respecto a la recta N.



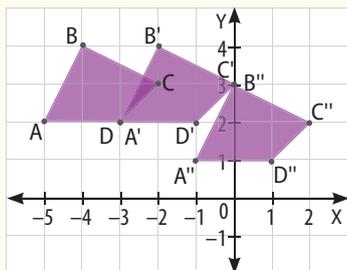
b. Refleja el rectángulo TUVW respecto a la recta A. Luego, refleja la figura resultante respecto a la recta B, y finalmente, refleja esta nueva figura resultante respecto a la recta C.



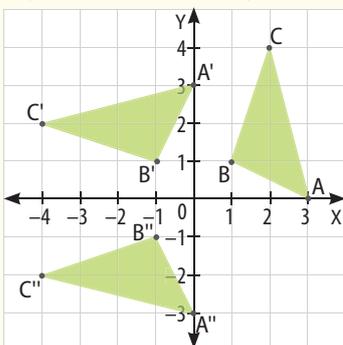
Aplica

4. Identifica las transformaciones isométricas que se pueden haber efectuado para obtener las figuras finales.

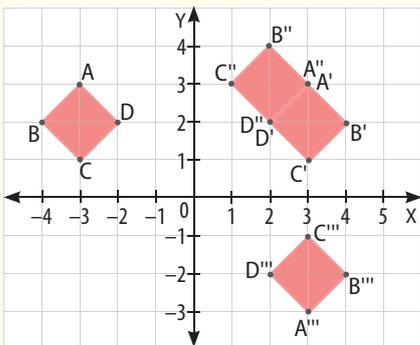
a. Figura inicial: ABCD. Figura final: A''B''C''D''.



b. Figura inicial: ABC. Figura final: A''B''C''.



c. Figura inicial: ABCD. Figura final: A'''B'''C'''D'''.



5. Determina el vector que define una traslación equivalente a la composición de las traslaciones definidas por cada par de vectores.

a.  $\vec{m} = (1, -2)$  y  $\vec{n} = (0, 5)$ .

b.  $\vec{o} = (-3, -4)$  y  $\vec{p} = (-6, 3)$ .

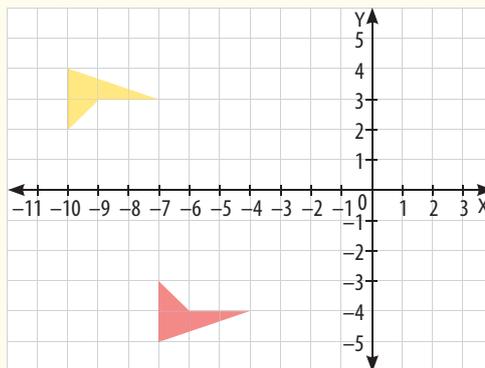
c.  $\vec{q} = (9, -7)$  y  $\vec{r} = (3, 0)$ .

d.  $\vec{s} = (4, 5)$  y  $\vec{t} = (9, 4)$ .

6. **Argumenta.** Diego señala que una composición de reflexiones axiales siempre puede reemplazarse por una traslación, de manera tal que en ambos casos se obtenga la misma figura resultante. María, por su parte, dice que eso ocurre solo en algunas ocasiones. ¿Quién tiene la razón?, ¿por qué?

7. **Descubre el error.** En un plano cartesiano, Javier marca el punto A(3, 4) y traza la recta que une el punto (1, 1) con el (5, 5). Luego, refleja A respecto a esta recta y obtiene el punto A'(3, 2). ¿Cuál fue el error que cometió? Piénsalo y escribe las coordenadas correctas de A'.

8. **Desafío.** Utiliza una composición de transformaciones isométricas para llevar la figura amarilla hasta la posición de la roja. Comparte tu trabajo con el resto del curso.



Reflexiono

1. En una composición de transformaciones isométricas, ¿la figura original y la final son congruentes?, ¿por qué? Justifica tu respuesta.
2. Si consideras la traslación del punto A(4, 7) hasta el punto A'(-3, 5), ¿cómo podrías obtener su traslación inversa, es decir, llevar el punto resultante hasta el punto original? ¿Cuál sería el vector que definiría esta traslación? Piénsalo y desarrolla tus respuestas.

Refuerzo

1. Explica por escrito cómo obtendrías de manera directa las coordenadas de una figura que se traslada dos veces sucesivas.
2. Escribe el vector  $\vec{a}$  que determina una traslación equivalente a la composición de las traslaciones definidas por los vectores  $\vec{b} = (-1, -2)$  y  $\vec{c} = (-6, -3)$ .
3. Escribe en tu cuaderno dos ejemplos de composición de transformaciones isométricas, de manera que cada una considere:
  - tres reflexiones.
  - dos rotaciones.

► **Propósito**

Aplicar las transformaciones isométricas para realizar teselaciones.

¿Para qué?

Algunas de las aplicaciones artísticas de las transformaciones isométricas tienen relación con las teselaciones. Es así como el ornamento de telas, paredes y diversos objetos se basa en rotaciones, traslaciones y reflexiones de diferentes figuras 2D.

**Palabras clave**

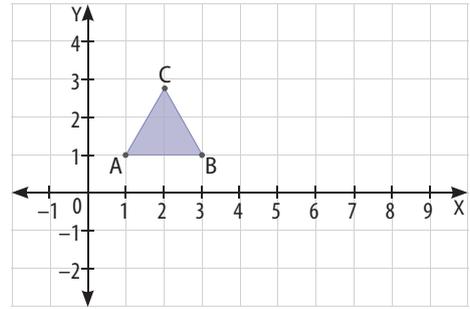
- Transformación isométrica
- Composición
- Teselación
- Software

¿Estas reflexiones son axiales o centrales?, ¿por qué?

¿Cuántas reflexiones tuviste que realizar para formar el hexágono?

## ¿Cómo realizar teselaciones?

Un estudiante quiere construir un hexágono a partir del triángulo equilátero que está dibujado en el plano cartesiano.



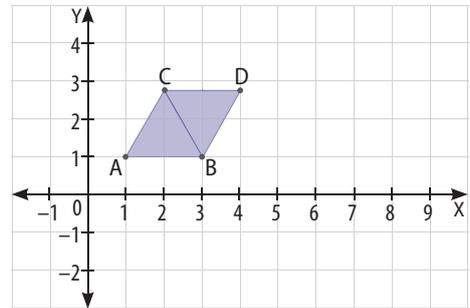
### Situación 1 Formando un hexágono

¿Cómo se puede formar el hexágono?

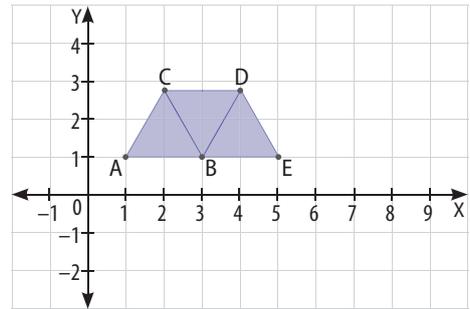
Resolveremos este problema aplicando una composición de transformaciones isométricas usando regla y lápiz.

**Paso 1** Refleja el triángulo ABC respecto a su lado BC.

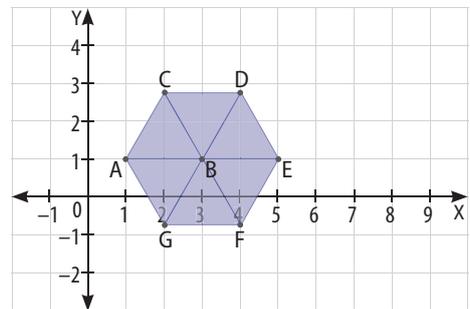
¿Cómo realizas esta reflexión usando regla y lápiz?



**Paso 2** Refleja el triángulo BDC respecto a su lado DB.



**Paso 3** Continúa aplicando reflexiones axiales respecto a los lados adecuados hasta obtener el hexágono de la figura.

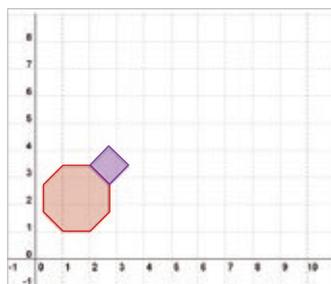


Completa la afirmación para responder la pregunta inicial:

**R:** Puedo formar un \_\_\_\_\_ a partir de un triángulo equilátero, aplicándole una composición de \_\_\_\_ reflexiones axiales respecto a uno de sus lados.

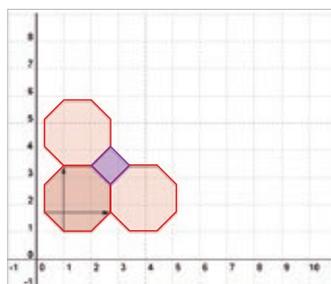
**Situación 2** Cubriendo el plano

¿Es posible cubrir todo el plano a partir de las figuras 2D que se muestran en la imagen?

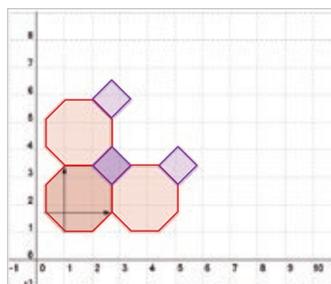


Para responder la pregunta trabajaremos en GeoGebra.

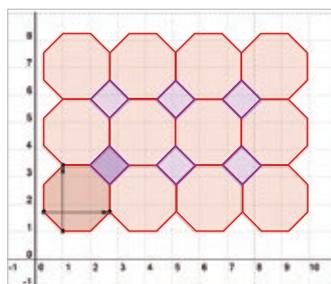
**Paso 1** Traslada el octógono según los vectores que se señalan.



**Paso 2** Traslada el cuadrado según los mismos vectores que trasladaste el octógono.



**Paso 3** Continúa trasladando las dos figuras según los vectores definidos y ocupa completamente la región del plano que desees.



Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Para concluir**

Una **teselación** consiste en una organización de figuras geométricas que permite cubrir una superficie. En esta construcción no deben quedar espacios sin llenar y tampoco se pueden superponer dos o más figuras. Además, la suma de las medidas de los ángulos alrededor de cada vértice de la teselación es  $360^\circ$ . Si la suma es superior, se traslapa y si es inferior, quedan espacios.

**Ampliando**

Un octógono u octógono es un polígono formado por ocho lados de igual medida.

¿Cuáles son las coordenadas de los vectores definidos para realizar las traslaciones?

¿Qué relación existe entre el perímetro del octógono y el del cuadrado?, ¿cómo lo sabes?

¿Puedes determinar las coordenadas de cada octógono que dibujas a partir de las coordenadas del original y del vector que define la traslación?, ¿cómo?

**Ampliando**

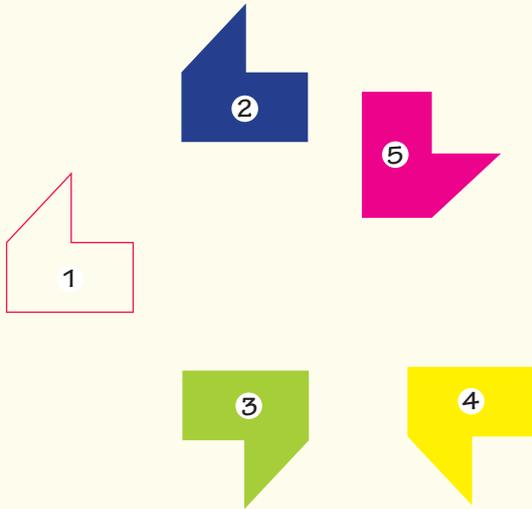
Existen tres figuras regulares que pueden cubrir el plano completamente, el triángulo equilátero, el cuadrado y el hexágono regular.

**Argumenta y comunica**

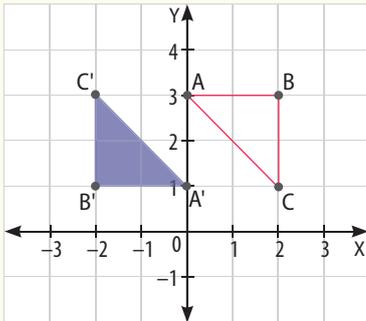
¿Cuántos ejes de simetría tiene un triángulo equilátero?, ¿y un cuadrado? ¿Ves alguna regularidad? Escríbela y aplícala para determinar cuántos ejes de simetría tiene un pentágono regular, un octógono regular y, en general, una figura regular de  $n$  lados.

Repaso

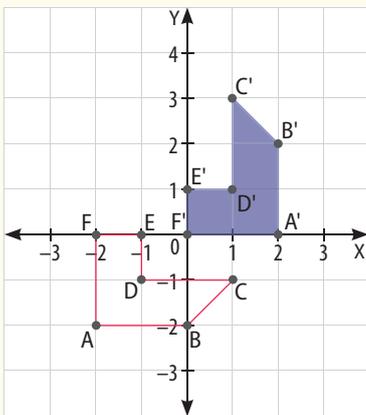
- Identifica la transformación o composición de transformaciones isométricas que permite transformar la figura 1 en cada una de las otras figuras.



- En cada caso, determina el ángulo y el centro de la rotación aplicada a la figura original.
  - Figura original: triángulo ABC.

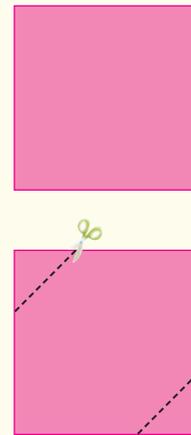


- Figura original: hexágono ABCDEF.

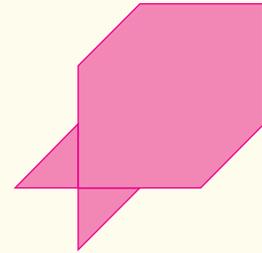


Práctica guiada

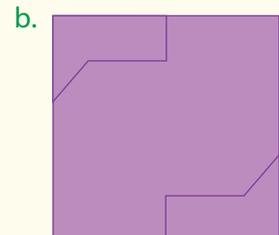
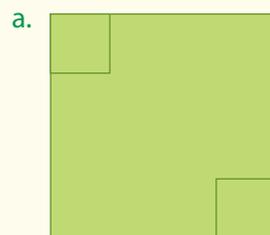
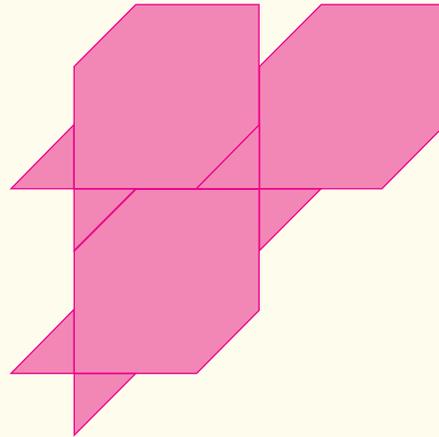
- Consigue unos 15 papeles lustre como el de la figura, recorta una o más secciones de él y construye una teselación.



Paso 1 Pega la sección cortada como se indica en la figura.



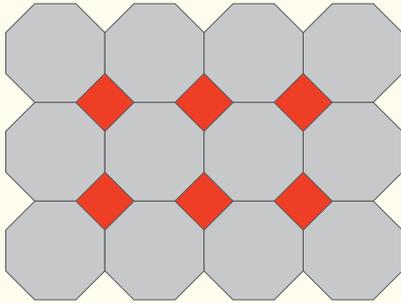
Paso 2 Repite el proceso con varios papeles lustre y une las figuras, formando el teselado.



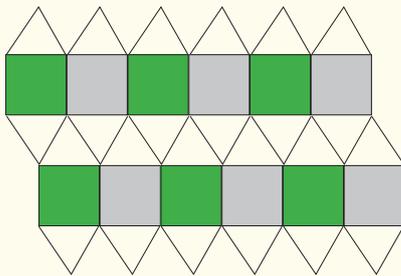
## Aplica

4. Identifica la figura original y la composición de transformaciones isométricas que se realizó para formar cada teselado.

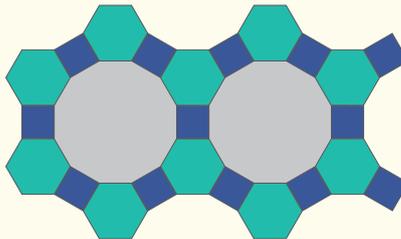
a.



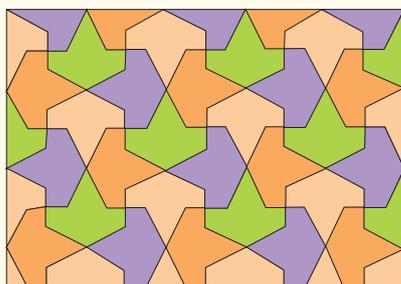
b.



c.



d.

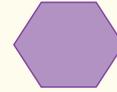


5. Tesela el plano usando la figura 2D indicada.

a. Triángulo equilátero.



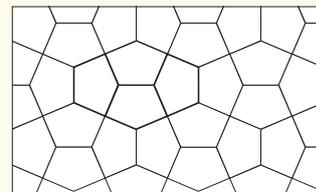
b. Hexágono regular.



6. **Conecta con el Arte.** M. C. Escher (1898 - 1972) fue un artista que, sin ser matemático, comprendía muy bien los conceptos geométricos, por ejemplo la división del plano en figuras iguales.

- Investiga sobre sus obras ingresando el código TM8P273 en <http://codigos.auladigital.cl> y selecciona aquellas que tengan traslaciones, reflexiones y rotaciones.
- Identifica algunas obras que presenten un solo patrón de teselación y otras en las que haya más de uno.
- Escoge una obra de Escher e investiga qué procedimiento utilizó para construir el patrón que forma dicha teselación. Explícaselo a un compañero o una compañera.

7. **Conecta con la Historia.** Existen diferentes tipos de teselados: regulares, semirregulares y no regulares. Un ejemplo de este último caso es el famoso teselado de El Cairo, en Egipto, que se encuentra con frecuencia en las calles y murales de esta ciudad, así como también en el arte islámico.



- ¿Cuál es la figura 2D base que se utiliza en este teselado? ¿Es una figura regular?
- ¿Qué transformaciones isométricas identificas en este teselado?

## Reflexiono

1. ¿Es posible construir un teselado a partir de un heptágono o un nonágono regulares? Piénsalo y compara tu respuesta con las de tus compañeros o compañeras.
2. ¿Es posible teselar por completo una superficie que se asemeje a una esfera?, ¿cómo? Considera una pelota de fútbol e indica las figuras 2D básicas de la teselación.

## Refuerzo

1. Explica qué es una teselación y cómo se construye.
2. Señala tres ejemplos de teselaciones que puedas observar en tu vida cotidiana.
3. Crea una teselación usando un polígono regular e indica la composición de transformaciones isométricas que debes aplicar para cubrir el plano.

# Isometrías en la naturaleza

## Los panales de las abejas

Las abejas construyen sus panales de cera para depositar en ellos la miel que fabrican. Por lo mismo, la forma de los panales debe ser la más económica, es decir, con el mayor volumen y la menor cantidad de cera posibles. Así, las abejas, de manera intuitiva, dan a las celdas de sus panales la forma de un prisma regular de base hexagonal, ya que esta les permite aprovechar al máximo el espacio disponible.

Estos insectos son muy importantes para mantener el equilibrio del ecosistema, pues son un nexo entre la vida animal y la vegetal, gracias al proceso de polinización. Muchos estudios han constatado que desde hace algún tiempo su población ha ido disminuyendo. A continuación, se señalan algunos de los factores de esta disminución:

Uso de pesticidas



Presencia de parásitos



Efecto de polen tóxico



**¡NO LO OLVIDES!**

Los únicos prismas regulares que pueden ser superpuestos sin dejar espacios son los siguientes:

- triangular
- cuadrangular
- hexagonal

**Sabías que...**

Una abeja debe visitar 4000 flores, aproximadamente, para producir una cucharada de miel.

**Actividad grupal**

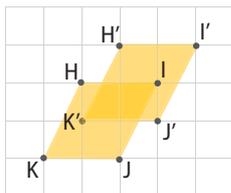
Reúnanse en grupos de 3 o 4 integrantes para realizar las actividades. Luego, comuniquen sus respuestas al curso.

1. ¿Por qué creen que las abejas fabrican sus panales con forma de prisma regular y no con forma cilíndrica? Comenten y comparen su respuesta con la de otros grupos.
2. El notable físico y matemático alemán Albert Einstein dijo: "Si las abejas desaparecieran de la superficie del planeta, al hombre solo le quedarían cuatro años de vida". Den sus opiniones sobre esta frase e investiguen acerca de la labor que cumplen las abejas y los beneficios que aportan al desarrollo de la vida en la Tierra.
3. Dibujen el teselado que permite cubrir el plano de un panal de abejas. Para ello, utilicen una hoja de tamaño oficio o carta. Luego, respondan:
  - ¿Qué transformación isométrica tuvieron que aplicar para construir el teselado?
  - ¿Son iguales los teselados de los distintos grupos de trabajo?, ¿por qué?

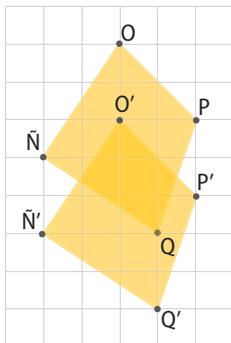
**Lección 36: ¿Qué es y cómo se realiza una traslación?**

**1** Determina las coordenadas del vector de traslación que se aplica en cada transformación.

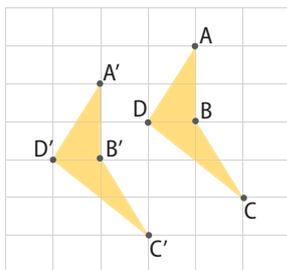
a. Vector  $\vec{p}$ .



b. Vector  $\vec{q}$ .



c. Vector  $\vec{r}$ .



**2** Resuelve los problemas.

- Obtén el punto que resulta de trasladar el punto  $O(3, -2)$  según el vector  $\vec{g} = (-3, -1)$ .
- Un robot está en el punto  $(-5, 3)$  del plano cartesiano. Si se traslada 3 unidades en el sentido negativo del eje  $X$  y 4 unidades en el sentido negativo del eje  $Y$ , ¿cuál será su nueva ubicación?
- Se dibujan en el plano cartesiano los puntos  $P(7, 1)$  y  $Q(-10, 8)$ . ¿Cuáles son las coordenadas de los vectores que permiten ir de  $P$  a  $Q$  y de  $Q$  a  $P$ ?

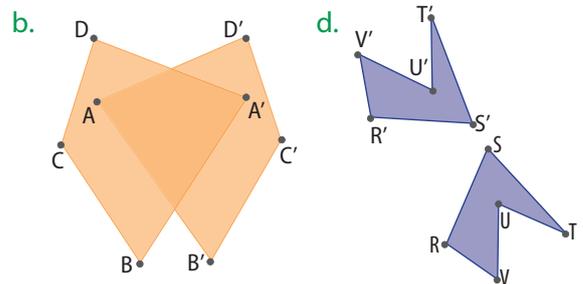
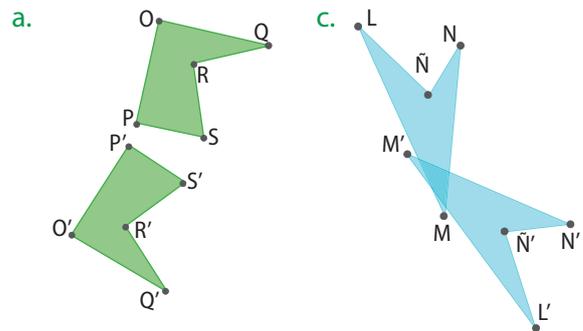
**Lección 37: ¿Qué es y cómo se realiza una reflexión?**

**3** Identifica, en cada caso, el punto original de los puntos reflejados.

- $C'(3, 5)$  es el resultante de una reflexión del punto  $C$  respecto al eje  $X$ .

- $D'(0, -6)$  es el resultante de una reflexión del punto  $D$  respecto al eje  $Y$ .
- $E'(-1, 2)$  es el resultante de una reflexión del punto  $E$  respecto al eje  $Y$ .

**4** Dibuja el eje de reflexión o de simetría en cada caso.

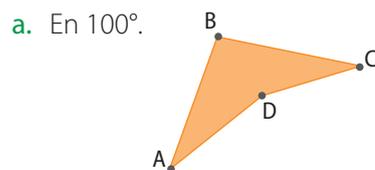


**Lección 38: ¿Qué es y cómo se realiza una rotación?**

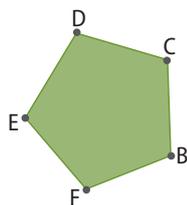
**5** Identifica, en cada caso, el ángulo y el centro de la rotación realizada.

- Segmento  $AB$ , con  $A(3, -3)$  y  $B(4, -2)$ ; y figura resultante  $A'B'$ , con  $A'(1, -3)$  y  $B'(0, -4)$ .
- Rombo de vértices  $F(2, -1)$ ,  $G(3, 1)$ ,  $H(2, 3)$  e  $I(1, 1)$ ; y figura resultante de vértices  $F'(2, 3)$ ,  $G'(0, 4)$ ,  $H'(-2, 3)$  e  $I'(0, 2)$ .
- Triángulo de vértices  $C(6, 1)$ ,  $D(6, -2)$  y  $E(7, -1)$ ; y figura resultante de vértices  $C'(5, 0)$ ,  $D'(3, 0)$  y  $E'(3, -1)$ .

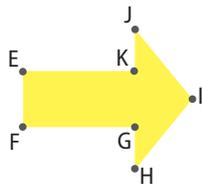
**6** Calca cada figura en tu cuaderno y aplica las rotaciones que se describen considerando como centro de rotación uno de sus vértices y el ángulo de rotación señalado.



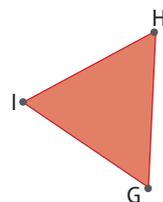
b. En  $108^\circ$ .



c. En  $-80^\circ$ .



d. En  $60^\circ$ .



**Lección 39.** ¿Cómo realizar transformaciones isométricas en un software?

7 Analiza las transformaciones aplicadas a las figuras originales y usa GeoGebra para determinar las coordenadas de los vértices de las figuras resultantes.

- Traslación de un triángulo de vértices  $A(1, 3)$ ,  $B(2, 1)$  y  $C(3, 4)$  según el vector  $\vec{r} = (1, 5)$ .
- Reflexión del hexágono de vértices  $O(-5, 3)$ ,  $P(-5, 1)$ ,  $Q(-3, 1)$ ,  $R(-3, 2)$ ,  $S(-2, 2)$  y  $T(-2, 3)$  respecto a la recta de ecuación  $y = x + 1$ .
- Rotación de un cuadrado de vértices  $D(5, 1)$ ,  $E(8, 1)$ ,  $F(8, 4)$  y  $G(5, 4)$  en un ángulo de  $30^\circ$  con centro en el punto  $(2, 1)$ .

**Lección 40:** ¿Cómo componer transformaciones isométricas?

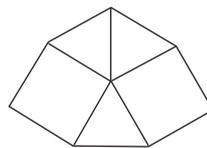
8 Analiza cada afirmación y escribe V si es verdadera y F si es falsa.

- Si a un punto  $P(x, y)$  se le aplica una reflexión respecto al eje X y luego una reflexión respecto al eje Y, se obtiene el punto  $P'(x, -y)$ .
- Al aplicar a una figura una reflexión respecto al eje X y luego una rotación de  $180^\circ$  respecto al origen, esta queda siempre en su posición inicial.
- Aplicar una rotación de  $180^\circ$  respecto al origen y luego una rotación de  $90^\circ$  respecto al punto  $(2, 2)$  es equivalente a aplicar una rotación de  $270^\circ$  respecto al punto  $(1, 1)$ .

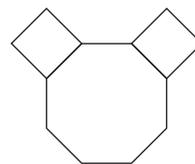
**Lección 41:** ¿Cómo realizar teselaciones?

9 Indica si cada figura tesela completamente el plano.

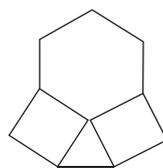
a.



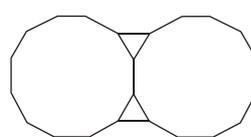
c.



b.

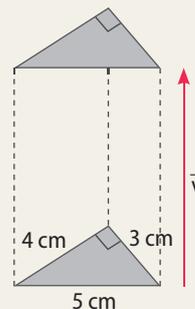


d.

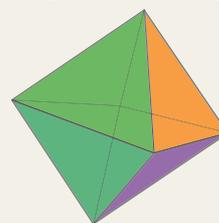


**Desafíos de integración**

- Una pieza triangular, como la que se muestra en la imagen, se ha trasladado perpendicularmente al plano de su superficie según el vector  $\vec{v}$  formando así una figura 3D. Si la longitud del vector es 8 cm, ¿cuál es el volumen de la figura 3D que se ha generado?



- Así como las figuras 2D pueden tener ejes de simetría, las figuras 3D pueden poseer planos de simetría. ¿Cuántos de estos planos se pueden trazar en la figura de la imagen?



**Coevaluación**

Selecciona uno de los desafíos e intercámbialo con un compañero o una compañera. Expliquen la estrategia que cada uno utilizó para resolverlo. Luego, identifiquen las fortalezas y debilidades del procedimiento empleado por su compañero o compañera.

## Aplicar procesos reversibles

Esta estrategia consiste en aplicar operaciones al estado final de un sistema para llegar a su estado inicial.

### Algunas estrategias

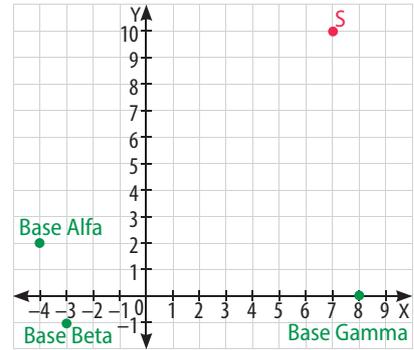
- Usar un proceso de ensayo y error.
- Aplicar procesos reversibles.
- Descartar información irrelevante.
- Usar un problema similar pero más sencillo.
- Construir un esquema, diagrama o tabla.
- Encontrar un patrón.
- Usar modelos matemáticos.
- Usar razonamiento lógico.
- Identificar submetas.

Una expedición a la Antártica tuvo un accidente en un punto representado en el plano cartesiano por  $S(7, 10)$ , y su llamada de auxilio fue recibida por las tres bases más cercanas a este punto: Alfa, Beta y Gamma.

Tras tres horas de espera, finalmente llegaron miembros de una de las bases y efectuaron el rescate. Los movimientos que realizaron los rescatistas desde su base hasta el punto del accidente se pueden representar por los siguientes vectores:

$$\vec{u} = (9, 3) \qquad \vec{v} = (-3, 6) \qquad \vec{w} = (4, 2)$$

¿De cuál de las bases provenían los rescatistas?



¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema? Escribe tú

¿Qué datos tengo para resolver? Escribe tú

Crea un plan para resolver

Para resolver este problema puedes usar la estrategia **Aplicar procesos reversibles** y así, a partir de las traslaciones definidas por los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ , llegar al punto de partida de los rescatistas.

Aplica la **estrategia** y resuelve

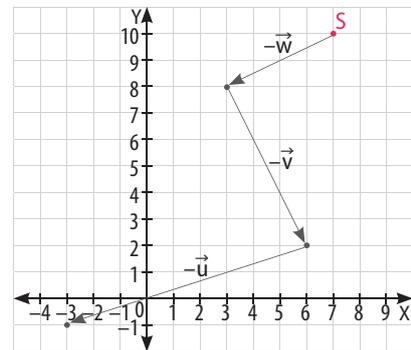
Dado que conocemos los vectores que definieron los movimientos de los rescatistas para llegar desde su base al lugar del accidente, podemos usar las traslaciones inversas definidas por los vectores inversos a  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ , como sigue:

$$-\vec{u} = -(9, 3) = (-9, -3)$$

$$-\vec{v} = -(-3, 6) = (3, -6)$$

$$-\vec{w} = -(4, 2) = (-4, -2)$$

Aplicándolos uno tras otro, desde el último hasta el primero a partir del punto S, llegamos a la base buscada, como se muestra en la figura.



Verifica la respuesta

Se puede comprobar la respuesta aplicando las traslaciones inversas, sumando a las coordenadas del punto S y las de los vectores inversos de  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ .

También puedes rehacer el camino seguido por los rescatistas desde su base según los vectores  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  y  $\vec{w}$ , y comprobar que efectivamente permite llegar a S.

Comunica la respuesta Escribe tú

¿De qué otra forma resolverías este problema? Explica.

### Vuelvo a mis procesos

Responde de acuerdo a tu apreciación.

¿Cuál de las imágenes tiene más de un eje de simetría?, ¿cuántos puedes identificar en él?

¿Conoces algún animal que no sea simétrico?, ¿cuál?

Al finalizar la sección, ¿logras identificar en tu entorno los principales elementos de las transformaciones isométricas estudiadas?, ¿cuáles son?



¿Pudiste utilizar con soltura instrumentos geométricos como la regla, la escuadra, el transportador y el compás?, ¿por qué?

¿Quedó pendiente alguna meta de las que te propusiste al principio de la sección?, ¿cuál?

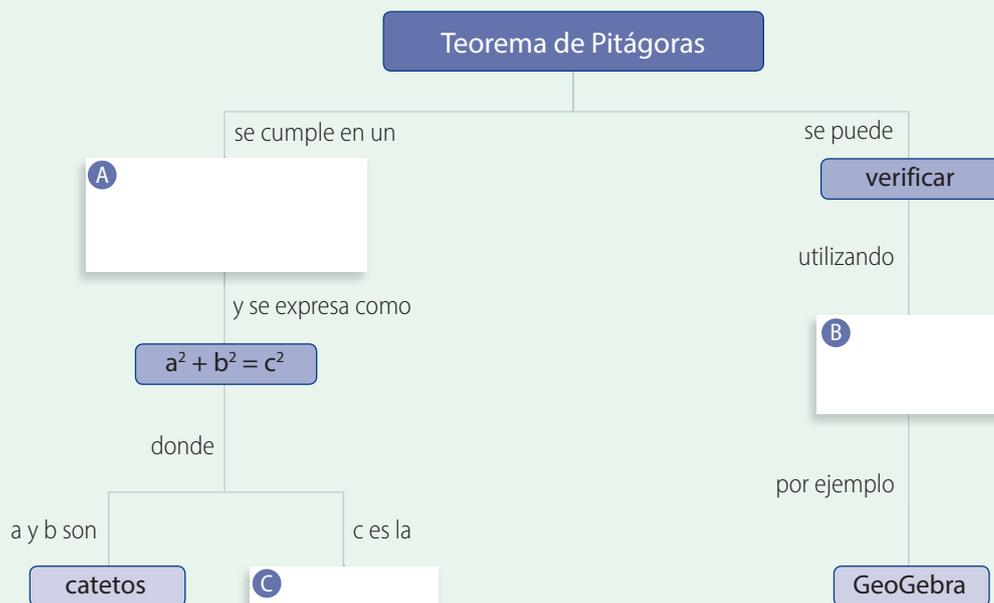
¿Te gustó el trabajo realizado en el software geométrico?, ¿por qué?

## ¿Cómo se llama?

### Mapa conceptual

Organiza los conceptos en el mapa propuesto para la sección 8 de esta unidad.

triángulo rectángulo – software – hipotenusa



Junto con un compañero o una compañera construyan mapas conceptuales para las secciones 7 y 9 de esta unidad.

## ¿Cómo se hace?

- **Pregunta sección 7**

¿Cómo calculas el área de la superficie de un cilindro?

- **Pregunta sección 8**

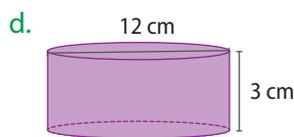
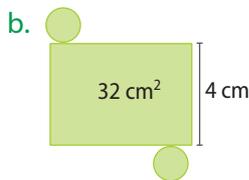
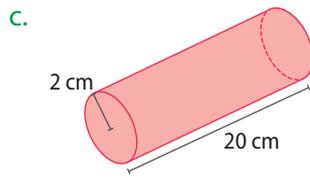
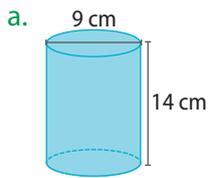
¿Cómo verificas que un triángulo es rectángulo?

- **Pregunta sección 9**

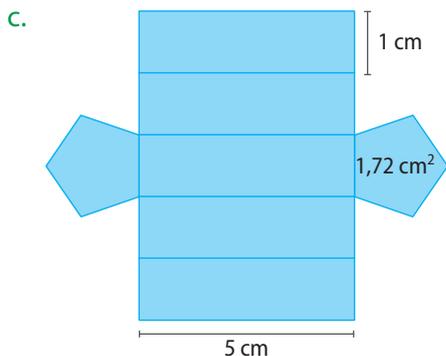
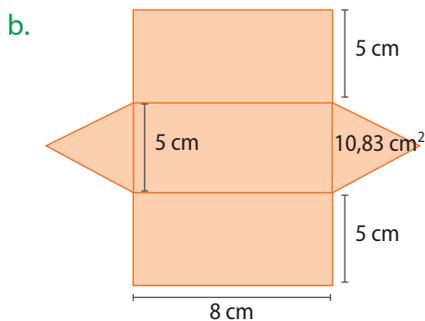
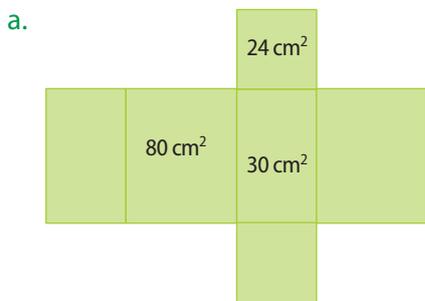
¿Cómo aplicas manualmente una rotación a una figura 2D?

Área y volumen de prismas y cilindros

1. Calcula el volumen de cada cilindro armado o posible de armar.



2. Calcula el área aproximada de la superficie de cada red de un prisma de base regular.

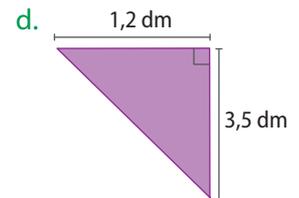
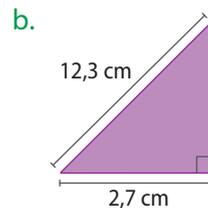
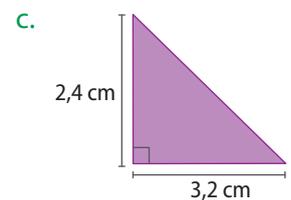
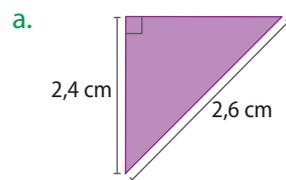


3. Resuelve los problemas.

- Miguel desea construir una cajonera para poner bajo su cama que mide 150 cm de ancho, 60 cm de alto y 200 cm de largo. Si la cajonera ocupará toda la base de la cama y tendrá una altura de 50 cm, ¿cuál será su volumen?
- Carolina quiere confeccionar el cilindro de mayor volumen posible a partir de un rectángulo de cartón de 30 cm de largo y 12 cm de ancho. ¿Cuál será el área de los círculos que debe recortar para que sirvan de tapa y base?

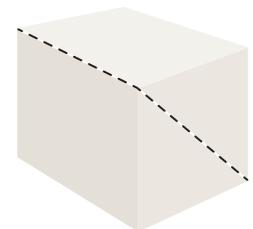
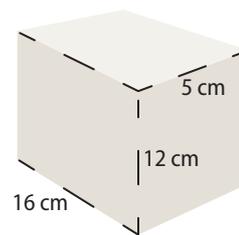
Teorema de Pitágoras

4. Calcula la medida desconocida de cada triángulo rectángulo.



5. Resuelve los problemas.

- María tiene un paralelepípedo como el de la imagen.

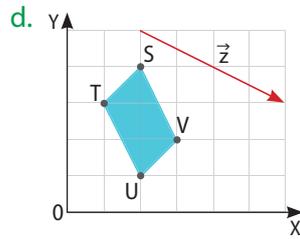
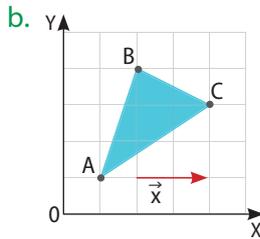
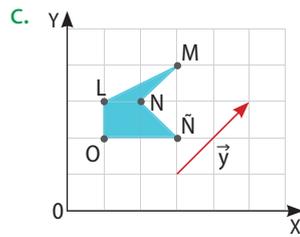
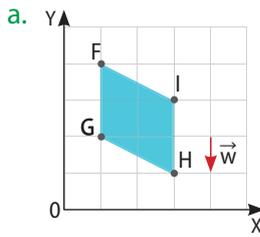


Si necesita cortarlo por la mitad como se indica en la figura, ¿cuál será el área de la figura 3D resultante?

- Considera dos triángulos cuyos lados miden 5,8 cm, 3,8 cm y 6 cm. ¿Es posible armar un rectángulo con ellos? Justifica tu respuesta.
- Desde la entrada de un parque, Luis se desplaza 400 m al norte y luego 300 m hacia el este. ¿A qué distancia de la entrada del parque se encuentra ahora?

Transformaciones isométricas

6. Traslada las figuras según el vector indicado y escribe las coordenadas de los vértices de cada figura resultante.



7. Traslada el cuadrado de vértices  $A(-1, -1)$ ,  $B(1, -1)$ ,  $C(1, 1)$  y  $D(-1, 1)$  según las coordenadas de cada vector. Luego, escribe las coordenadas de los vértices de cada imagen.

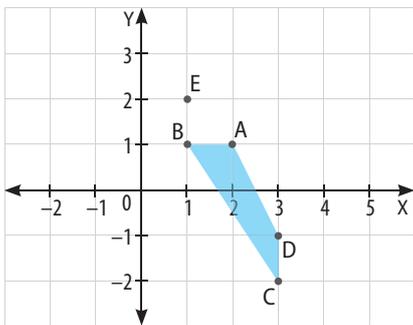
- a.  $\vec{p} = (0, 3)$
- b.  $\vec{q} = (3, 3)$
- c.  $\vec{r} = (4, 0)$
- d.  $\vec{s} = (-1, -5)$
- e.  $\vec{t} = (-4, -2)$
- f.  $\vec{u} = (2, -3)$

8. Dibuja cada punto en un plano cartesiano y aplícale la reflexión señalada.

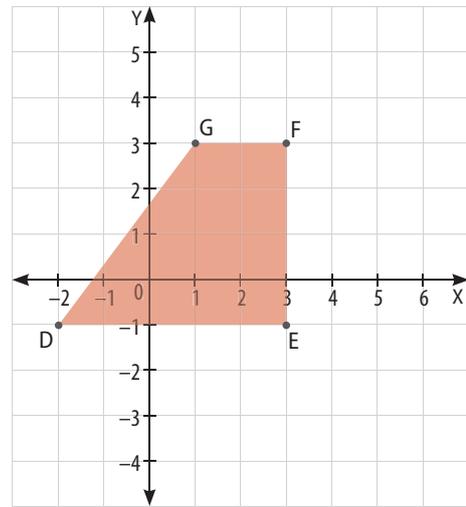
- a.  $R(3, 5)$ , una reflexión respecto al eje X.
- b.  $G(0, 4)$ , una reflexión respecto al eje Y.
- c.  $K(-4, -6)$ , una reflexión respecto al eje X.
- d.  $H(5, 0)$ , una reflexión respecto al eje Y.

9. Rota cada figura, utilizando regla y transportador.

- a. Según un ángulo de  $90^\circ$ , en sentido antihorario con centro de rotación en E.



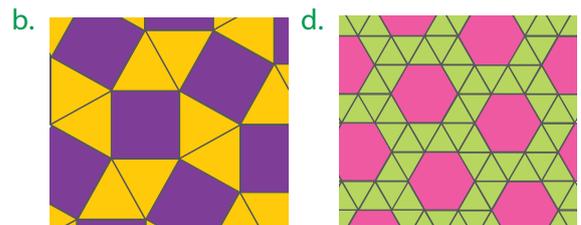
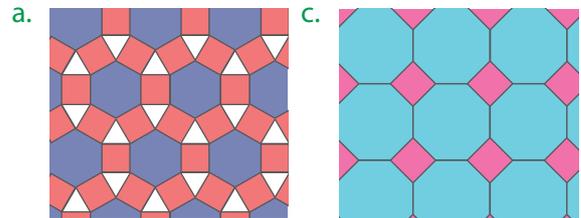
- b. Según un ángulo de  $30^\circ$ , en sentido antihorario con centro de rotación en G.



10. Verifica con GeoGebra si las afirmaciones son correctas.

- a. Al reflejar el punto  $F(3, 4)$  respecto al eje Y, se obtiene el mismo punto resultante que al trasladar el punto F primero según el vector  $\vec{a} = (3, -4)$  y luego, según el vector  $\vec{b} = (-3, -4)$ .
- b. Al rotar el punto  $B(-1, 2)$  en  $270^\circ$  en sentido antihorario respecto al origen, se obtiene el mismo punto resultante que al reflejar el punto B respecto al eje X y luego, respecto al eje Y.
- c. Al rotar en  $180^\circ$  el punto  $A(4, 0)$  en sentido antihorario con respecto al origen y trasladar el punto resultante según el vector  $\vec{c} = (1, 1)$ , se obtiene el mismo punto resultante que si se traslada el punto A según el vector  $\vec{c}$  y luego se rota en  $180^\circ$  respecto al origen.

11. Identifica las figuras 2D utilizadas para construir cada teselación.



## ¿Qué aprendí?

## Parte I

1. Escribe V si la afirmación es verdadera y F si es falsa. (7 puntos)

- \_\_\_\_ Si una figura 2D cuya área es  $8 \text{ cm}^2$  se rota respecto a uno de sus vértices en un ángulo de  $10^\circ$ , entonces su nueva área es de  $80 \text{ cm}^2$ .
- \_\_\_\_ Si  $a$ ,  $b$  y  $c$  conforman un trío pitagórico, entonces el trío  $2a$ ,  $2b$  y  $2c$  también es pitagórico.
- \_\_\_\_ Si se duplica el radio de la base de un cilindro, entonces su volumen también se duplica.
- \_\_\_\_ Un punto se encuentra en la posición  $(-1, 2)$  del plano cartesiano y se le aplica una traslación que lo ubica en el origen del plano. Entonces, el vector que define la traslación tiene las coordenadas  $(1, -2)$ .
- \_\_\_\_ Si se duplica la longitud de las aristas de un prisma recto de base rectangular, entonces su volumen se cuadruplica.
- \_\_\_\_ Si los lados de un triángulo miden  $20 \text{ cm}$ ,  $29 \text{ cm}$  y  $21 \text{ cm}$ , entonces es un triángulo rectángulo.
- \_\_\_\_ Una simetría central aplicada respecto a un punto  $O$  equivale a una rotación en  $90^\circ$  respecto al mismo punto.

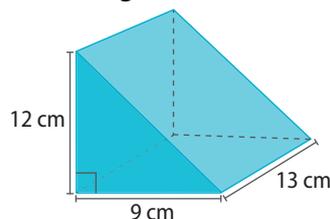
2. Si un triángulo rectángulo es isósceles y cada uno de sus catetos mide  $a \text{ cm}$ , ¿cuál es la medida de su hipotenusa? (4 puntos)

3. A un triángulo rectángulo cuyos lados miden  $1,1 \text{ cm}$ ,  $6 \text{ cm}$  y  $6,1 \text{ cm}$  se le aplica una traslación definida por el vector de coordenadas  $(-2, 3)$  en el plano cartesiano. A continuación, la figura resultante de esta transformación se refleja respecto al eje  $Y$ . ¿Cuál es el área de la figura resultante de esta reflexión? (3 puntos)

En los ejercicios del 4 al 9, selecciona la alternativa correcta. (6 puntos)

4. El área del prisma de la imagen es:

- $576 \text{ cm}^2$
- $684 \text{ cm}^2$
- $702 \text{ cm}^2$
- $1404 \text{ cm}^2$

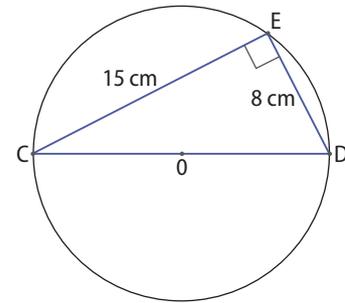


5. Se apoyó una escalera de  $13 \text{ m}$  de largo sobre una pared y su base quedó a una distancia de  $5 \text{ m}$  de la base de la pared. ¿A qué altura quedó la escalera?

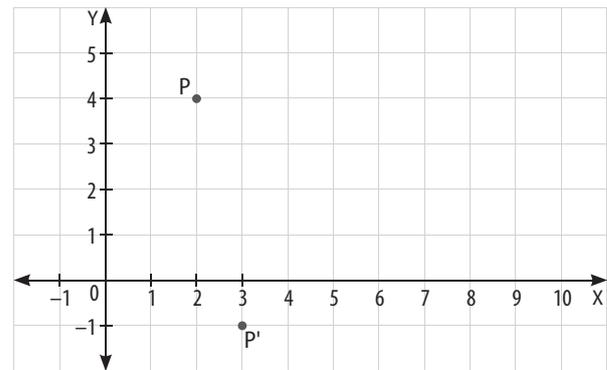
- $8 \text{ m}$
- $12 \text{ m}$
- $14 \text{ m}$
- $18 \text{ m}$

6. ¿Cuál es la longitud del radio de la circunferencia de centro  $O$ ?

- $7 \text{ cm}$
- $7,5 \text{ cm}$
- $8,5 \text{ cm}$
- $17 \text{ cm}$



7. ¿Respecto a qué punto se rotó el punto  $P$  en  $90^\circ$  si el punto resultante es  $P'$ ?



- $(0, 1)$
- $(5, 2)$
- $(2, 5)$
- $(2,5; 1,5)$

8. A un segmento  $AB$ , con  $A(0, 0)$  y  $B(-2, 4)$ , se le aplicaron tres traslaciones sucesivas, según los vectores  $\vec{u} = (-3, 4)$ ,  $\vec{v} = (2, -1)$  y  $\vec{w} = (-1, 0)$ . ¿En qué posición quedó el punto correspondiente del vértice  $B$  tras esta composición?

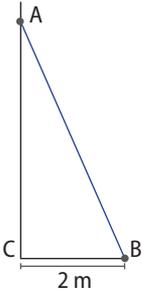
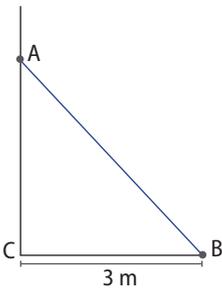
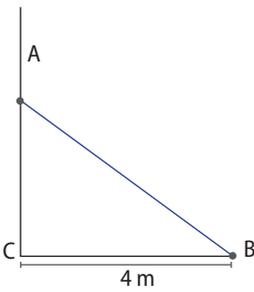
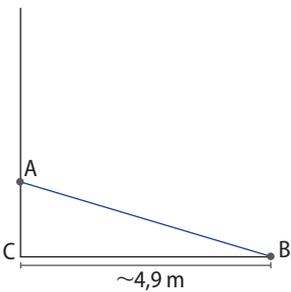
- $(-4, 7)$
- $(-2, 3)$
- $(-2, 4)$
- $(0, 1)$

9. Una botella tiene forma de cilindro y su radio basal mide  $5 \text{ cm}$  y su altura es de  $15 \text{ cm}$ . Si se encuentra apoyada sobre su base en una mesa plana y contiene  $1$  litro de agua, ¿cuál es la distancia vertical entre la base de la botella y el nivel del agua que contiene, aproximadamente?

- $10,00 \text{ cm}$
- $11,25 \text{ cm}$
- $12,70 \text{ cm}$
- $14,50 \text{ cm}$

Parte II

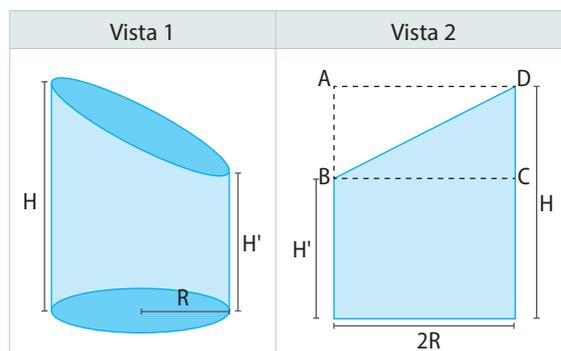
10. Una viga de 5 m de longitud se apoya sobre una pared formando distintos ángulos, como se aprecia en las figuras que siguen.

	<p>Área: <math>\sqrt{21} \text{ m}^2</math></p>
	<p>Área: <math>6 \text{ m}^2</math></p>
	<p>Área: <math>6 \text{ m}^2</math></p>
	<p>Área: <math>\sqrt{6} \text{ m}^2</math></p>

- ¿Aumenta o disminuye el área del triángulo ABC en la medida que la diferencia entre la longitud de sus catetos es menor? Explica cómo puedes responder esta pregunta usando los datos disponibles e indica qué datos necesitas calcular.

- A partir de tu respuesta anterior determina cuál es la razón entre las longitudes de los catetos del triángulo ABC de mayor área posible de construir. ¿Es aplicable esto a cualquier triángulo rectángulo?
- Finalmente, estima el área máxima que puede tener el triángulo ABC.

11. Se desea aumentar al doble el volumen de un cilindro de radio basal  $R$  y altura  $H$ , manteniendo constante su altura. ¿Cuál es la razón entre los radios final e inicial que permite este aumento?
12. Observa el siguiente cilindro de radio basal  $R$  que se encuentra cortado por un plano oblicuo:

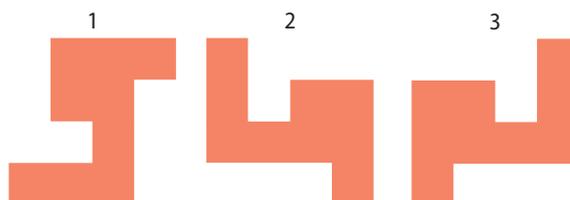


- ¿Cuál sería la fórmula que permitiría calcular el volumen del cilindro si no estuviera truncado y su altura fuera  $H$ ?
- ¿Cómo son entre sí los triángulos ABD y CDB dibujados en la vista 2 del cilindro truncado?
- Considerando lo anterior, ¿qué expresión permite modelar el volumen del cilindro truncado?

13. Observa la figura y responde.



¿Cuál de las siguientes representaciones no puede ser la figura resultante tras aplicarle una rotación?



Para repasar contenidos

Cuenta el puntaje que obtuviste en la parte I de la evaluación (para conocer el de las actividades 2 y 3 pide ayuda a tu profesor o profesora). Luego, revisa la tabla y calcula tu puntaje por contenido. Según tu nivel de logro, repasa el contenido y haz los ejercicios señalados.

Contenido	Logrado	Por lograr	Repasa en
Área y volumen de prismas y cilindros (Actividades 1.c, 1.e, 4 y 9)	3 o 4 puntos	2 o menos puntos	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lecciones 29, 30, 31, 32 y 33.</li> <li>Cuaderno de Ejercicios, páginas 80 a 87.</li> </ul>
Teorema de Pitágoras (Actividades 1.b, 1.f, 2, 5 y 6)	5 o más puntos	4 o menos puntos	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lecciones 34 y 35.</li> <li>Cuaderno de Ejercicios, páginas 92 a 95.</li> </ul>
Transformaciones isométricas (Actividades 1.a, 1.d, 1.g, 3, 7 y 8)	5 o más puntos	4 o menos puntos	<ul style="list-style-type: none"> <li>Lecciones 36, 37, 38, 39, 40 y 41.</li> <li>Cuaderno de Ejercicios, páginas 100 a 113.</li> </ul>

Para practicar habilidades

Para practicar las habilidades matemáticas evaluadas en la parte II, pide apoyo a tu profesor o profesora y dirígete a las páginas 118 y 119 del Cuaderno de Ejercicios.

Habilidad	Logrado	Por lograr
Argumentar y comunicar (Actividad 10)	5 o más puntos	4 o menos puntos
Resolver problemas (Actividad 11)	7 puntos	0 puntos
Modelar (Actividad 12)	5 o más puntos	4 o menos puntos
Representar (Actividad 13)	6 puntos	0 puntos

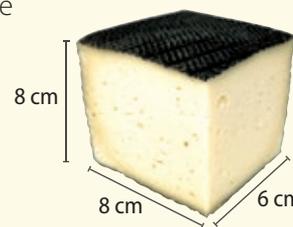
Desafío en equipo

Para finalizar la unidad, los invitamos a formar equipos de 3 estudiantes para resolver este desafío.

Producción de quesos

En las últimas etapas de la producción de quesos, específicamente en la fermentación láctica llevada a cabo por bacterias, se liberan burbujas del gas dióxido de carbono que, al escapar, dejan los surcos cilíndricos que les son tan característicos. Supongan que una fábrica de quesos elaboró un trozo cuya forma es aproximadamente

la de un paralelepípedo, con las dimensiones que se indican en la figura.



- Si en el trozo de queso hay 62 agujeros cilíndricos y, en promedio, su diámetro es de 0,8 cm, ¿cuál es el volumen de queso que ocuparía uno de estos agujeros?
- Considerando el volumen total del trozo de queso, ¿qué porcentaje de él está ocupado efectivamente por queso, aproximadamente?
- Para poner a la venta sus trozos de queso, los dueños de la quesería los adornan con cintas que ponen a lo largo de las diagonales de cada una de sus caras. ¿Cuál es la longitud de la cinta que se ocupará en este trozo de queso?

Tomando en consideración los contenidos, las habilidades y las actitudes desarrollados en esta unidad, ¿qué nivel de dificultad representó este desafío para ustedes?, ¿por qué? ¿En qué fallaron? Respondan individualmente escribiendo en el recuadro.

# Estadística y probabilidad

- ▶ **Sección 10**  
Interpretación y comparación de gráficos
- ▶ **Sección 11**  
Medidas de posición
- ▶ **Sección 12**  
Probabilidades

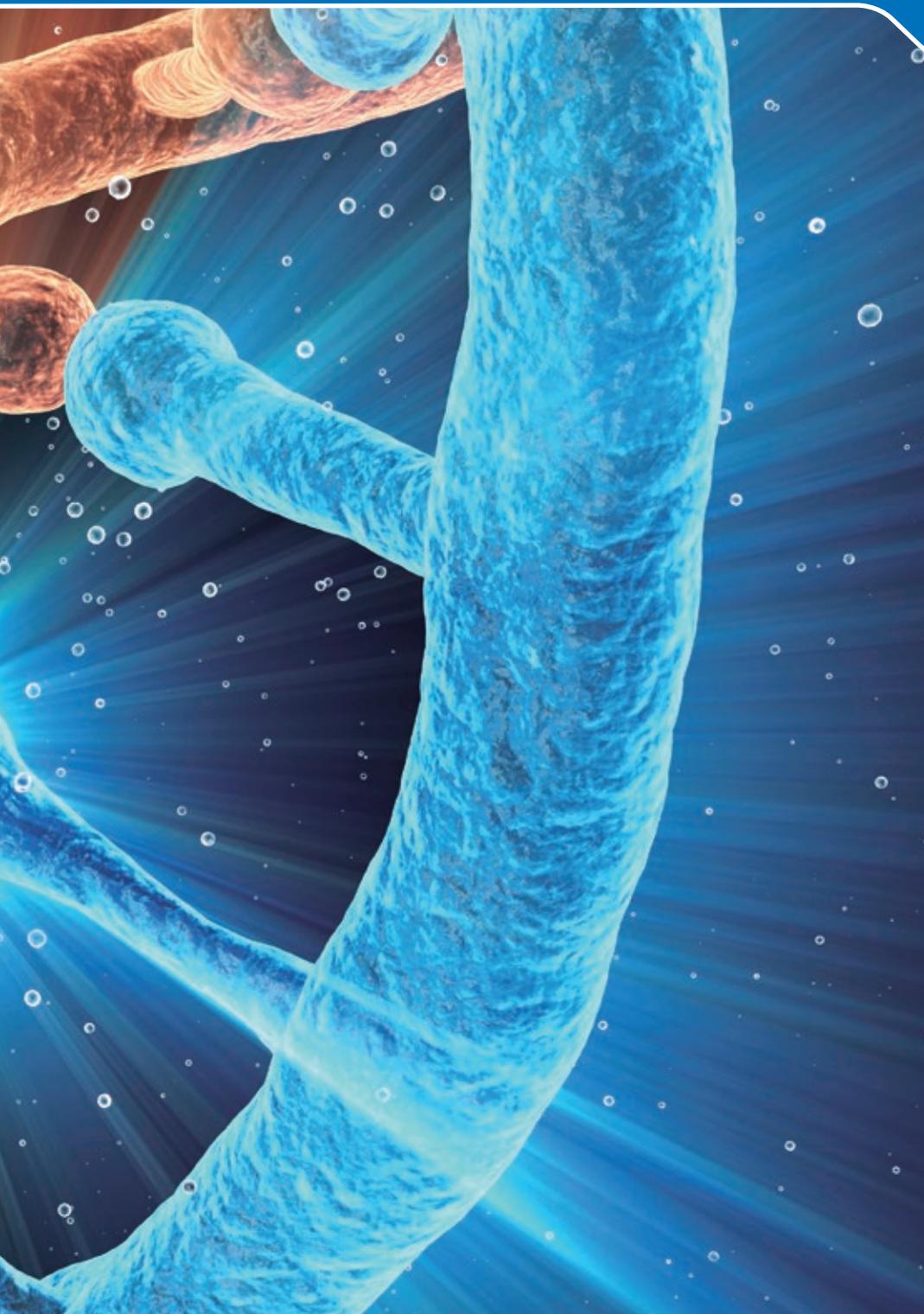
## Daltonismo

La estructura genética del ser humano posee 23 pares de cromosomas, uno de los cuales determina el sexo del individuo. Este par de cromosomas se representa con las letras XX en el caso de las mujeres y con las letras XY en el caso de los hombres. Ligada a este par, específicamente al cromosoma X, está una condición de la visión llamada daltonismo, que consiste en no percibir algunos colores.

Representando con una N la ausencia de la condición y con una D su presencia, podemos observar las posibles configuraciones que se generan al combinar los genes de una madre portadora  $X_N X_D$  y los genes de un padre sin la condición  $X_N Y$ :

	$X_N$	$X_D$
$X_N$	$X_N X_N$	$X_N X_D$
Y	$X_N Y$	$X_D Y$

¿Qué dificultades en la vida cotidiana crees que tiene una persona que sufre de daltonismo? ¿Qué medidas propondrías para solucionarlas?



### ¿Qué aprenderé?

- Interpretar la información representada en distintos tipos de gráficos y determinar qué gráfico la representa de manera más fidedigna.
- Usar medidas de posición como percentiles y cuartiles para describir, caracterizar y representar gráficamente información.
- Aplicar el principio multiplicativo para calcular probabilidades.

### ¿Para qué?

- Comprender información presentada en gráficos en medios de comunicación escritos.
- Evaluar y comparar información estadística a partir del valor de algunos de sus indicadores de posición.
- Resolver problemas cotidianos que involucran azar.

### Actitudes

- Mostrar una actitud crítica al evaluar información matemática y valorar el aporte de los datos cuantitativos.
- Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación.
- Trabajar en equipo.

¿Cuál de los temas que aprenderás en esta unidad te parece más interesante?, ¿por qué?

Considera estas configuraciones:

Mujer	Hombre
$X_N X_N$ : sana	$X_N Y$ : sano
$X_N X_D$ : portadora	$X_D Y$ : daltónico
$X_D X_D$ : daltónica	

¿Cuál es la probabilidad de que al combinar los genes de una madre  $X_N X_D$  y de un padre  $X_N Y$  el nuevo individuo sea daltónico?

¿Cuáles son todas las posibles configuraciones que se generan al combinar los genes de una madre portadora  $X_N X_D$  y de un padre daltónico  $X_D Y$ ? ¿Cuál es la probabilidad de que el nuevo individuo no sea daltónico?

Sección **10**

# Interpretación y comparación de gráficos

**Activo ideas previas**

1. Lee la información y coméntala con un compañero o una compañera.

La estructura de la Tierra puede dividirse en 5 capas bien definidas: corteza, manto superior, manto inferior, núcleo externo y núcleo interno, siendo tres de ellos sólidos, uno líquido y uno plástico.

La corteza terrestre es la capa de roca externa de nuestro planeta. Su espesor es variable y alcanza valores extremos aproximados de 7 km y 75 km. En la siguiente tabla se indica su composición.

Elemento químico	Porcentaje de abundancia en la corteza terrestre (%)
Oxígeno (O)	46
Silicio (Si)	28
Aluminio (Al)	8
Hierro (Fe)	6
Otros	12

Responde las preguntas junto con tu compañero o compañera.

- a. Investiguen qué porcentaje de abundancia es mayor, el de la atmósfera o el de la corteza terrestre.

- b. Si esta distribución de la abundancia de los elementos químicos en la corteza terrestre fuera homogénea, ¿cuántos gramos de oxígeno habría en una muestra de 750 g de corteza?

- c. ¿Cómo representarían esta información en un gráfico? Expliquen y comparen su representación con las de sus compañeros o compañeras.

**Activo conceptos clave**

2. A continuación, se presentan algunos conceptos clave de esta sección. Escribe el que corresponda a cada definición.

histograma

variable cuantitativa

frecuencia

gráfico de barras

gráfico circular

variable cualitativa

gráfico de líneas

gráfico

- a. Variable que se mide o se cuenta y se expresa como un número. \_\_\_\_\_

- b. Gráfico que permite representar datos representados en intervalos. \_\_\_\_\_

- c. Número de veces que se repite un dato. \_\_\_\_\_

- d. Variable que da cuenta de una característica o cualidad. \_\_\_\_\_

- e. Gráfico que representa información mediante sectores circulares. \_\_\_\_\_

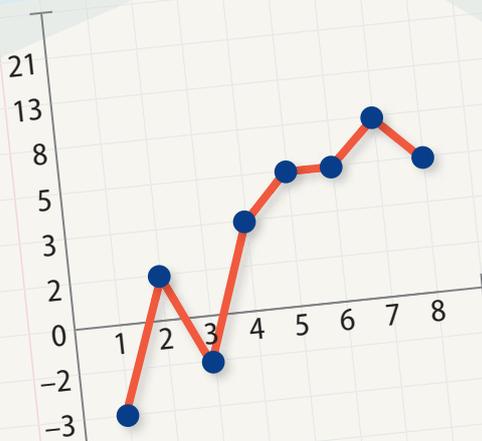
Pienso mis procesos

Responde de acuerdo a lo que conoces.

¿Cuál de los gráficos es de barras y cuál de líneas?, ¿cómo lo sabes?

¿Cuál de los gráficos no está bien definido?, ¿por qué?

Uno de los gráficos representa la variación de temperatura durante un día en una ciudad y el otro, la altura de un árbol a lo largo de un año. ¿Cuál es cuál?, ¿cómo lo sabes?



¿Qué procedimiento sigues para leer la información de un gráfico?, ¿crees que es un procedimiento práctico?, ¿por qué?

¿En qué situaciones cotidianas piensas que te serán útiles los contenidos que estudiarás en esta sección?

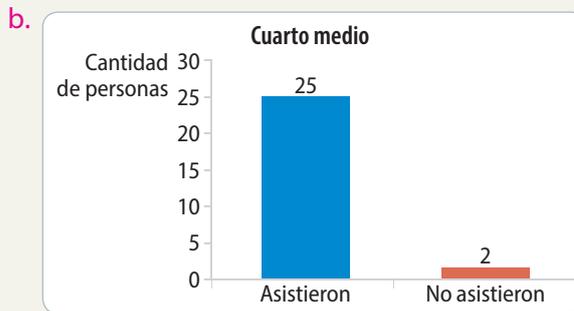
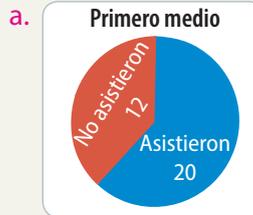
¿Qué expectativas tienes respecto a esta sección? ¿Qué metas esperas alcanzar?

Activa tus conocimientos previos respondiendo las preguntas laterales y luego resuelve las actividades. Para terminar, registra tus logros.

¿Cómo calculas el porcentaje que representa una categoría de la variable estudiada a partir del gráfico de frecuencias respectivo?

**Calcular porcentajes en un gráfico**

1 A partir de la información de cada gráfico, calcula el porcentaje de alumnos por curso que asistieron a una charla vocacional. (2 puntos)



Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
2 correctas	menos de 2 correctas

¿Qué errores cometiste?

¿Qué es la frecuencia absoluta?  
¿Con qué elemento de un gráfico de barras se puede asociar?

**Representar datos en una tabla de frecuencias**

2 Se preguntó a un grupo de familias por el número de celulares que poseen sus integrantes y sus respuestas fueron: 2, 4, 1, 1, 3, 2, 1, 3, 4, 1, 2, 5, 3, 1 y 3. Considera que cada familia fue encuestada solo una vez.

Completa la tabla de frecuencias a partir de la información anterior. (20 puntos)

Cantidad de celulares	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
12 correctas o más	menos de 12 correctas

¿Te equivocaste en alguna pregunta?

¿Qué propones para no cometer los mismos errores?

En un gráfico de barras, ¿qué representa la altura de cada una de las barras?

¿Cómo representas la información en un gráfico circular?

¿Qué condición o condiciones permiten verificar si la representación del gráfico circular es correcta?

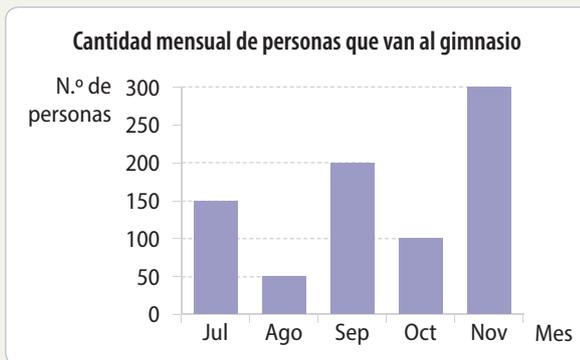
Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
4 correctas o más	menos de 4 correctas

¿Tuviste alguna dificultad para responder?, ¿por qué?

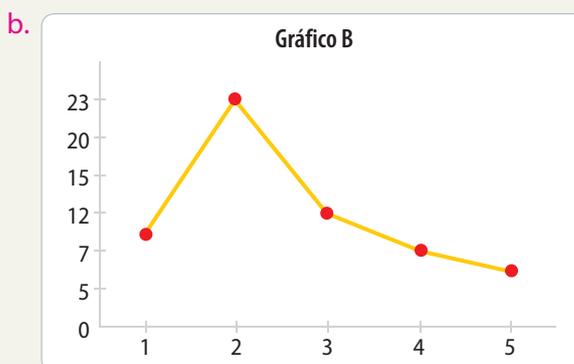
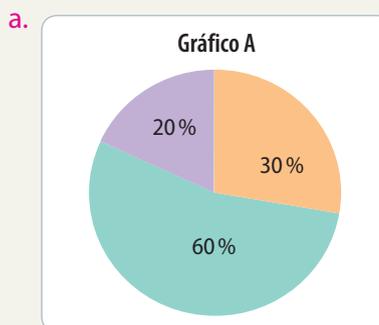
**Interpretar la información de un gráfico**

- 3 Observa el gráfico que muestra la cantidad de personas de una villa que asisten mensualmente a un gimnasio. Luego, escribe V si la afirmación es verdadera y F si es falsa. (4 puntos)



- Agosto y octubre fueron los meses en que asistieron menos personas al gimnasio.
- En octubre, la cantidad de personas disminuyó en comparación con septiembre.
- Noviembre fue el mes con la mayor asistencia de personas.
- Entre los meses de julio y noviembre asistieron 500 personas al gimnasio.

- 4 Identifica los errores que se cometieron al construir cada gráfico. (2 puntos)



► Propósito

Interpretar la información contenida en distintos tipos de gráficos.

¿Para qué?

Para comprender información de diversos tipos de fuentes, como internet, publicaciones especializadas, prensa, etc., es de gran utilidad saber leer los datos contenidos en un gráfico e interpretarlos correctamente. Así, tras recopilar y procesar esa información, se puede presentar en forma sintética y ordenada, en tablas, esquemas o gráficos.

Palabras clave

Gráfico  
Información

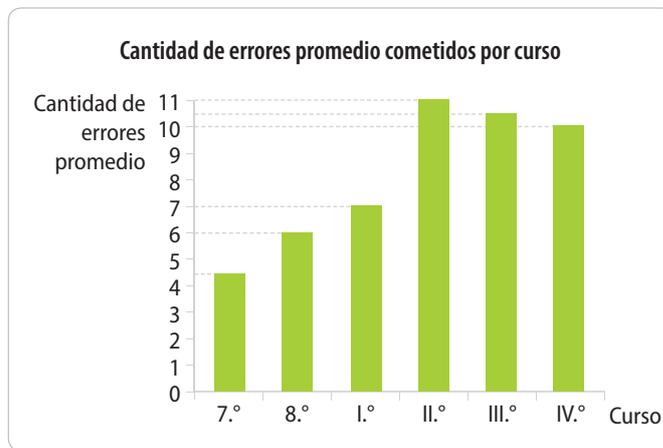
## ¿Cómo interpretar la información de un gráfico?

Un grupo de estudiantes realizó una investigación para averiguar cómo escriben sus compañeros y compañeras de colegio cuando utilizan algún medio de comunicación escrita instantánea a través de internet.

Su trabajo consistió en dictar un texto de 20 palabras a un grupo de 10 alumnos y alumnas escogidos al azar de cada uno de los cursos del colegio, pedirles que lo escribieran y tomar nota de algunos datos relevantes.

**Situación 1** Interpretando un gráfico de barras

El gráfico de barras representa la cantidad promedio de errores cometidos por los grupos analizados. ¿De qué cursos son los grupos que cometieron más y menos errores al escribir el texto?



Para responder, primero identificaremos los elementos básicos de un gráfico de barras y luego interpretaremos la información relevante que contiene.

**Paso 1** Identifica los elementos que constituyen el gráfico y la información que contiene. Para ello, lee el título del gráfico y los de cada eje.

- El eje horizontal, cuyo título es Curso, muestra los cursos en que se seleccionaron los grupos de 10 alumnos y alumnas, es decir: 7.º, 8.º, I.º, II.º, III.º y IV.º.
- El eje vertical, cuyo título es Cantidad de errores promedio, muestra el número de errores que en promedio cometieron los representantes de cada uno de los cursos.

**Paso 2** Interpreta la información representada por las barras del gráfico. Para esto puedes comparar la altura de las barras y así distinguir cuál de los grupos cometió más errores y cuál cometió menos.

Completa para responder la pregunta inicial:

**R:** La barra de mayor longitud es la que representa al \_\_\_\_\_, por lo tanto, el grupo extraído de él fue el que cometió más errores.  
La barra de \_\_\_\_\_ longitud es la que representa al 7.º básico, por lo tanto, el grupo extraído de él fue el que cometió \_\_\_\_\_ errores.

**Ayuda**

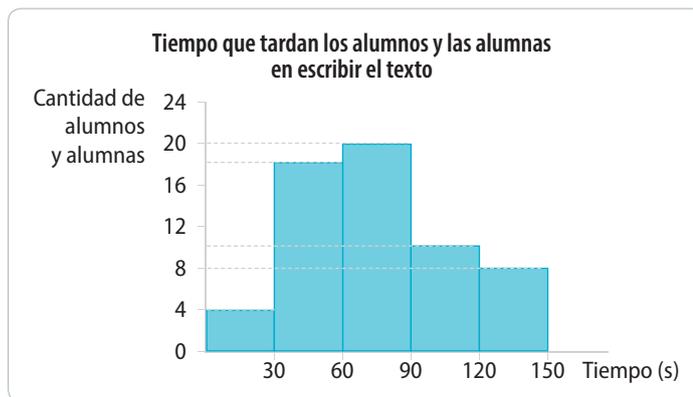
La interpretación de un gráfico depende de lo que se desee averiguar a partir de la información que contiene. En este caso, se desea comparar la cantidad de errores cometidos por los grupos que representan a cada curso.

¿Cuál fue el promedio de errores que cometieron los representantes de II.º medio y de 7.º básico?  
¿Cómo lo sabes?

¿Qué otra información podrías extraer del gráfico de barras?

## Situación 2 Interpretando un histograma

El histograma representa el tiempo que demoraron en escribir el texto de 20 palabras los alumnos y las alumnas escogidos al azar. ¿Qué información representan sus barras?



Primero se describirán los elementos básicos de un histograma y luego interpretaremos la información que contiene.

**Paso 1** Observa que como la variable tiempo es continua, es necesario representarla en intervalos y, por esta razón, la información se ha presentado en un histograma.

**Paso 2** Reconoce los elementos que conforman el histograma. Lee el título del gráfico y de cada eje y anota la información que se representa en ellos.

- El eje horizontal, cuyo título es Tiempo (s), muestra la cantidad de segundos que demoraron los alumnos y las alumnas en escribir el texto.
- El eje vertical, cuyo título es Cantidad de alumnos y alumnas, muestra el número de estudiantes que tardó el tiempo indicado en el eje horizontal en escribir el texto.

**Paso 3** Describe la información representada por las barras. Para eso, debes observar cada uno de los intervalos de tiempo y la longitud de la barra que está dibujada sobre él.

Completa para responder la pregunta inicial:

**R:** La primera barra indica que cuatro estudiantes fueron los más rápidos, ya que demoraron 30 s o menos en escribir el texto.

La quinta barra indica que ocho estudiantes fueron los que más tardaron en escribir el texto: entre 120 s y 150 s.

La segunda barra indica que \_\_\_\_\_ estudiantes tardaron entre \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_ en escribir el texto.

La tercera barra indica que \_\_\_\_\_ estudiantes tardaron entre \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_ en escribir el texto.

La cuarta barra indica que \_\_\_\_\_ estudiantes tardaron entre \_\_\_\_\_ y \_\_\_\_\_ en escribir el texto.

### Ampliando

Un histograma es un tipo de gráfico de barras en el que se representa la frecuencia de las categorías en que se ordenan los datos. Se utiliza para representar variables continuas, como el tiempo o la masa, o variables discretas cuando sus valores están agrupados en intervalos.

### Ampliando

Las **variables cuantitativas** describen una cantidad. Entre ellas es posible distinguir:

- Variable discreta: puede asumir solo valores aislados dentro de un conjunto.
- Variable continua: puede asumir cualquier valor dentro de un intervalo.

Las **variables cualitativas** describen una cualidad. Entre ellas, tenemos:

- Variable ordinal: es posible ordenar de manera ascendente o descendente los valores de la variable. Por ejemplo, la posición obtenida en una prueba deportiva.
- Variable nominal: no es posible ordenar de manera ascendente o descendente los valores de la variable. Por ejemplo, el estado civil de una persona.

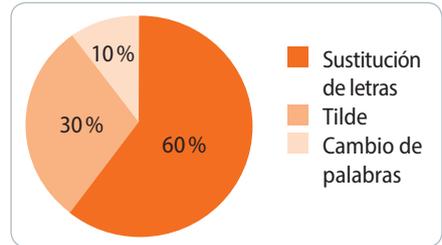
Si una alumna escribió el texto en 67 s, ¿en cuál de los intervalos del histograma está representado este dato?

**Situación 3 Interpretando un gráfico circular**

¿Qué otro nombre reciben los gráficos circulares?

¿Qué título le pondrías a este gráfico?, ¿por qué?

El gráfico circular muestra el tipo de error que cometieron los alumnos y las alumnas escogidos al azar. ¿Cuál fue el tipo de error que cometieron más frecuentemente?



**Paso 1** Identifica el porcentaje que representa el círculo entero.

Completa: El círculo entero representa el \_\_\_\_\_ de los datos.

**Paso 2** Identifica el porcentaje que se asigna a cada sector circular y compáralos para determinar cuál fue el tipo de error más frecuente de los alumnos y las alumnas escogidos de cada curso.

Completa las afirmaciones:

El porcentaje asociado al error Sustitución de letras es \_\_\_\_\_, al error Tilde es \_\_\_\_\_ y al error Cambio de palabras es \_\_\_\_\_.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

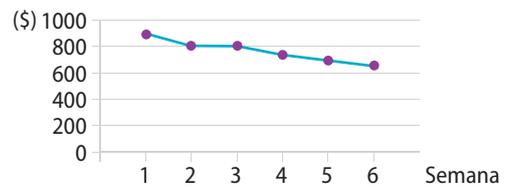
R:

¿Cuál es el ángulo que determina cada sector circular? ¿Cómo lo puedes calcular?

**Situación 4 Interpretando un gráfico de líneas**

El gráfico de líneas muestra la variación del precio del litro de gasolina de 97 octanos en seis semanas. ¿Aumentó o disminuyó con el transcurso del tiempo?

Variación del precio del litro de gasolina de 97 octanos



**Paso 1** Identifica la información que se representa en cada eje.

Completa: En el eje vertical se representa \_\_\_\_\_.  
En el eje horizontal se representa \_\_\_\_\_.

**Paso 2** Identifica cómo fue la variación del precio de la gasolina a partir de la forma de la línea del gráfico.

Completa para responder la pregunta inicial:

R: Como la línea desciende con el transcurrir del tiempo, el precio de la gasolina \_\_\_\_\_.

¿Qué otro tipo de gráfico conoces? ¿En qué se diferencia de los que acabas de repasar?

**Para concluir**

Para interpretar la información de un gráfico, primero es necesario identificar de qué tipo es y luego, reconocer sus elementos:

- Si es de barras, de líneas o un histograma, se debe determinar qué información se representa en cada eje.
- Si es circular, se debe determinar qué representa cada sector circular.

Tras esto, se pueden comparar y cotejar los datos para obtener conclusiones que puedan ser útiles para quien interpreta la información.

**Argumenta y comunica**

¿Qué diferencia notas entre el gráfico de barras presentado en la situación 1 y el histograma de la situación 2? Escríbelas en tu cuaderno. ¿Usarías un histograma o un gráfico de barras para representar la masa corporal de un grupo de 100 estudiantes de un colegio?

Repaso

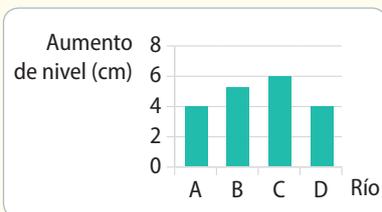
- Representa en un gráfico de barras el número de inscritos en cada una de las tres ramas deportivas de un colegio.

Rama deportiva	Cantidad de inscritos
Tenis de mesa	12
Baby fútbol	23
Running	18

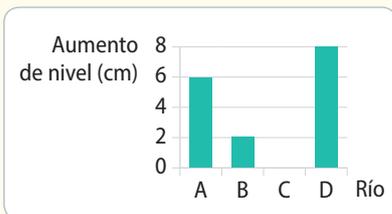
Práctica guiada

- Tras una lluvia, el nivel de cuatro ríos aumentó unos centímetros. Señala en cada caso, cuál de los ríos (A, B, C o D) aumentó más su nivel.

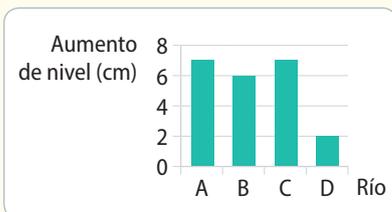
La barra que alcanza mayor altura es la que representa el aumento de nivel del río C.



a.



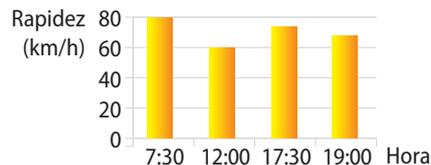
b.



Aplica

- En una ciudad, se realiza un estudio para saber si es necesario colocar un lomo de toro en una calle muy transitada, considerando que la rapidez máxima permitida en ella es 60 km/h. Este estudio se representa en el siguiente gráfico:

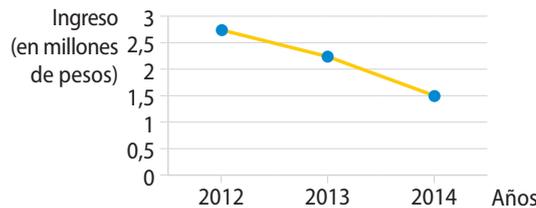
Rapidez de los automóviles en horas punta



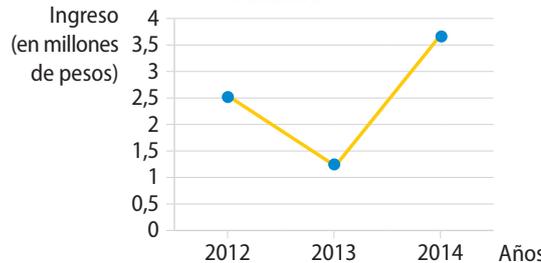
- ¿Entre qué horas hay una mayor diferencia de rapidez?
- ¿A qué hora los automóviles van a mayor rapidez?
- ¿Es necesario colocar el lomo de toro considerando la rapidez máxima de la calle?, ¿por qué?

- Los gráficos presentan los ingresos (en millones de pesos) de dos sucursales de una ferretería durante tres años.

Sucursal A



Sucursal B



- ¿Cuál de las sucursales obtuvo menos ganancias en 2013?
- En los tres años considerados, ¿cuál sucursal obtuvo mayores ganancias?

Reflexiono

- ¿La información que se puede representar utilizando un gráfico de barras se puede representar con un gráfico circular? Piénsalo y justifica tu respuesta.
- ¿Cuándo un gráfico representa la muestra de una población?, ¿cuándo no?, ¿cómo lo sabes? Investiga y comenta la información que recopiles con tus compañeros y compañeras.

Refuerzo

- Señala los tipos de gráficos que fueron estudiados en la lección y escribe el tipo de dato que puede ser representado en cada uno de ellos.
- Indica los elementos que posee un gráfico:
  - de barras.
  - circular.
  - de líneas.
- Escribe las ventajas de representar información en gráficos.

► Propósito

Evaluar la forma en que está representada la información en gráficos.

¿Para qué?

Saber reconocer los elementos que componen los diferentes tipos de gráficos permite comprender y comparar la información que contienen, estableciendo diferencias y semejanzas para tomar decisiones en función de los datos representados.

Palabras clave

Gráfico de barras

Gráfico de líneas

Gráfico circular

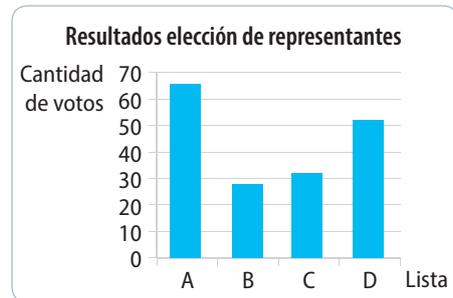
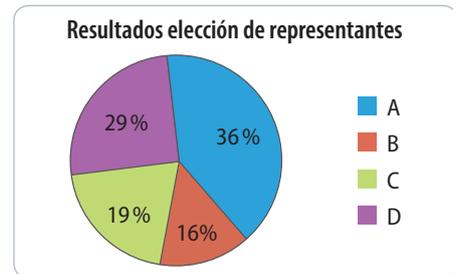
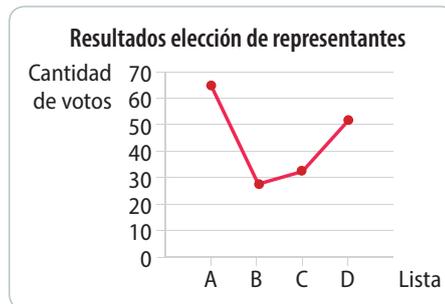
Histograma

Información

Comparación de información

## ¿Cómo comparar gráficos?

En un colegio se realizaron elecciones de representantes. Un grupo de estudiantes elaboró tres gráficos con el resultado del proceso:



### Situación 1 Comparando gráficos

¿Cuál de las listas consiguió más votos en las elecciones? ¿Qué información del proceso electoral se visualiza mejor en cada uno de los gráficos?

Para responder, se analizarán las fortalezas y debilidades de cada tipo de gráfico.

**Paso 1**

Analiza el gráfico de líneas.

- Permite visualizar tendencias en los datos. Por ejemplo, aumentos o disminuciones sostenidos en el tiempo. Como la información representada no incluye variaciones en el tiempo, la inclinación de las líneas al pasar de una lista a otra no aporta datos extras.
- Permite detectar los máximos y mínimos rápidamente.

**Paso 2**

Analiza el gráfico circular.

- Permite visualizar las partes de un todo a través de porcentajes.
- Permite comparar rápidamente los datos.

**Paso 3**

Analiza el gráfico de barras.

- Permite comparar el valor de los datos a partir de la altura relativa de sus barras.
- Permite identificar los máximos y mínimos rápidamente a partir de la altura de sus barras.

Completa para responder las preguntas iniciales:

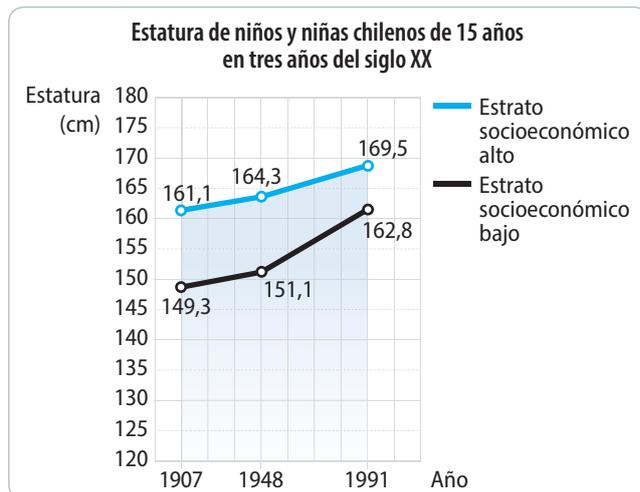
**R:** A partir de los tres gráficos, es posible determinar que la lista \_\_\_\_ obtuvo más votos. Además, observamos que:

- el gráfico de barras permite hacer comparaciones instantáneas entre las cantidades de votos obtenidos por todas las listas participantes.
- el gráfico \_\_\_\_\_ permite comparar los porcentajes obtenidos por cada lista.

¿Cuál de los gráficos te permitió visualizar más rápidamente la lista que sacó menos votos?, ¿por qué?

## Situación 2 Comparando muestras en un mismo gráfico

Para un estudio se midió y promedió la estatura de niños y niñas chilenos de 15 años, de una muestra de dos estratos socioeconómicos, en tres momentos diferentes del siglo XX. Los resultados se muestran en el gráfico. ¿Qué interpretación se puede hacer de esta información, en relación a la diferencia de la estatura promedio de las muestras de los dos estratos socioeconómicos?



¿Qué tipo de gráfico es este?  
¿Es adecuado para representar estos datos?, ¿por qué?

FUENTE: Nuñez, J. y Pérez G. Departamento de Economía U. de Chile

Observa que en el gráfico se han representado datos provenientes de dos conjuntos diferentes: el estrato socioeconómico alto y el estrato socioeconómico bajo. Por esta razón, hay dos líneas o series de datos.

**Paso 1** Reconoce la información que está representada en cada uno de los ejes del gráfico.

- En el eje horizontal se representan los tres años en que se recopilaron los datos: 1907, 1948 y 1991.
- En el eje vertical se representa la estatura (expresada en centímetros) de los niños y niñas que conforman las muestras.

**Paso 2** Compara las dos series de datos.

- En 1907 la diferencia entre las estaturas indicadas en las series es de 11,8 cm.
- En 1948 la diferencia entre las estaturas indicadas en las series es de 13,2 cm.
- En 1991 la diferencia entre las estaturas indicadas en las series es de 6,7 cm.

**Paso 3** Interpreta la información a partir de la comparación realizada.

Se puede constatar que la estatura promedio de los niños y las niñas de las muestras de ambos estratos ha ido aumentando con el transcurso de los años.

Completa para responder la pregunta inicial:

**R:** La diferencia de estatura entre los niños y las niñas de las muestras de los dos estratos aumentó levemente entre los años \_\_\_\_\_ y 1948, y \_\_\_\_\_ marcadamente entre los años 1948 y 1991.

### Ampliando

Fortalezas y debilidades de los tipos de gráficos.

Gráfico circular  
Fortaleza: facilita la comparación de los componentes de un todo.  
Debilidad: permite comparar solo un conjunto de datos. Si hay más conjuntos, pierde su utilidad.

Gráfico de líneas  
Fortaleza: muestra cambios en las tendencias de los datos.  
Debilidad: pierde su utilidad cuando no se trabaja con datos que van variando con el tiempo.

Gráfico de barras  
Fortaleza: posibilita la comparación de datos a través de la altura de sus barras.  
Debilidad: no permite visualizar la proporción que representa una categoría de dato del total.

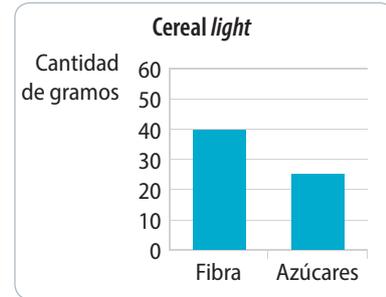
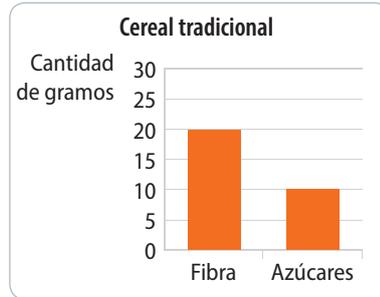
¿A qué fenómeno crees que se debe este aumento de la estatura promedio que señalan los datos muestrales?

¿Crees que esta tendencia se ha mantenido en las últimas décadas?, ¿por qué?

**Situación 3** Constatando la manipulación de gráficos

En un aviso publicitario se comparan las cantidades de fibra y de azúcares que contienen 100 g de dos cereales distintos. Esta comparación se realiza con los gráficos 1 y 2. ¿Por cuál de los cereales se debe optar si se desea consumir la mayor cantidad de fibra y la menor cantidad de azúcares?

¿Cómo son en apariencia las cantidades de fibra y de azúcares en ambos cereales?



Para responder se analizarán y compararán ambos gráficos.

**Paso 1** Reconoce la información que se representa en cada eje de los gráficos.

- En el eje horizontal de ambos gráficos se representan los dos componentes de interés: fibra y azúcares.
- En el eje vertical de ambos gráficos se representa la cantidad de gramos de los dos componentes.

**Paso 2** Compara las escalas de los gráficos y analiza los valores representados.

- En el gráfico 1 (cereal tradicional) la escala del eje vertical va de 5 en 5 gramos.
- En el gráfico 2 (cereal light) la escala del eje vertical va de 10 en 10 gramos.

Por lo tanto, las cantidades de fibra y de azúcares son:

Compuesto	g en 100 g de cereal tradicional	g en 100 g de cereal light
Fibra	20	40
Azúcares	10	25

**Paso 3** Interpreta la información a partir de la comparación realizada.

Pese a que aparentemente los dos cereales tienen cantidades similares de fibra y de azúcares, nuestro análisis arroja que en realidad:

- Fibra: el cereal light tiene el doble de fibra que el cereal tradicional.
- Azúcares: el cereal light tiene más del doble de azúcares que el cereal tradicional.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Ayuda**  
El símbolo que representa la unidad de masa gramo es g.

¿Es evidente la respuesta? ¿Cuál de los hechos constatados en la comparación es favorable a la elección del cereal light?, ¿cuál no?

**► Para concluir**

Al **comparar información representada en gráficos** se deben considerar las fortalezas y debilidades de cada uno, y verificar que las escalas en que se presentan los datos en los ejes sean iguales.

**Argumenta y comunica**

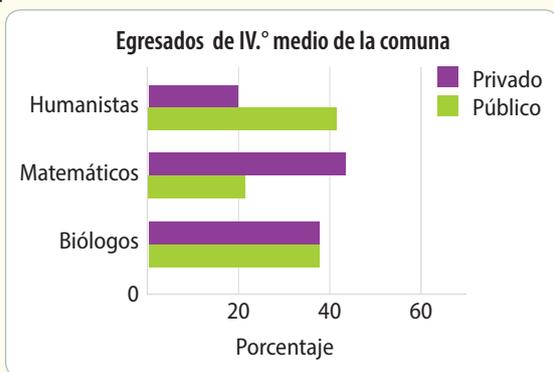
Enumera y explica las fortalezas y debilidades de cada uno de los tipos de gráficos estudiados hasta ahora. Comunica tus apreciaciones a un compañero o compañera e intercambien opiniones.

Repaso

- El Índice de Precios al Consumidor (IPC) es un indicador que calcula mensualmente las variaciones que experimentan los precios de un conjunto de productos.
  - Investiga en internet la variación que ha tenido el IPC durante los últimos 6 meses.
  - Representa los datos obtenidos en un gráfico de líneas. ¿Cuál es la tendencia que se puede observar en el valor del IPC?

Práctica guiada

- Compara el porcentaje de egresados de IV.º medio de una comuna por cada área de especialidad (humanistas, matemáticos y biólogos), según el tipo de establecimiento del que provienen.



Formación de biólogos:

La barra que representa al sector público equivale aproximadamente a un 38 %, al igual que la del sector privado. Por lo tanto, la educación pública y la privada en la comuna tienen el mismo porcentaje de alumnos egresados de la especialidad de Biología.

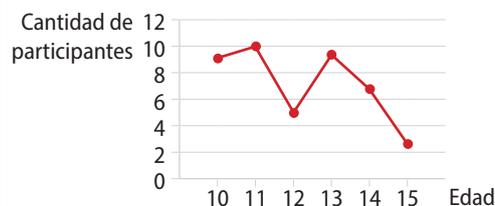
- Formación de humanistas.
- Formación de matemáticos.

Aplica

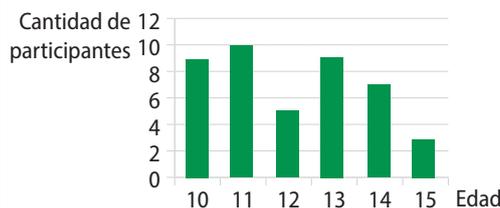
- Señala si cada gráfico representa los datos de la tabla escribiendo Sí o No. Justifica.

Edad (años)	10	11	12	13	14	15
Cantidad de participantes	9	10	5	9	7	3

- Edades de participantes de una competencia de atletismo

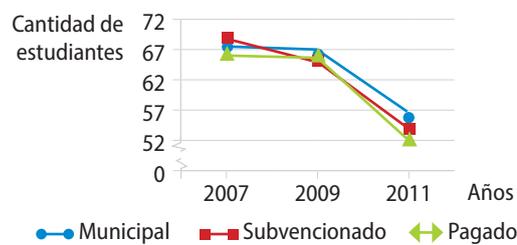


- Edades de participantes de una competencia de atletismo



- De acuerdo a la información, compara y responde.

Estudiantes de 8.º básico consumidores de tabaco



- ¿En qué tipo de colegios se observa la mayor cantidad de alumnos de 8.º básico fumadores?
- ¿Qué dificultades para interpretar los datos presenta el gráfico?

Reflexión

- Considera dos gráficos circulares que tienen exactamente las mismas proporciones respecto al total. Entonces, ¿las cantidades de datos representados son necesariamente las mismas?
- ¿Es necesario comenzar siempre la graduación de un gráfico a partir de cero? Piénsalo y justifica tu respuesta con un ejemplo.

Refuerzo

- Explica cómo comparas la información de dos series de datos que están representadas en un gráfico de líneas.
- Escribe un ejemplo en el que se represente la información en dos gráficos que induzcan a sacar conclusiones erróneas.
- Inventa un problema en el cual se deba comparar un gráfico de barras con un gráfico circular.

► Propósito

Justificar la elección de un tipo de gráfico para representar una situación.

¿Para qué?

Elegir el gráfico adecuado para representar determinada información es muy importante, ya que de esto depende que pueda ser comprendida y analizada por la persona que tiene acceso a él. Para realizar esta elección, debes conocer las debilidades y fortalezas de cada tipo de gráfico y reconocer cuál es más adecuado de acuerdo al tipo de información que se va a representar.

Palabras clave

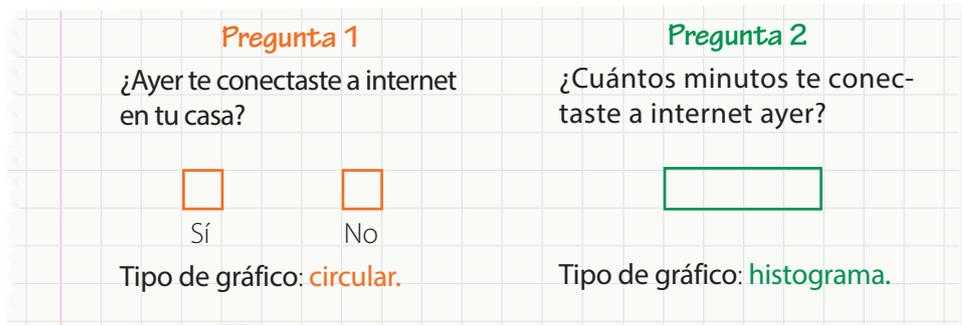
Gráfico

Variable cualitativa

Variable cuantitativa

## ¿Cómo escoger el gráfico más adecuado para un requerimiento?

Para una tarea de Matemática, dos estudiantes investigaron con qué frecuencia sus compañeros y compañeras de curso se conectan a internet en sus casas. Para esta encuesta, los estudiantes hicieron dos preguntas y representaron sus resultados en los tipos de gráficos que se indican:



**Situación 1** Evaluando la elección de gráficos según los tipos de variables

¿Fueron adecuados los gráficos que eligieron los estudiantes para exponer los resultados de su encuesta?

Para responder analizaremos el tipo de variable que se desea representar.

- Paso 1** Identifica el tipo de variable representada.
- La pregunta 1 puede responderse de dos maneras: Sí o No. Es decir, corresponde a una variable de tipo cualitativa.
  - La pregunta 2 debe responderse estimando y aproximando el tiempo de conexión a internet a una cierta cantidad de minutos. Es decir, corresponde a una variable de tipo cuantitativa.

**Paso 2** Analiza las características de las posibles respuestas a la pregunta 1 y si es adecuado representarlas en un gráfico circular. Como se deben representar dos posibles respuestas cualitativas e interesa mostrar la proporción que representa cada una del total de respuestas, el gráfico circular es adecuado para hacerlo.

Si se encuestaron a 24 personas, de las cuales 6 respondieron No y el resto Sí, ¿cuál es el gráfico circular que representa estos resultados?

**Paso 3** Analiza ahora las características de las posibles respuestas a la pregunta 2 y determina si es adecuado representarlas en un histograma. Como cada encuestado puede haberse conectado una cantidad variable de minutos, es conveniente dividir el tiempo en intervalos en el eje horizontal e indicar el número de alumnos y alumnas que se conectaron a internet en el eje vertical.

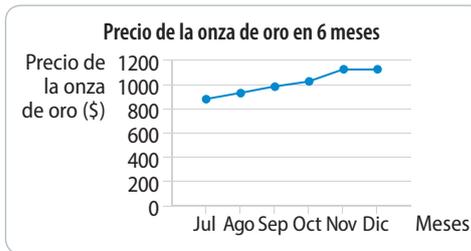
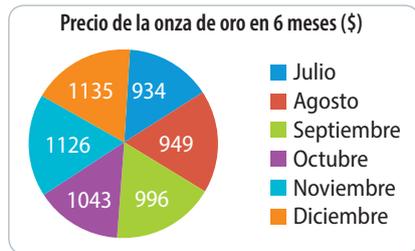
Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

¿Qué otro tipo de gráfico pudo haberse confeccionado para representar en forma adecuada las respuestas a la pregunta 1?, ¿por qué?

**Situación 2** Seleccionando el gráfico que mejor representa una información

El precio de la onza de oro sufrió un alza continua durante 6 meses. ¿Cuál de estos dos gráficos representa de mejor manera esta tendencia al alza?



Primero determinaremos qué tipo de gráfico es cada uno y luego decidiremos cuál de ellos permite visualizar más rápidamente la tendencia señalada.

**Paso 1** Identifica los tipos de gráficos presentados.

- El gráfico 1 es un gráfico circular.
- El gráfico 2 es un gráfico de líneas.

**Paso 2** Decide en cuál de los dos gráficos se puede detectar la tendencia al alza de forma más rápida y sencilla.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

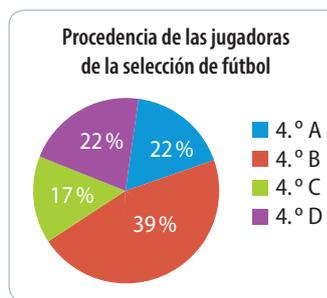
**Ampliando**

Una onza es una unidad de masa que equivale aproximadamente a 28,35 gramos.

**Situación 3** Determinando si la elección de un gráfico fue correcta

Una estudiante del 4.º B confeccionó el gráfico del costado para representar los cursos de procedencia de las jugadoras de la selección de fútbol del colegio. ¿Elegió correctamente el gráfico si desea destacar que su curso es el que aporta con más jugadoras?

Para responder, analizaremos la información y lo que se desea destacar de ella.



¿Cuál es el curso que menos seleccionadas tiene?

Si la selección está compuesta por 18 jugadoras, ¿cuántas aportó cada curso?

¿Qué otro gráfico cumpliría el requerimiento señalado en el enunciado?

**Paso 1** Observa que los datos son discretos y que se desea destacar el curso que más seleccionadas tiene.

**Paso 2** Recuerda que el gráfico circular muestra la proporción que representa una parte de un total.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Para concluir**

Para seleccionar el gráfico más adecuado para representar un conjunto de datos es necesario analizar las características de esas variables (cualitativos, cuantitativos, discretos, continuos, etc.) y lo que se quiere destacar de la información.

**Argumenta y comunica**

Escribe los criterios que ocupas para seleccionar el gráfico que permite representar de mejor forma datos:

- cuantitativos contables.
- cualitativos.
- cuantitativos medibles.
- cuantitativos agrupados.

Repaso

1. Identifica el tipo de variable descrita en cada situación.
  - a. El tipo de café más consumido en una cafetería.
  - b. La nota asignada por un grupo de encuestados a un servicio público.
  - c. La cantidad de palabras que tienen las páginas de un libro.
  - d. Los estudiantes aprobados y los reprobados en una asignatura.

Práctica guiada

2. Señala qué tipo de gráfico es el adecuado para representar los datos de cada tabla.

Longitud de una muestra de tornillos	
Longitud (cm)	N.º de tornillos
[3, 4[	5
[4, 5[	9
[5, 6[	11
[6, 7]	18

Como la información de los tornillos se entrega en intervalos, se puede utilizar un histograma.

a.

Estatura de niñas menores de 15 años de un colegio	
Estatura (m)	N.º de niñas
[1,0; 1,2[	40
[1,2; 1,4[	22
[1,4; 1,6[	80
[1,6; 1,8]	7

b.

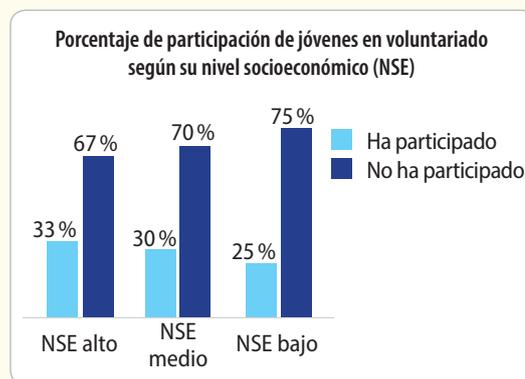
Tipo de regalo preferido en un grupo de niños y niñas para Navidad	
Tipo de regalo	Porcentaje (%)
Tecnológico	15
Entretenimiento	20
Ropa	35
Otro	30

Aplica

3. Observa cada gráfico y responde las preguntas a partir de la información representada.
  - a. Gráfico elaborado por el Ministerio de Desarrollo Social.



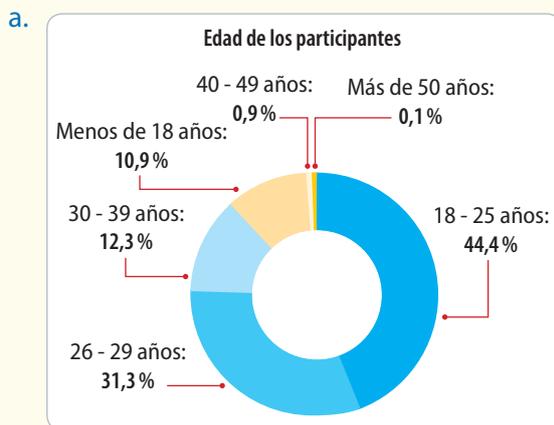
- ¿El gráfico es adecuado para el tipo de variable en estudio?, ¿por qué?
  - ¿Cuáles son las debilidades que presenta el gráfico?
  - Representa la información en otro tipo de gráfico y compáralo con el de un compañero o una compañera.
- b. Gráfico que representa a un grupo de jóvenes de una comunidad.



- ¿A qué conclusiones puedes llegar a partir de los resultados del gráfico?
- Si tuvieras que elegir otro tipo de gráfico para representar la misma información, ¿cuál escogerías? Justifica tu elección.

4. **Conecto con la Música.** Lollapalooza es un festival de música originario de Estados Unidos que ofrece conciertos de bandas de variados estilos musicales, así como también teatro y danza. En la tercera edición de Lollapalooza Chile se realizó una encuesta al público que asistió, donde la muestra abarcó a 5434 asistentes.

Observa los resultados de la encuesta que se representan en los gráficos y responde.



- ¿Cuál es el tipo de dato representado?
- ¿Te parece adecuada la elección del gráfico para la variable estudiada?
- Señala tres conclusiones que puedes extraer del gráfico.



- ¿Qué tipo de dato se está representando?
- ¿Es adecuado el gráfico utilizado? Comenta con tus compañeros y compañeras y justifica tu respuesta.
- ¿Qué gráfico hubieses utilizado tú? Argumenta tu elección.

5. **Conecto con el Deporte.** Los Juegos Sudamericanos, también llamados juegos Odesur son un evento deportivo multidisciplinario en el cual participan atletas de todos los países de América del Sur, menos Guayana Francesa, y algunos países invitados de América Central y del Caribe. Su décima versión se realizó en Santiago el año 2014. En la siguiente tabla se muestra el medallero final.

País	Oro	Plata	Bronce	TOTAL
Brasil	110	69	79	258
Colombia	53	49	64	166
Venezuela	47	40	63	150
Argentina	46	57	56	159
Chile	27	52	50	129
Ecuador	14	22	37	73
Perú	9	13	18	40
Panamá	4	3	8	15
Paraguay	3	5	2	10
Uruguay	3	4	5	12
Surinam	1	0	4	5
Bolivia	0	0	4	4
Aruba	0	0	1	1
Guyana	0	0	0	0

- ¿Qué gráfico utilizarías para representar esta información?, ¿por qué?
- Representa la información del medallero en el gráfico que escogiste.

6. **Desafío.** Elige un curso de tu colegio y aplica la encuesta con la que se trabajó en la situación 1 de esta lección. Representa en un gráfico circular los resultados de la pregunta 1 y en un histograma, los resultados de la pregunta 2. Compara tus gráficos con los de tus compañeros y compañeras y elaboren conclusiones a partir de esta comparación.

### Reflexión

1. ¿Pueden representarse dos series de datos en un gráfico de barras, como el valor en pesos chilenos del dólar y del euro durante 7 días corridos? Explica.
2. En un gráfico de líneas es sencillo identificar tendencias en los datos representados. ¿Ocurre lo mismo en un gráfico de barras? ¿Y en un gráfico circular? Piénsalo y justifica tus respuestas.

### Refuerzo

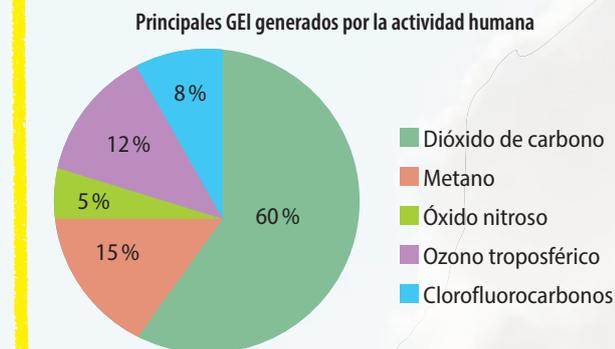
1. Explica qué criterio aplicas para determinar si un gráfico representa mejor que otro una información.
2. Señala el tipo de gráfico que puedes usar para representar datos cuantitativos contables.
3. Busca un gráfico, en una revista o un diario y señala si es adecuada la manera en que se representó la información. Justifica tu respuesta.

# Efecto invernadero

## Un problema a nivel global

Se llama efecto invernadero a la retención en las cercanías de la Tierra de parte de la radiación infrarroja proveniente del Sol que se refleja en su superficie. Esto provoca que la radiación que entra a la atmósfera sea mayor que la que sale, generándose una paulatina acumulación y un consecuente aumento de la temperatura del planeta. Los gases que favorecen directa o indirectamente este fenómeno son denominados gases de efecto invernadero (GEI).

Las principales fuentes de emisión de GEI son:



### Óxido nitroso ( $N_2O$ ):

fertilización artificial de la tierra, fuentes fijas y móviles de combustión de materiales de origen fósil, estiércol y orina de animales.

### Metano ( $CH_4$ ):

descomposición de la basura y fecas de animales, la producción y distribución de gas y combustibles, entre otros.

### Dióxido de carbono ( $CO_2$ ):

quema de combustibles fósiles y biomasa, procesos industriales, transporte y actividades domiciliarias.

### Sabías que...

El vapor de agua es considerado un gas de efecto invernadero cuyas fuentes de emisión son de origen natural. Su concentración en la atmósfera es variable debido a la permanente evaporación y condensación del agua.

**Sabías que...**

El efecto invernadero natural ha favorecido el desarrollo de la vida en nuestro planeta, ya que ha provocado que la temperatura media de la superficie sea aproximadamente 30 °C superior de lo que sería si no existiesen GEI en la atmósfera.

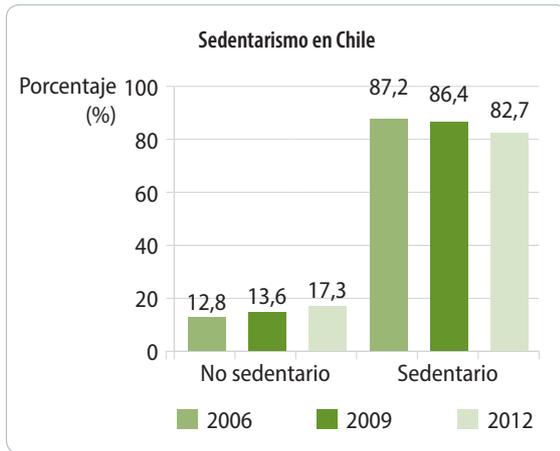
**Principales países emisores de GEI****Actividad grupal**

Reúnanse en grupos de 3 o 4 integrantes para realizar las actividades. Luego, comuniquen sus respuestas al curso.

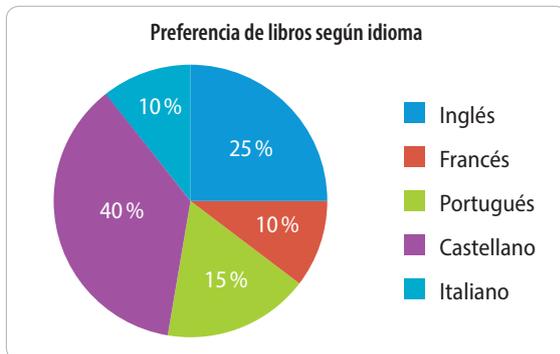
1. Averigüen cuál sería el impacto medioambiental del efecto invernadero en el planeta en el mediano plazo. Luego, en conjunto con los otros grupos de trabajo, reflexionen acerca de lo que investigaron y desarrollen conclusiones de lo que podría ocurrir en el futuro si este fenómeno sigue avanzando.
2. Actualmente, se estima que el ascenso promedio del nivel del mar causado por el calentamiento global es de aproximadamente 3 mm por año. Si Viña del Mar se encuentra a 2 metros sobre el nivel del mar (msnm), ¿en qué año esta ciudad se encontraría bajo el nivel del mar de ser correcta la estimación? Realicen un gráfico de líneas donde se pueda determinar este resultado.
3. El año 1997 se estableció un tratado internacional llamado protocolo de Kioto, cuyo objetivo principal es que los países desarrollados disminuyeran sus emisiones de gases de efecto invernadero. ¿Cuáles fueron las medidas que adoptó este protocolo? ¿Han disminuido efectivamente las emisiones de GEI? ¿Firmaron este protocolo los dos principales países generadores de GEI? Investiguen y discutan las implicaciones de este tipo de tratados.

**Lección 42: ¿Cómo interpretar la información de un gráfico?**

- 1 Interpreta los resultados de una encuesta realizada por el Instituto Nacional de Deportes. Luego, responde.



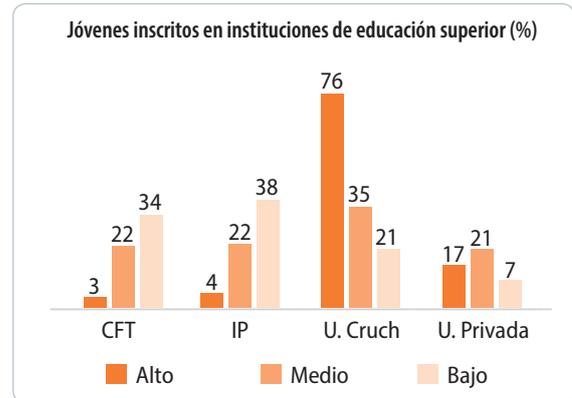
- a. Como resultado de las políticas públicas implementadas, se espera que cada 3 años el porcentaje de no sedentarios aumente en un 3% a partir del 2012. ¿Cuál es el porcentaje estimado de personas no sedentarias en nuestro país para el año 2024?
  - b. ¿En qué porcentaje disminuyeron las personas sedentarias en nuestro país entre los años 2006 y 2012, aproximadamente?
- 2 Un grupo de estudiantes realizó una encuesta sobre la cantidad de libros en diferentes idiomas que pidieron los usuarios de una biblioteca durante la temporada de verano.



- a. ¿Cuál fue el idioma preferido por los usuarios que solicitaron libros en la temporada de verano? ¿Y cuál fue el que menos pidieron?
- b. Si la cantidad de libros que se pidieron durante el verano fue 120, ¿cuántos corresponden a cada idioma?

**Lección 43: ¿Cómo comparar gráficos?**

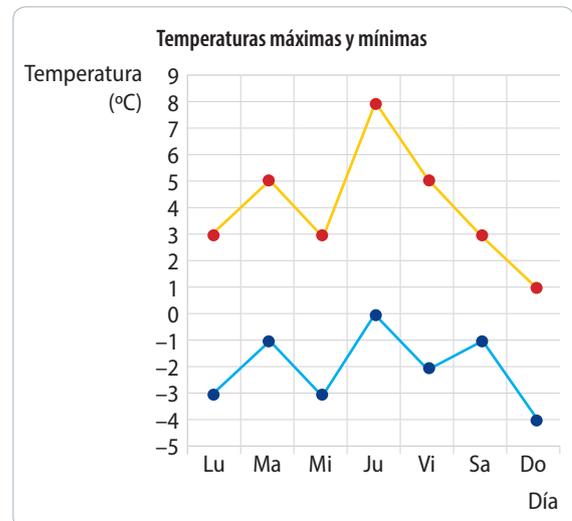
- 3 El gráfico presenta el porcentaje de instituciones en las que se inscribieron jóvenes chilenos, según su nivel socioeconómico.



Fuente: "Trabajo y estudios superiores en jóvenes chilenos", INJUV, 2012.

CFT: centro de formación técnica; IP: instituto profesional; U. Cruch: universidad del Consejo de Rectores de las Universidades Chilenas; U. Privada: universidad privada.

- a. ¿Qué tipo de institución presenta más inscritos? Explica y justifica tu respuesta.
  - b. ¿Cuál es la preferencia de los jóvenes al momento de inscribirse en una institución superior de acuerdo a su nivel socioeconómico?
  - c. Si estuvieras interesado en manipular la información para hacer creer al lector que la mayoría de los jóvenes de nivel socioeconómico medio se inscriben en los institutos profesionales, ¿cómo lo harías? Explica.
- 4 El gráfico muestra las temperaturas máximas y mínimas en una ciudad durante una semana.



- a. ¿Qué día se produjo la mayor diferencia entre las temperaturas máxima y mínima?
- b. ¿Cuál fue el promedio de las temperaturas mínimas durante la semana? ¿Y el de las temperaturas máximas?

**Lección 44: ¿Cómo escoger el gráfico más adecuado para un requerimiento?**

5 Representa en un gráfico los datos de las tablas y explica por qué el gráfico que seleccionaste es adecuado para representar la información.

a.

Preferencias de programas de televisión	
Programa	Frecuencia absoluta
Ficción	30
Infantiles	10
Deportivos	15
Espectáculo	35
Documentales	5
Culturales	5

b.

Masa corporal de los alumnos y alumnas de un curso	
Masa corporal (kg)	Frecuencia porcentual (%)
[60, 63[	5
[63, 66[	18
[66, 69[	37
[69, 72[	25
[72, 75]	15

c.

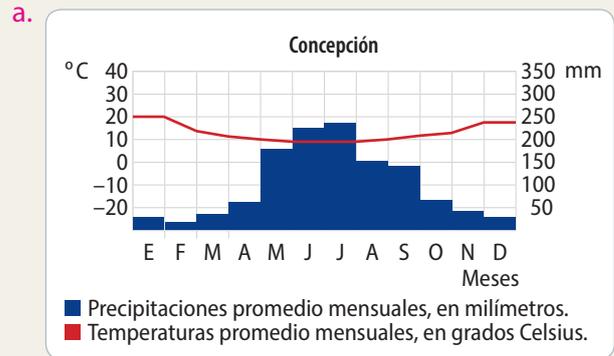
Participación de alumnos en actividades extraprogramáticas	
Actividad extraprogramática	Número de alumnos
Deporte	5
Ciencia	18
Arte	37
Música	25
Sociales	15

d.

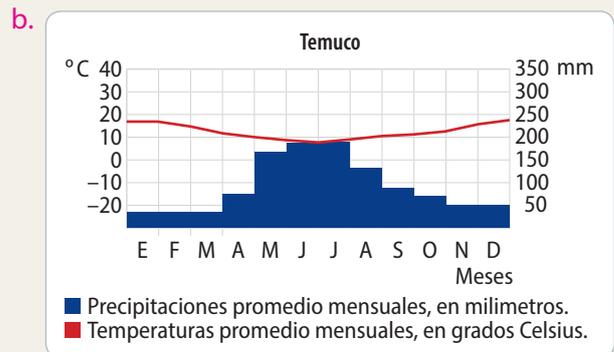
Preferencias de alojamiento			
Lugar	Hotel	Hostal	Departamento o casa
Europa	34 000	12 000	1200
Asia	27 000	22 000	200
África	3200	4000	23
América	18 000	23 000	4500

**Desafíos de integración**

Un climograma es un gráfico en el que se representan las precipitaciones y las temperaturas de un lugar determinado. En los siguientes desafíos se muestran los climogramas de dos ciudades de nuestro país. Interpretalos y responde.



- ¿Cuál fue el mes más lluvioso? ¿Cuál, el menos lluvioso?
- ¿En qué meses las precipitaciones promedio fueron mayores que 150 mm?
- ¿Cómo es la variación de la temperatura promedio mensual durante el transcurso del año?



- Con respecto a las precipitaciones promedio de los tres primeros meses del año, ¿qué se puede observar en el gráfico?, ¿ocurre lo mismo con las temperaturas promedio?
- ¿Tiene sentido afirmar que en los meses de junio y julio las precipitaciones promedio son aparentemente similares a las temperaturas promedio?, ¿por qué?

**Trabajo en grupo**

Escoge el desafío cuya resolución te planteó más dificultades y descríbelas en tu cuaderno. Resuélvelo nuevamente, trabajando ahora en forma grupal.

## Descartar información irrelevante

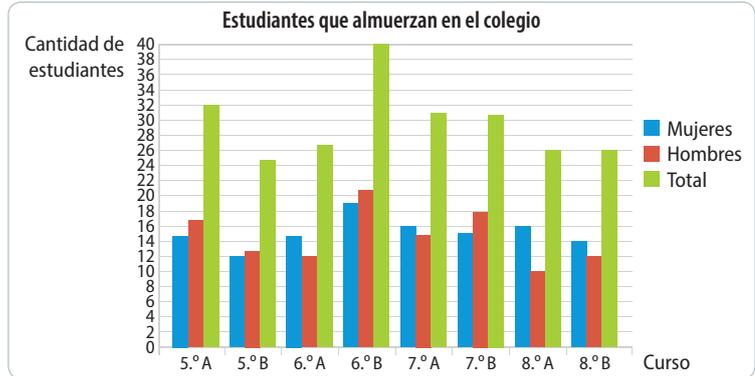
Este proceso permite identificar los datos del problema que actúan como distractores y que no debes utilizar para resolverlo.

### Algunas estrategias

- Usar un proceso de ensayo y error.
- Aplicar procesos reversibles.
- **Descartar información irrelevante.**
- Usar un problema similar pero más sencillo.
- Construir un esquema, diagrama o tabla.
- Encontrar un patrón.
- Usar modelos matemáticos.
- Usar razonamiento lógico.
- Identificar submetas.

Se realizó una encuesta para llevar un registro de la cantidad de estudiantes que almuerzan en su colegio. El resultado de la encuesta se muestra en el gráfico de barras múltiples del costado.

¿Cuántos estudiantes hombres de 7.º básico almuerzan en el colegio?



¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema? Escribe tú

¿Qué datos tengo para resolver? Escribe tú

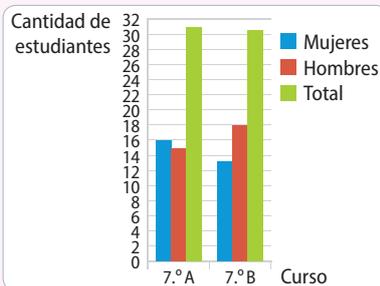
Crea un plan para resolver

Para resolver este problema, puedes usar la estrategia **Descartar información irrelevante**, identificando los datos que no usarás y los que sí usarás.

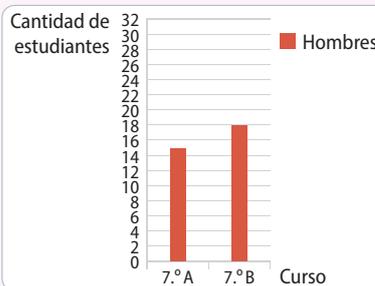
Aplica la **estrategia** y resuelve

Iremos descartando la información que no es relevante para resolver el problema. Primero, eliminaremos las barras correspondientes a los cursos de 5.º, 6.º y 8.º. Luego, eliminaremos las barras correspondientes a mujeres y al total y, finalmente, sumaremos los datos de las barras de los hombres que quedan.

Primer paso: nos concentramos en las barras de los séptimos A y B.



Segundo paso: nos concentramos en las barras de los hombres.



Tercer paso: sumamos los valores representados por las barras.

$$15 + 18 = 33$$

Verifica la respuesta

Escribe tú

Comunica la respuesta

Escribe tú

¿De qué otra forma resolverías este problema? Explica.

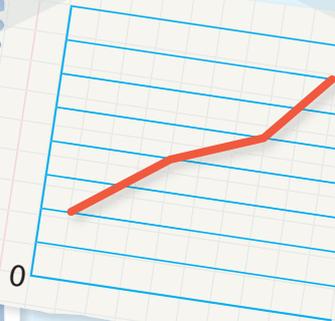
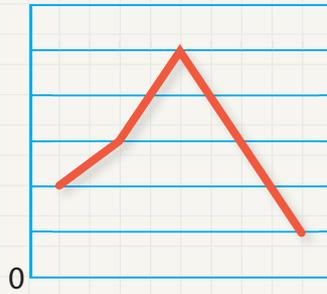
Vuelvo a mis procesos

Responde de acuerdo a tu apreciación.

¿La altura que alcanza el agua en el pluviómetro de la imagen es una variable cuantitativa, contable o medible?

¿Cuál de los gráficos no podría representar la evolución de la altura que alcanza el agua en el pluviómetro en los 5 minutos siguientes al momento en que se obtuvo la imagen?, ¿por qué?

¿Tienes alguna duda relacionada con las estrategias estudiadas para interpretar la información de un gráfico de barras o de líneas?, ¿cuál?



¿Cuál de las representaciones trabajadas en la sección ves más a menudo en los medios de comunicación escrita?

¿Ahora eres capaz de comprender mejor la información que se presenta en gráficos?, ¿qué tanto?

¿Se cumplieron las expectativas que tenías respecto a la sección?  
¿Alcanzaste las metas que te propusiste al inicio?, ¿por qué?

## Medidas de posición



## Activo ideas previas

1. Lee la información y coméntala con un compañero o compañera.

Como una forma de fomentar la recreación e incentivar a la población a realizar actividades al aire libre, cada fin de semana se habilitan algunas calles de diferentes comunas del país para la práctica del deporte. Una estudiante dedica su tiempo libre a practicar *running* los fines de semana, aprovechando que cierran la calle que está fuera de su casa al tránsito de vehículos motorizados. Ella ha registrado los tiempos que demora en recorrer los 10 km de su circuito, valores que se indican en la tabla del costado.

Tiempos (min)			
53,4	55,2	53,7	53,8
52,3	49,8	51,4	52,2
49,3	50,4	50,2	50,6
50,7	49,4	49,6	49,5
48,1	48,3	49,3	48,1

Responde las preguntas junto a tu compañero o compañera.

- a. ¿Practican algún deporte? ¿Qué beneficios trae para la salud la práctica de un deporte al aire libre como el *running*? Investiquen y comenten.
- b. ¿En qué orden piensan que están presentados los tiempos? Expliquen y luego ordénelos en orden creciente.
- c. ¿Cómo podrían organizar los tiempos para estratificarlos en 4 grupos de la misma cantidad de registros, de manera de visualizar el 25% de los mejores tiempos y el 25% de los peores tiempos? Creen y describan en sus cuadernos un método práctico.




## Activo conceptos clave

2. El listado contiene algunos conceptos clave de esta sección. Úsalos para responder las preguntas.

cuartil  
porcentaje

diagrama de cajón  
medidas de posición

gráfico  
percentil

- a. ¿Cuál de los conceptos es desconocido para ti?, ¿qué crees que signifique?
- b. ¿Qué par de conceptos crees que podrían estar relacionados entre sí?, ¿por qué?
- c. ¿Qué concepto ya has trabajado previamente?, ¿cómo se define?

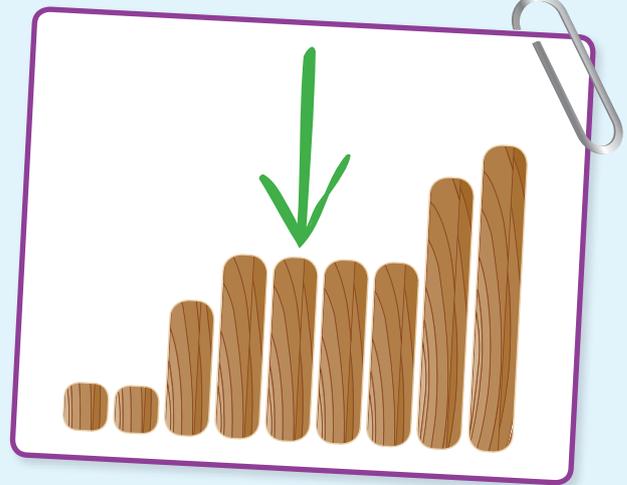
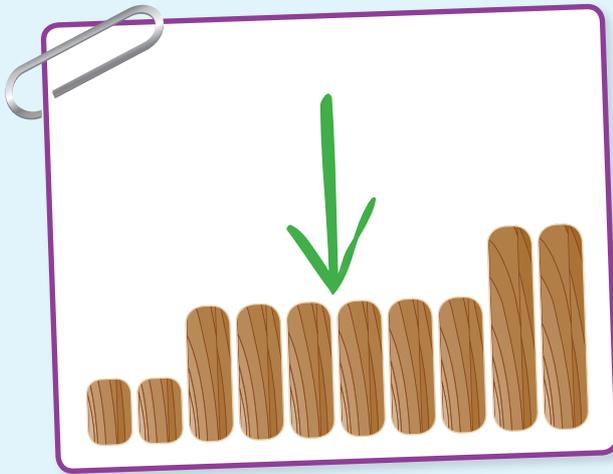
## Pienso mis procesos

Responde de acuerdo a lo que conoces.

¿Qué medida de tendencia central se indica con la flecha verde en cada distribución de maderos?

¿Cuál de los conjuntos representados en las figuras es más homogéneo en cuanto a su altura?

¿Has escuchado hablar de percentiles y cuartiles? ¿En qué contexto?



¿Qué conocimientos previos piensas que usarás en esta sección? ¿Los recuerdas? ¿Cuáles de ellos debes repasar?

¿Crees que es importante para las personas entender información estadística?, ¿por qué? ¿Es importante para ti?

¿Qué metas te interesa alcanzar al finalizar el estudio de esta sección?, ¿por qué?

Activa tus conocimientos previos respondiendo las preguntas laterales y luego resuelve las actividades. Para terminar, registra tus logros.

¿Qué es la frecuencia absoluta?

¿Cómo se calcula la frecuencia relativa?, ¿y la frecuencia acumulada?

Marca con una x tu nivel de logro:

<b>Logrado</b> <input type="radio"/>	<b>Por lograr</b> <input type="radio"/>
20 correctas o más	menos de 20 correctas

¿Cometiste errores? ¿Cuáles?

¿Por qué crees que cometiste estos errores?

**Organizar datos en una tabla de distribución de frecuencias**

**1** Completa cada tabla de frecuencias según la información dada. (28 puntos)

a. Se preguntó a un grupo de personas por el tiempo que dedica a realizar actividades físicas y se registraron sus respuestas.

Horas semanales dedicadas a realizar actividad física															
2	13	6	7	8	10	12	6	8	9	6	13	13	5	4	5
9	10	12	13	7	11	4	10	7	7	8	8	8	11	9	10

Horas semanales dedicadas a realizar actividad física			
Tiempo (horas)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada
[2, 4[			
[4, 6[			
[6, 8[			
[8, 10[			
[10, 12[			
[12, 14]			

b. Se realizó un estudio acerca del tipo y cantidad de vehículos de transporte público que transita por la ciudad en un día, y se determinó que hay 2000 taxis, 5000 buses, 8000 microbuses y 3000 colectivos.

Tipo de transporte	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Taxis		
Buses		
Microbuses		
Colectivos		
Total		

**2** Elabora una tabla de frecuencias para la información dada. Considera 5 intervalos. (5 puntos)

Las precipitaciones que ha registrado un pluviómetro durante 30 días en una ciudad son:

Precipitaciones (mm)				
9	10	11	10	12
15	16	16	16	16
14	13	13	14	13
12	13	12	12	14
18	16	17	14	15
13	13	14	13	12

¿Cuáles son las medidas de tendencia central que conoces?

¿Cómo obtienes la media aritmética de un conjunto de datos?  
¿Para qué tipo de datos no puedes calcularla?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
5 correctas o más	menos de 5 correctas

¿En qué pregunta requeriste más tiempo para responder?, ¿por qué?

¿Cómo obtienes el valor de la moda a partir de un gráfico de barras?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
3 correctas o más	menos de 3 correctas

¿Te equivocaste en alguna pregunta?, ¿en cuál?

¿Cuál fue tu error?

### Calcular medidas de tendencia central

3 Observa la tabla y responde. (4 puntos)

Cantidad de goles	Frecuencia absoluta
0	6
1	4
2	4
3	3
4	2
5	1

- ¿Cuál es la variable en estudio?
- ¿Cuál es el rango de la variable?
- ¿Cuál es el valor de la media aritmética?
- ¿Cuál es el valor de la moda?

4 Ordena los datos y calcula. (4 puntos)

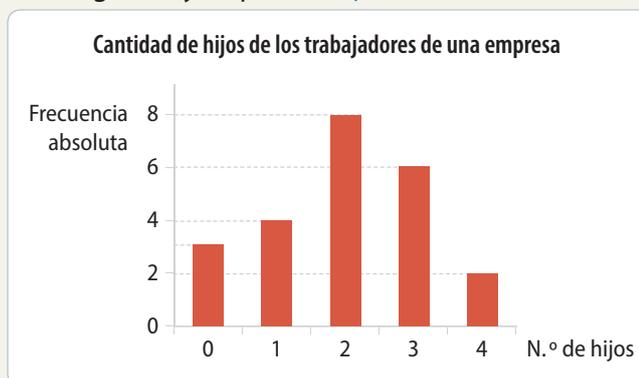
Se encuestó a un grupo de estudiantes sobre las horas diarias que dedicaban al uso del computador.

1	2	1	1	2	3	2	3	3	4	6	2
2	1	3	4	5	4	5	4	3	2	1	1
3	3	2	3	2	5	1	2	3	2	1	7

- Rango.
- Media aritmética.
- Moda.
- Mediana.

### Interpretar información representada en gráficos

5 Observa el gráfico y responde. (4 puntos)



- ¿Cuántos trabajadores hay en la empresa?
- ¿Cuál es la moda?
- ¿Cuántos trabajadores tienen más de 2 hijos?
- ¿Cuántos trabajadores no tienen hijos?

► Propósito

Comprender el concepto de percentil.

¿Para qué?

Cuando se desea describir una población o tomar decisiones de acuerdo con su distribución es de gran utilidad ordenar la información de menor a mayor y trabajar con porcentajes de datos que están bajo o sobre un valor determinado.

Palabras clave

Gráfico

Medida de posición

Percentil

Porcentaje

Ayuda

Que los porcentajes se presenten acumulados significa que, al igual que en una frecuencia acumulada, el porcentaje que se le asigna a un dato es el que representa más el porcentaje que representan todos los valores menores que él.

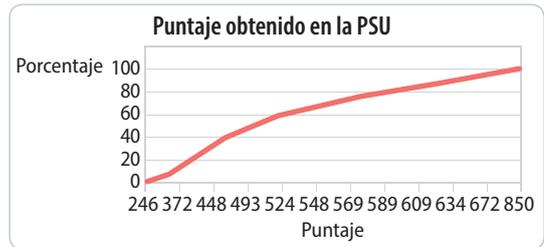
¿A qué medida de tendencia central corresponde el percentil 50?

Aproximadamente, ¿cuál es el porcentaje de postulantes que obtuvo un puntaje menor o igual que 448?

Aproximadamente, ¿cuál es el percentil 40?

## ¿Qué es un percentil?

La Prueba de Selección Universitaria (PSU) incluye una batería de pruebas estandarizadas que se utilizan para seleccionar a los postulantes que accederán a las universidades del país. Para analizar los resultados de un año dado, se representan en un gráfico los puntajes y los porcentajes acumulados del universo de postulantes.



Situación Interpretando un gráfico

¿Bajo qué puntaje está el 60% de los postulantes?

Para responder, debemos hallar el puntaje en el que se acumula el 60% de los puntajes, valor que llamaremos percentil 60.

Paso 1

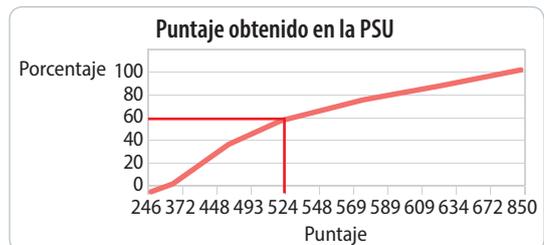
Identifica la información que se representa en cada eje.

- En el eje horizontal se representan los puntajes obtenidos en la prueba.
- En el eje vertical se representan los porcentajes acumulados de postulantes que rindieron la prueba.

Paso 2

Identifica el percentil 60.

Para hacerlo, busca en el eje vertical el 60% y en el eje horizontal el puntaje que le corresponde.



Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

Completa las siguientes afirmaciones a partir del gráfico de puntajes de la PSU:

- El \_\_\_\_ % de los postulantes obtuvo un puntaje mayor que 524.  
 El \_\_\_\_ % de los postulantes obtuvo un puntaje menor o igual que 850.  
 Aproximadamente, el \_\_\_\_ % de los postulantes obtuvo un puntaje menor o igual que 589.

► Para concluir

El **percentil** es una medida de posición que asume 99 valores que dividen en 100 partes iguales un conjunto de datos ordenados de menor a mayor. Está íntimamente relacionado con los porcentajes, ya que se puede interpretar como el valor que acumula por debajo de él un determinado porcentaje de valores iguales o inferiores a él.

Argumenta y comunica

Explica a un compañero o a una compañera la siguiente regla: “El percentil P es un valor tal que el P% de los datos son iguales o menores que él y el (100 – P)% son mayores que él”. Aplica esta regla para comprobar los resultados obtenidos en esta página y escribe tus conclusiones.

Repaso

1. Completa la tabla de frecuencias con la información que se ofrece.

Se realizó una entrevista a 120 personas y se estableció que 20 eran bolivianas, 50 ecuatorianas, 20 argentinas, 20 peruanas y 10 uruguayas.

País de origen de un grupo de personas		
País de origen	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Argentina		
Bolivia		
Ecuador		
Perú		
Uruguay		
Total		

Práctica guiada

2. Calcula cada percentil para el conjunto de datos.

1 0 2 4 7 2 0 1 3 4 6 3 5 1 2

Percentil 90.

**Paso 1** Determina el total de datos: 15.

**Paso 2** Calcula la posición del percentil 90.

$$90\% \text{ de } 15 \text{ es } 13,5$$

**Paso 3** Ordena los datos y marca la posición que calculaste.

0 0 1 1 1 2 2 3 3 4 4 5 ↓ 6 7

Posición 13,5

**Paso 4** Calcula el promedio entre 5 y 6. Ese es el percentil 90.

$$\frac{5+6}{2} = \frac{11}{2} = 5,5$$

- a. Percentil 10.
  - b. Percentil 75.
  - c. Percentil 20.
3. A partir de la información de la tabla, determina el intervalo donde se ubica el percentil dado.

Estaturas de alumnos de 8.º básico de un colegio	
Estatura (m)	Frecuencia acumulada
[1,30; 1,38[	2
[1,38; 1,46[	6
[1,46; 1,54[	15
[1,54; 1,62[	26
[1,62; 1,70]	30

Percentil 20.

El percentil 20 es aquel que acumula tras de sí el 20% de las estaturas.

$$20\% \text{ de } 30 \rightarrow 0,2 \cdot 30 = 6$$

Se identifica el primer intervalo cuya frecuencia acumulada iguala o supera este valor. Se observa que, en este caso, el percentil 20 se encuentra en el intervalo [1,38; 1,46[ m.

- a. Percentil 40.
- b. Percentil 75.
- c. Percentil 90.

Aplica

4. La tabla muestra el registro de un estudio sobre la edad a la que los niños comienzan a caminar.

Tiempo (meses)	9	10	11	12	13	14	15
Número de niños	13	45	57	39	8	5	1

- a. ¿Cuántos niños representan el 30% que aprende más tardíamente a caminar?, ¿a qué percentil representa este valor?
  - b. ¿Cómo se relaciona la mediana con el percentil 50?, ¿qué significa este valor de acuerdo a los datos entregados?
5. **Conecta con la Anatomía.** Los pediatras utilizan las llamadas curvas de crecimiento estándar y las gráficas de percentiles para detectar si existe alguna anomalía en el desarrollo normal de un niño o niña. Investiga sobre este tema e interpreta el resultado de que un niño esté en el percentil 40 de longitud.

Reflexiono

1. ¿Qué ventajas tiene dividir un conjunto de datos en percentiles? Piénsalo y comenta tu respuesta con tus compañeros y compañeras.
2. Si se desea calcular el valor de un determinado percentil, ¿siempre es necesario determinar la frecuencia acumulada del conjunto de datos en estudio?, ¿por qué? Justifica tu respuesta.

Refuerzo

1. Señala por escrito qué es un percentil.
2. Describe el procedimiento que utilizas para calcular un percentil a partir de un gráfico de porcentaje de frecuencias acumuladas.
3. Describe cómo determinas el percentil en una tabla de valores en la que se indica la frecuencia absoluta de los datos.

► **Propósito**  
Comprender el concepto de cuartil.

## ¿Para qué?

Cuando quieres clasificar un dato dentro de su población, por ejemplo, tu estatura dentro del conjunto de estaturas de todos los jóvenes de tu edad del país, puedes hacer uso de medidas de posición como el cuartil, que estratifica en cuatro grupos el conjunto de datos que se desea estudiar.

## Palabras clave

Gráfico

Medida de posición

Cuartil

Mediana

## Ampliando

Para una distribución de datos continuos se puede estimar el valor de los cuartiles a partir del gráfico de líneas que la representa.

## ¿Qué es un cuartil?

Un grupo de estudiantes de 8.º básico aceptó el desafío de resolver 5 preguntas tipo PSU y sus resultados se representan en la tabla:

Número de correctas	0	1	2	3	4	5
Frecuencia absoluta	6	7	4	2	2	0

### Situación Interpretando una tabla de datos

#### ¿Qué valores permiten dividir en 4 partes iguales los datos de la tabla?

Para hallar los valores, primero calcularemos las frecuencias acumuladas de la tabla, y luego determinaremos qué valores dejan tras de sí al 25%, al 50% y al 75% del total de datos, que llamaremos cuartil 1 ( $Q_1$ ), cuartil 2 ( $Q_2$ ) y cuartil 3 ( $Q_3$ ).

**Paso 1** Calcula las frecuencias acumuladas a partir de los datos de la tabla.

Completa la tabla tú:

Número de correctas	0	1	2	3	4	5
Frecuencia absoluta	6	7	4	2	2	0
Frecuencia acumulada						

¿Qué significan estos datos? Escríbelos del de menor frecuencia al de mayor frecuencia.

**Paso 2** Calcula el 25% del total de los datos.

$$0,25 \cdot 21 = 5,25$$

Ahora ubica en la tabla el valor que se encuentra en la posición inmediatamente superior, es decir, en la posición 6.

Como el valor que ocupa la sexta posición es 0, entonces este número es el cuartil 1:

$$Q_1 = 0$$

**Paso 3** Calcula el 50% del total de los datos.

$$0,5 \cdot 21 = 10,5$$

Responde la pregunta, ¿qué valor se encuentra en la posición 11?

El valor que se ubica en la posición 11 es \_\_\_\_\_, por lo tanto,  $Q_2 =$  \_\_\_\_\_.

**Paso 4** Calcula el 75% del total de los datos.

$$0,75 \cdot 21 = 15,75$$

Responde la pregunta, ¿qué valor se encuentra en la posición 16?

El valor que se ubica en la posición 16 es \_\_\_\_\_, por lo tanto,  $Q_3 =$  \_\_\_\_\_.

¿A qué medida de tendencia central corresponde  $Q_2$ ?

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

### ► Para concluir

El **cuartil** es una medida de posición que asume 3 valores que dividen en 4 partes iguales un conjunto de datos ordenados de menor a mayor. Cada uno de sus valores se puede interpretar como el valor que acumula por debajo de él el 25%, el 50% y el 75% de valores iguales o inferiores a él.

### Argumenta y comunica

¿Cómo calcularías el valor de los cuartiles si los datos están agrupados en intervalos? Explica a un compañero o a una compañera haciendo una analogía con el caso discreto.

Repaso

1. Determina las medidas de tendencia central de la muestra de datos (media, moda y mediana).

6	7	9	5	8	3	9	5	4	3
2	5	2	1	9	2	6	7	8	6
4	7	2	1	6	6	4	7	6	3

2. Calcula cada percentil para el conjunto de datos.

3	5	7	1	0	4	3	3	9
---	---	---	---	---	---	---	---	---

- a. Percentil 10.
- b. Percentil 25.
- c. Percentil 70.
- d. Percentil 85.

Práctica guiada

3. Calcula los valores de los cuartiles a partir de la información de la tabla.

Cantidad de hermanos de un grupo de estudiantes		
Cantidad de hermanos	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
0	3	3
1	9	12
2	6	18
3	18	36
4	3	39
5	2	41

Cuartil 1 (25%)	Cuartil 2 (50%)	Cuartil 3 (75%)
$0,25 \cdot 41 = 10,25$ $Q_1 = 1$	$0,5 \cdot 41 = 20,5$ $Q_2 = 3$	$0,75 \cdot 41 = 30,75$ $Q_3 = 3$

a.

Cantidad de automóviles por familia		
Cantidad de autos	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
0	6	6
1	13	19
2	4	23
3	4	27

b.

Número de calzado de los varones de un curso	
Número de calzado	Frecuencia absoluta
38	7
39	4
40	5
41	3

Aplica

4. Determina el intervalo en que se encuentra cada cuartil.

Ingreso mensual de 128 familias	
Ingreso (miles de pesos)	Frecuencia absoluta
[0, 100[	10
[100, 200[	28
[200, 300[	34
[300, 400[	40
[400, 500]	16

- a. Cuartil 1.
- b. Cuartil 2.
- c. Cuartil 3.

5. A partir de la información de la tabla, escribe V si la afirmación es verdadera y F si es falsa.

Horas semanales que dedican las alumnas de un curso a ver programas culturales								
Número de horas	0	1	2	3	4	5	6	7
Frecuencia absoluta	3	3	3	1	1	1	3	1

- a. Al menos el 25 % de las alumnas ven programas culturales durante 4 horas o menos.
- b. Por lo menos el 50% de las alumnas ven programas culturales durante 8 o más horas.
- c. El 75% de las alumnas a lo más ven programas culturales durante 6 horas o menos.

6. **Argumenta.** Diego le dice a Mónica que el valor del percentil 75 es equivalente al valor del cuartil 3. ¿Es correcta la afirmación de Diego?, ¿por qué? Da argumentos que justifiquen tu respuesta.

Reflexión

- 1. ¿Qué diferencias y semejanzas existen entre los percentiles y cuartiles? Piénsalo y confecciona un cuadro comparativo.
- 2. Los cuartiles, ¿se pueden calcular para variables cuantitativas y cualitativas? Justifica tu respuesta.

Refuerzo

- 1. Explica por escrito qué es un cuartil.
- 2. Describe el procedimiento que aplicas para calcular los cuartiles de un conjunto de datos representado en una tabla de frecuencias.
- 3. Indica qué percentiles son equivalentes al cuartil 1, al cuartil 2 y al cuartil 3.

► **Propósito**  
Representar gráficamente cuartiles.

### ¿Para qué?

El graficar correctamente una medida de posición permite mostrar en forma compacta y directa la información que representa, facilitando su comprensión y la toma de decisiones por parte del interesado en interpretarla.

### Palabras clave

Medidas de posición

Cuartiles

Diagrama de cajón

¿A qué percentiles corresponden  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$ ?

### Ayuda

Al rectángulo que definen las posiciones de  $Q_1$  y  $Q_3$  se le llama cajón o caja.

### Ayuda

A las líneas que conectan los valores mínimo y máximo al rectángulo central se les llama bigotes.

### Ayuda

El mínimo es el menor valor que toma la variable en determinada situación.

El máximo es el mayor valor que toma la variable en determinada situación.

¿Cuál es tu interpretación de este diagrama?

## ¿Cómo representar gráficamente los cuartiles?

El propietario de una pizzería desea averiguar cuánto tiempo demoran las entregas de sus pizzas en los horarios de alta demanda de la semana. Para lograrlo, registró la cantidad de minutos (min) que demoraron 45 entregas seleccionadas al azar. Luego, calculó los siguientes 5 datos:

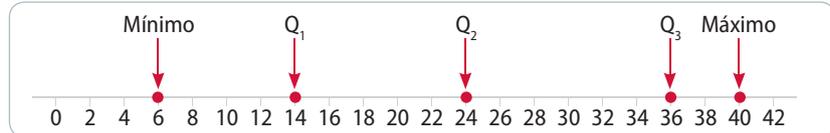
Mínimo (min)	$Q_1$ (min)	$Q_2$ (min)	$Q_3$ (min)	Máximo (min)
6	14	24	36	40

### Situación 1 Construyendo un diagrama de cajón

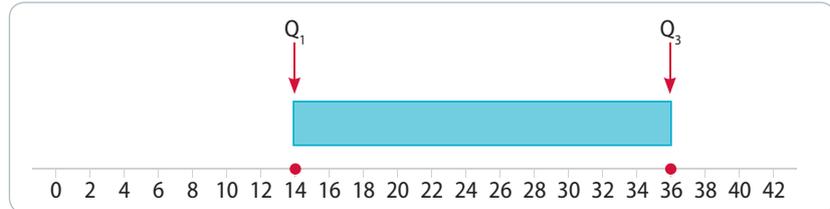
#### ¿Cómo se puede representar gráficamente la información de la tabla?

Para responder construiremos un diagrama de cajón, que permite visualizar la información e interpretarla.

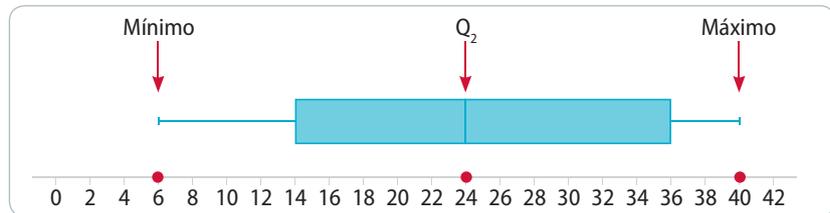
**Paso 1** Representa los valores de la tabla en un eje numérico.



**Paso 2** Dibuja un rectángulo sobre un eje numérico con su extremo izquierdo en la posición de  $Q_1$  y su extremo derecho en la posición de  $Q_3$ .

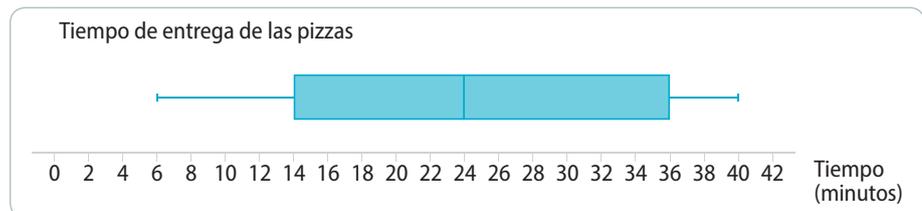


**Paso 3** Marca dentro del rectángulo la posición de  $Q_2$ . Además, marca las posiciones del máximo y el mínimo y únelas mediante una línea al rectángulo.



Por lo tanto:

**R:** Se puede representar la información de la tabla mediante el siguiente diagrama de cajón:



## Situación 2 Interpretando un diagrama de cajón

Se realizó una encuesta para registrar la estatura de los niños de 12 años de un colegio. A partir de estos datos se confeccionó el diagrama de cajón del costado. ¿Cómo se puede interpretar?

Para responder identificaremos los elementos del diagrama y los asociaremos al contexto del problema.

**Paso 1** Identifica los elementos que constituyen el cajón.

En él puedes reconocer los valores de los cuartiles. Estos son:

$$Q_1 = 1,59$$

$$Q_2 = 1,62$$

$$Q_3 = 1,64$$

**Paso 2** Identifica los elementos que constituyen los bigotes.

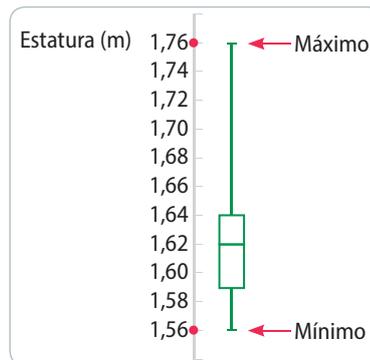
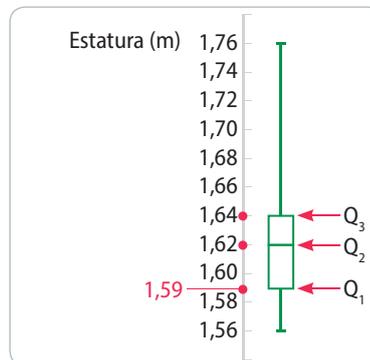
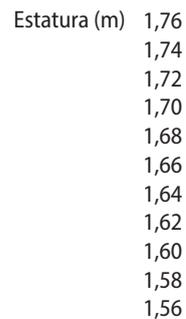
En ellos puedes identificar los valores extremos, que son:

$$\text{Máximo} = 1,76$$

$$\text{Mínimo} = 1,56$$

¿Cuál es el rango intercuartil de este diagrama?

Estatura niños de 12 años de un colegio



Completa para responder la pregunta inicial:

R: Al menos el 25% de los niños y niñas mide menos de \_\_\_\_\_.

Al menos el 50% de los niños y niñas mide menos de \_\_\_\_\_.

El encuestado de mayor altura mide \_\_\_\_\_.

## Ampliando

- Una distribución de datos es más homogénea que otra si los bigotes de su diagrama de cajón son más cortos y su mediana está ubicada más próxima al centro del cajón.
- Una distribución de datos es más heterogénea que otra si los bigotes de su diagrama de cajón son más largos y su mediana está ubicada más alejada del centro del cajón.

### Ayuda

A la longitud del cajón se le llama rango intercuartil y se puede calcular como la siguiente diferencia:

$$Q_3 - Q_1$$

### Ayuda

Si los bigotes de un diagrama de cajón son muy largos, se dice que la distribución representada posee valores atípicos.

¿La distribución de las estaturas es homogénea o heterogénea?, ¿por qué? ¿Presenta valores atípicos? Nómbralos.

## Para concluir

Para **representar gráficamente los cuartiles** de una distribución de datos se utiliza un **diagrama de cajón** que consiste en un rectángulo, llamado cajón, y sus prolongaciones, llamadas bigotes, tales que:

- En el cajón se puede identificar el valor de los cuartiles  $Q_1$ ,  $Q_2$  y  $Q_3$ .
- En los bigotes se pueden identificar los valores extremos de la distribución de datos.

## Argumenta y comunica

- ¿Por qué una distribución de datos cuyo diagrama de cajón posee unos bigotes largos es heterogénea? Busca argumentos y discútelos con un compañero o una compañera.
- ¿Cómo influye el rango intercuartil en la homogeneidad o heterogeneidad de una distribución? Comunica tu respuesta al curso.

Repaso

1. Calcula e interpreta los valores de los cuartiles que representan los datos de la tabla.

Pacientes con caries que fueron atendidos durante un mes	
Número de caries	Cantidad de pacientes
1	5
2	23
3	45
4	12

2. Calcula la mediana de cada conjunto de datos.

a. 

20	13	12	10	9
----	----	----	----	---

b. 

9	3	9	7	2	3	7	9
---	---	---	---	---	---	---	---

c. 

5	14	10	34	20	28
---	----	----	----	----	----

Práctica guiada

3. Representa en un diagrama de cajón cada distribución de datos.

Consumo de comida chatarra en una semana por un grupo de personas.

1	3	1	4	3	1	3
2	4	3	5	1	2	1
1	3	4	1	2	3	1
4	4	3	5	1	4	3
3	5	2	4	1	3	5

Paso 1 Construye una tabla de frecuencias.

Cantidad de veces por semana	Frecuencia absoluta	Frecuencia acumulada
1	10	10
2	4	14
3	10	24
4	7	31
5	4	35

Paso 2 Calcula los cuartiles y el mínimo y el máximo.

Valor mínimo	Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>	Valor máximo
1	1	3	4	5

Paso 3 Construye el diagrama de cajón.



- a. Número de días de morosidad de un grupo de clientes en una multitienda.

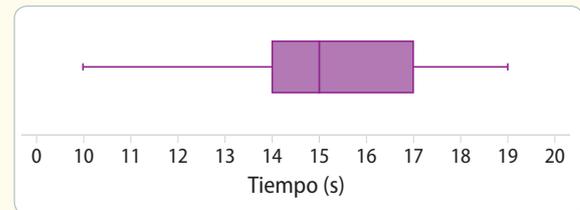
40	88	72	90	9	14
21	10	15	25	23	7
12	20	22	7	20	34
34	37	11	12	22	8

- b. Número de turnos nocturnos realizados por los enfermeros de una atención de urgencia durante un mes.

4	4	2	8	1	1
21	0	0	5	3	7
22	0	22	3	2	3
4	7	18	2	22	1

4. Construye, para cada curso, un diagrama de cajón a partir las medidas de posición de la distribución de los tiempos registrados en una carrera.

Curso A	Mín	Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>	Máx
	10s	14s	15s	17s	19s



a. 

Curso B	Mín	Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>	Máx
	13s	13,2s	13,4s	13,9s	15s

b. 

Curso C	Mín	Q <sub>1</sub>	Q <sub>2</sub>	Q <sub>3</sub>	Máx
	13,4s	13,7s	13,9s	14,9s	15s

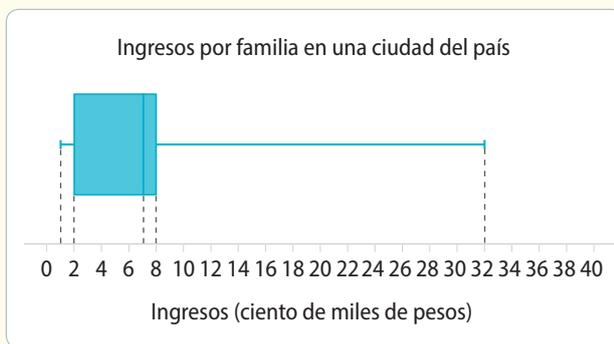
Aplica

5. Realiza las actividades. Luego, responde.

- a. Registra en tu cuaderno la altura de cada uno de tus compañeros y compañeras.
- b. Con los datos obtenidos, construye una tabla de frecuencias porcentuales acumuladas.
- c. Determina el valor mínimo, los cuartiles y el valor máximo de la distribución de datos.

- d. Representa en un diagrama de cajón los valores de la pregunta c y responde:
- ¿Entre qué valores se encuentra el 25%, 50% y 75% de la masa corporal de los alumnos?
  - ¿Cómo son los bigotes del diagrama?, ¿tienen una gran amplitud?, ¿qué conclusiones puedes obtener al respecto?
  - ¿La distribución de las masas corporales es homogénea u heterogénea? ¿Cómo lo sabes?

**6. Interpreta la información representada en el diagrama de cajón y luego responde.**



- ¿Cuáles son los ingresos mínimos y máximos?
- ¿Entre qué valores fluctúa el 25% más bajo de los ingresos?
- ¿Entre qué valores fluctúa el 25% más alto de los ingresos?
- ¿Es correcto afirmar que la mitad de las familias gana \$ 800 000 o menos?

**7. Describe el procedimiento.** Representa en un diagrama de cajón los datos presentados en la situación y describe paso a paso cómo realizas su construcción.

En un estudio de mercado realizado por una automotora se obtuvieron los siguientes resultados respecto a los precios de venta:

- La mediana del precio de venta de los vehículos es de aproximadamente \$ 3 700 000.
- El 25% de los vehículos se vende en menos de \$ 2 300 000.
- El 25% de los vehículos se vende en más de \$ 4 200 000.
- El 50% de los vehículos se vende por un valor que va desde los \$ 1 200 000 a los \$ 3 700 000.
- El precio de venta máximo es de \$ 5 400 000.

**8. Desafío.** El diagrama muestra la distribución de estaturas de un equipo de fútbol y otro de básquetbol.



¿Cuál equipo piensas que es el de básquetbol?, ¿por qué? Justifica tu respuesta y comúnicala a tu profesor o profesora.

**Reflexión**

1. Si representas una distribución de datos en un histograma y lo comparas con su respectivo diagrama de cajón, ¿qué puedes observar? ¿Qué semejanzas y diferencias notas que existen entre ellos? Explica.
2. En un diagrama de cajón, ¿la mediana puede coincidir con el valor de los cuartiles 1 o 3 o con alguno de los valores extremos de los bigotes? Justifica tu respuesta y coméntala.

**Refuerzo**

1. Indica los elementos que posee un diagrama de cajón.
2. Explica para qué sirve representar los cuartiles en un diagrama de cajón.
3. Dibuja un diagrama de cajón considerando los valores:  
 Valor mínimo = 0  
 Valor máximo = 60  
 $Q_1 = 35$                        $Q_2 = 45$                        $Q_3 = 58$

► Propósito

Representar medidas de posición usando *software*.

¿Para qué?

El uso de un *software* para representar distribuciones de datos permite visualizar rápidamente sus principales características y propiedades y sacar conclusiones a partir de ellas.

Palabras clave

- Diagrama de cajón
- Software
- Cuartiles

## ¿Cómo construir diagramas de cajón usando un software?

Las notas obtenidas por las alumnas de un curso en una prueba de Inglés fueron las siguientes:

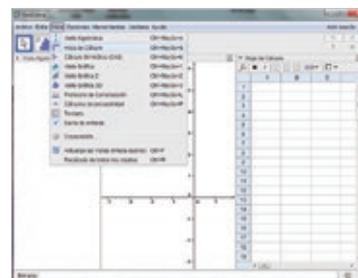
6,2	3,1	4,5	6,0	3,8	4,7	7,0	6,0	6,4	7,0
4,8	5,7	7,0	2,0	7,0	6,0	4,5	7,0	5,8	6,2
6,1	7,0	6,5	6,3	3,0	7,0	5,9	5,8	6,3	7,0

### Situación 1 Construyendo el diagrama de cajón

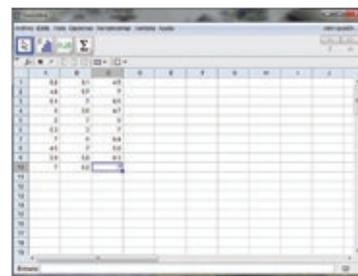
¿Cuál es el diagrama de cajón que representa la distribución de notas?

Para construir el diagrama usaremos el *software* GeoGebra.

**Paso 1** Selecciona en el menú Vista y luego Hoja de Cálculo. Aparecerá una planilla como la que se indica. Ampliála para visualizarla mejor.



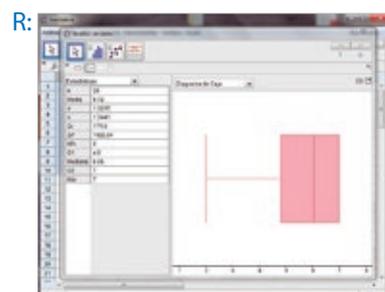
**Paso 2** Ingresas los datos de las notas de Inglés en ella, usando punto en vez de coma para los números decimales. Puedes ingresarlas en los lugares que desees.



**Paso 3** Selecciona todos los datos y luego la herramienta Análisis de una variable . Presiona el botón Analiza y selecciona de entre las opciones, Diagrama de Caja.



El diagrama de cajón que representa la información tabulada es:



**Ayuda**  
A un costado del diagrama aparecen varios parámetros estadísticos de la distribución representada. Algunos de ellos son la media, la desviación estándar, la suma de los valores, los cuartiles, la mediana y los valores extremos.

¿Cómo interpretas los parámetros del diagrama de cajón?

¿Por qué el cajón no tiene uno de sus bigotes? ¿Qué significa esto?

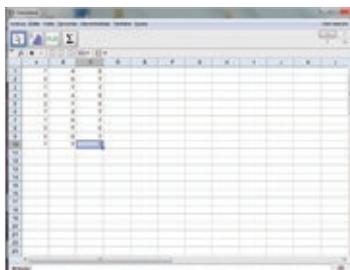
## Situación 2 Constatando variaciones en el diagrama de cajón

El profesor de Inglés decidió premiar a sus alumnas por su buen comportamiento y su responsabilidad en la entrega de sus trabajos y redondeó las notas con dígitos decimales al entero siguiente. ¿Qué diferencias y semejanzas tendrán el diagrama de cajón de la situación 1 y este nuevo diagrama?

Para responder debemos reemplazar las notas decimales. Las nuevas notas son:

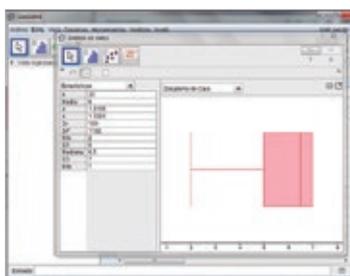
7	4	5	6	4	5	7	6	7	7
5	6	7	2	7	6	5	7	6	7
7	7	7	7	3	7	6	6	7	7

**Paso 1** Ingresas las notas corregidas a la hoja de cálculo.



**Paso 2** Construye el nuevo diagrama de cajón y observa las semejanzas y diferencias que tiene con el diagrama de la situación 1.

¿Por qué piensas que el diagrama sigue teniendo solo un bigote?



¿Cuál es el rango intercuartil de esta distribución?

Completa para responder la pregunta inicial:

**R:** El valor de los mínimos de ambas distribuciones es \_\_\_\_\_.

El valor de los máximos de ambas distribuciones es \_\_\_\_\_.

En ambas distribuciones coinciden el valor del máximo y el valor del tercer \_\_\_\_\_.

La mediana de la primera distribución es \_\_\_\_\_ que la mediana de la segunda distribución.

### Ayuda

Puedes construir rápidamente diagramas de cajón ingresando el código TM8P163 en <http://codigos.auladigital.cl>. Basta que digites los datos que deseas representar y escribas "box plot".

### ► Para concluir

El uso de **GeoGebra** permite construir diagramas de cajón a partir de un conjunto de datos, además de calcular sus principales parámetros estadísticos.

### Argumenta y comunica

Comunica y explica a un compañero o a una compañera qué forma piensas que tiene el diagrama de cajón que representa cada una de las siguientes distribuciones de datos:

- 1, 1, 1, 1, 1 y 1.
- 1, 2, 3, 4, 5 y 6.
- 1, 1, 1, 4, 4 y 4.

Repaso

1. Observa los datos de la tabla y realiza las actividades.

Ventas de calzado en una zapatería	
Número de calzado	Cantidad de clientes
35	6
36	7
37	12
38	13
39	10
40	9
41	11
42	8

- a. Calcula e interpreta el valor mínimo, los cuartiles y el valor máximo del conjunto de datos.
- b. Representa el conjunto de datos en un diagrama de cajón.

Práctica guiada

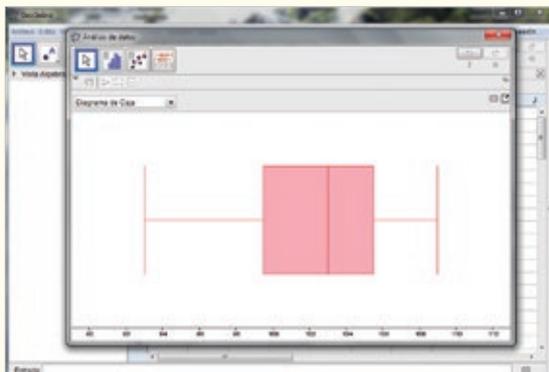
2. Utilizando GeoGebra, representa cada distribución de datos en un diagrama de caja.

Los datos representan el perímetro de la cintura (medido en centímetros) de 24 pacientes con obesidad.

105	99	94	105	95	109
102	104	106	104	105	93
103	101	102	96	107	102
98	107	100	106	103	107

**Paso 1** Abre GeoGebra y escribe los datos en la hoja de cálculo, selecciónalos y haz clic sobre la opción Análisis de una variable 

**Paso 2** Selecciona Diagrama de caja en la pestaña y obtendrás la siguiente representación:



- a. Número de kilómetros recorridos por un deportista durante cada mes de entrenamiento.

110	112	114	115	105	109
115	115	116	114	115	119
118	118	112	126	117	112
107	111	110	116	113	117

- b. Edades de 30 personas.

25	32	45	48	30	21
32	41	30	18	51	47
20	58	40	23	41	24
50	43	22	30	30	34
36	22	45	55	27	28

3. Usa GeoGebra para construir el diagrama de cajón a partir de los datos.

Valor mínimo	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	Valor máximo
1	2	5	6	8

**Paso 1** Abre GeoGebra y escribe la palabra "diagrama" en la barra de entrada. Aparecerá un listado de opciones, debes escoger la que se muestra a continuación:

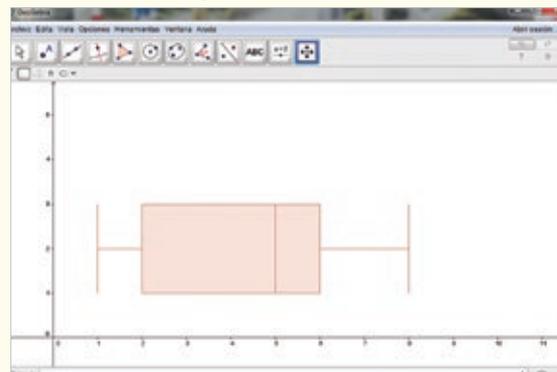
Entrada: DiagramaCaja[ <Offset\_y>, <Escala\_y>, <Valor inicial>, <Q1>, <Mediana>, <Q3>, <Valor final> ]

El primer parámetro indica la distancia que habrá entre el diagrama y el eje X, el segundo es la altura que tendrá el cajón del diagrama y los otros 5 valores son los que aparecen en la tabla, es decir, las medidas de posición.

**Paso 2** Para el primer parámetro escribe 2 y para el segundo 1. Luego, ingrésale valor de los otros 5 valores, esto es:

Entrada: DiagramaCaja[2, 1, 1, 2, 5, 6, 8]

**Paso 3** Finalmente, presiona la tecla Enter y obtendrás lo siguiente:



a.

Valor mínimo	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	Valor máximo
2	3	4	6	8

b.

Valor mínimo	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	Valor máximo
1,5	2	4,5	5	5,5

c.

Valor mínimo	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	Valor máximo
-3	-2	0	2	3

## Aplica

4. Utiliza GeoGebra para construir el diagrama de cajón y el histograma que representan a cada conjunto de datos. Además, relaciona y compara las características de cada tipo de representación.

- a. Cantidad de horas semanales que se conectan al chat un grupo de personas.

7	3	4	8	3
2	5	3	9	2
2	1	4	7	12
5	9	6	3	5
3	2	4	7	11
8	5	4	6	7
8	5	2	1	6
2	4	5	11	4

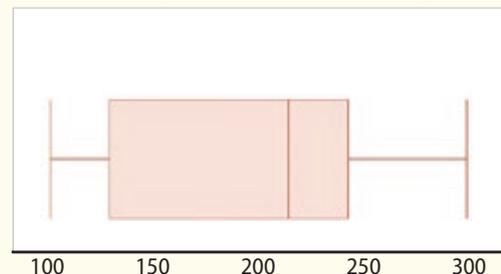
- b. Cantidad de visitas al médico de 30 personas durante un año.

0	2	0	9	2	4
5	0	4	12	3	0
1	2	1	7	4	1
0	2	14	0	4	2
0	1	1	5	3	6

5. **Conecto con la Salud.** Cuando una persona tiene el colesterol alto en la sangre aumenta el riesgo de que sufra un ataque al corazón o un accidente cerebrovascular, es por esto que es importante conocer y controlar los niveles de colesterol. A continuación se muestra un conjunto de datos de un grupo de 60 personas a las que se les ha medido el nivel de colesterol total que poseen en su sangre (expresado en mg/dL). Observa los resultados y realiza las actividades.

125	190	130	240	210
224	118	141	205	248
110	215	250	220	109
137	217	100	200	267
146	225	116	250	270
300	102	250	120	212
156	210	198	240	209
236	214	245	118	180
280	132	290	260	278
300	103	100	280	114
131	194	266	101	280
298	105	167	190	189

- a. Utiliza GeoGebra para determinar el valor mínimo, los cuartiles y el valor máximo.  
b. Verifica que el diagrama de cajón correspondiente al conjunto de datos es el siguiente:



- c. Interpreta la información representada.

## Reflexión

- Un diagrama de cajón, ¿puede representar valores negativos? Piénsalo y da argumentos que justifiquen tu respuesta.
- Un diagrama de cajón, ¿puede no tener bigotes?, ¿cómo puedes interpretar este hecho? Piénsalo y compara tu respuesta con la de tus compañeros o compañeras.

## Refuerzo

- Señala las ventajas de utilizar un *software* para construir un diagrama de cajón.
- Indica los botones o aplicaciones del *software* GeoGebra que ocupas para la construcción del diagrama de cajón.
- Describe el procedimiento que aplicas para realizar el diagrama de cajón de un conjunto de datos.

► **Propósito**

Comparar poblaciones y muestras usando medidas de posición.

¿Para qué?

Las medidas de posición permiten comparar conjuntos de datos en forma sencilla, ya que como los estratifica de acuerdo a su valor, facilita la comparación de estratos similares de las distribuciones. Es así como permite comparar, por ejemplo, los ingresos del 25 % de la población más pobre de un país con su equivalente estrato de la población de otro país.

**Palabras clave**

Diagrama de cajón

Cuartiles

Comparación

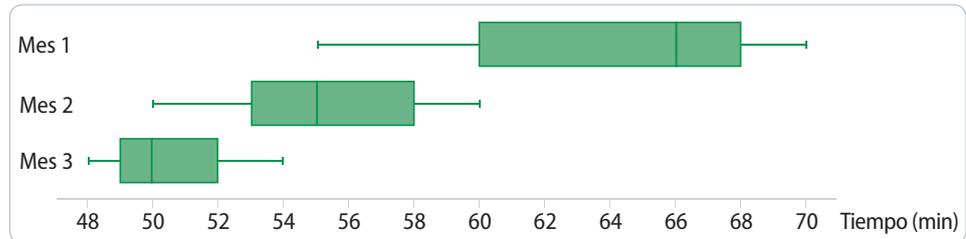
¿Cómo fueron variando los tiempos máximos y mínimos del ciclista?  
¿Cómo interpretas esta variación?

¿Cómo varió la mediana en los meses considerados?  
¿fue aumentando o disminuyendo?

¿Cuál es la diferencia entre el tiempo máximo y el tiempo mínimo registrados en los tres meses?

## ¿Cómo comparar muestras usando medidas de posición?

Un ciclista entrena habitualmente como una forma de recrearse y para mantener un buen estado de salud. Él va de su casa a su trabajo en bicicleta y ha ido registrando lo que demora para constatar el progreso de su rendimiento. A partir de estos registros, construyó los siguientes diagramas de cajón para representar los tiempos registrados durante los primeros 3 meses de su rutina.



**Situación** Comparando diagramas de cajón

¿Qué conclusiones pueden extraerse de la evolución del rendimiento del ciclista a partir de los tres diagramas de cajón?

Primero compararemos los tiempos máximos y mínimos de las distribuciones y luego el valor de sus cuartiles.

**Paso 1** Identifica los valores máximos y mínimos de las distribuciones representadas. Completa la tabla con los valores que faltan.

	Mes 1	Mes 2	Mes 3
Tiempo mínimo (min)	55	50	
Tiempo máximo (min)		60	
Rango total (min)		10	6

**Paso 2** Identifica los cuartiles. Completa la tabla con los valores que faltan.

	Mes 1	Mes 2	Mes 3
Cuartil 1 (min)			49
Cuartil 2 (min)		55	
Cuartil 3 (min)			

**Paso 3** Compara e interpreta los valores obtenidos.

Completa para responder la pregunta inicial:

**R:** En el mes 1, el \_\_\_\_ % de las veces el ciclista demoró entre 66 y 70 minutos. En el mes 2, el \_\_\_\_ % de las veces el ciclista demoró entre 50 y 53 minutos. En el mes 3, el \_\_\_\_ % de las veces el ciclista demoró entre 48 y 50 minutos. Como conclusión, los datos indican que el rendimiento del ciclista ha ido aumentando a lo largo del tiempo.

► **Para concluir**

Para **comparar distribuciones de datos** representadas en diagramas de cajón primero debes identificar las medidas de posición, compararlas y obtener conclusiones acordes a ellas.

**Argumenta y comunica**

¿Qué otras conclusiones puedes extraer de la comparación realizada entre los diagramas? Comunícalas a un compañero o una compañera, discute las de él o ella y hagan un listado con las conclusiones comunes.

Repaso

- Escribe V si la afirmación es verdadera y F si es falsa.
  - El percentil 75 equivale al cuartil 2.
  - En una distribución de datos se pueden definir 99 percentiles.
  - Si un diagrama de cajón no posee bigotes, entonces no tiene valores atípicos.
  - Para el conjunto de datos compuesto por los números 11, 11, 11 y 15, el cuartil 2 es 11.
  - Siempre se cumple que  $Q_2 > Q_1$ , donde  $Q_2$  es el cuartil 2 y  $Q_1$  es el cuartil 1.

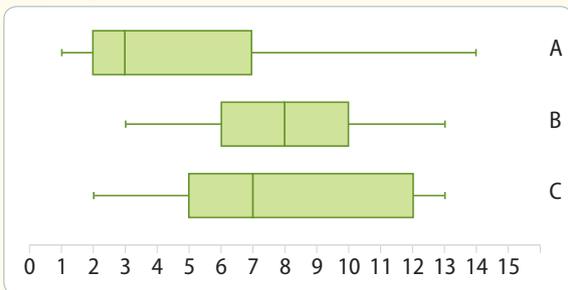
- Determina los cuartiles de la siguiente distribución de datos:

3	5	4
7	1	4
6	5	5

- a.  $Q_1 =$  \_\_\_      b.  $Q_2 =$  \_\_\_      c.  $Q_3 =$  \_\_\_

Práctica guiada

- Observa los diagramas de cajón que representan a los conjuntos de datos A, B y C y responde las preguntas.

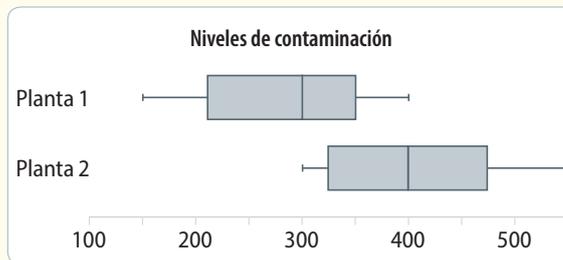


¿A cuál de los conjuntos pertenece el dato mayor?  
 El extremo del bigote derecho del diagrama que representa al conjunto A es el que alcanza el mayor valor: 14.

- ¿A cuál de los conjuntos pertenece la mediana mayor?
- ¿A cuál de los conjuntos pertenece el primer cuartil menor?
- ¿Cuál de los conjuntos tiene el mayor rango intercuartil?
- ¿Cuál de los conjuntos de datos tiene una distribución simétrica?
- ¿Cuál de los conjuntos contiene los dos valores extremos más alejados?

Aplica

- En una empresa se observan los niveles de contaminación que generan dos de sus fábricas. Los datos obtenidos se muestran en los siguientes diagramas.



En el eje horizontal se muestran las ppm (partes por millón) de contaminación emitidas. Analiza qué planta contamina más.

- Crea.** Escribe un conjunto de datos cuyas medidas de posición sean:  
 Valor mínimo = 2  
 Cuartil 1 = 2  
 Cuartil 2 = 4  
 Cuartil 3 = 5  
 Valor máximo = 10
- Describe el procedimiento.** Explica cómo puedes determinar si los datos de un conjunto son mayores que los de otro si los valores extremos coinciden, es decir, si sus rangos totales son iguales.

Reflexión

- ¿Qué significa que los rangos intercuartiles de los diagramas de cajón de dos conjuntos de datos sean iguales?
- Si los valores mínimos de dos conjuntos de datos son iguales, ¿qué característica común tienen los diagramas de cajón que los representan? Explica y ejemplifica.

Refuerzo

- ¿Qué parámetros puedes identificar en un diagrama de cajón? Define cada uno de ellos e indica qué representa.
- Describe cómo puedes comparar los diagramas de cajón de dos conjuntos de datos. ¿Qué información de la que se representa en ellos debes tener en cuenta para realizar esta comparación?

# Ingreso familiar y medidas de posición

## ¿Qué es un quintil?

El Ministerio de Desarrollo Social clasifica a las familias chilenas según su nivel de ingresos. Esta clasificación permite al Estado organizar la asignación de becas y créditos a quienes más los necesitan.

Para clasificar a la población se la divide en cinco grupos iguales, llamando quintil a cada uno de ellos. De esta manera, se definen en orden creciente de ingreso los quintiles 1, 2, 3, 4 y 5, incluyendo cada uno un 20% de la población.

Es así como el quintil 1 representa a la población con la condición socioeconómica más vulnerable, y el quintil 5 a las personas de mayores ingresos del país.

A continuación se muestra una tabla con la clasificación de quintiles de las familias chilenas según el promedio de los ingresos de sus integrantes.

Quintil	Promedio de ingresos per cápita	
	Desde (\$)	Hasta (\$)
1	0	74 969
2	74 970	125 558
3	125 559	193 104
4	193 105	352 743
5	352 744	-

Encuesta Casen 2011, actualizada por IPC a agosto de 2014

### Sabías que...

Matemáticamente, el quintil es una medida de posición que asume 4 valores que dividen en 5 partes iguales un conjunto de datos ordenados de menor a mayor. Según esta definición, se da la siguiente equivalencia:

Quintil 1 → Percentil 20

Quintil 2 → Percentil 40

Quintil 3 → Percentil 60

Quintil 4 → Percentil 80

Para saber a qué quintil pertenece un grupo familiar, se debe calcular su ingreso promedio, es decir, el ingreso per cápita de sus miembros. Esto puedes hacerlo así:

Paso  
1

Suma el promedio del ingreso líquido de cada integrante de la familia.

Paso  
2

Divide la suma del paso 1 por la cantidad de integrantes del grupo familiar.

### Sabías que...

Las becas y ayudas estatales son asignadas de acuerdo al quintil al cual pertenece una familia. Si una familia pertenece a quintiles más bajos, tiene más posibilidades de obtener ayuda del Estado.

### Actividad grupal

Reúnanse en grupos de 3 o 4 integrantes para realizar la actividad. Luego, comuniquen sus respuestas al curso.

1. Analicen el uso que se da de los quintiles en la distribución de las familias según el ingreso per cápita de sus integrantes. ¿Qué relación tiene la definición dada para clasificar las familias según sus ingresos con la definición estadística de quintil que se da en el recuadro Sabías que... de la página 328? ¿Corresponde a un mal uso de este indicador estadístico o solo es un uso conveniente para la clase de información que se desea representar? Den argumentos y discúptanlo al interior del grupo.
2. Calculen el ingreso per cápita de una familia compuesta por 4 personas: un adulto que gana mensualmente \$ 270 000, su hija que gana \$ 120 000 al mes, su hijo que gana \$ 115 000 al mes y su nieta que no tiene ingresos. Con este dato identifiquen a qué quintil pertenece la familia. ¿En qué monto debería aumentar el ingreso de esta familia para avanzar un quintil en su clasificación?
3. Ingresen el código **TM8P329** en <http://codigos.auladigital.cl> e investiguen cuáles son las becas de educación superior a las que pueden optar de acuerdo al quintil en el que se encuentren sus familias.

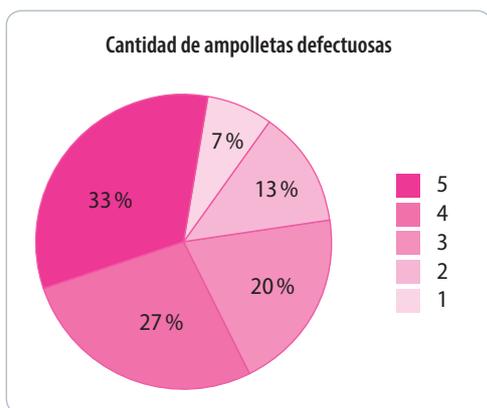
**Lección 45: ¿Qué es un percentil?**

- 1 La tabla muestra la cantidad de gasolina que consume una flota de camiones diariamente.

Consumo de gasolina de la flota de camiones	
Gasolina (litros)	Cantidad de camiones
[10, 20[	8
[20, 30[	15
[30, 40[	11
[40, 50[	17
[50, 60]	25

- ¿En qué intervalo se encuentra el percentil 23? ¿Cómo puedes interpretar este valor?
- ¿En qué intervalo se ubica el percentil 45? ¿Qué significa este valor?

- 2 En la fabricación de un tipo de ampollitas, se han detectados algunas unidades defectuosas. Observa el gráfico que muestra la cantidad de cajas que tenían dañadas 1, 2, 3, 4 o 5 ampollitas y responde las preguntas.



- ¿Cuál es el percentil 50? ¿Qué significa este valor?
- ¿Cuál es el percentil 20? ¿Qué representa este valor?

**Lección 46: ¿Qué es un cuartil?**

- 3 En una institución bancaria se ha realizado un estudio sobre la cantidad de dinero que retiran sus clientes en un día, obteniéndose la siguiente información.

Cuartil 1	\$ 20 000
Cuartil 2	\$ 45 000
Cuartil 3	\$ 60 000

- Interpreta cada medida de posición.
- ¿Se podría saber cuál es la cantidad mínima que retiran los clientes?, ¿por qué?
- ¿Se puede afirmar que existen clientes que retiran \$ 30 000? Justifica tu respuesta.

**Lección 47: ¿Cómo representar gráficamente los cuartiles?**

- 4 En la tabla se presentan las notas que tuvieron Carlos y Patricia en los controles de Historia y Geografía durante el primer semestre.

Carlos	7	3	5	4	6	2	7
Patricia	4	5	6	5	4	6	5

- Representa los datos en un diagrama de cajón.
  - ¿Quién tuvo un mejor rendimiento en Historia y Geografía?
- 5 Un grupo de jóvenes de 17 años tiene una masa corporal cuya mediana es 61,4 kg, el 25% de menor masa alcanza como máximo los 58 kg y el 25% de mayor masa tiene como mínimo una masa de 78,4 kg. ¿A qué cuartiles corresponden cada uno de los datos anteriores?
- 6 A un colegio ingresaron 85 estudiantes nuevos a mitad de año. El detalle de las nuevas incorporaciones se encuentra en la tabla.

Ingreso de estudiantes nuevos	
Nivel	Cantidad de estudiantes
1.º básico	18
2.º básico	12
3.º básico	17
4.º básico	9
5.º básico	11
6.º básico	2
7.º básico	12
8.º básico	4

- Determina el valor máximo y mínimo.
- Determina los cuartiles.
- Representa en un diagrama de cajón el conjunto de datos.
- Redacta dos conclusiones que puedas inferir del diagrama.

**Lección 48.** ¿Cómo construir diagramas de cajón utilizando un software?

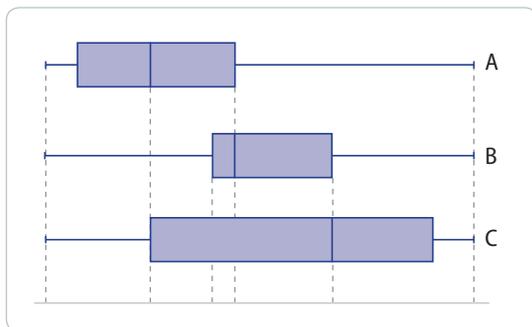
- 7 La tabla muestra los datos de la presión sistólica sanguínea medida a 100 mujeres antes de comenzar un tratamiento.

Presión sistólica sanguínea	
Presión (mm Hg)	Cantidad de mujeres
105	14
107	12
125	34
138	40

- Determina el valor mínimo, los cuartiles y el valor máximo del conjunto de datos.
- Utiliza GeoGebra para construir el diagrama de cajón de la distribución de datos.
- Inventa un conjunto de datos que tenga los mismos cinco indicadores de posición que determinaste en la parte a. ¿Tendrá también un diagrama de cajón similar al que construiste en la parte b?, ¿por qué?

**Lección 49.** ¿Cómo comparar muestras usando medidas de posición?

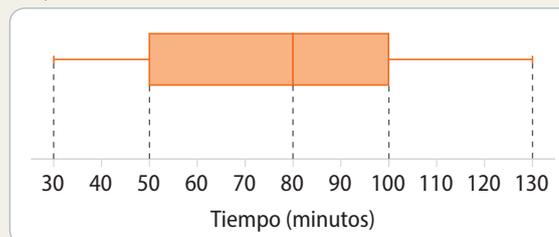
- 8 Interpreta los diagramas de cajón para escribir V si la afirmación es verdadera y F si es falsa.



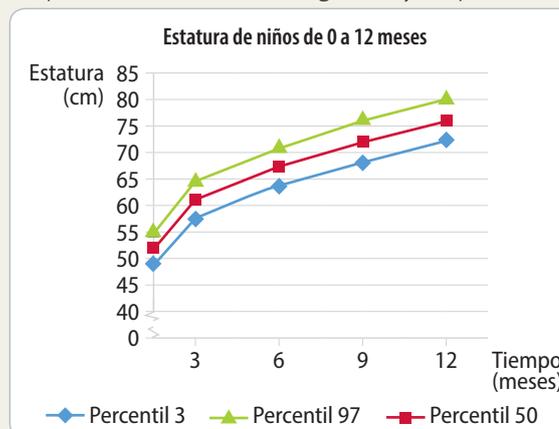
- \_\_\_ Los tres grupos tienen la misma mediana.
- \_\_\_ Los tres grupos tienen la misma cantidad de datos.
- \_\_\_ El 50% de los datos del grupo C es igual al 75% de los datos del grupo B.
- El rango intercuartil del grupo A es mayor que el del grupo C.
- \_\_\_ Los grupos tienen el mismo máximo y mínimo.

### Desafíos de integración

- a. Analiza el diagrama de cajón que representa los minutos que tardó en hacer efecto un medicamento en un grupo de personas. Luego, responde.



- ¿La mayoría de los tiempos se ubica por sobre o debajo de la mediana?
  - ¿Cuál es el rango intercuartil?
  - ¿Cuál es el tiempo mínimo que tardó el medicamento en hacer efecto?, ¿y el máximo?
- b. La Organización Mundial de la Salud (OMS) establece algunos parámetros respecto del crecimiento de los recién nacidos, representándolos en percentiles. Observa el gráfico y responde.



- ¿Cuál es la mediana de la altura de un niño de 6 meses?
- Si un niño de 3 meses mide 55 cm aproximadamente, ¿bajo qué percentil se encuentra?
- Si un niño de 12 meses mide 71 cm aproximadamente, ¿bajo qué percentil se encuentra? ¿Qué significado tiene esto?

### Estrategia alternativa

Selecciona uno de los desafíos y resuélvelo nuevamente, pero esta vez utiliza otra estrategia. Compara los resultados e indica cuál de las dos estrategias es la más adecuada.

Elige una estrategia

### Algunas estrategias

- Usar un proceso de ensayo y error.
- Aplicar procesos reversibles.
- Descartar información irrelevante.
- Usar un problema similar pero más sencillo.
- Construir un esquema, diagrama o tabla.
- Encontrar un patrón.
- Usar modelos matemáticos.
- Usar razonamiento lógico.
- Identificar submetas.

Las jefaturas de dos oficinas llevan el registro de los atrasos mensuales del personal a su cargo. Cada uno de ellos elaboró una tabla con esta información, correspondiente a un mes de 20 días hábiles.

**Oficina A**

Número de atrasos	0	1	2	3	4	5	6
Número de días	11	1	3	1	2	1	1

**Oficina B**

Número de atrasos	0	1	2	3	4	5	6
Número de días	9	1	5	4	0	0	1

Si ambas jefaturas representarán la información tabulada en diagramas de cajón, ¿cuál será la única diferencia que tendrán ambos diagramas?

¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema? Escribe tú

¿Qué datos tengo para resolver? Escribe tú

Crea un plan para resolver Escribe tú

Aplica la **estrategia** y resuelve

Escribe tú

Verifica la respuesta

Escribe tú

Comunica la respuesta

Escribe tú

¿De qué otra forma resolverías este problema? Explica.

### Vuelvo a mis procesos

Responde de acuerdo a tu apreciación.

Si en la medida que caen, se enumeran los granos de arena como 1, 2, 3, etc., ¿en cuál de los relojes ya cayó el grano correspondiente al cuartil 3?

Si en la medida que caen, se enumeran los granos de arena como 1, 2, 3, etc., ¿en cuál de los relojes el último grano caído corresponde aproximadamente al percentil 35?

¿Qué otra medida de posición has oído o leído en los medios de comunicación? ¿Cómo se relaciona con las medidas vistas en esta sección?

Reloj 1



Reloj 2



Reloj 3



¿Te fueron útiles los conocimientos previos que tenías acerca de representaciones gráficas y medidas de posición en la comprensión de los contenidos de esta sección? ¿En qué caso, por ejemplo?

¿Entiendes mejor ahora la información estadística que se presenta haciendo uso de medidas de posición? ¿Qué más te hubiera gustado aprender en esta sección?

¿Pudiste alcanzar las metas que te propusiste al iniciar el estudio de la sección?, ¿cuáles no?, ¿por qué crees que ocurrió esto?

# Probabilidades

Activo ideas previas

1. Lee la información y coméntala con un compañero o una compañera.

Johann Gregor Mendel, monje y botánico austriaco vivió entre los años 1822 y 1884. Formuló las leyes de la herencia biológica que constituyen el punto de partida de la genética de hoy. Su tercera ley o Ley de la independencia de caracteres, establece que los caracteres son independientes y se combinan al azar.

Consideremos dos características de una planta, su color y su forma. La primera está determinada por un gen dominante A (color amarillo) y un gen recesivo a (color verde). La segunda está determinada por un gen dominante B (forma lisa) y un gen recesivo b (forma rugosa). Las posibles combinaciones se muestran en la tabla.

Tercera ley de Mendel

	AB	Ab	aB	ab
AB	AABB	AABb	AaBB	AaBb
Ab	AABb	AAbb	AaBb	Aabb
aB	AaBB	AaBb	aaBB	aaBb
ab	AaBb	Aabb	aaBb	aabb

Responde las preguntas junto con tu compañero o compañera.

- Observen la tabla. ¿Qué porcentaje de los ejemplares son amarillos? ¿Cuál es la probabilidad de que un ejemplar sea verde? ¿Por qué un color tiene más probabilidades de perpetuarse en la descendencia que el otro? Justifiquen sus respuestas.
- Marquen con una L los ejemplares que heredaron la forma lisa y con una R los que heredaron la forma rugosa. ¿Cuál es la probabilidad de que un ejemplar sea liso? ¿Cuál es la probabilidad de que un ejemplar sea verde y rugoso? Respondan estas preguntas y creen dos o tres preguntas más, a partir de la información de la tabla.
- ¿Es aplicable esta ley de herencia al caso humano? ¿Saben por qué una persona tiene ojos cafés o verdes? ¿O por qué una persona tiene el pelo claro u oscuro? Investiguen y comenten sus conclusiones.

Activo conceptos clave

2. El listado contiene algunos conceptos clave de la sección. Úsalos para completar las afirmaciones.

espacio muestral  
probabilidad

principio multiplicativo  
evento

diagrama de árbol  
evento compuesto

- Un \_\_\_\_\_ es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.
- Para determinar los posibles resultados de un experimento aleatorio se puede construir un \_\_\_\_\_.
- La \_\_\_\_\_ de un evento es un número positivo menor o igual que 1.

## Pienso mis procesos

Responde de acuerdo a lo que conoces.

¿Qué objetos se representan en las imágenes? ¿Cuál de las imágenes muestra objetos que permiten practicar un juego relacionado exclusivamente con el azar?, ¿por qué?

Si tuvieras que elegir un objeto de cada imagen, ¿cuáles elegirías?

Si en lugar de elegir a tu gusto, tuvieras que escoger al azar un objeto de cada imagen, ¿cuál es la probabilidad de obtener el mismo par de objetos que elegiste en la pregunta anterior?



¿Qué estrategias aprendiste en cursos anteriores para determinar la cardinalidad de conjuntos? ¿Cuáles de ellas piensas que te servirán en esta sección?

¿Crees que son importantes las probabilidades en la vida cotidiana de las personas? ¿Lo ha sido en la tuya?, ¿por qué?

¿Qué metas esperas alcanzar al finalizar esta unidad?, ¿por qué?

Activa tus conocimientos previos respondiendo las preguntas laterales y luego resuelve las actividades. Para terminar, registra tus logros.

¿Qué es el espacio muestral de un experimento aleatorio?

**Definir y asociar conceptos relacionados a probabilidades**

- 1 Define con tus palabras cada concepto. (4 puntos)
  - a. Experimento.
  - b. Evento.
  - c. Probabilidad.
  - d. Aleatorio.
  
- 2 Escribe la letra mayúscula que permite relacionar correctamente cada experimento con su espacio muestral. (4 puntos)
  - a. Lanzar una moneda. **A**  $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - b. Extraer una bolita de una bolsa que contiene 4 bolitas: una blanca, una azul, una negra y una café. **B**  $E = \{\text{cara-sello, sello-sello, cara-cara, sello-cara}\}$
  - c. Lanzar un dado normal de seis caras. **C**  $E = \{\text{blanca, azul, negra, café}\}$
  - d. Lanzar dos monedas. **D**  $E = \{\text{cara, sello}\}$
  
- 3 Escribe V si la afirmación es verdadera y F si es falsa. (3 puntos)
  - a. \_\_\_\_ La probabilidad de un evento imposible es 0.
  - b. \_\_\_\_ Una probabilidad puede tener un valor decimal.
  - c. \_\_\_\_ La probabilidad de un evento seguro es  $-1$ .

Marca con una x tu nivel de logro:

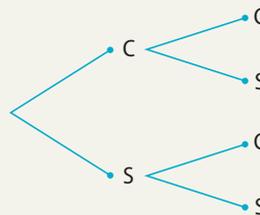
Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
7 correctas o más	menos de 7 correctas

¿Pudiste definir con facilidad los conceptos de la actividad 1?, ¿por qué?

¿Cuál es el uso que se da en probabilidades al diagrama de árbol? ¿Qué permiten representar?

**Representar e interpretar un diagrama de árbol**

- 4 Representa cada experimento en un diagrama de árbol. (2 puntos)
  - a. Lanzamiento de un dado de seis caras y una moneda.
  - b. Lanzamiento de tres monedas.
  
- 5 El diagrama representa el experimento de lanzar dos monedas. Observa y responde. (3 puntos)



- a. ¿Cuál es el espacio muestral?
- b. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una cara?
- c. ¿Cuál es la probabilidad de obtener CS?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado <input type="radio"/>	Por lograr <input type="radio"/>
3 correctas o más	menos de 3 correctas

¿Tuviste problemas para construir y para interpretar los diagramas?, ¿por qué?

¿Cómo calculas una probabilidad aplicando la regla de Laplace?  
¿Cuál es la expresión que determina dicha regla?

¿Qué condiciones deben cumplir los resultados de un experimento aleatorio para que sea válida la regla de Laplace?

Marca con una x tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
9 correctas o más	menos de 9 correctas

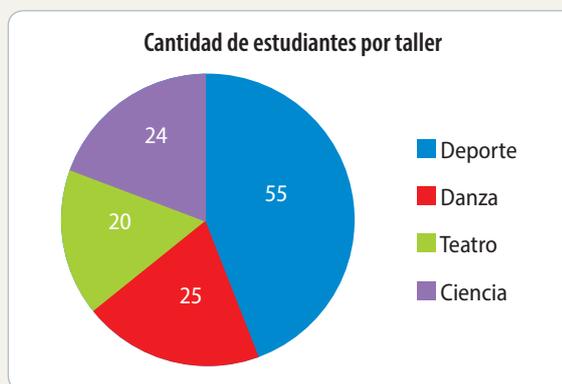
¿Qué actividad demoraste más tiempo en realizar?, ¿por qué?

¿Tuviste problemas con alguna actividad?, ¿por qué?

### Calcular probabilidades aplicando la regla de Laplace

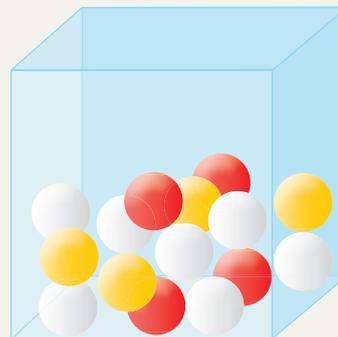
- 6** Calcula la probabilidad que se pide en cada caso. (5 puntos)
- Obtener un múltiplo de 3 al lanzar un dado de seis caras.
  - Obtener un número par al lanzar un dado de seis caras.
  - Obtener una suma 7 al lanzar dos dados de seis caras.
  - Obtener una suma mayor que 9 al lanzar dos dados de seis caras.
  - Obtener una suma menor que 5 al lanzar dos dados de seis caras.

- 7** Observa el gráfico. (4 puntos)



Determina la probabilidad de escoger un estudiante al azar que...

- pertenezca al taller de danza.
  - pertenezca al taller de teatro.
  - no pertenezca al taller de deporte.
  - no pertenezca al taller de danza ni al taller de ciencia.
- 8** Observa la caja con bolas rojas, amarillas y blancas. (6 puntos)



Se extrae una bolita al azar. Calcula la probabilidad de que...

- sea azul.
- sea verde.
- sea roja.
- no sea azul.
- no sea verde.
- no sea roja.

► **Propósito**

Comprender y explicar el principio multiplicativo.

¿Para qué?

El principio multiplicativo es aplicable a muchos contextos en que se requiere contabilizar elementos o “formas de hacer algo”. Por ejemplo, cuando eliges un menú en un restaurante, cuando eliges la ropa que te pondrás un día determinado o cuando seleccionas las combinaciones de transporte que usarás para llegar a un lugar determinado.

**Palabras clave**

Diagrama de árbol

Principio multiplicativo

¿De cuántas maneras se podrían elegir los materiales si las opciones para las paredes fueran 4 en lugar de 3?

¿Cambiaría la cantidad de maneras en que se pueden elegir los materiales si fueran 2 opciones para las paredes y 3 opciones para el techo?, ¿por qué?

## ¿Qué es el principio multiplicativo?

Un albañil va a comprar los materiales que necesita para construir una casa y debe decidir entre distintas opciones para los cimientos, las paredes y el techo. La tienda donde va a comprar ofrece las opciones:

- Cimientos → hormigón
- Paredes → madera, ladrillo o piedra
- Techo → teja o zinc

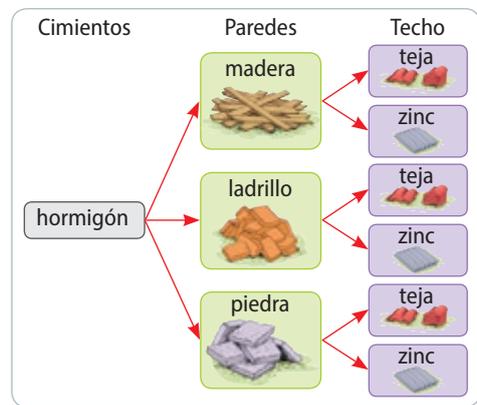


**Situación** Construyendo un diagrama de árbol

¿De cuántas maneras puede elegir los materiales el albañil?

Una estrategia que permite responder la pregunta consiste en construir un diagrama de árbol.

**Paso 1** Confecciona un diagrama de árbol en que se representen todas las opciones para la elección de los materiales.



**Paso 2** Registra las opciones en una tabla y cuéntalas.

Opción	Cimientos	Paredes	Techo
1	Hormigón	Madera	Teja
2	Hormigón	Madera	Zinc
3	Hormigón	Ladrillo	Teja
4	Hormigón	Ladrillo	Zinc
5	Hormigón	Piedra	Teja
6	Hormigón	Piedra	Zinc

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

Completa la afirmación:

La cantidad de opciones que hay de elegir el cemento es \_\_\_\_\_, las de elegir el material para las paredes son \_\_\_\_\_ y las de elegir el material para el techo son \_\_\_\_\_. Por lo tanto, la cantidad de maneras en que se pueden elegir los materiales la puedo calcular también como el producto  $1 \cdot 3 \cdot 2 =$  \_\_\_\_\_.

► **Para concluir**

El **principio multiplicativo** permite realizar un conteo rápido de las maneras en que puede ocurrir un hecho que está dividido en varios pasos. Si el primer paso puede ocurrir de a formas, el segundo de b formas, el tercero de c formas y así sucesivamente, entonces el hecho puede ocurrir de  $a \cdot b \cdot c \cdot \dots$  formas.

**Argumenta y comunica**

Comenta con tus compañeros y compañeras las ventajas y desventajas de usar el diagrama de árbol o el principio multiplicativo para calcular la cantidad de maneras en que puede ocurrir un hecho.

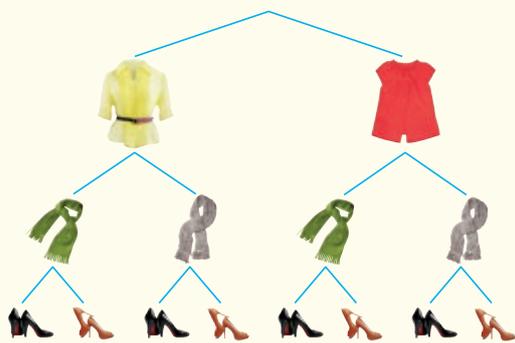
Repaso

- Representa en un diagrama de árbol cada experimento.
  - Lanzar 2 monedas.
  - Lanzar secuencialmente un dado de seis caras y un dado de cuatro caras.

Práctica guiada

- Representa en un diagrama de árbol cada situación. Luego, responde.

Javiera tiene en su clóset 2 blusas (amarilla y roja), 2 bufandas (una verde y otra gris) y 2 pares de zapatos (negros y cafés). Si elige una blusa, una bufanda y un par de zapatos, ¿de cuántas maneras distintas puede hacerlo?



$$2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$$

Javiera puede escoger de 8 maneras diferentes su ropa.

- Fabiola arma su postre en el casino de la universidad. Puede elegir el color del recipiente: verde o amarillo, el tipo de fruta: durazno, frutilla o manzana y la salsa: caramelo o frambuesa. ¿De cuántas maneras diferentes puede pedir su postre?
- Para ir de una ciudad A a una ciudad B hay cuatro caminos diferentes y de la ciudad B a la ciudad C hay dos caminos diferentes. ¿Por cuántas rutas distintas se puede ir desde la ciudad A a la ciudad C, pasando por la ciudad B?

Aplica

- Resuelve los problemas.

- Una determinada zapatilla se fabrica en 3 estilos diferentes y en 4 colores distintos. Si la zapatería desea mostrar a su clientela pares de zapatillas en todos los estilos y colores disponibles, ¿cuántos pares distintos deberán colocar en la vitrina?
- En una escuela, los estudiantes deben escoger una asignatura de cada una de las siguientes disciplinas:

Deportes	Artes	Ciencias
Basquetbol	Pintura	Química
Fútbol	Escultura	Física
Atletismo	Escénicas	Biología

- ¿Cuántas son las combinaciones posibles que podría escoger un estudiante?
- Ignacio debe ir desde su casa a la biblioteca, pero antes necesita pasar a la casa de su abuela. Para ir donde su abuela puede elegir entre 4 líneas de buses y para ir desde allí a la biblioteca puede elegir entre 5 líneas de buses. ¿Cuántas combinaciones diferentes de líneas de buses puede hacer Ignacio para realizar su viaje?
- ¿Cuántos tipos de hamburguesa puede elegir un cliente de un local de comida rápida si tiene las opciones que aparecen en la tabla?

Pan	blanco – integral
Carne	pollo – pavo – soya – carne
Vegetal	lechuga – poroto – repollo
Extra	tomate – cebolla – queso

- Desafío. Observa la figura y responde.

Según su ubicación, ¿de cuántas formas diferentes pueden sentarse dos personas? Piénsalo y comunica tu respuesta.



Reflexión

- ¿Cómo podrías representar el principio multiplicativo usando una tabla? Piénsalo y ejemplifica.
- Determinada actividad puede ocurrir de 81 maneras diferentes. Este resultado, ¿se puede representar mediante un diagrama de árbol?, ¿habrá alguna dificultad en su construcción?, ¿cuál?

Refuerzo

- Explica en qué consiste el principio multiplicativo.
- Indica la operación aritmética que está involucrada en el principio multiplicativo.
- Describe el procedimiento que realizas para construir un diagrama de árbol como representación del principio multiplicativo.

► **Propósito**  
Utilizar el principio multiplicativo para calcular la cardinalidad de un espacio muestral.

### ¿Para qué?

El principio multiplicativo es una técnica de conteo sencilla que permite determinar el número de elementos de un espacio muestral. Esto más adelante facilitará el cálculo de las probabilidades de eventos definidos en el espacio muestral de un experimento aleatorio.

### Palabras clave

Espacio muestral  
Cardinalidad  
Principio multiplicativo  
Diagrama de árbol

### Ampliando

Un diagrama de árbol es una representación del principio multiplicativo ya que permite ver las distintas configuraciones o resultados de un experimento, mientras que el principio multiplicativo permite calcular la cantidad de resultados existentes.

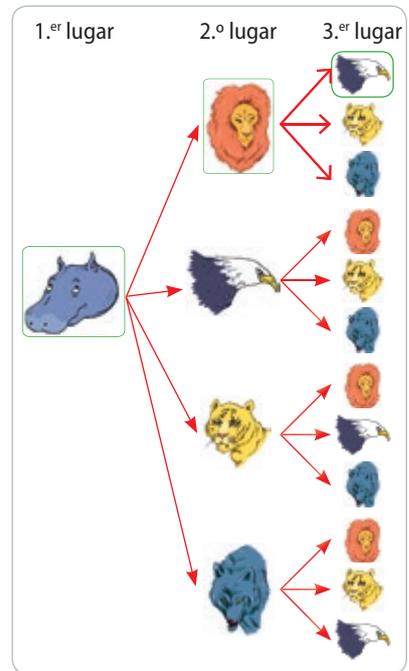
## ¿Cuál es la cardinalidad de un espacio muestral?

En un torneo de fútbol llegaron a las instancias finales 5 equipos: Las Águilas, Los Hipopótamos, Los Leones, Los Lobos y Los Tigres. Entre estos 5 equipos se definirán los 3 primeros lugares, que recibirán trofeos y medallas.

### Situación 1 Analizando la utilidad de usar un diagrama de árbol

¿Es práctico usar un diagrama de árbol para calcular la cantidad de maneras en que los equipos se pueden repartir los 3 primeros puestos?

**Paso 1** Construye un diagrama que muestre los lugares que ocuparon los equipos. Por ejemplo, supón que el primer lugar lo obtiene el equipo Los Hipopótamos. Entonces, el diagrama queda como se muestra en la imagen. Puedes ver que cada rama del árbol te indica una posible distribución para los tres primeros lugares. Por ejemplo, se ha destacado una de ellas, que muestra a Los Hipopótamos en primer lugar, a Los Leones en segundo lugar y a Las Águilas en tercer lugar.



¿Cuántas distribuciones hay en total en el diagrama?

Hay \_\_\_\_ distribuciones.

**Paso 2** Evalúa si estas son todas las distribuciones posibles.

Como cualquiera de los equipos puede obtener el primer lugar, puedes elaborar 4 diagramas similares al anterior, para completar un total de 5 diagramas. Por lo tanto, hay  $12 \cdot 5 = 60$  maneras de ordenar los equipos.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

### Situación 2 Aplicando el principio multiplicativo

¿Cómo se calcula el número de maneras en que los equipos se pueden repartir los 3 primeros puestos?

**Paso 1** Determina las posibilidades que existen para cada uno de los lugares.

1.º lugar	2.º lugar	3.º lugar
5	4	3

Para el primer lugar existen 5 posibilidades, para el segundo lugar 4 posibilidades y para el tercer lugar 3 posibilidades.

**Paso 2** Aplica el principio multiplicativo.  $\rightarrow 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

R: Los equipos pueden repartirse los 3 primeros puestos de 60 formas diferentes.

### Ayuda

Como 1 equipo ya está ubicado en el primer lugar, solo quedan 4 equipos para ocupar el segundo lugar; y como, tras esto, 2 equipos están ubicados en los lugares primero y segundo, solo quedan 3 equipos para ocupar el tercer lugar.

**Situación 3 Representando los resultados en un diagrama de árbol**

Un juego consiste en lanzar una moneda y sacar una carta de una baraja con 4 cartas. ¿Cuál es la cardinalidad del espacio muestral de este experimento secuencial?

Para contestar, consideraremos que la moneda es de \$ 100 y que las cartas de la baraja son el rey de copas, el rey de oros, el as de espadas y el as de oros. Luego, construiremos un diagrama de árbol.



**Ayuda**

Se dice que un experimento aleatorio es compuesto o secuencial cuando consta de dos o más experimentos aleatorios simples. Por ejemplo, lanzar una moneda y lanzar un dado. Los resultados de este experimento compuesto son pares ordenados del tipo (P, Q), donde P es el resultado del primer experimento (cara o sello) y Q es el resultado del segundo (R1, R2, A1 o A2).

**Paso 1** Dibuja el diagrama de árbol que representa los posibles resultados del juego.

**Paso 2** Describe y cuenta todos los resultados. Para esto, puedes organizarlos en una tabla.

				
	(R1)	(R2)	(A1)	(A2)
	(C, R1)	(C, R2)	(C, A1)	(C, A2)
	(S, R1)	(S, R2)	(S, A1)	(S, A2)

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Situación 4 Aplicando el principio multiplicativo**

¿Cómo puedes comprobar el resultado anterior con el principio multiplicativo?

**Paso 1** Determina las distintas posibilidades para cada experimento simple.

Experimento con moneda	Experimento con cartas
2	4

¿Cuáles son los 2 posibles resultados con la moneda?

**Paso 2** Aplica el principio multiplicativo.

¿Cuáles son los 4 posibles resultados con las cartas?

Escríbelo tú: \_\_\_\_\_ • \_\_\_\_\_ = \_\_\_\_\_

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

R:

**Para concluir**

Para determinar la **cardinalidad de un espacio muestral**, esto es, la cantidad de elementos diferentes que lo componen, se puede ocupar el principio multiplicativo. Además, estos elementos pueden representarse en un diagrama de árbol.

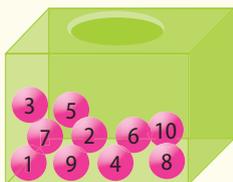
**Argumenta y comunica**

¿En qué casos es práctico usar un diagrama de árbol para determinar la cardinalidad de un espacio muestral? ¿Qué ventaja tiene esta representación gráfica sobre el principio multiplicativo? Comunica tus respuestas al curso.

Repaso

1. Determina el espacio muestral de cada experimento aleatorio.

a. Extraer una bolita de la urna.



b. Hacer girar la ruleta.



2. Un restaurante ofrece el siguiente menú del día: sopa (choclo o lentejas), plato de fondo (arroz con pollo o charquicán) y ensalada (tomate o apio). ¿Cuántos menús distintos se pueden formar en este restaurante?

Práctica guiada

3. María saca una ficha de la bolsa que muestra la imagen, la devuelve y luego vuelve a sacar una ficha de la bolsa.

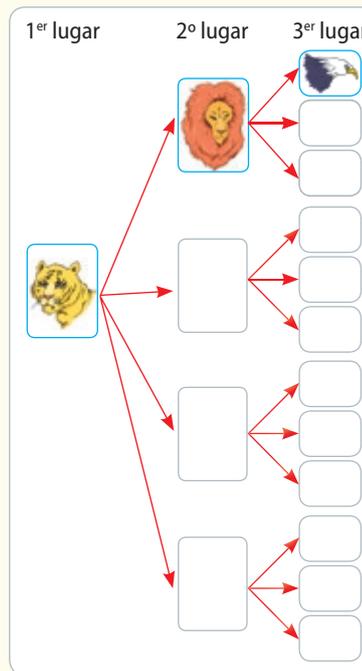


Completa la tabla con los posibles resultados del experimento y responde.

Ficha	Verde (V)	Azul (A)	Rojo (R)	Morado (M)
Verde (V)	(V, V)	(V, A)	(V, R)	(V, M)
Azul (A)				
Rojo (R)				
Morado (M)				

- ¿Cuál es la cardinalidad del espacio muestral?
- ¿Qué multiplicación permite calcular esta cardinalidad con el principio multiplicativo?
- ¿Qué relación tiene el cálculo de la cardinalidad con la cantidad de filas y columnas que hay en la tabla?

4. Completa el diagrama de árbol considerando que en la situación 1 de la lección el equipo de Los tigres obtuvo el primer lugar. Luego, responde.



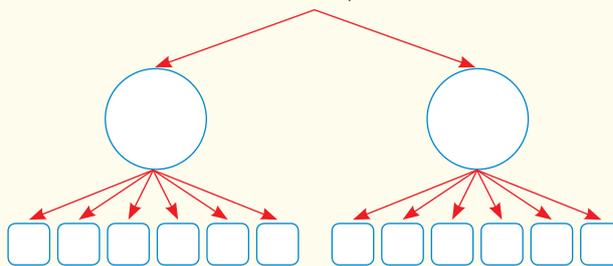
- ¿De cuántas maneras diferentes los equipos se pueden repartir los premios bajo estas condiciones?
- ¿Cómo calculaste la cardinalidad del espacio muestral?
- La cardinalidad calculada, ¿es la misma que se obtuvo en la situación 1 de la lección?, ¿por qué?

Aplica

5. Realiza las actividades a partir del experimento aleatorio.

Juan lanza una moneda y un dado de seis caras.

a. Completa el diagrama de árbol con los posibles resultados del experimento.



b. Determina la cardinalidad del espacio muestral. Escribe los posibles resultados como pares ordenados.

- c. Si construyeras una tabla para registrar los resultados posibles, ¿cuántas filas y columnas tendría?
- d. Si luego de lanzar la moneda y el dado se sacara una bolita de una urna con bolitas numeradas del 1 al 10, ¿cuál sería la cardinalidad del espacio muestral del nuevo experimento? ¿Qué estrategia utilizarías para calcularla?

### 6. Resuelve los problemas.

- a. Francisca quiere saber cuántas claves distintas de cuatro caracteres puede armar con dos dígitos y dos letras. Si los dígitos los puede escoger del conjunto  $\{1, 2, 3, 4\}$  y las letras deben ser vocales, ¿cuántas claves distintas puede armar si los números no se pueden repetir pero las vocales sí?
- b. Antes de enviar un televisor al mercado, este debe pasar por tres controles de calidad: el primero revisa la funcionalidad, para lo cual se le aplica al azar 1 de los 3 test de calidad diseñados para este control; el segundo revisa el color, para lo cual se somete al azar a 1 de los 4 test diseñados para este control, y el tercero revisa la imagen, para lo cual se le aplica 1 de los 2 test establecidos para este control.
- Si se elige un televisor al azar, ¿por cuántos controles de calidad pasó?
  - ¿De cuántas maneras puede un televisor sortear los tres controles de calidad y llegar al mercado? Aplica el principio multiplicativo para responder.
  - Si tuvieras que representar lo anterior en una tabla, ¿cómo lo harías?

7. **Desafío.** Supón que una patente de automóvil está formada por cuatro letras seguidas de dos números. Las letras pueden ser tomadas de las 27 del abecedario castellano y los números, de los dígitos del 0 al 9.

# BB • BB – 10

- a. Si se elige una patente de automóvil al azar, ¿de cuántas formas se podría elegir?
- b. Si se elige una placa de automóvil al azar, ¿de cuántas formas se podría elegir de tal manera que no se repita ningún número ni letra?

8. **Conecto con la Biología.** Los grupos sanguíneos son los diversos tipos en que se ha clasificado la sangre de las personas y se determinan genéticamente por los grupos:

A	B	AB	O
---	---	----	---

Estos grupos también están determinados por un factor Rh que puede ser positivo (+) si es que está presente el factor y negativo (-) si no lo está.

Si en un estudio médico se clasifica a los pacientes de acuerdo a su tipo de sangre, entonces:

- a. ¿Cuál sería el diagrama de árbol que representa la información anterior?
- b. ¿Cuál es la cardinalidad del espacio muestral?
- c. Si al estudio se agrega la presión sanguínea del paciente que puede ser baja, normal o alta, ¿sería conveniente representarlo en un diagrama de árbol?, ¿por qué?

9. **Crea.** Inventa un problema que conste de un experimento aleatorio compuesto por tres experimentos simples, en el cual el espacio muestral se pueda calcular usando el principio multiplicativo. Resuélvelo y con respecto a tu procedimiento, responde:
- a. ¿Cuáles son los datos del problema?
- b. ¿Se te ocurre otra estrategia para resolverlo?, ¿cuál?

### Reflexión

1. Si consideras el experimento de lanzar 8 veces un dado de seis caras y quieres calcular la cardinalidad del espacio muestral, ¿lo representarías en un diagrama de árbol o aplicarías directamente el principio multiplicativo? Piénsalo y justifica tu respuesta.
2. Si ahora consideras 8 dados de seis caras y de diferente color que fueron lanzados al mismo tiempo, ¿es la cardinalidad del espacio muestral la misma que en la pregunta anterior?, ¿por qué?

### Refuerzo

1. Señala por escrito qué elementos de un espacio muestral te permite visualizar un diagrama de árbol.
2. Indica qué elemento de un espacio muestral te permite calcular el principio multiplicativo.
3. Explica cómo se aplica el principio multiplicativo.

► **Propósito**  
Utilizar el principio multiplicativo para calcular probabilidades.

### ¿Para qué?

Las probabilidades permiten hacer estimaciones referidas a los resultados de una gran variedad de fenómenos tanto científicos como de la vida cotidiana. Pueden usarse para cuantificar situaciones azarosas que ocurren en tu entorno.

### Palabras clave

- Espacio muestral
- Probabilidad
- Regla de Laplace
- Principio multiplicativo

### Ayuda

Observa que este problema involucra la presencia de dos experimentos aleatorios simples, el relacionado con el diseño del blog y el relacionado con sus colores.

### Ampliando

Un experimento aleatorio equiprobable es aquel en el cual todos sus resultados posibles tienen igual probabilidad de ocurrencia. El prefijo "equi" significa igual.

### Ayuda

La regla de Laplace indica que para un experimento aleatorio cuyos resultados son equiprobables y finitos, la probabilidad de un evento A se calcula como:

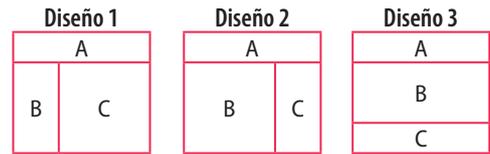
$$P = \frac{\text{n.º de casos favorables a A}}{\text{n.º de casos totales}}$$

### Ayuda

La cardinalidad del espacio muestral corresponde al número de casos totales en la regla de Laplace.

## ¿Cómo calcular probabilidades usando el principio multiplicativo?

Valeria está haciendo un blog para compartir fotos y videos con sus amigos y amigas. Los diseños de la apariencia del blog pueden ser 3, cada uno dividido en 3 sectores: A, B y C.

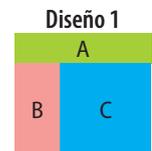


Además, Valeria desea ocupar 3 colores en su blog: verde, azul y rosado.

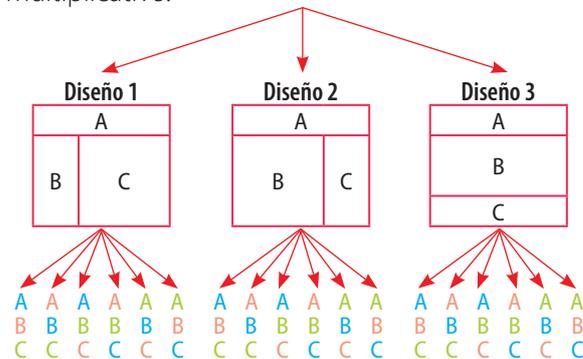
### Situación 1 Determinando la cardinalidad del espacio muestral

¿Cuál es la probabilidad de que Valeria elija el diseño de la imagen si hace su elección al azar?

Para responder, representaremos la situación descrita con un diagrama de árbol y calcularemos la cardinalidad del espacio muestral usando el principio multiplicativo.



**Paso 1** Confecciona el diagrama de árbol para representar la situación.



Cuenta la cantidad total de elementos del espacio muestral y completa.

Cuento \_\_\_\_ elementos.

**Paso 2** Aplica el principio multiplicativo para calcular la cantidad de elementos que posee el espacio muestral.

- La cantidad de diseños son 3.
- La cantidad de combinaciones para los colores se puede calcular considerando que como deben estar los 3 colores, no pueden repetirse y, por lo tanto, si se asigna un color A solo quedarán 2 posibilidades para elegir el color de B y solo 1 posibilidad para elegir el color de C. Por lo tanto, existen  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$  combinaciones de colores posibles. Entonces, tienes que:

Cantidad de diseños	Cantidad de combinaciones de colores
3	6

Por lo tanto, la cardinalidad del espacio muestral es  $3 \cdot 6 = 18$ .

Dado que la cantidad de casos favorables es 1, es posible calcular la probabilidad aplicando la regla de Laplace.

**R:** La probabilidad de que Valeria elija para su blog el diseño señalado en el enunciado es  $\frac{1}{18}$ .

## Situación 2 Multiplicando las probabilidades para comprobar

¿Cómo se puede calcular la probabilidad del experimento compuesto anterior usando directamente las probabilidades de los experimentos simples?

**Paso 1** Aplica la regla de Laplace para determinar la probabilidad del primer experimento: la elección del diseño del blog.  
Como se elegirá 1 de un total de 3 diseños posibles, esta probabilidad  $P(1)$  es:

$$P(1) = \frac{\text{n.º de casos favorables}}{\text{n.º de casos totales}} = \frac{1}{3}$$

**Paso 2** Ahora aplica la regla de Laplace en el segundo experimento.  
Como se elegirá 1 combinaciones de las 6 combinaciones de colores posibles, esta probabilidad  $P(2)$  es:

$$P(2) = \frac{\text{n.º de casos favorables}}{\text{n.º de casos totales}} = \frac{1}{6}$$

**Paso 3** Finalmente, aplica el principio multiplicativo y calcula el producto de las probabilidades  $P(1)$  y  $P(2)$ . Completa tú:

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6} = \text{—}$$

Completa para responder:

**R:** El principio multiplicativo se puede aplicar usando las probabilidades como factores. Por lo tanto, la probabilidad del experimento compuesto por los experimentos aleatorios 1 y 2 es  $P(1) \cdot P(2) = \text{—}$ .

### Ayuda

Como la elección del diseño no influye en la elección del color de los sectores puedes ocupar el principio multiplicativo de la manera señalada.

### Ayuda

Recuerda que para multiplicar dos fracciones cuyos términos  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son números naturales mayores que 0, se tiene que:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}$$

## Situación 3 Multiplicando las probabilidades para otro caso

Nuevamente considerando los diseños del blog de Valeria, ¿cuál es la probabilidad de que elija el diseño 2 y que el sector B sea verde?

**Paso 1** Determina la probabilidad de cada experimento simple.  
Elegir el diseño 2. Como, nuevamente, existe 1 posibilidad favorable y 3 posibles, esta probabilidad es  $\frac{1}{3}$ . Y la probabilidad de que el sector B sea verde es  $\frac{2}{6}$ , ya que existen 2 posibilidades a favor de 6 totales.

**Paso 2** Aplica el principio multiplicativo y calcula la probabilidad buscada.

Escribe la respuesta completa a la pregunta inicial:

**R:**

¿Cuál es la expresión decimal de esta probabilidad?, ¿y su expresión como porcentaje?

### Para concluir

Si  $A$  y  $B$  son eventos independientes, es decir, si el resultado del primero no influye en el del segundo, se puede usar el **principio multiplicativo** para calcular la **probabilidad de ocurrencia de eventos compuestos**. Por ejemplo, la probabilidad de ocurrencia del evento compuesto formado por los eventos  $A$  y  $B$  es:

$$P(A) \cdot P(B)$$

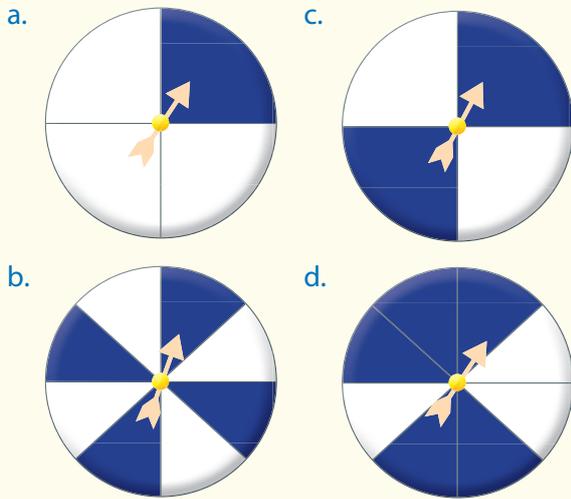
Donde  $P(A)$  es la probabilidad de ocurrencia de  $A$  y  $P(B)$  la de  $B$ .

### Argumenta y comunica

Plantea un ejemplo de un experimento aleatorio de eventos equiprobables y otro de eventos no equiprobables y discute la validez de cada uno con tus compañeros y compañeras.

Repaso

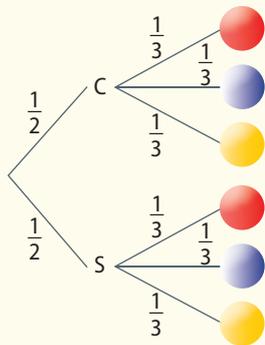
- En una tómbola hay 100 bolitas numeradas del 1 al 100. Calcula la probabilidad de que, al extraer al azar una bolita esta:
  - sea menor que 10.
  - sea 0.
  - tenga tres cifras.
  - tenga dos cifras.
- Calcula la probabilidad de obtener el color azul al hacer girar cada ruleta.



Práctica guiada

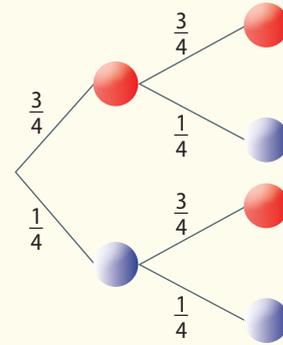
- A partir del diagrama de árbol de un experimento compuesto, responde.

Evento A: lanzar una moneda al aire.  
 Evento B: extraer al azar una bola de una caja que contiene una bola roja, una azul y una amarilla.  
 ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en el primer experimento y una bola amarilla en el segundo?

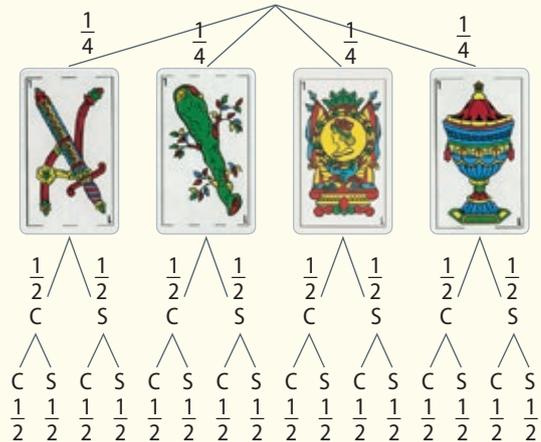


La probabilidad buscada es:  $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$

- En una urna hay 3 bolitas rojas y 1 azul. Se saca una bolita al azar, se anota su color, se repone y se vuelve a extraer una bolita al azar. Considera el diagrama de árbol para responder.



- ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas hayan sido rojas?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que ambas bolas hayan sido azules?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que una de las bolas extraídas haya sido azul y la otra roja?
- Se extrae una carta al azar de una baraja con 4 cartas, luego se lanza una moneda y, finalmente, se lanza una **segunda moneda**. ¿Cuál es la probabilidad de obtener el as de copas en el primer experimento, una cara en el segundo experimento y un sello en el tercer experimento?



Aplica

- Resuelve los problemas.

- En una bolsa se colocan tarjetas con 5 nombres: Andrea, Emilia, Carlos, Juan y Karina. Luego se sacan al azar de a una y sin reponerlas en la bolsa.

- ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer 3 papeles se obtengan 3 nombres de mujer?
  - ¿Cuál es la probabilidad de que al extraer 3 papeles todos los nombres comiencen con una consonante?
- b. Eugenia tiene en su cajón dos pares de calcetines: un par de color café y otro par de color blanco. En un momento los 4 calcetines están sueltos dentro del cajón y Eugenia saca 2 de ellos al azar.
- Representa en un diagrama de árbol las posibles combinaciones que puede obtener Eugenia tras realizar el experimento aleatorio.
  - ¿Cuántos pares posibles de calcetines hay?
  - Calcula la probabilidad de que Eugenia elija un par del mismo color.
  - Cuando Eugenia escoge el primer calcetín al azar, ¿el color de este afecta la posibilidad de seleccionar un color particular de calcetín la siguiente vez?, por qué?
- c. El 4.º básico de un colegio realiza un juego con la finalidad de juntar dinero para su paseo de fin de año. Cada jugador debe lanzar 3 monedas de \$ 100. Si salen 2 caras y 1 sello en cualquier orden, el jugador gana \$ 300, de lo contrario pierde \$ 100. ¿Cuál es la probabilidad de ganar \$ 300?
- d. Al girar la ruleta de la imagen, ¿cuál es la probabilidad de que al girar tres veces se obtengan solo números primos?



### Reflexiono

1. Sacar cara al lanzar una moneda, ¿afecta la probabilidad de sacar cara en el segundo lanzamiento de la misma moneda?, ¿por qué? Piénsalo y justifica tu respuesta.
2. Si la probabilidad de sacar un 5 al lanzar un dado de seis caras es  $\frac{1}{6}$ , ¿es correcto afirmar que al lanzar el dado 600 veces, obtendrás 5 en cien oportunidades? Piénsalo y responde en tu cuaderno.

- e. Pablo está entrenando para el tiro al arco con flecha y observó que hasta el momento el 50% de las veces la flecha cae dentro del círculo y el otro 50% de las veces cae fuera. ¿Cuál es la probabilidad de que en tres lanzamientos seguidos la flecha caiga dentro del círculo?



5. **Analiza.** En una bolsa se colocan tres tarjetas numeradas del 1 al 3. Considera que se realiza tres veces el experimento aleatorio de extraer una tarjeta, anotar su número y devolverla a la bolsa. La probabilidad de que las tarjetas en el orden en que fueron extraídas formen el número 132, ¿es mayor o menor que la probabilidad de formar el número no importando el orden en que fueron extraídas las tarjetas?
6. **Crea.** Inventa un problema de probabilidades que involucre un experimento aleatorio compuesto y cuya solución se pueda calcular mediante el siguiente producto:

$$\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}$$

Una vez que lo tengas desarrollado, plantéaselo como un desafío a un compañero o a una compañera y pídele que lo resuelva.

### Refuerzo

1. Señala por escrito la regla de Laplace e indica cuándo es posible aplicarla.
2. Escribe la expresión que te permite calcular la probabilidad de ocurrencia de eventos compuestos.
3. Inventa una situación donde se aplique el principio multiplicativo para el cálculo de probabilidades.

# Patente vehicular

## ¿Cuántas patentes diferentes se pueden formar?

El formato de la placa vehicular que se encuentra vigente en nuestro país desde el año 2007 está compuesto por 4 letras y 2 dígitos de la forma BB-BB-10. Para este formato se usan las letras del abecedario, excepto la M, N, Ñ, Q y las vocales; y para la cifra numérica, el primer dígito puede ser un número del 1 al 9, y el segundo puede ser un número del 0 al 9.

A partir del año 2014 se modificó el diseño de la patente vehicular como una medida de seguridad para evitar falsificaciones o clonaciones de estas mismas. Las principales características del diseño de la placa actual son las siguientes:

Están hechas de aluminio y recubiertas por un reflectante de alta calidad.

Se mantuvo el tamaño de la placa antigua, es decir, 36 cm x 13 cm.

Se utiliza la tipografía Fe-Schrift.

### Sabías que...

La tipografía Fe-Schrift se ha usado en Alemania y es una letra que no se encuentra en los procesadores de texto, por lo que es difícil de adulterar.

En la esquina inferior derecha aparece, sin relieve, la frase REGISTRO CIVIL E IDENTIFICACIÓN.

En la esquina inferior izquierda aparece, sin relieve, la palabra DELANTERA o TRASERA, según corresponda.

**Sabías que...**

Todas las patentes llevan en su parte inferior la palabra CHILE, excepto los buses del Transantiago, que llevan la palabra TRANSANTIAGO.

Tipografía Fe-Schrift



Palabra DELANTERA o TRASERA

Frase REGISTRO CIVIL E IDENTIFICACIÓN

**Actividad grupal**

Reúnanse en grupos de 3 o 4 integrantes para realizar las actividades. Luego, comuniquen sus respuestas al curso.

- Consideren las restricciones del formato actual de patente vehicular chilena descrita en la página anterior y respondan.
  - ¿Cuántas patentes diferentes es posible definir?
  - Si entre los años 1985 y 2007 se utilizaba un formato con 2 letras y 4 dígitos, ¿cuántas patentes diferentes era posible definir en ese período?
  - Con respecto al resultado de la pregunta anterior, ¿cuántas patentes más se pueden formar con el formato que se encuentra vigente desde el año 2007?
- ¿Alguna vez han visto una patente vehicular de otro país? Si la respuesta es afirmativa, ¿de qué país era?, ¿recuerdan su formato?
- Averiguen en internet el formato o diseño que tienen las actuales patentes de los siguientes países y determinen el número de combinaciones diferentes que se pueden formar.
 

a. Brasil	c. Alemania
b. Argentina	d. Francia

**Lección 50:** ¿Qué es el principio multiplicativo?

1 Representa en un diagrama de árbol el experimento aleatorio y responde.

Se extrae al azar una tarjeta de las que se muestran a continuación y se lanza una moneda.

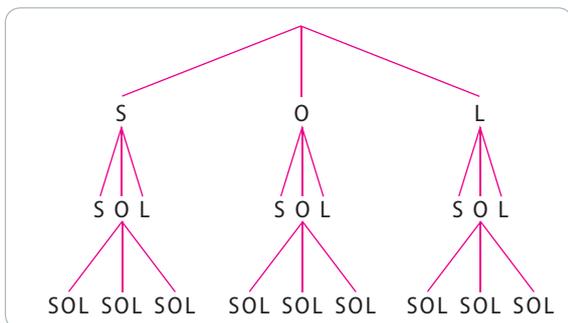


- ¿Cuántos elementos tiene el evento compuesto: "sale un número par en la tarjeta y sello en la moneda"?
- ¿Cuántos elementos tiene el evento compuesto: "sale un número impar en la tarjeta y cara en la moneda"?

2 Aplica el principio multiplicativo para resolver los problemas.

- Para ir desde su casa al cine, Jorge tiene las opciones que se citan a continuación. Puede escoger entre tres recorridos de una empresa de buses para llegar al paradero. Luego, puede tomar un taxi o un colectivo y bajarse en la plaza. Finalmente, puede optar por una de las cuatro calles que le permiten llegar al cine. ¿Cuántas maneras diferentes tiene para llegar desde su casa al cine?
- En una tienda de accesorios femeninos se venden 5 tipos de relojes, 4 tipos de aros, 7 tipos de pulseras y 3 tipos de collares. Si se elige un accesorio de cada tipo, ¿cuántas combinaciones diferentes se pueden comprar?

3 Observa el siguiente diagrama de árbol.



¿Cuántas palabras se pueden armar, con o sin significado, con las letras S, O y L, si las letras pueden repetirse?

**Lección 51:** ¿Cuál es la cardinalidad de un espacio muestral?

4 Calcula la cardinalidad del espacio muestral de cada experimento aleatorio.

- Para poder participar en un concurso, se pide elegir al azar un número entre 1 y 20 y una letra de las 27 letras del abecedario.
  - ¿De cuántas formas distintas se podría elegir la pareja formada por el número y la letra?
  - Si el concurso cambia y ahora debes elegir al azar un número entre el 15 y el 35, además de elegir una letra del abecedario, ¿la cantidad de formas con las que se puede elegir esta pareja es mayor o menor que la calculada en la parte anterior?
- Los estudiantes de un colegio particular subvencionado se clasifican como estudiantes de plan científico, artístico o humanista, y también de acuerdo a su sexo: hombres o mujeres. Si se elige al azar un estudiante, ¿cuántas clasificaciones distintas puede tener?
- Un medicamento para la cura del asma puede comprarse a 5 diferentes fabricantes en sus 3 presentaciones: líquido, en tabletas o en cápsulas. Además, su concentración puede ser baja o alta. ¿En cuántas formas diferentes puede un médico recetar la medicina a un paciente que sufre de asma?
- En una gelatería los helados se pueden elegir entre las opciones que aparecen en la tabla. Si Mauricio elegirá un helado al azar, ¿de cuántas formas puede hacerlo?

Sabores	Salsa
Chocolate	Caramelo
Vainilla	Chocolate
Frambuesa	Manjar
Piña	Frambuesa

Formato
Copa
Barquillo
Vaso

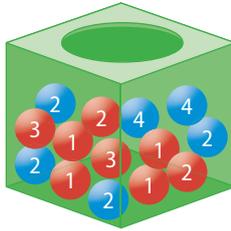
**Lección 52:** ¿Cómo calcular probabilidades a partir del principio multiplicativo?

**5** Identifica cuál de los siguientes experimentos es simple y cuál compuesto.

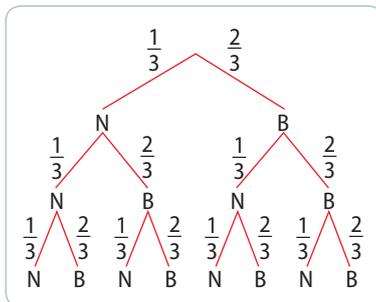
- Al lanzar un dado, que salga un número par.
- Al lanzar dos veces un dado, que primero salga un número par y que luego salga uno impar.
- Al lanzar un dado, que salga un número par o un número impar.
- Al lanzar un dado dos veces, que salga al menos un número par.

**6** Observa la urna con bolitas y calcula la probabilidad de que al extraer una bolita, esta:

- sea roja y tenga un 2.
- tenga un 3.
- tenga un 2.
- sea azul y tenga un 4.
- sea roja y tenga un número impar.
- sea azul y tenga un número par.



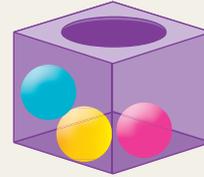
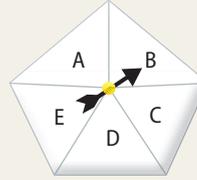
**7** Observa el diagrama de árbol del experimento extracción de fichas al azar de una caja con fichas negras (N) y blancas (B). Luego, responde.



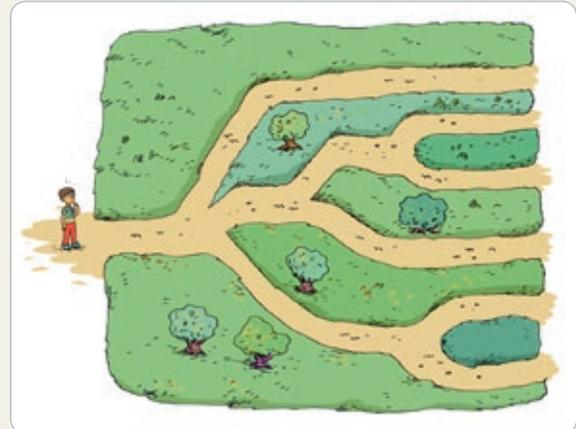
- ¿En qué consiste el experimento?, ¿es con o sin reposición?
- ¿Es un experimento equiprobable? Justifica.
- ¿Se puede determinar la relación entre la cantidad de fichas negras y blancas?
- Escribe el espacio muestral. ¿Cuántos elementos tiene?
- ¿Cuál es la probabilidad de extraer al azar una ficha negra, luego una blanca y finalmente una negra?

### Desafíos de integración

- En un experimento aleatorio compuesto, se hace girar una ruleta pentagonal, después se saca al azar una bolita de la urna y, finalmente, se lanza una moneda.



- ¿Cuántos eventos posibles existen si se realiza el experimento compuesto que considera solo los dos primeros experimentos simples?
  - ¿Cuántos eventos posibles hay en total?
  - Si cambia el orden de los experimentos, ¿cambia la cantidad total de eventos posibles?
- Una persona que va caminando por un parque se encuentra con un laberinto de caminos. Observa la figura y considera que en cada bifurcación es igual de probable que vaya por un camino o por otro. Luego, responde.



- ¿Cuál es la probabilidad que tiene la persona de tomar cada camino? Escríbela sobre la imagen en cada bifurcación.
- ¿Cuál es la probabilidad de llegar a cada una de las salidas del laberinto?

### Coevaluación

Selecciona uno de los desafíos e intercámbialo con un compañero o una compañera. Expliquen la estrategia que cada uno utilizó para resolverlo. Luego, identifica las fortalezas y debilidades del procedimiento empleado por tu compañero.

## Usar un problema similar pero más sencillo

Esta estrategia permite simplificar un problema, resolverlo con cantidades pequeñas o plantearse un problema relacionado, pero más simple.

### Algunas estrategias

- Usar un proceso de ensayo y error.
- Aplicar procesos reversibles.
- Descartar información irrelevante.
- Usar un problema similar pero más sencillo.
- Construir un esquema, diagrama o tabla.
- Encontrar un patrón.
- Usar modelos matemáticos.
- Usar razonamiento lógico.
- Identificar submetas.

Los niños escoltas en el fútbol son niños y niñas encargados de acompañar a los 11 jugadores de un equipo durante su ingreso al campo de juego. Si para un partido de la selección chilena se ubicará a 6 niños y 5 niñas acompañando a los jugadores, de modo que las niñas ocupen los lugares pares de la fila que forman al ingresar a la cancha, ¿de cuántas maneras puede hacerse?

¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema? Escribe tú

¿Qué datos tengo para resolver? Escribe tú

Crea un plan para resolver

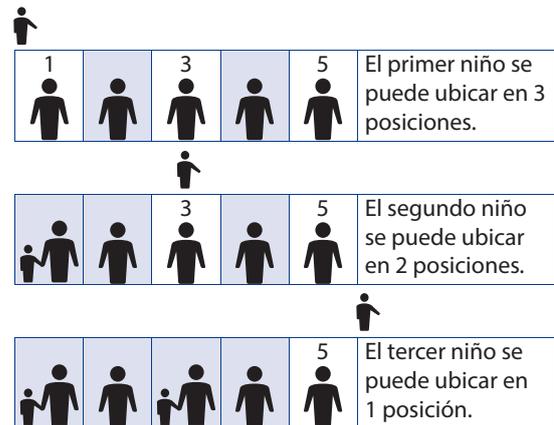
Para resolver este problema puedes utilizar la estrategia **Usar un problema similar pero más sencillo**, definiendo una cantidad menor de posibles combinaciones que permitan resolver el problema y luego adaptar el procedimiento para el número real de combinaciones.

Aplica la **estrategia** y resuelve

Usaremos un caso más simple, considerando que los escoltas son solo 3 niños y 2 niñas. Por lo tanto, en este caso hipotético la fila de jugadores consta de 5 posiciones: tres impares (posiciones 1, 3 y 5) y dos pares (posiciones 2 y 4).

Como se ve en los esquemas las posibilidades para el primer niño son 3, las del segundo niño son 2 y la del tercer niño es 1. Por lo tanto, aplicando el principio multiplicativo, la cantidad de maneras en que se pueden ordenar los niños es  $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ . Análogamente, la cantidad de formas en que se pueden ordenar las niñas es de  $2 \cdot 1 = 2$ .

Estos resultados nos permiten proyectar estos resultados para los datos reales del problema:



N.º de maneras en que se pueden ordenar los 6 niños	N.º de maneras en que se pueden ordenar las 5 niñas	N.º de maneras en que se pueden ordenar los 11 niños y niñas
$6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$	$5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$	$720 \cdot 120 = 86\,400$

Verifica la respuesta

Escribe tú

Comunica la respuesta

Escribe tú

¿De qué otra forma resolverías este problema? Explica.

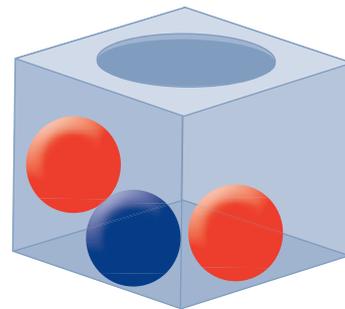
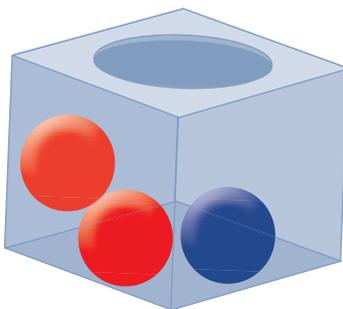
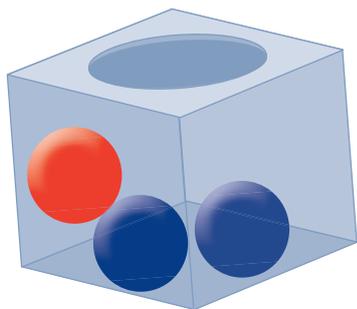
### Vuelvo a mis procesos

Responde de acuerdo a tu apreciación.

Si eliges al azar una bola de cada una de las urnas, ¿en cuál de las elecciones es mayor la probabilidad de extraer una bola azul?, ¿por qué?

¿Qué es más probable, extraer una bola roja de la urna 1 al seleccionar una bola al azar de ella o extraer dos bolas rojas al seleccionar al azar una bola de la urna 2 y una bola de la urna 3?

Si juntas todas las bolas en una única urna, ¿qué es más probable, extraer una bola roja o una bola azul?, ¿por qué?



¿Qué concepto de la sección te hubiera gustado estudiar con mayor detalle?, ¿por qué?

¿Crees que esta sección te permitió ampliar tus conocimientos de probabilidades?, ¿en qué forma?

¿Qué metas de esta sección quedaron pendientes?, ¿por qué?

¿Cómo se llama?

### Mapa conceptual

Organiza los conceptos en el mapa propuesto para la sección 11 de esta unidad.

percentiles – porcentajes – cuartiles – diagramas de cajón



Junto a un compañero o una compañera construyan mapas conceptuales para las secciones 10 y 12 de esta unidad.

¿Cómo se hace?

• **Pregunta sección 10**

¿Cómo verificas que un gráfico está bien definido?

• **Pregunta sección 11**

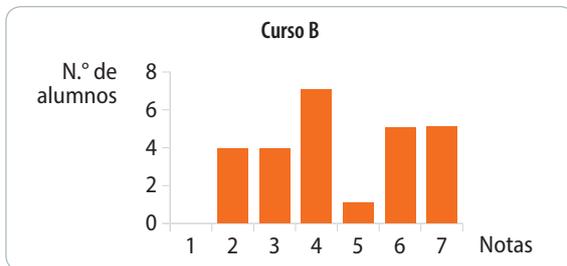
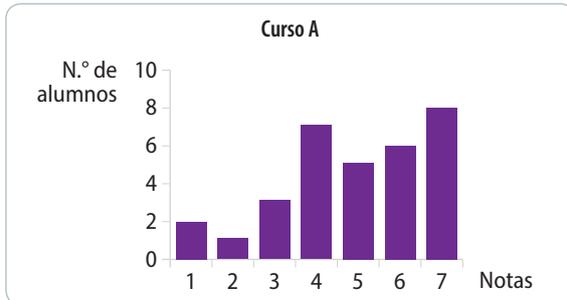
¿Cómo determinas el valor de  $Q_n$ , donde Q es un cuartil y  $n = 1, 2$  o  $3$ ?

• **Pregunta sección 12**

¿Cómo usas el principio multiplicativo para determinar la cardinalidad del espacio muestral de un experimento aleatorio?

Representación y comparación de información en gráficos

1. Analiza los gráficos que representan las notas en la prueba de Lenguaje de dos cursos. Luego, responde.



- a. ¿En qué tipo de gráfico se representaron las notas?
  - b. ¿En qué curso hubo mayor cantidad de estudiantes con nota menor a 4?
  - c. ¿En qué curso hubo mayor cantidad de estudiantes con nota mayor a 4?
  - d. ¿Qué curso tuvo un mejor rendimiento? Justifica tu respuesta.
2. Interpreta la tabla que muestra el registro de una muestra de pilas a las cuales se les midió su duración en horas. Luego, responde.

Duración pilas	
Duración (horas)	N.º de pilas
18 a 24	22
24 a 30	32
30 a 36	45
36 a 42	21

- a. ¿Qué tipo de variable está representada en la tabla?
- b. ¿Cuál es el intervalo en que hay una mayor cantidad de pilas?
- c. ¿Qué gráfico es el más adecuado para representar los datos de la tabla? Justifica tu elección.

3. Las personas que asistieron a clases gratuitas de inglés dictadas en 18 universidades del país fueron:

32	45	12	52	24	53
22	31	56	60	43	52
53	48	39	48	54	55

- a. Justifica la elección de un gráfico para representar el conjunto de datos.
- b. Extrae dos conclusiones desde este gráfico.

Medidas de posición

4. Organiza los datos en una tabla de frecuencias. Luego, calcula.

Reservas realizadas durante un mes en un hotel.

1	2	1	4	6	8
4	1	2	1	4	3
2	2	5	6	5	2
7	3	5	3	2	3
7	6	7	6	2	4

- a. Percentil 40.
  - b. Percentil 60.
  - c. Cuartil 1.
  - d. Cuartil 2.
  - e. ¿Qué interpretación le das al cuartil 2?
5. Responde las preguntas a partir de la información de la tabla.

Pulsaciones por minuto de un grupo de personas luego de realizar actividad física	
Frecuencia cardíaca	Frecuencia absoluta
123 a 133	5
133 a 143	12
143 a 153	21
153 a 163	12
163 a 173	23
173 a 183	32
183 a 193	18
193 a 203	7

- a. ¿En qué intervalo se encuentra la mediana?
- b. ¿En qué intervalo se encuentra el percentil 80?
- c. ¿En qué intervalo se encuentra el cuartil 3?

6. En una escuela se ha realizado un test de aptitudes en Arte. Los cuartiles de resultados de los estudiantes se indican a continuación:

$Q_1$	51
$Q_2$	67
$Q_3$	73

A partir de los datos, completa.

- El 75% de los estudiantes tiene un puntaje superior o igual a \_\_\_\_\_.
  - El 25% de los estudiantes tiene un puntaje superior o igual a \_\_\_\_\_.
  - El \_\_\_\_\_ % tiene un puntaje igual o inferior a 67 puntos.
  - El \_\_\_\_\_ % tiene un puntaje igual o superior a 67 e inferior a 73.
7. Utiliza GeoGebra para representar cada conjunto de datos en un diagrama de cajón.

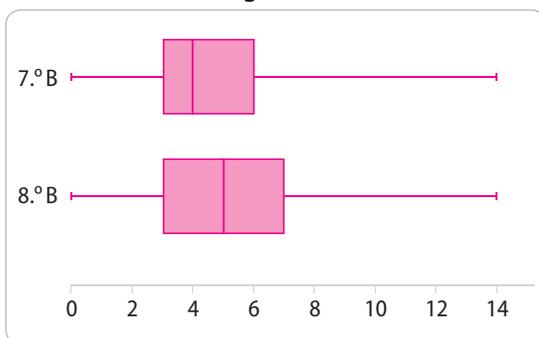
a.

Valor mínimo	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	Valor máximo
1,5	4	7	7,5	8

b.

Valor mínimo	$Q_1$	$Q_2$	$Q_3$	Valor máximo
3	5	6	7	10

8. Los siguientes diagramas de cajón muestran una estadística sobre la cantidad de libros prestados anualmente a los alumnos del 7.º B y del 8.º B de un colegio.



A partir de la información representada, escribe V si la afirmación es verdadera y F si es falsa.

- \_\_\_\_\_ El 25% de los alumnos de 8.º B pide prestado anualmente entre 7 y 14 libros.
- \_\_\_\_\_ El 25% de los alumnos de 7.º B pide prestado anualmente entre 0 y 3 libros.
- \_\_\_\_\_ El 75% de los alumnos de 7.º B pide

prestado anualmente por lo menos 1 libro.

- d. \_\_\_\_\_ El 50% de los alumnos de 8.º B pide prestado anualmente a lo más 5 libros.

### Probabilidades

- Raúl debe escoger como vestirse usando una de sus 4 camisas, una de sus 3 corbatas y uno de sus 3 pantalones. ¿De cuántas formas diferentes puede hacerlo?
- El testigo de un accidente de tránsito le indica a una policía que el número de patente del automóvil implicado tenía las letras BTJK seguidas por 3 dígitos, el primero de los cuales era un 6. Si el testigo no recuerda los otros dos dígitos, pero está seguro de que los 3 eran diferentes, ¿cuál es la cantidad de patentes de automóvil que debe verificar la policía para encontrar al causante del accidente?
- Se extraen dos bolitas al azar de la bolsa, una después de la otra y sin reposición.



- ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bolita roja y otra azul (en ese orden)?
  - ¿Obtienes el mismo resultado si calculas la probabilidad de sacar una bolita roja y otra azul (en cualquier orden)?, ¿por qué?
- Se dispone de 6 tarjetas: 2 verdes, 3 azules y 1 roja. Si se extraen consecutivamente y sin devolución dos tarjetas, ¿cuál es la probabilidad de que ambas sean azules?
  - Gastón realiza diferentes tipos de páginas web. Se especializa en páginas para colegios, institutos y bancos. Para cada página tiene 15 opciones de diseño y dispone de 4 colores diferentes. ¿Cuál es la probabilidad de diseñar una página a un colegio con un diseño particular y de un color específico?

## Parte I

1. Escribe V si la afirmación es verdadera y F si es falsa. (6 puntos)
  - a. \_\_\_\_ La cardinalidad del espacio muestral del experimento aleatorio de lanzar en forma sucesiva dos dados de seis caras es 12.
  - b. \_\_\_\_ Para visualizar la tendencia del precio del cobre en los últimos 3 meses es recomendable usar un gráfico de líneas.
  - c. \_\_\_\_ El segundo cuartil equivale a la media aritmética de los datos.
  - d. \_\_\_\_ La probabilidad de obtener tres caras al lanzar tres veces una moneda es  $\frac{1}{8}$ .
  - e. \_\_\_\_ El tercer cuartil para los datos 1, 2, 3, 4 y 5 es 4.
  - f. \_\_\_\_ La cardinalidad del espacio muestral del experimento aleatorio de lanzar en forma sucesiva un dado de seis caras y una moneda es 12.
2. Un restaurante ofrece distintos sabores para sus jugos naturales: naranja, frutilla, frambuesa, melón y piña. El cliente elige si desea su vaso de jugo con trozos enteros de fruta o no. Además, el cliente elige entre tres opciones: sin endulzante, con azúcar o con endulzante *light*. Finalmente, al servirlo puede ir con hielo o sin hielo. ¿Cuántos vasos de jugo diferentes con trozos de fruta entera se pueden preparar en el restaurante? (2 puntos)
3. Considera los cinco indicadores de posición que se pueden identificar en un diagrama de cajón: mínimo, máximo y los cuartiles. ¿Cuáles de ellos coinciden para el conjunto de datos siguiente? (3 puntos)

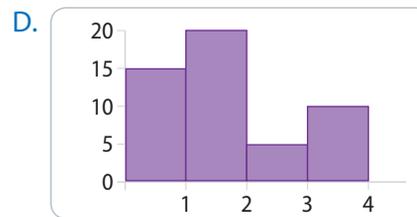
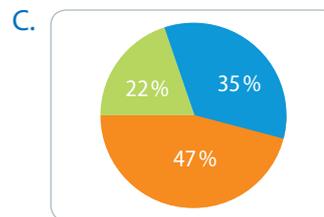
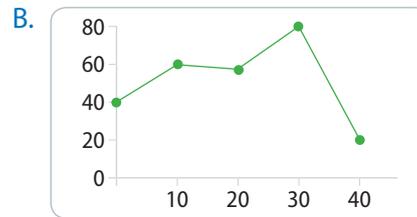
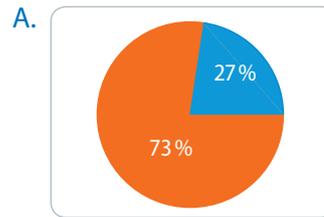
10	10	10	12	14
----	----	----	----	----

En los ejercicios del 4 al 8, selecciona la alternativa correcta. (5 puntos)

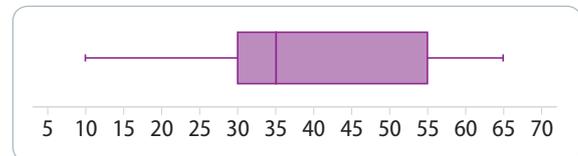
4. Una urna contiene 5 bolas: 3 rojas, 1 azul y 1 verde. Se define el experimento aleatorio compuesto de lanzar un dado de seis caras y de extraer al azar una bola desde la urna. ¿Cuál es la probabilidad de, al realizar el experimento, obtener el par (5, V), es decir, de obtener un 5 en el dado y de extraer una bola verde de la urna?

- A.  $\frac{1}{11}$     B.  $\frac{1}{30}$     C.  $\frac{1}{24}$     D.  $\frac{11}{30}$

5. ¿Cuál de los gráficos está mal definido?



6. Observa los datos representados en el diagrama de cajón.



El valor del tercer cuartil es:

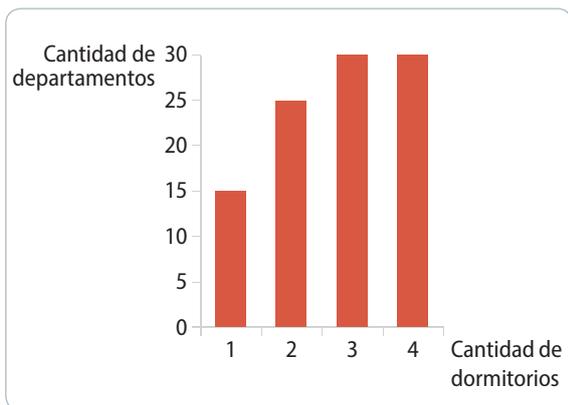
- A. 30    B. 35    C. 55    D. 65
7. Un examen tiene 4 preguntas del tipo verdadero o falso. Si se deben responder todas las preguntas, ¿de cuántas maneras diferentes se puede contestar el examen?
 

A. 2    B. 4    C. 8    D. 16
  8. La diferencia entre el tercer cuartil y el primer cuartil del conjunto 1, 1, 1, 1, 3, 3, 4, 6 y 10 es:
 

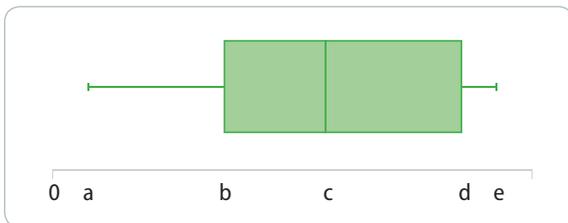
A. 1    B. 2    C. 3    D. 4

Parte II

9. Una constructora acaba de terminar un gran edificio con dormitorios de 1, 2, 3 y 4 dormitorios. El gráfico muestra el número de departamentos que posee y la cantidad de dormitorios.

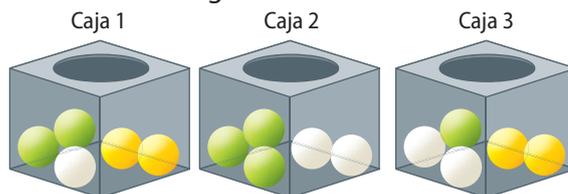


- ¿Crees que hubiera sido más adecuado elegir otro tipo de gráfico para representar la información?, ¿por qué? Argumenta por escrito. (2 puntos)
  - ¿Cómo calcularías el primer cuartil de los datos representados? Explica el procedimiento que seguirías y justifícalo. (3 puntos)
  - Imagina que seleccionas al azar un propietario de un departamento del edificio, ¿cuál es la probabilidad de que el departamento de su propiedad sea de 2 dormitorios? (3 puntos)
10. Observa el diagrama de cajón que representa un conjunto de datos.



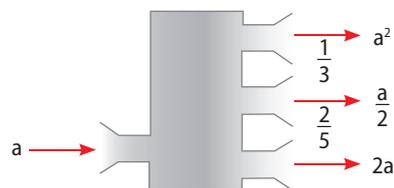
- Identifica cada indicador de posición (valor mínimo, cuartil 1, cuartil 2, cuartil 3 y valor máximo) con uno de los valores representados por las letras a, b, c, d y e. (2 puntos)
- Usa  $<$ ,  $>$  o  $=$  para expresar la relación de orden que representa que el bigote izquierdo posee una extensión mayor que el bigote derecho. (3 puntos)
- Usa  $<$ ,  $>$  o  $=$  para expresar relación de orden que representa que el compartimento izquierdo y el compartimento derecho del cajón tienen la misma extensión. (3 puntos)

11. Tres cajas contienen 5 esferas cada una, siendo sus colores los siguientes:



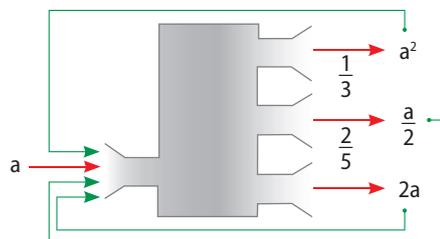
Si se extrae al azar una esfera de cada caja, ¿cuál es la probabilidad de que las tres esferas sean del mismo color? (6 puntos)

12. Considera una máquina que transforma el número que ingresa a ella en otro número de acuerdo a las probabilidades que se indican en la figura.



- De acuerdo a la imagen, ¿cuál es la probabilidad de que la máquina transforme el número a en  $2a$ ? (2 puntos)
- Si ingresa a la máquina el número 2, ¿cuál es la probabilidad de que se transforme en el número 1? (1 punto)

Considera ahora que un número  $a$  ingresa una vez y, tras esto, el número transformado vuelve a ingresar a la máquina, como se muestra a continuación.



Si ingresa a la máquina el número 2, responde:

- ¿Cuál es la probabilidad de que tras la segunda transformación se obtenga el número 16? (2 puntos)
- ¿Cuál es la probabilidad de que tras la segunda transformación se obtenga el número  $\frac{1}{2}$ ? (2 puntos)
- ¿Cuál es la probabilidad de que tras la segunda transformación se obtenga el número 2? (3 puntos)

Para repasar contenidos

Cuenta el puntaje que obtuviste en la parte I de la evaluación (para conocer el puntaje de las actividades 2 y 3 pide apoyo a tu profesor o profesora). Luego, revisa la tabla y calcula tu puntaje por contenido. Según tu nivel de logro, repasa el contenido y haz los ejercicios señalados.

Contenido	Logrado	Por lograr	Repasa en
Representación gráfica de información (Actividades 1.b y 5)	2 puntos	1 o menos puntos	Lecciones 42, 43 y 44. • Cuaderno de Ejercicios, páginas 120 a 125.
Medidas de posición (Actividades 1.c, 1.e, 3, 6 y 8)	5 o más puntos	4 o menos puntos	Lecciones 45, 46, 47, 48 y 49. • Cuaderno de Ejercicios, páginas 130 a 139.
Probabilidades (Actividades 1.a, 1.d, 1.f, 2, 4 y 7)	5 o más puntos	4 o menos puntos	Lecciones 50, 51 y 52. • Cuaderno de Ejercicios, páginas 144 a 149.

Para practicar habilidades

Para practicar las habilidades matemáticas evaluadas en la parte II, pide apoyo a tu profesor o profesora y dirígete a las páginas 154 y 155 del Cuaderno de Ejercicios.

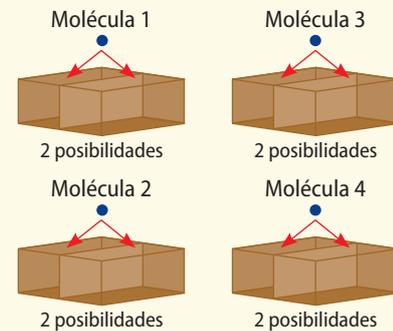
Habilidad	Logrado	Por lograr
Argumentar y comunicar (Actividad 9)	5 o más puntos	4 o menos puntos
Representar (Actividad 10)	5 o más puntos	4 o menos puntos
Resolver problemas (Actividad 11)	6 o más puntos	0 puntos
Modelar (Actividad 12)	6 o más puntos	5 o menos puntos

Desafío en equipo

Al finalizar la unidad los invitamos a formar equipos de 3 estudiantes para resolver este desafío.

Entropía:

La entropía es una propiedad característica de nuestro universo. Se puede asociar al nivel de desorden de un sistema. Así, por ejemplo, podemos relacionarla con la expansión de un gas en forma libre dentro de un recipiente. Si vemos un caso muy sencillo, considerando 4 moléculas de un gas y su distribución en el compartimento izquierdo o derecho del recipiente, tenemos lo siguiente:



1. Usen el principio multiplicativo para calcular la cantidad de posibles distribuciones que pueden asumir las 4 moléculas del gas en el recipiente.
2. Descubran y usen la regularidad que rige la expansión de las 4 moléculas de gas en el recipiente para determinar la cantidad de posibles distribuciones de un gas compuesto por 100 moléculas. ¿Cuántas moléculas creen que existen en 1 litro de un gas? ¿Qué pueden concluir acerca de la expansión de un gas?

Tomando en consideración los contenidos, las habilidades y las actitudes desarrollados en esta unidad, ¿qué nivel de dificultad representó este desafío para ustedes?, ¿por qué? ¿En qué fallaron? Respondan individualmente, escribiendo en el recuadro.

**Abscisa:** coordenada que indica la posición de un punto según el eje X en el plano cartesiano.

**Altura:** segmento perpendicular trazado desde un vértice de un polígono al lado opuesto (o su prolongación).

**Área:** medida de la superficie que ocupa una figura.

**Área basal:** área de la base de una figura 3D.

**Área lateral:** área de la superficie de las caras laterales de una figura 3D.

**Aumento porcentual:** porcentaje en que aumenta una cantidad. Calcular una cantidad aumentada en un  $n\%$ , equivale a determinar el  $(100 + n)\%$ .

**Balanza:** instrumento que se utiliza para comparar las masas de objetos.

**Base:** superficie que sirve para apoyar una figura 3D en un plano.

**Cateto:** lado opuesto a un ángulo agudo de un triángulo rectángulo.

**Cilindro:** figura 3D generada por el giro de un rectángulo en torno a uno de sus lados.

**Coefficiente de posición:** ordenada del punto  $(0, n)$  que pertenece a una función afín y que indica su intersección con el eje Y.

**Coefficiente numérico:** término que multiplica a una variable o factor literal.

**Composición de transformaciones isométricas:** aplicación sucesiva de transformaciones isométricas sobre un punto o una figura.

**Conjunto solución:** grupo de números que resuelven un problema.

**Constante de proporcionalidad:** cociente entre los valores de dos variables directamente proporcionales. En el caso de variables inversamente proporcionales corresponde al producto entre sus valores.

**Cuartiles:** medidas de posición. Corresponden a 3 valores que dividen el conjunto ordenado de datos en 4 partes iguales.

**Desigualdad:** relación que indica que dos expresiones no son iguales.

**Diagrama de árbol:** representación que muestra todos los posibles resultados de un experimento.

**Diagrama de cajón:** representación gráfica que se construye a partir de los cuartiles de un conjunto de valores de una variable.

**Disminución porcentual:** porcentaje en que disminuye una cantidad. Calcular una cantidad disminuida en un  $n\%$ , equivale a calcular el  $(100 - n)\%$  de esa cantidad.

**Ecuación:** igualdad entre expresiones algebraicas.

**Espacio muestral:** conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

**Evento:** resultados de un experimento aleatorio, que corresponde a un subconjunto del espacio muestral.

**Exponente:** número que indica la cantidad de veces que se multiplica la base en una potencia.

**Expresión algebraica:** secuencia de números y letras unidas mediante operaciones matemáticas.

**Factor común:** factor que se repite en más de un término algebraico.

**Factor literal:** letras o variables que representan una cantidad en álgebra.

**Factorizar:** proceso de escribir una expresión algebraica como un producto de factores.

**Frecuencia:** número de observaciones de cada categoría de una variable.

**Función:** regla de correspondencia entre dos conjuntos llamados dominio y recorrido; asigna a cada elemento del dominio un único elemento del recorrido.

**Función afín:** función de la forma  $f(x) = mx + n$ , donde  $m$  corresponde a la pendiente y  $n$  al coeficiente de posición de la recta que la representa. Su gráfica es una línea recta que corta al eje Y en el punto  $(0, n)$ .

**Función lineal:** función de la forma  $f(x) = mx$ , donde  $m$  corresponde a la constante de proporcionalidad (o pendiente) de las variables involucradas. Su gráfica es una línea recta que pasa por el origen del plano cartesiano.

**GeoGebra:** *software* geométrico utilizado para construir, diseñar o demostrar propiedades geométricas.

**Gráfico:** representación que constituye una forma de organizar y presentar visualmente los datos.

**Gráfico circular:** gráfico donde los datos se representan mediante sectores de un círculo, cuyas áreas son proporcionales a las frecuencias de las categorías que representan.

**Gráfico de barras:** gráfico en que se representan las frecuencias de las categorías de una variable. Está formado por barras rectangulares de altura equivalente a la frecuencia que se quiere representar.

**Gráfico de líneas:** gráfico que usa puntos conectados por líneas para mostrar el cambio de una variable.

**Hipotenusa:** lado mayor en un triángulo rectángulo y opuesto al ángulo recto.

**Histograma:** representación gráfica de una distribución de frecuencias, generalmente de variables cuantitativas agrupadas por intervalos.

**Igualdad:** expresión matemática que indica la equivalencia que existe entre dos cantidades. Se expresa usando el signo  $=$ .

**Incógnita:** valores desconocidos en una ecuación.

**Inecuación:** desigualdad entre dos expresiones algebraicas que involucran una cantidad desconocida o incógnita.

**Interés:** diferencia entre el capital final y el capital inicial, de acuerdo a un cierto crédito.

**IVA:** impuesto al valor agregado que se aplica a cada producto que tiene un valor neto (valor sin impuesto). Actualmente este impuesto es de un 19% del valor neto del producto.

**Medidas de posición:** indican el lugar donde se ubica un valor de la variable dentro de un conjunto ordenado de valores.

**Monomio:** es una expresión algebraica que consta de un solo término.

**Números enteros:** conjunto numérico que incluye los números naturales, el 0 y los inversos aditivos de los números naturales.

**Números naturales:** conjunto numérico que permite contar los elementos de un conjunto.

**Ordenada:** coordenada que indica la posición de un punto según el eje Y en el plano cartesiano.

**Pendiente:** medida de inclinación de la línea recta correspondiente al gráfico de una función lineal y afín.

**Percentiles:** medidas de posición que corresponden a 99 valores que dividen al conjunto ordenado de datos en 100 partes iguales.

**Plano cartesiano:** sistema de coordenadas en el cual los ejes (rectas numéricas) se intersecan perpendicularmente.

**Porcentaje:** fracción cuyo denominador es 100.

**Potencia:** multiplicación de un factor repetidas veces por sí mismo. El factor repetido se denomina base y el número que indica la cantidad de veces que se repite se llama exponente.

**Principio multiplicativo:** técnica de conteo que puede usarse para determinar la cardinalidad de un espacio muestral o la probabilidad de ocurrencia de eventos en un experimento aleatorio.

**Prisma:** figura 3D que tiene dos caras paralelas y congruentes llamadas bases, y sus otras caras son paralelogramos. Para nombrar a un prisma se utilizan los polígonos que forman sus bases.

**Probabilidad:** medida de la posibilidad de ocurrencia de un evento o suceso. Su valor varía entre 0 y 1.

**Propiedad distributiva:** propiedad de la multiplicación que se aplica respecto a la adición.

**Proporción:** igualdad entre dos razones.

**Proporcionalidad directa:** relación entre dos variables cuyo cociente es constante.

**Proporcionalidad inversa:** relación entre dos variables cuyo producto es constante.

**Raíz cuadrada:** operación inversa de elevar un número a un exponente 2.

**Recta numérica:** recta graduada en la cual se representan de forma ordenada los números.

**Red:** representación en dos dimensiones de un objeto en tres dimensiones. Se obtiene a partir del desarrollo de la figura 3D, extendiendo sus caras sobre el plano.

**Reflexión respecto a un punto:** transformación isométrica que transforma un punto dado en otro, que está a la misma distancia de un punto específico (centro de reflexión), pero en el lado opuesto de él.

**Reflexión respecto a una recta:** transformación isométrica que transforma un punto dado en otro, que está a la misma distancia de una recta, pero en el lado opuesto de ella.

**Regla de los signos:** regla que indica el signo del resultado luego de realizar una operación con números positivos y/o negativos.

**Rotación:** transformación isométrica que ocurre cuando una figura

geométrica gira un ángulo dado alrededor de un punto del plano cartesiano.

**Teorema de Pitágoras:** teorema que relaciona las medidas de los lados de un triángulo rectángulo.

**Término algebraico:** expresión algebraica en la cual los números y/o las letras están relacionados por la multiplicación.

**Términos semejantes:** dos o más términos algebraicos que contienen el mismo factor literal.

**Teselación:** regularidad o patrón de figuras que cubre una superficie sin dejar espacios ni sobreponer figuras.

**Traslación:** transformación isométrica que desplaza una figura según el vector que la define.

**Triángulo rectángulo:** triángulo que tiene un ángulo recto ( $90^\circ$ ).

**Variable:** símbolo que representa una cantidad que puede cambiar.

**Variable continua:** variable cuantitativa que puede asumir cualquier valor dentro de un intervalo.

**Variable cualitativa:** describe una cualidad.

**Variable cuantitativa:** describe una cantidad.

**Variable discreta:** variable cuantitativa que solo asume valores aislados de un conjunto.

**Variable nominal:** variable cualitativa cuyos valores no pueden ser ordenados de manera ascendente o descendente.

**Variable ordinal:** variable cualitativa cuyos valores pueden ser ordenados de manera ascendente o descendente.

**Variación porcentual:** variación representada por medio de porcentajes.

**Volumen:** medida del espacio que ocupa una figura 3D.

- **Álvarez, R. (2013).** *Conjuntos numéricos y aritmética*. Medellín, Colombia: Universidad de Medellín.
- **Araneda, A., Chandía, E. y Sorto, M. (2013).** *Recursos para la formación inicial de profesores de Educación Básica. Datos y azar*. Santiago de Chile: Ediciones SM.
- **Araya, R. (2000).** *Inteligencia Matemática*. Santiago, Chile: Editorial Universitaria.
- **Artigue, M., ET AL. (1995).** *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México D. F., México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- **Baker, A. (1986).** *Breve introducción a la teoría de números*. España, Madrid: Editorial Alianza.
- **Brousseau, G. (1993).** *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Burdeos, Francia: Universidad de Burdeos I.
- **Cantoral, R., ET AL. (2003).** *Desarrollo del pensamiento matemático*. México D. F.: Trillas.
- **Chevallard, Y. (1991).** *La transposición didáctica del saber al saber enseñando*. Buenos Aires, Argentina: Aique.
- **Chuaqui, R. (1980).** *¿Qué son los números?* Santiago, Chile: Editorial Universitaria.
- **Freund J., Miller I., Miller M. (2000).** *Estadística matemática con aplicaciones*. Madrid, España: Editorial Prentice Hall.
- **Godino, J. (2002).** *Didáctica de las matemáticas para maestros*. Granada, España. Proyecto Edumat-Maestros, Gami.
- **Innocenti G., Villanueva F., Masjuan G. (1980).** *Geometría elemental del espacio*. Santiago, Chile: Instituto de Matemática Pontificia Universidad Católica de Chile.
- **Ma, L. (2010).** *Conocimientos y enseñanza de las matemáticas elementales*. Santiago, Chile: Academia Chilena de Ciencias.
- **Matemática, Programa de Estudios, Octavo Año Básico.** Ministerio de Educación, República de Chile. Santiago de Chile 2014.
- **Miranda, H. y Moya, M. (2008).** *Álgebra. El poder generalizador de los símbolos*. Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.
- **Oteíza, F., Zamorano A., y Baeza, O. (2008).** *La geometría de los modelos a escala. Semejanza de figuras planas*. Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.
- **Portus, L. (1998).** *Introducción a la estadística*. Bogotá, Colombia: Mc Graw Hill.
- **Rey Pastor, J. (2000).** *Historia de la matemática*. Barcelona, España: Ediciones Gedisa.
- **Saavedra E. (2003).** *Cálculo de Probabilidades*. Santiago, Chile: Editorial Universidad de Santiago.

## Sitios web

- Educación: [www.educarchile.cl](http://www.educarchile.cl)
- GeoGebra: [www.geogebra.org](http://www.geogebra.org)
- El portal de las matemáticas: [www.sectormatematica.cl](http://www.sectormatematica.cl)
- Icarito: [www.icarito.cl](http://www.icarito.cl)
- Instituto Nacional de Estadísticas: [www.ine.cl](http://www.ine.cl)
- Ministerio de Educación: [www.mineduc.cl](http://www.mineduc.cl)
- Ministerio de Salud: [www.minsal.cl](http://www.minsal.cl)
- OCDE-Pisa: [www.oecd.org](http://www.oecd.org)
- Programa Explora Conicyt: [www.explora.cl](http://www.explora.cl)
- Real Academia Española de la Lengua: [www.rae.es](http://www.rae.es)
- Simce: [www.simce.cl](http://www.simce.cl)
- Mamut Matemáticas: [www.mamutmatematicas.com/](http://www.mamutmatematicas.com/)
- Portal de la junta de Andalucía: [www.juntadeandalucia.es/](http://www.juntadeandalucia.es/)

## Unidad 1 Números

### Página 6

A partir del segundo término, cada término es el doble del anterior. El séptimo término es 96.

### Página 8 ▶ Sección 1: Operaciones con números positivos y negativos

- $\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6}$
  - Deberían ser todos, excepto regla de los signos.
  - números enteros (conjunto numérico) y adición, multiplicación, sustracción y división (operaciones).
  - regla de los signos.

### Página 10 ▶ ¿Qué debo saber?

- 2
  - 17
  - 0
  - 6
  -
- 9
  - 5
  - 0
  - 14
  - +
- 6
  - 13
  - 10
  - 7
  - +
- 51
  - 14
  - 4
  - 5
  -

Fracción	Nº decimal	Fracción	Nº decimal
$\frac{8}{5}$	1,6	$\frac{3}{8}$	0,375
$\frac{7}{5}$	1,4	$\frac{21}{4}$	5,25
$\frac{13}{4}$	3,25	$\frac{41}{10}$	4,1
$\frac{1}{100}$	0,01	$\frac{5}{8}$	0,625

### Página 11

- $\frac{7}{6}$
    - $\frac{23}{24}$
    - 3,57
    - 1,3
    - 6,111
  - $\frac{5}{8}$
    - $-\frac{8}{45}$
    - 1
    - 0,75
    - 0,15
  - $\frac{15}{22}$
    - $\frac{8}{21}$
    - 22
    - 30
    - 0,28
  - $\frac{9}{34}$
    - $\frac{84}{875}$
    - 0,15
    - 0,7
    - 1,44
- En total ha bajado \$ 600.
    - El submarino está a 1280 m de profundidad.
    - A esa hora la temperatura era de 1 °C.
  - Vendió 180 000 choclos.
    - Contestó correctamente 24 preguntas.

### Página 12 ▶ Lección 1

#### Situación 1

Se espera que el alumno mencione la propiedad conmutativa de la multiplicación, por lo tanto, debiese afirmar que se obtiene el mismo resultado.

- 20
- 5    -4    -20    un número entero negativo

### Página 13

#### Situación 2

El resultado es -18. Sí coincide.

- 6    -3    18    un número entero positivo

#### Argumenta y comunica

- Se puede usar una tarjeta con un -1 y, al aplicar la regla de multiplicación, la tarjeta se invierte, dando como resultado 1.
- $-1 \cdot (-1) \cdot (-1) = -1 \cdot 1 = -1$

### Página 14 ▶ Practiquemos lo aprendido

- 10
  - 72
  - 2
  - 43
  - 2
- 92
  - 144
  - 8
  - 26
  - 10
- 180
  - 2580
  - 1
  - 1
  - 46
- El monto total de su deuda es de \$ 64 870.
  - El buzo se encuentra a 90 m de profundidad.
- 12
  - 16
  - 42
  - 18

Número	-9	5	4	-2
Doble	-18	10	8	-4
Triple	-27	15	12	-6
Cuádruple	-36	20	16	-8

- - 
  - 
  - 
  - 
  -
- 3
  - 6
  - 3
  - 4
  - 91
  - 8
  - Por ejemplo,  $3 \cdot 2 \cdot 1$ .
  - Por ejemplo,  $-3 \cdot 3 \cdot 2$ .
  - Por ejemplo,  $7 \cdot 1 \cdot 2$ .
  - Por ejemplo,  $3 \cdot 4 \cdot 2$ .
  - Por ejemplo,  $-13 \cdot 3 \cdot 1$ .
  - Por ejemplo,  $3 \cdot (-3) \cdot 5$ .
  - Por ejemplo,  $9 \cdot 3 \cdot (-3)$ .
  - Por ejemplo,  $3 \cdot 3 \cdot 5$ .
  - Por ejemplo,  $2 \cdot 5 \cdot 0$ .
  - Por ejemplo,  $-3 \cdot 100 \cdot 5$ .
  - Por ejemplo,  $1 \cdot (-1) \cdot 1$ .
  - Por ejemplo,  $13 \cdot 1000 \cdot (-5)$ .
- 20
  - 1
  - 72
  - 35
  - 38
  - 34
  - Por ejemplo,  $3 \cdot 2 \cdot 1$ .
  - Por ejemplo,  $-3 \cdot 3 \cdot 2$ .
  - Por ejemplo,  $7 \cdot 1 \cdot 2$ .
  - Por ejemplo,  $3 \cdot 4 \cdot 2$ .
  - Por ejemplo,  $-13 \cdot 3 \cdot 1$ .
  - Por ejemplo,  $3 \cdot (-3) \cdot 5$ .
  - Por ejemplo,  $9 \cdot 3 \cdot (-3)$ .
  - Por ejemplo,  $3 \cdot 3 \cdot 5$ .
  - Por ejemplo,  $2 \cdot 5 \cdot 0$ .
  - Por ejemplo,  $-3 \cdot 100 \cdot 5$ .
  - Por ejemplo,  $1 \cdot (-1) \cdot 1$ .
  - Por ejemplo,  $13 \cdot 1000 \cdot (-5)$ .
- - 
  - +
  - 
  - +
  -

### Página 15

- A los 80 minutos la cámara de frío estará a  $-37$  °C.
    - A la media hora la cámara de frío estará a  $-33$  °C.
    - A las 17:20 la cámara de frío estará a  $-19$  °C.



- El orden de resolución de las operaciones matemáticas es: paréntesis, división, adición o sustracción.
- Es correcta la afirmación, ya que la división de dos números enteros no siempre es exacta.
- Diego comete el error de relacionar el concepto de opuestos aditivos con la división. Pero, en realidad este concepto está relacionado con la adición.

### Reflexiono

- Puede demostrarlo, pasando el divisor hacia el otro lado de la igualdad, quedando una multiplicación, en la cual puede aplicar la regla de los signos de la multiplicación.
- Se puede representar la relación entre dos desplazamientos de sentidos opuestos al original.

### Página 22 ▶ Lección 3

#### Situación 1

▮  $-39 - (-29) = -39 + 29 = -10$

▮ El resultado no es un número entero, es un número decimal.

- división

### Página 23

#### Situación 2

**R:** El descenso de temperatura por minuto fue de  $-4,666\dots$  °C.

▮ Indican que la división se puede realizar indefinidamente y el cociente es un número decimal infinito periódico.

#### Situación 3

$7 : 30 = 0,233\dots$

▮ El primer dígito del cociente es 0.

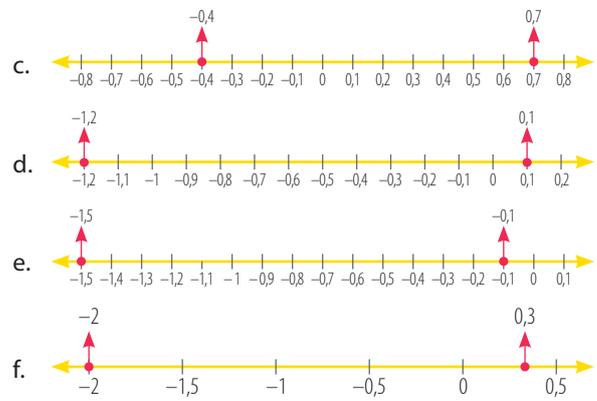
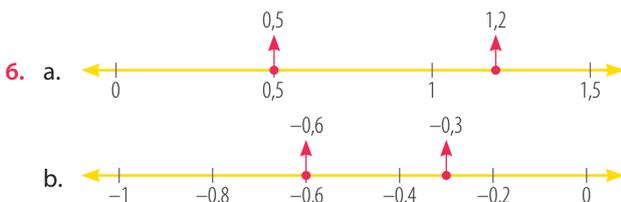
**R:** El cociente de la división es un número decimal infinito periódico negativo.

### Argumenta y comunica

Depende de que el dividendo sea o no sea múltiplo del divisor: si es múltiplo, el cociente es un número entero; si no lo es, el cociente es un número decimal. Es así como  $-12 \cdot 4 = -3$  y  $-16 \cdot 5 = -3,2$ .

### Página 24 ▶ Practiquemos lo aprendido

- C
  - D
  - B
  - A
- 9, 5, 0, -1, -4, -9
  - 10, 5, 3, 1, -3, -7
  - Entero (-).
  - Entero (+).
  - No entero (+).
  - Entero (-).
  - Entero.
  - No entero (-).
  - Entero.
  - Entero (-).
  - No entero (+).
- $1\frac{1}{5}$
  - $-\frac{3}{5}$
  - $-1\frac{1}{2}$
  - $-4\frac{1}{2}$
  - $\frac{3}{4}$
  - $-2\frac{1}{2}$
  - $-1\frac{1}{2}$
  - $-1\frac{1}{3}$
- 0,2
  - 0,125
  - 0,25
  - $-0,\overline{3}$
  - $-0,\overline{1}$
  - $1,\overline{5}$
  - $-0,58\overline{3}$
  - $0,18\overline{5}$
  - $-0,19\overline{4}$

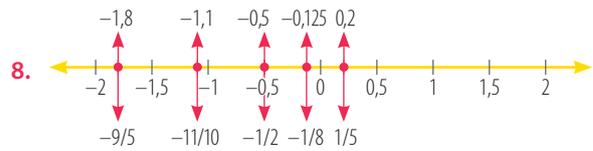


- Los números decimales positivos son siempre mayores que los números decimales negativos.
- Si son positivos, deben compararse los dígitos correspondientes que los componen. Si son negativos, es mayor el que tenga menor valor absoluto.
- Que la relación de orden entre números decimales es similar a la relación entre números enteros.

7. a. >    b. <    c. >    d. >    e. <    f. <

### Página 25

- Las fracciones positivas son siempre mayores que las fracciones negativas.
- Si las fracciones son positivas, amplificando se igualan los denominadores y es mayor la de mayor numerador. Si son negativas, es mayor la que tenga mayor valor absoluto.
- Que la relación de orden entre fracciones es similar a la relación entre números enteros.



$-1,8 = -\frac{9}{5}$ ;  $-1,1 = -\frac{11}{10}$ ;  $-0,5 = -\frac{1}{2}$ ;  $-0,125 = -\frac{1}{8}$ ;  $0,2 = \frac{1}{5}$

- Actualmente corre 166,6 m por min. Para cumplir con su meta deberá correr 208,3 m por min.
  - 0,605 m/s
    - 6,425 m/s
    - 25,6 s
    - $\frac{121}{200}$ ;  $6\frac{17}{40}$ ;  $25\frac{3}{5}$
    - La primera profundidad es de  $\frac{21}{2}$  metros y la segunda es de  $\frac{261}{10}$  metros.
      - La buceadora descendió 15,6 metros.
      - Recorre 0,26 metros por segundo.
      - A los 6 segundos, la buceadora está a una profundidad de 12,06 m.
      - Recorrería 0,156 metros por segundo.

- La estudiante consideró como mayores a los números decimales y luego, ordenó las fracciones de acuerdo a los denominadores de menor a mayor. El orden correcto es:  $\frac{1}{2} > 0,125 > 0,0625 > 0,0416 = \frac{1}{24}$ .

12. Marisol debe resolver la división considerando ambos números positivos y luego debe aplicar la regla de los signos para esta operación.

### Reflexión

1. El divisor debe ser un número distinto de 0 y el dividendo debe ser un número múltiplo del divisor, para que así el resto sea 0.
2. No siempre. Solo si es finito o infinito periódico o semiperiódico.

### Página 26 ▶ Lección 4

#### Situación 1

- Se puede confirmar dividiendo la distancia entre 0 y  $-1$  en 12 partes iguales y ubicando el quinto intervalo.
- Como una hora tiene 60 minutos, entonces se multiplica  $\frac{5}{12}$  de hora por 60 minutos.

### Página 27

#### Situación 2

- Es necesario realizar una sustracción.
- Se escribe como la fracción  $\frac{25}{100}$  y luego se simplifica hasta quedar como fracción irreducible.
- R:** No alcanza a recuperar su atraso, le queda aún  $\frac{1}{6}$  de hora.
- Para responder, se transformó un número decimal en fracción y luego se resolvió una adición de fracciones de distinto signo.

#### Situación 3

- Se escribe como la fracción  $-\frac{375}{1000}$  y luego se simplifica hasta quedar como fracción irreducible.
- Amplificando la fracción por 2. Para poder sumar fracciones de igual denominador.

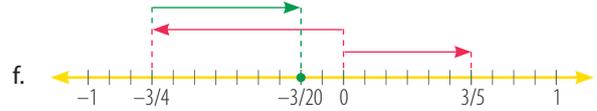
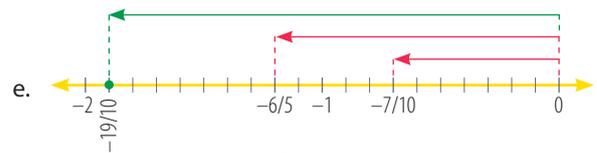
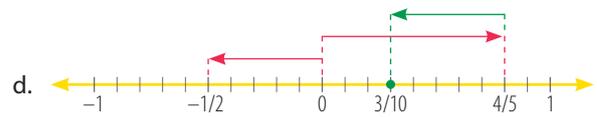
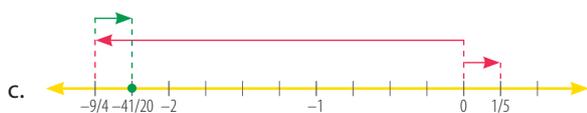
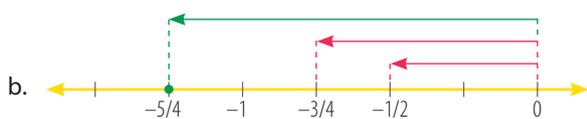
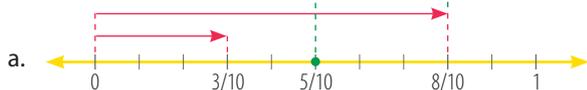
**R:** La diferencia es  $-\frac{3}{8}$ .

### Argumenta y comunica

Cuando los sumandos tienen signos distintos, la suma se puede obtener restando el valor absoluto de los números y manteniendo el signo del número con mayor valor absoluto.

### Página 28 ▶ Practiquemos lo aprendido

1. a. 1,85      c. 1,59      e. 4,25  
b. 5,77      d. 0,03      f. 0,165
2. a.  $\frac{7}{12}$       c.  $\frac{23}{14}$       e.  $\frac{59}{18}$   
b.  $\frac{23}{14}$       d.  $\frac{23}{30}$       f.  $\frac{49}{12}$
3. El nitrógeno y oxígeno ocupan en conjunto el 99,03% del espacio.
4. a.  $-0,2$     b.  $-2,2$     c.  $-1,6$     d.  $-3,3$     e.  $0,1$     f.  $0,9$
- 5.



6. a. F      b. V      c. V      d. F
7. a. La distancia que recorrió puede calcularse como la diferencia entre sus posiciones final e inicial. Si la profundidad es 2400 m, la posición inicial es  $\frac{1}{5} \cdot 2400$  m y su posición final es  $\frac{3}{4} \cdot 2400$  m. Y, por lo tanto, la distancia recorrida se puede representar por la expresión  $\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{5}\right) \cdot 2400 = 1320$  m.

### Página 29

- La variación fue de  $-\$ 8,68$ .
- La profundidad máxima sería de 2,15 m.
- Significa que Javier bajó 0,023 kg respecto de su masa original, es decir, la masa corporal de Javier ahora es 70,427 kg.
- La masa resultante al final de cada mes es:

Mes	Masa (kg)	Mes	Masa (kg)
Enero	70,495	Abril	70,538
Febrero	70,472	Mayo	70,542
Marzo	70,46	Junio	70,45

- Su masa debe variar en  $-4,95$  kg.
  - En los tres primeros meses su masa varió 0,01 kg.
  - En los tres últimos meses su masa varió  $-0,01$  kg.
  - La variación total de los seis meses fue 0; es decir, no subió ni bajó ningún gramo.
- La broca recorrió 202 m de descenso.
  - Los separan  $-79$  m.  
• Los separan  $-60$  m.  
• Los separan  $-96$  m.
  - El alumno puede optar por transformar todos los números a fracciones o todos los números a decimales. Luego, debe resolver primero las sumas de cada paréntesis, para finalmente resolver la adición de ambos resultados.
  - El resultado puede ser un número entero o decimal, positivo o negativo; ya que la sustracción de dos números negativos corresponde a una sustracción de un número positivo con un número negativo y el signo del resultado dependerá del mayor valor absoluto. Puede mencionar cualquier ejemplo con número entero o decimal.

### Reflexiono

- El resultado no siempre se puede expresar como número mixto ya que para que esto ocurra, debe ser una fracción donde el numerador sea mayor que el denominador.
- Se deben transformar todos los números a fracciones o todos los números a decimales, para luego representar gráficamente o desarrollar la adición directa.

### Página 30 ▶ Lección 5

#### Situación 1

- Porque esa es la máxima profundidad a la que se puede sumergir el pingüino.
- 0,15 km = 150 m y se calcula multiplicando 0,15 por 1000.

### Página 31

#### Situación 2

- Para resolverlo hay dos opciones: transformar ambos números a fracciones o a decimales. Una vez transformados, se realiza el procedimiento habitual de multiplicación.

**R:** El resultado de la multiplicación es 0,26.

#### Situación 3

$$\frac{14}{20} = \frac{7}{10}$$

- Si ambas fracciones fueran negativas el signo sería positivo.

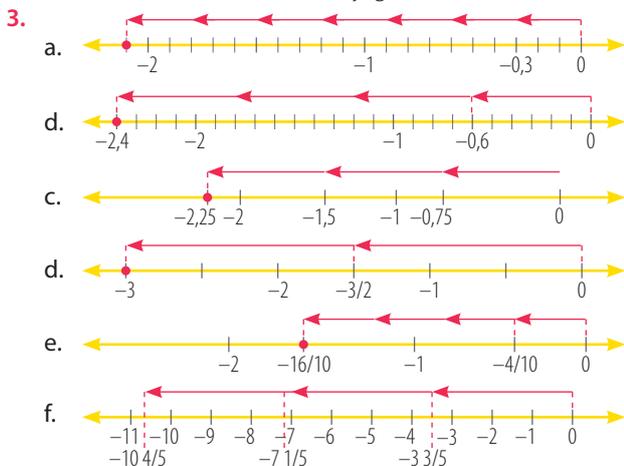
**R:** El resultado de la multiplicación es  $-\frac{7}{10}$ .

### Argumenta y comunica

El resultado de cada multiplicación es  $-2$ , ya que son distintas formas de incluir el signo de la fracción.

### Página 32 ▶ Practiquemos lo aprendido

- 0,6
  - 0,2947
  - 2,16
  - $\frac{5}{6}$
  - $\frac{55}{42}$
  - $10,205 = \frac{2041}{200}$
  - $\frac{49}{5}$
  - $\frac{189}{400} = 0,4725$
- En 1,5 horas de viaje, la motociclista llevará recorrido  $\frac{9}{10}$  de su camino. En hacer todo su recorrido, se demorará 1,6 horas.
  - Habrán llegado 75 automóviles.
  - Alejandra tomó 0,66 litros de jugo, Felipe tomó 0,55 litros de jugo, Federico tomó 0,88 litros de jugo y Leticia tomó 0,11 litros de jugo.



- 3
  - 0,88
  - 1,92
  - 0,1
- $-\frac{28}{45}$
  - $\frac{1}{2}$
  - $-\frac{2}{7}$
  - $-\frac{2}{9}$
- $\frac{46}{3}$
  - $\frac{6}{5}$
  - $\frac{7}{3}$
  - $-\frac{119}{10}$
- $\frac{3}{7}$
  - $\frac{9}{20}$
  - $\frac{11}{10}$

### Página 33

- F
  - V
  - F
  - V
- Se puede dividir la cantidad de kilómetros por 60 minutos, para obtener los kilómetros que avanza la máquina por minuto; luego, se puede transformar las horas en minutos y así multiplicar directamente los kilómetros que avanza en 1 minuto por la cantidad de minutos. La profundidad es de  $-0,42$  km.
    - Sí, se alcanza a recorrer esa profundidad.
  - Su altura habrá cambiado en  $-0,68$  km.
    - La altura del avión será 9 km.
    - Sí, el avión habrá aterrizado.
- Fuerza =  $-6891,525 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$
  - Fuerza =  $-6,2 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$
  - Fuerza =  $-7,36 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$
- Los signos de las fuerzas son negativos ya que indican que la fuerza que se debe aplicar para frenar tiene que ser en contra del sentido del movimiento del cuerpo.
- Es correcto afirmar que la multiplicación será ab, ya que cada número con su signo será representado por una letra y no por una letra y el signo aparte.

### Reflexiono

- La similitud es que en ambos casos, se ubica primero el número negativo representado por una flecha indicando hacia la izquierda y repitiendo la cantidad de veces que indique el número positivo.
- Se podría ubicar el número fraccionario negativo y trazar la flecha desde 0 a su punto. Luego, como el valor entero es negativo, quiere decir que cambia el sentido; por lo tanto, se debe considerar las veces que se repite la flecha de este número hacia la derecha a partir del 0.

### Página 34 ▶ Lección 6

#### Situación 1

- El cociente tendrá signo positivo.
- El resultado es  $-4,2$  y sirve para determinar cuántos kilogramos bajará Carlos en 7 meses.

### Página 35

#### Situación 2

- Se obtienen los mismos cocientes, ya que para generar el segundo caso, se divide por 10 al 84 y al 14, generando el 8,4 y el 1,4.

**R:** El resultado de la división es 6.

#### Situación 3

$$\frac{4}{7} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{21}$$

- Para dividir dos fracciones, el dividendo se mantiene igual, mientras que el divisor se invierte, transformando la división en una multiplicación de fracciones.

**R:** El resultado de la división es  $-\frac{8}{21}$ .

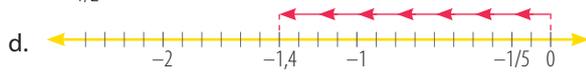
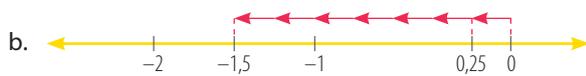
## Argumenta y comunica

La afirmación es incorrecta, ya que las divisiones no son las mismas. Si se escriben como fracciones, se puede amplificar la primera división por 10, obteniendo el numerador correcto, pero el denominador incorrecto de la segunda división; por ende, no son las mismas.

### Página 36 ▶ Practiquemos lo aprendido

1. a. 0,449      d. 2,381      g.  $\frac{9}{10}$       j.  $\frac{83}{60}$   
 b. 8      e.  $\frac{5}{14}$       h.  $\frac{9}{100}$       k.  $\frac{51}{140}$   
 c. 0,469      f.  $\frac{5}{24}$       i.  $\frac{216}{95}$       l. 2,4

2. a. El ciclista demorará 82,5 minutos en completar la ruta.  
 b. Cada integrante debe escribir  $\frac{11}{14}$  de una página.



4. a. 0,0125      b. -1,4      c.  $-2,\bar{6}$       d.  $-0,1\bar{6}$   
 5. a.  $-\frac{3}{2}$       b.  $-\frac{3}{5}$       c. 2      d.  $-\frac{12}{35}$   
 6. a.  $-\frac{5}{2}$       b.  $\frac{65}{102}$       c.  $\frac{176}{5}$       d.  $\frac{15}{56}$   
 7. a.  $-\frac{230}{27}$       b.  $\frac{1265}{294}$       c.  $-\frac{149}{15}$

### Página 37

8. a.

20 envases	40 envases
30 envases	50 envases

- Se necesitan n envases.
- Se necesitan  $k \cdot n$  envases.
- Se necesitan  $\frac{k \cdot n}{m}$  envases.

b. 10,8 kg

9. La densidad no puede ser negativa; ya que no existen cuerpos cuya cantidad de masa sea negativa ni tampoco su volumen.  
 12. Se esperaría que el alumno indicara que la división de fracciones le es más fácil, ya que el método es más directo que en el caso de los números decimales.

### Reflexiono

1. En ambos casos, se usa el mismo procedimiento para ubicar los números y graficar las flechas; pero cuando se trata de decimales positivos, la ubicación es hacia la derecha del 0 y la flecha es en sentido derecho; mientras que cuando los decimales son negativos, la ubicación es hacia la izquierda del 0 y las flechas indican el sentido izquierdo.

2. La igualdad anterior se cumple con la fracción  $\frac{3}{4}$ .  
 También se puede utilizar  $-\frac{3}{4}$ .

### Página 38. ¿Cómo voy?

1. a. -12      c. 88      e. 84      g. 30  
 b. -42      d. -20      f. -24      h. -90
2. a. -9      c. -1      e. -4  
 b. -9      d. -14      f. 5
3. a.  $A=17, B=1; A=-17, B=-1$   
 b.  $A=3, B=-5; A=-15, B=1$   
 c.  $A=3, B=-3; A=-9, B=1$   
 d.  $A=-2, B=-2; A=-4, B=-1$   
 e.  $A=-2, B=-10; A=-4, B=-5$   
 f.  $A=8, B=-4; A=-16, B=2$
4. Los números son -5, -6, y -7.
5. No es posible, ya que al multiplicar 4 números enteros positivos, el resultado siempre es positivo y en el caso de los números negativos, al aplicar la regla de los signos igualmente resulta ser un número positivo.
6. a. -9      c. 8      e. -6      f. -10  
 b. -4      d. -7      f. 20      g. 18
7. a. 54      c. -3      e. -5  
 b. -60      d. -4      f. -54
8. a.  $A=60, B=-4; A=-60, B=4$   
 b.  $A=32, B=8; A=-40, B=-10$   
 c.  $A=72, B=-2; A=-108, B=3$   
 d.  $A=5, B=-2; A=-2, B=5$   
 e.  $A=60, B=-10; A=-12, B=2$   
 f.  $B=-19$
9. a.  $\frac{16}{5}$       c.  $\frac{88}{9}$       e.  $\frac{49}{20}$   
 b.  $-\frac{41}{5}$       d.  $\frac{7}{1}$       f.  $-\frac{1}{1000}$
10. a. 3,5      c.  $1,\bar{6}$       e.  $-1,\bar{5}$   
 b.  $-6,208\bar{3}$       d. -2,4      f. -4,307
11. a. Cualquier denominador que sea un número negativo.  
 b.  $\frac{13}{13}$   
 c.  $\frac{2,4}{12}$   
 d. Cualquier numerador entero que no sea un múltiplo de 9.
12. a. 0,335; 0,35; 0,3535      d.  $\frac{13}{15}, \frac{43}{30}, \frac{19}{10}, \frac{24}{5}$   
 b. 4,28; 4,78; 5,28      e.  $\frac{37}{9}, 4,\bar{25}, 4\frac{1}{2}, 4,75$   
 c.  $\frac{8}{13}, \frac{9}{11}, \frac{7}{5}, \frac{21}{10}$       f.  $-\frac{39}{9}, -3,\bar{8}, -3,8; \frac{18}{-5}$

### Página 39

13. El corredor del segundo lugar tardó 275 minutos.

14. a.  $\frac{3}{5}y + 2$       c.  $-\frac{4}{7}y + \frac{12}{7}$   
 b.  $-\frac{26}{7}y - \frac{16}{7}$       d.  $-\frac{3}{5}y + \frac{8}{5}$

15. a.  $\frac{101}{48}$                       c. 10,9                      e. -19,45  
 b. 8,638                      d. 10,08
16. a.  $A = 4, B = -157$                       b.  $A = 2, B = -4$
17. a.  $\frac{13}{24}$   
 b. La suma de dos fracciones sea  $\frac{92}{5}$ .  
 c. Cualquier fracción donde su numerador sea igual a su denominador, ambos distintos de 0.
18. a. -21,36                      c. 0,5824                      e.  $-\frac{3}{2}$   
 b. 22,356                      d.  $\frac{9}{7}$                       f.  $-\frac{21}{2}$
19. a. -3,625                      c. -2,3125                      e.  $-\frac{22}{9}$   
 b. 5,12                      d.  $-\frac{15}{62}$                       f.  $-\frac{663}{2500}$

### Desafíos de integración

- a. • La piscina perdió 79,2 litros.  
 • En la piscina quedará 2 420,8 litros.  
 b. Al finalizar el día, quedará \$ 39 500.  
 c. • El alpinista recorrió 543 metros.  
 • Realizó un descenso, ya que la distancia a la que llegó es menor en comparación con la cual partió.  
 d. Luego de 42 minutos, el frigorífico estará a  $-19,1^\circ\text{C}$ .

### Página 40 ► Resolución de problemas

- La distancia que recorre el robot cada 20 minutos y el tiempo que tarda en llegar al punto más profundo.
- La profundidad estimada de la fosa de las Marianas es de 10,8 km bajo el nivel del mar.

### Página 42 ► Sección 2: Potencias y raíces cuadradas

1. b. Al aumentar en un bit la capacidad, se duplica el número de valores que es posible almacenar.  
 c.  $1\text{ MB} = 10^6\text{ B}$ ;  $1\text{ GB} = 10^9\text{ B}$ . Se usó la base 10.
2. a. base                      d. exponente  
 b. multiplicación                      e. raíz cuadrada  
 c. raíz cuadrada

### Página 44 ► ¿Qué debo saber?

1. a.  $2^3$                       c.  $5^5$                       e.  $1^6$   
 b.  $3^2$                       d.  $7^4$                       f.  $10^7$
2. a. 8                      d. 16                      g. 216  
 b. 25                      e. 729                      h. 144  
 c. 1                      f. 49                      i. 512
3. a. F                      c. V                      e. F  
 b. V                      d. F                      f. V
4. a.  $2^3$                       d.  $6^2$                       g.  $9^2$   
 b.  $5^2$                       e.  $7^2$                       h.  $10^2$   
 c.  $3^3$                       f.  $8^2$                       i.  $5^3$
- j. No, por ejemplo,  $8 = 8^1 = 2^3$  y  $81 = 9^2 = 3^4$ .  
 k. Para los números 25, 36, 49, 64, 81 y 100.

### Página 45

5. a.  $10^2$                       c.  $10^9$                       e.  $10^{-3}$   
 b.  $10^4$                       d.  $10^{-1}$                       f.  $10^{-4}$
6. a.  $1 \cdot 10^8$                       d.  $6,37 \cdot 10^6$   
 b.  $1,4294 \cdot 10^9$                       e.  $7,36 \cdot 10^{19}$   
 c.  $3 \cdot 10^8$                       f.  $7 \cdot 10^{-6}$

7. a. En el cuarto anillo usa  $4 \cdot 3^3$  estrellas. Se puede usar una representación gráfica.  
 b. En 2 días habrá  $2^{24}$  bacterias, en 3 días habrá  $2^{36}$  y en n días habrá  $2^{12n}$ .  
 c.  $20\,000\,000\,000\,000\,000\,000 = 2 \cdot 10^{19}$

### Página 46 ► Lección 7

#### Situación 1

- Son 6 filas más en la tabla: 121, 122, 211, 212, 221 y 222.
- Habrá 8 filas. Cada una corresponde a una clave posible.
- La multiplicación.

R: Las posibles combinaciones de claves son 8.

### Página 47

#### Situación 2

- Sí coinciden.

R: Construyendo el diagrama de árbol y contando sus ramas.

#### Situación 3

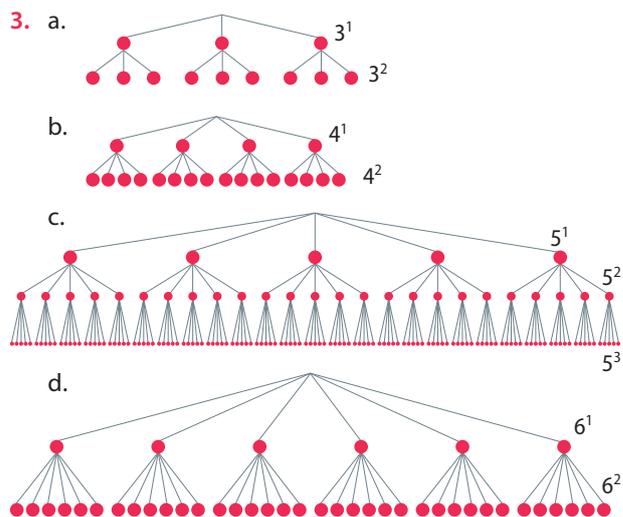
R:  $2^3$                       2                      3

### Argumenta y comunica

- $3^4 = 81$

### Página 48 ► Practiquemos lo aprendido

1. a.  $5^2$                       c.  $2^4$                       e.  $2^6$   
 b.  $10^3$                       d.  $3^3$                       f.  $10^5$
2. a.  $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$   
 b.  $4 \cdot 4 = 16$   
 c.  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 128$   
 d.  $7 \cdot 7 \cdot 7 = 343$   
 e.  $8 \cdot 8 = 64$   
 f.  $10 \cdot 10 = 1\,000\,000\,000$



4. a.  $4\text{ cm}^2$                       c.  $25\text{ cm}^2$                       e.  $144\text{ cm}^2$   
 b.  $9\text{ cm}^2$                       d.  $49\text{ cm}^2$                       f.  $256\text{ cm}^2$   
 g. El lado del cuadrado mide 8 cm.  
 h. El lado del cuadrado mide 9 cm.
5. a.  $8\text{ cm}^3$                       e.  $216\text{ cm}^3$   
 b.  $27\text{ cm}^3$                       f.  $343\text{ cm}^3$   
 c.  $64\text{ cm}^3$                       g. La arista mide 8 cm.  
 d.  $125\text{ cm}^3$                       h. La arista mide 9 cm.
6.  $3^3 = 27$
7. a. El almacén ofrece 8 variedades de leche.

b. Se pueden armar 32 menús distintos.

**Página 49**

- c.
- En cada edificio hay 16 departamentos.
  - En el condominio hay 64 departamentos.
  - En el condominio podrían vivir 256 personas.
8. a.
- En un día se venden 27 pelotas de tenis.
  - En 3 días se venden 81 pelotas de tenis.
  - Usando potencias con base 3. Se puede hacer un diagrama de árbol.
- b. Serán 16 los últimos bailarines en enterarse. Una forma de resolver es realizar un diagrama de árbol o modelar el problema como  $2^n$ , donde n corresponde a la cantidad de veces que se debe realizar la llamada:  $2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 = 30$ .
9.  $4^4$  paquetes de galletas.
10. Si el lado se reduce a la mitad, entonces el área del cuadrado disminuye a la cuarta parte.

**Reflexiono**

- Si el exponente es número par, la unidad vale 4; si es número impar, entonces vale 6. El valor de la unidad de la potencia  $4^{21}$  es 4.
- La relación podría modelarse por la expresión  $A \cdot 4^n$ , donde n es el número de años transcurridos divididos por 2.

**Página 51. Mural**

1. El mensaje puede almacenar  $1679^2$  valores. Se puede desarrollar esta potencia, dando como resultado 2 819 041.

**Página 52 ▶ Lección 8**

**Situación 1**

- Las potencias tienen la misma base.
- R:** Se puede calcular el producto de potencias dibujando el diagrama de árbol de una de las dos potencias y en cada una de las hojas terminales, dibujar el diagrama de la otra potencia. Finalmente, el resultado es la potencia que representa la última fila del diagrama construido.
- El resultado no cambiaría si se dibuja un diagrama primero y luego el otro, ya que la multiplicación es conmutativa.
- base                      exponentes

**Página 53**

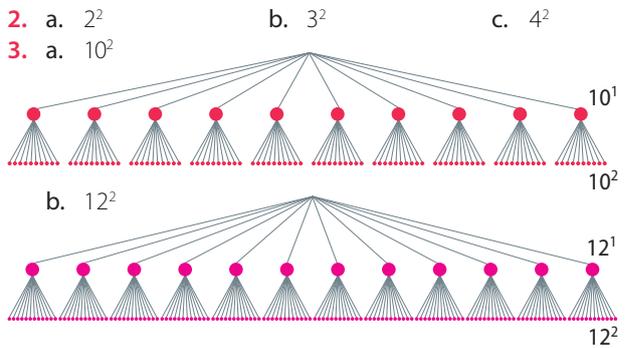
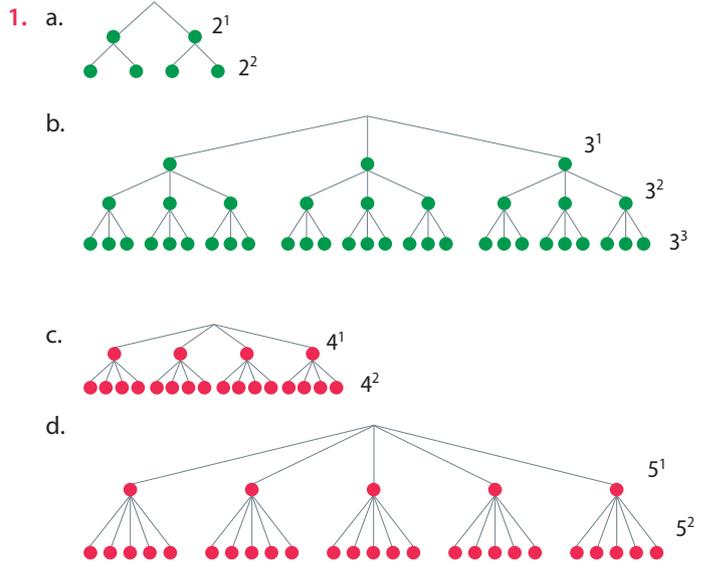
**Situación 2**

- Representa la potencia  $6^2$ .
- Propiedad conmutativa.
- R:** Se puede representar un cuadrado de la potencia mayor y dibujar en cada una de sus casillas un cuadrado que represente a la potencia menor: la cantidad de casillas totales corresponde al resultado de la multiplicación.
- exponente                      bases

**Situación 3**

- R:** El valor de la primera multiplicación es 512 y el de la segunda multiplicación es 243.
- Argumenta y comunica**
- Usando la regla de la multiplicación de potencias de igual base. El primer producto es  $10^2$  y el segundo es  $5^4$ . Como  $10^2 \cdot 10^0 = 10^2$ , entonces  $10^0 = 1$ . El número 5 se puede expresar como la potencia  $5^1$ .

**Página 54 ▶ Practiquemos lo aprendido**



4. a. El lado del cuadrado ABCD mide 15 mm.  
 b. En el cuadrado ABCD hay 225 cuadraditos que es lo mismo que  $15^2$ .  
 c. El lado del cuadrado BEFG es 5 cm.  
 d. Hay  $5^2$  cuadraditos rojos.  
 e. Para formar el cuadrado ABCD se necesitan  $3^2$  cuadrados BEFG.  
 f. La relación representa la cantidad de cuadraditos rojos que hay:  $3^2 \cdot 5^2 = 225$ .
5. a.  $5^5 = 3125$                       e.  $42^2 = 1764$   
 b.  $2^7 = 128$                       f.  $90^1 = 90$   
 c.  $4^5 = 1024$                       g.  $8^2 = 2^6 = 64$   
 d.  $7^5 = 16807$                       h.  $60^2 = 3600$
6. a. 2                      b. 6                      c. 2                      d. 3
7. a.  $2^6$                       c.  $5^5$                       e.  $2^{12}$                       g.  $10^3$   
 b.  $6^3$                       d.  $3^7$                       f.  $5^6$                       h.  $2^{14}$
8. a. El cuadrado verde está representado por  $2^4$ .  
 b. El cuadrado celeste está representado por  $2^6$ .

**Página 55**

- c. Son 16 cuadraditos en el cuadrado verde y 64 en el cuadrado celeste.  
 d. Se mantiene la base y se multiplican los exponentes.
9. a.  $1^9 = 1$                       b.  $3^6 = 729$                       c.  $4^6 = 4096$
10. a. Caben  $2^7$  discos en el portadiscos.  
 b. El cuadrado de la edad es  $2^{10}$ .

- c. Podrán estar sentados  $12^3$  espectadores en el estadio.
- d. La persona ofrece  $2^5$  variedades de chocolate.
- e. En la biblioteca se pueden guardar  $3^6 = 27^2$  libros.
- f. En el edificio pueden vivir como máximo  $5^4 = 25^2$  personas.
- g. Se pueden obtener  $6^2$  pares de valores.
- h. El área del cuadrado es  $15^4 \text{ cm}^2$ .
- i. El lado mide 4 cm.
- j. La arista mide  $7^2$  m.

11. Se debe escribir 8 como  $2^3$ , así tenemos una multiplicación de potencias de igual exponente. Aplicando la regla aprendida se obtiene  $10^3$ .

#### Reflexiono

1. Los valores de las potencias son 16 y  $-64$ , respectivamente. Si la base es negativa y el exponente es un número par, entonces el valor de la potencia es positivo; pero si la base es negativa y el exponente impar, entonces el valor de la potencia es negativo.
2. Se puede representar dibujando el diagrama de una potencia y en sus últimas ramas, incluir el diagrama de la otra potencia.

#### Página 56 ▶ Lección 9

##### Situación 1

- Las potencias tienen en común el mismo exponente.
- R: Los alumnos deberán comprar 16 piezas de revestimiento.
- La regla de división de potencias de igual exponente y distinta base es similar a la regla análoga de la multiplicación, ya que en ambas se conserva el exponente y se dividen o multiplican las bases.

- bases                      exponente

#### Página 57

##### Situación 2

- Después de la simplificación queda un factor en el numerador.

- $4^1$

- El exponente del resultado corresponde a la diferencia entre los exponentes del dividendo y del divisor.

- R: Al calcular el cociente, se obtiene la potencia  $4^1$ .

- $4^1$                       base                      exponentes

##### Situación 3

- R: El primer cociente es 216 y el segundo cociente es 49.

#### Argumenta y comunica

- Al dividir dos potencias con las características descritas, el cociente es 1, por ejemplo,  $4^2 : 4^2 = 4^{2-2} = 4^0 = 1$ .

#### Página 58 ▶ Practiquemos lo aprendido

1. a. 9                      c. 64                      e. 1000  
b. 8                      d. 625                      f. 161 051
2. a.  $2^2$                       b.  $2^3$                       c.  $3^2$
3. a.  $2^5$                       c.  $2^6$                       e.  $3^{13}$                       g.  $5^6$   
b.  $7^6$                       d.  $7^7$                       f.  $9^4$                       h.  $2^{18}$
4. a.  $8^2 : 4^2$                       b.  $10^2 : 5^2$
5. a.  $4^3 = 64$                       c.  $4^1 = 4$                       e.  $2^6 = 64$   
b.  $9^2 = 81$                       d.  $2^6 = 64$                       f.  $1^2 = 1$
6. a.  $5^1 = 5$                       c.  $100^1 = 100$                       e.  $2^0 = 1$   
b.  $2^1 = 2$                       d.  $125^1 = 125$                       f.  $3^4 = 81$
7. a.  $7^1$                       b.  $2^2$                       c.  $4^1$                       d.  $3^1$
8. a.  $2^2$                       c.  $5^3$                       e.  $10^1$   
b.  $3^1$                       d.  $3^2$                       f.  $7^2$

- 9. a. 6                      c. 10                      e. 2                      g. 3  
b. 2                      d. 3                      f. 4                      h. 3

10. a. Cada queso tiene una masa de  $3^2 \text{ kg}$ .

#### Página 59

- b. En cada subdivisión caben  $4^2$  discos.
- c. Cada persona recibió 108 huevos.
- d. El precio de cada yogur es  $\$4^4$ .
- e. En el cine hay  $3 \cdot 2^2$  filas verticales.
- f. La torre tiene  $5^2$  departamentos por piso.
- g. El equipo puede escoger entre  $3^1$  shorts.
- h. El restorán ofrece  $2^2$  tipos de postre.
- i. La profundidad de la caja de leche es  $5^1 \text{ cm}$ .
- j. Para cubrir todo el piso, Juan necesitará  $5 \cdot 10^2$  baldosas.
- k.  $x = 7^2 \text{ cm}$ ;  $y = 2^3 \text{ cm}$ .

11. La carretera B es  $10^3$  veces mayor que la carretera A.

#### Reflexiono

1. El exponente del cociente queda negativo. Se puede resolver la operación descomponiendo las potencias y representando la división como fracción; con el fin de simplificar términos y mostrar que el resultado se puede expresar como una fracción.
2. El resultado anterior se puede interpretar como la fracción  $\frac{1}{8}$ .

#### Página 60 ▶ Lección 10

##### Situación 1

- Se usa la multiplicación de potencias de distinta base y de igual exponente: se conserva el exponente y se multiplican las bases.

- El dividendo y el divisor son iguales.

- $1$                        $6^0$                        $6^0$                        $1$

- R: Los trozos de alfombra sí alcanzan para cubrir por completo el piso del dormitorio.

#### Argumenta y comunica

#### Página 61 ▶ Practiquemos lo aprendido

1. a.  $2^4$                       b.  $3 \cdot 2^3$                       c.  $3 \cdot 4^2$
2. a. B                      b. C                      c. A
3. a. 1                      c. 2                      e. 1  
b. 2                      d. 0                      f. 1
4. a.  $3^a : 3^a$ , a: número natural.  
b.  $4^a : 4^a$ , a: número natural.  
c.  $20^a : 20^a$ , a: número natural.  
d.  $6^a : 6^a$ , a: número natural.  
e.  $7^a : 7^a$ , a: número natural.
5. a.  $3^2$                       b.  $2^4$                       c.  $5^6$
6. a. El área del cuadrado es  $1 \text{ cm}^2$ .  
b. El área del rectángulo es  $16 \text{ cm}^2$ .  
c. El ancho del rectángulo mide 1 cm.
8. Francisco comete el error cuando transforma a potencia el denominador ya que considera que  $2 = 2^0$ , lo cual es incorrecto pues  $2 = 2^1$ . El resultado de la operación es  $2^8$ .
9. Para que la igualdad se cumpla se debe cumplir que  $a = -3$ .

## Reflexiono

- Martina está equivocada, ya que cualquier potencia con exponente 0 es siempre 1, por tanto, la división no se indefine.
- No hay números naturales que satisfagan la condición del exponente, la única condición que debe cumplirse es que a sea 1

### Página 62 ▶ Lección 11

#### Situación 1

Se podría ocupar el mismo procedimiento, salvo que el número de columnas no sería igual al número de filas. Se buscaría una relación en que  $a \cdot b = 144$ , donde a y b deben ser números naturales.

A un exponente 2.

- 2      12

### Página 63

#### Situación 2

¿Es 256 cm <sup>2</sup> ?
No
No
Sí

R: El lado del cuadrado mide 16 cm

#### Situación 3

El número representa la raíz cuadrada de 9.

R: Las raíces cuadradas de 4, de 9 y de 16 son: 2, 3 y 4, respectivamente.

Con 12 cuadraditos no es posible formar un cuadrado grande, ya que no existe un número natural a tal que  $a^2 = 12$ .

### Argumenta y comunica

Buscar entre qué números con raíces exactas se encuentra, y a partir de eso, buscar un número que se encuentre en ese intervalo y que multiplicado por sí mismo dé un valor muy cercano a 20.

### Página 64 ▶ Practiquemos lo aprendido

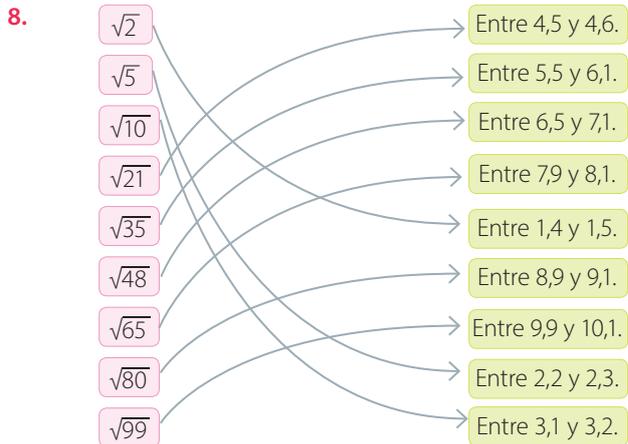
- |       |        |        |
|-------|--------|--------|
| a. 4  | c. 81  | e. 225 |
| b. 36 | d. 169 | f. 729 |
- |                       |                       |                        |
|-----------------------|-----------------------|------------------------|
| a. 16 cm <sup>2</sup> | c. 36 cm <sup>2</sup> | e. 64 cm <sup>2</sup>  |
| b. 25 cm <sup>2</sup> | d. 49 cm <sup>2</sup> | f. 100 cm <sup>2</sup> |

Área (m <sup>2</sup> )	Lado (m)	Área (m <sup>2</sup> )	Lado (m)
81	9	49	7
121	11	256	16
144	12	361	19
225	15	484	22
400	20	729	27
625	25	1600	40

Área (cm <sup>2</sup> )	Cuadrado (Sí/No)	Lado del cuadrado (cm)
49	Sí	7
25	Sí	5
30	No	
40	No	
64	Sí	8
80	No	
100	Sí	10

- |       |      |       |
|-------|------|-------|
| a. 11 | b. 9 | c. 13 |
|-------|------|-------|

- |       |       |        |
|-------|-------|--------|
| d. 26 | f. 17 | h. 35  |
| e. 20 | g. 29 | i. 100 |
- |        |        |        |
|--------|--------|--------|
| a. 9   | c. 324 | e. 100 |
| b. 121 | d. 0   | f. 225 |
- |                        |                           |
|------------------------|---------------------------|
| a. $1 < \sqrt{2} < 2$  | f. $5 < \sqrt{34} < 6$    |
| b. $2 < \sqrt{8} < 3$  | g. $9 < \sqrt{89} < 10$   |
| c. $3 < \sqrt{15} < 4$ | h. $12 < \sqrt{156} < 13$ |
| d. $4 < \sqrt{24} < 5$ | i. $16 < \sqrt{264} < 17$ |
| e. $5 < \sqrt{27} < 6$ |                           |



- |      |      |      |      |
|------|------|------|------|
| a. F | b. F | c. V | d. V |
|------|------|------|------|

### Página 65

- El lado del marco mide 32 cm.
  - Debe elegir el listón de 35 cm, para que le sobre lo mínimo que es 16 cm.
- El guardapolvo deberá cubrir 64 metros.
- El área de ambos es 36 m<sup>2</sup> y el lado del letrero cuadrado mide 6 m.
- La piedra se demora aproximadamente 1,41 s en llegar al suelo.
- El error que cometió Andrea es suponer que como  $\sqrt{5}$  está entre el 2 y el 3, entonces debe estar entre la mitad de ellos dos, ya que  $2,5 \cdot 2 = 5$ . Esto es falso, ya que la raíz cuadrada de 5 corresponde a un número que multiplicado por sí mismo dos veces da 5.
- La expresión que permite calcular la estatura es: 
$$\text{estatura} = \sqrt{\frac{\text{masa}}{\text{IMC}}}$$
  - La estatura de la persona es 1,81 metros. Según su IMC, esta persona se encuentra en sobrepeso.

## Reflexiono

- No es correcto, por ejemplo:  $\sqrt{5} = 2,23606...5$  es un número natural, pero el valor de su raíz es un número decimal infinito.
- Sí, ya que el orden de las raíces cuadradas en números naturales es el mismo que el de los números naturales y ambos números tienen raíces cuadradas que corresponden al 3 y 4, respectivamente.

### Página 66 ▶ Lección 12

#### Situación 1

Se podría tener una aproximación más cercana a 2, considerando más decimales.

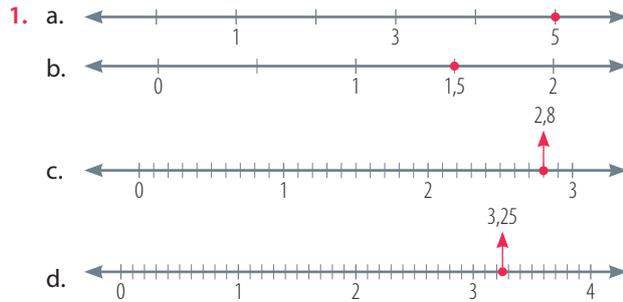
R: La raíz mayor corresponde a  $\sqrt{16}$ .

! A mayor valor subradical, mayor valor de la raíz.

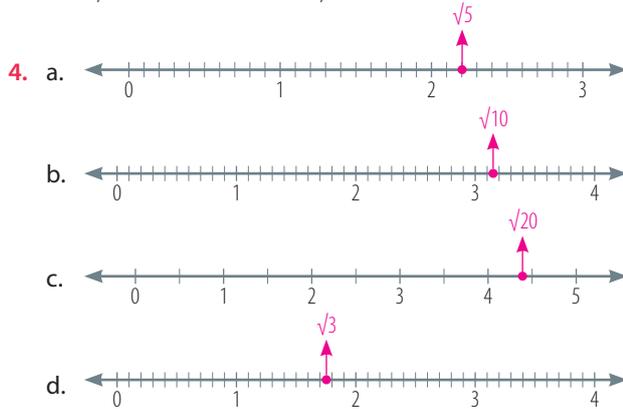
### Argumenta y comunica

Se comienza por el valor medio del intervalo para determinar si la raíz es mayor o menor que este número y luego, se determina un nuevo intervalo de cálculo.

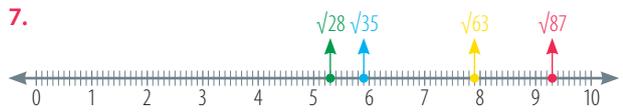
### Página 67 ▶ Practiquemos lo aprendido



2. a. 0                      c. 8                      e. 11  
 b. 4                      d. 7
3. a. 2,236                c. 7,211                e. 10,583  
 b. 4,123                d. 8,944



5. a. El perímetro del cuadrado es 64 cm.  
 b. La habitación mide 14 metros.  
 c. La granjera gastará \$ 510 000 en cercar el terreno.
6. a. Es  $\sqrt{121}$ .  
 b. La diferencia corresponde al número impar consecutivo de la diferencia anterior.

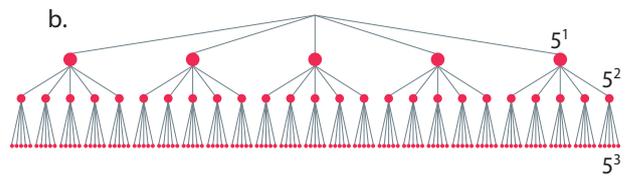


### Reflexiono

1. b puede tener dos valores: 1 y 81; ya que no se indica el orden de la diferencia estas raíces.
2. vale 361. Resolviendo la ecuación, se tiene  $5 + 14 = 19 = \sqrt{b}$ ; por lo tanto, b es la multiplicación de 19 por sí mismo:  $19 \cdot 19 = 361$ .

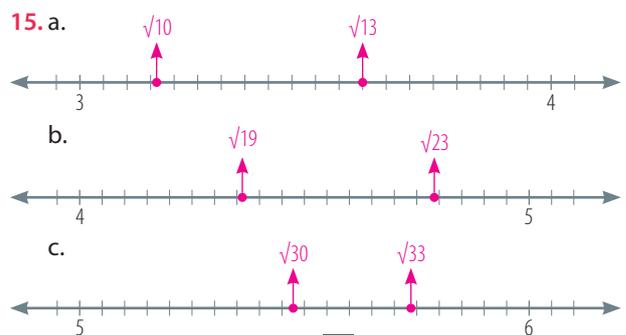
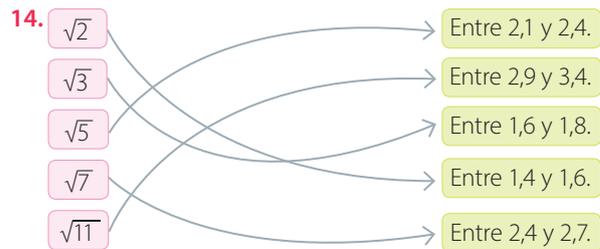
### Página 68 ▶ ¿Cómo voy?

1. a. A                      b. C                      c. B



3. a. 729                    b. 121                    c. 225                    d. 529
4. a. 343                    c. 10 000                e. 8000  
 b. 59 049                d. 27 000                f. 225
5. a. 2                      b. 2                      c. 11                      d. 130
6. El volumen del cubo es  $4^9 \text{ cm}^3$ .
7. El área del rectángulo es  $12^3 \text{ cm}^2$ .
8. a. 16                      c. 11                      e. 25  
 b. 100                    d. 729                    f. 60
9. a. 6                      b. 2                      c. 32                      d. 4
10. a.  $3^2$                     b.  $3^2$                     c.  $6^3$                     d.  $5^1$
11. Rodrigo necesitará 100 baldosas cuadradas.
12. a. 1                      c. 0                      e. 9  
 b. 1                      d. 4                      f. 1
13. a. no cuadrado                    h. cuadrado  
 b. cuadrado                          i. no cuadrado  
 c. cuadrado                          j. no cuadrado  
 d. no cuadrado                      k. no cuadrado  
 e. no cuadrado                      l. cuadrado  
 f. cuadrado                          m. no cuadrado  
 g. cuadrado                          n. no cuadrado

### Página 69



16. a.  $\sqrt{10} \text{ cm}$                     b.  $\sqrt{\frac{21}{2}} \text{ cm}$                     c.  $\sqrt{14} \text{ cm}$

### Desafíos de integración

- a. Hay 13 800 posibles combinaciones.

b.

Tiempo que tarda en caer (s)	Altura desde la que cae (m)
13	845
1	5
20	2000
$\sqrt{1,8}$	9
27	3645

- Se puede considerar cualquier número entero o decimal positivo para realizar el ejercicio. Por ejemplo:

Altura desde la que cae (m)	Tiempo que tarda en caer (s)
$h = 3$	$\sqrt{\frac{3}{5}}$
$(h + 1) = 4$	$\sqrt{\frac{4}{5}}$
$(h + 2) = 5$	$\sqrt{\frac{5}{5}} = \sqrt{1} = 1$

- No es posible determinar, ya que depende de cada caso.

## Página 70 ► Resolución de problemas

- Se tiene la tabla que representa la relación entre las etapas y la cantidad de cuadriláteros que se pueden dibujar.
- Si se mantiene la regularidad, se pueden dibujar 100 cuadriláteros en la etapa 4.

## Página 72 ► Sección 3: Variaciones porcentuales

- Lo más común son: celulares, computadores y viajes.
  - Por ejemplo, el consumo de agua, ya que corresponde a un producto básico.
  - Mide cómo afecta la cantidad demandada al variar el precio de un producto. La fórmula es:

$$E = \frac{\frac{(Q_1 - Q_2)}{Q_1}}{\frac{(P_1 - P_2)}{P_1}}$$

- IVA
  - aumento porcentual
  - porcentaje
  - proporción
  - variación porcentual

## Página 74 ► ¿Qué debo saber?

- 50%
  - 20%
  - 25%
  - 80%
  - 50%
  - 125%
  - 50%
  - 200%
- 6
  - 7
  - 4
  - 48
  - 27
  - 30,25
  - 108
  - 64,6
- 100
  - 33,3
  - 175
  - 38
  - 70
  - 80
  - 50
  - 50

- | Porcentaje | Número decimal | Fración         |
|------------|----------------|-----------------|
| 40%        | 0,4            | $\frac{2}{5}$   |
| 20%        | 0,2            | $\frac{1}{5}$   |
| 60%        | 0,6            | $\frac{3}{5}$   |
| 124%       | 1,24           | $\frac{31}{25}$ |
| 25%        | 0,25           | $\frac{1}{4}$   |
| 70%        | 0,7            | $\frac{7}{10}$  |
| 140%       | 1,4            | $\frac{7}{5}$   |
| 85%        | 0,85           | $\frac{17}{20}$ |

## Página 75

- El producto C genera mayores ingresos.
  - La diferencia porcentual entre ambos productos es un 12%.
  - Producto A: \$ 50 000 000.  
Producto B: \$ 140 000 000.  
Producto C: \$ 200 000 000.  
Producto D: \$ 70 000 000.  
Producto E: \$ 40 000 000.
  - La diferencia de ingreso generado es de \$ 20 000 000.
- Laura pesa 48 kg.
  - El proceso terminará en 107 minutos más aproximadamente.
  - El precio de los zapatos sin ningún descuento es \$ 3185.
  - A Felipe le quedan 80 minutos de su plan.

## Página 76 ► Lección 13

### Situación 1

- Para poder relacionarlos con los porcentajes.
- Porque el círculo completo corresponde a la unidad y representa el 100%. Y el 20% corresponde a  $\frac{1}{5}$ .
- 90 g + 18 g = 108 g.
- Para restar estos valores, el enunciado debiese indicar que la pasta de dientes viene con un 20% menos de contenido.
- R:** No, la pasta de dientes ahora traerá 108 g por la promoción.
- Con la información disponible no se puede concluir si es conveniente o no, ya que se debe saber el precio normal de la pasta normal y el de la promoción, y luego comparar.

## Página 77

### Situación 2

- Podría ser la segunda forma, porque es más directa.
- R:** Usando proporciones se obtiene el mismo resultado, que es 108 g de pasta de dientes.
- Por ejemplo, multiplicando 90 por 1,2.

### Situación 3

- R:** El porcentaje de aumento del precio fue de 12,5%.
- Que el precio subió un 12,5% respecto al precio original.

## Argumenta y comunica

Ambos productos dan como resultado 18.

## Página 78 ► Practiquemos lo aprendido

- 27
  - 5
  - 20
  - 48
  - 84
  - 16,8
- 50%
  - 28,6%
  - 12,2%
  - 20%
  - 120%
  - 75%
- 40
  - 800
  - 30
  - 70
  - 1 800
  - 23,3
- El total del curso son 40 estudiantes.
  - El libro tiene 400 páginas.
  - El kilogramo de durazno cuesta \$ 471.
- De arriba a abajo: Aumento, Rebaja, Aumento, Rebaja.
- 115%
  - 50%
  - 120%
  - 85%
- $\frac{C}{D}$
  - $\frac{D}{A}$
  - $\frac{G}{A}$
  - $\frac{A}{E}$
  - $\frac{B}{E}$
  - $\frac{E}{E}$
  - $\frac{F}{F}$

**Página 79**

8. a. La variación fue aproximadamente de 8,6%.  
b. La variación fue aproximadamente de 7,1%.  
c. La variación fue aproximadamente de 23,3%.
9. a. El valor inicial de la cocina es \$ 205 570.  
b. No se obtiene el mismo precio. El descuento aplicado es para el valor original y el aumento del precio es para el valor rebajado.  
c. El cuarto cuadrado tiene área de 30,375 cm<sup>2</sup> y el quinto un área de 45,563 cm<sup>2</sup>.
10. a. La masa de una jirafa adulta es 1200 kg.  
b. La masa de la jirafa aumenta a razón de 44,3%.
11. El 93% de las ampollitas viene sin fallas. Se deben producir aproximadamente 215 054 ampollitas para tener 200 000 ampollitas sin falla.
12. Se calcula la diferencia entre ambos precios y se determina qué porcentaje representa esta del precio inicial del automóvil. El precio aumenta un 7,5%.
13. El error que comete es sumar los descuentos aplicados. No se pueden sumar los descuentos aplicados, ya que los descuentos se aplican a precios distintos, no al mismo valor.

Reflexiono	
<p>1. Si el lado mide x cm, entonces su área es x<sup>2</sup> cm<sup>2</sup>. Si el área disminuye a la cuarta parte, entonces el valor del área es <math>\frac{x^2}{4}</math> o, también <math>\left(\frac{x}{2}\right)^2</math>, donde <math>\frac{x}{2}</math> es el lado del cuadrado. Por lo tanto, la medida del lado debe disminuir en 50%.</p>	<p>2. Disminuye aproximadamente 3,3% el lado del cubo cada 10 minutos. Es falso afirmar que en 1 hora disminuirá un 30%, ya que la variación será del 27,1% y es porque se calcula sobre el volumen de cada 20 minutos, no sobre el volumen original.</p>

**Página 80 ▶ Lección 14**

**Situación 1**

Se puede resolver, por ejemplo:  $\frac{22800}{120000} \rightarrow \frac{x}{100} = 19\%$

**R:** El porcentaje que se cobra en Chile por IVA es el 19%.

Corresponde al 119%.

**Página 81**

**Situación 2**

**R:** Tras 3 años, el hijo de Andrea tendrá ahorrados \$ 53 000.

**Situación 3**

Hay que calcular el 102%, ya que corresponde al monto final: 100% del capital inicial y 2% del interés.

**R:** Tras 3 años, el hijo de Andrea tendrá ahorrados \$ 53 060,4.

Para el inversor es más conveniente el ahorro compuesto.

**Argumenta y comunica**

Sí, es correcto.

**Página 82 ▶ Practiquemos lo aprendido**

1. a. E                      c. B                      e. C  
b. A                      d. D

2.	80	Goma 6 cm	\$ 70	$80 \cdot 70 = 5600$
	16	Estuches 15 cm	\$ 1150	$16 \cdot 1150 = 18400$
	90	Cuaderno universitario	\$ 590	$90 \cdot 590 = 53100$
	Total sin IVA (\$)			79 100
	Valor del IVA (19%)			15 029
	Total con IVA			94 129

- a. La compra de gomas sale \$ 6664.
- b. La compra de cuadernos universitarios sale \$ 53 100.
- c. Cada estuche lo debe vender a \$ 1984.

3.

1	100 000	0,50	$100000 \cdot 0,005 = 500$	100 500
2	100 500	1,05	$100500 \cdot 0,015 = 1055$	101 555
3	101 555	1,75	$101555 \cdot 0,0175 = 1777$	103 332
4	103 332	2,25	$103332 \cdot 0,0225 = 2325$	105 657
5	105 657	3,25	$105657 \cdot 0,0325 = 3434$	109 091
6	109 091	4,50	$109091 \cdot 0,0450 = 4909$	114 000

a. Transcurridos 6 años, el capital final será de \$ 114 000.

b.

1	200 000	0,50	$200000 \cdot 0,005 = 1000$	201 000
2	201 000	1,05	$201000 \cdot 0,015 = 2110,5$	203 111
3	203 111	1,75	$203111 \cdot 0,0175 = 3554$	206 665
4	206 665	2,25	$206665 \cdot 0,0225 = 4650$	211 315
5	211 315	3,25	$211315 \cdot 0,0325 = 6868$	218 183
6	218 183	4,50	$218183 \cdot 0,0450 = 9818$	228 001

Al cabo de 6 años el capital final es \$ 228 001.

- c. Al duplicar el monto inicial, el interés simple también se duplica.
  - d. Al cabo de 6 años el capital final es \$ 107 200.
  - e. Conviene más el tipo de ahorro A, ya que por la misma cantidad de años y monto inicial, da más intereses.
4. a.
    - El sueldo imponible del trabajador es \$ 621 891.
    - El porcentaje del sueldo líquido es 80,4%.
    - La diferencia porcentual entre los sueldos es un 19,6%.
    - El sueldo líquido sería \$ 496 270.

**Página 83**

- b.
  - El precio total que debe cancelar Luis es \$ 1 091 468.
  - Luis pagó finalmente un 113% del precio neto.
- c.
  - El valor inicial del arriendo era \$ 215 959.
  - Lorena paga el 115,8% respecto de lo que pagaba inicialmente.
  - La variación porcentual del arriendo es 15,76%.
5.
  - Los estudiantes inscritos en fútbol disminuyeron un 23,1%.
  - Los estudiantes inscritos en tenis aumentaron un 25%.
6.
  - Su deuda ascenderá a \$ 1 407 162.
  - Su deuda ascenderá a \$ 993 673.
7. El error que cometió Pía fue calcular el interés sobre el valor del monto inicial y no considerar que en el interés compuesto, se calcula sobre el monto final del mes anterior. El desarrollo correcto es:  
 $\$ 1\,000\,000 \cdot 1,014^{12} = \$ 1\,000\,000 \cdot 1,1816 = \$ 1\,181\,559$

Reflexiono	
1. El IVA se aplica a todos los productos o servicios, cuyo valor de venta sea igual o superior a \$ 180, por norma legal.	
2. Conviene el interés compuesto en la cuenta de ahorro, ya que el interés se aplica en el monto del mes anterior, que siempre será cada mes más alto que el monto inicial.	

**Página 86 ▶ ¿Cómo voy?**

1. a. Aumento 15%                      d. Aumento 25%  
b. Disminución 15%                      e. Disminución 13,8%  
c. Aumento 80%                      f. Aumento 7%

2. a. Tras la mejoría, se podrá envasar 590 botellas.  
b. La altura de la segunda planta será 1,27 metros.  
c. La masa de los 3 buses llenos es 14 661 kilos.  
d. Se espera obtener 6 kg de manzanas contaminadas.  
e. Hay 1070 personas que solicitan el examen en una semana.
3. a. Su sueldo anterior era \$ 478 500.  
b. Su estatura a esa edad era 1,41 metros.  
c. Antes sacaba 3,47 metros cúbicos de basura a la semana.  
d. Hace tres meses se demoraba 19,9 minutos en hacer el circuito.

## Página 87

4. a. 

Monto inicial
\$ 110 000

      c. 

Monto final
\$ 262 254

  
b. 

Interés
7 %

      d. 

Monto final
\$ 460 000
5. Los totales de arriba a abajo son: \$ 1800, \$ 1200, \$ 6000, \$ 400, \$ 4500, \$ 13 900, \$ 2641, \$ 16 541.
6. a. Durante octubre se fabricaron 468 780 tuercas.  
b. Empezaron 280 trabajadores trabajando en noviembre.

## Desafíos de integración

- a. El precio final es de \$ 178 695.
- b.
  - Al tercer día habrán 2187 insectos.
  - No es cierto, ya que la cantidad estimada de insectos que habrá corresponde al 56,25 % de la cantidad inicial.

## Página 88 ► Resolución de problemas

- Se desea determinar la capacidad máxima de producción del parque.
- Se conoce la capacidad mínima y el porcentaje de aumento de la producción sobre esta capacidad.
- Se puede verificar usando proporciones:  $\frac{280}{x} = \frac{100}{125} \rightarrow x = 350$
- La producción energética máxima que puede alcanzar el parque es de 350 GW/h.

## Página 90. Sintetizo mis aprendizajes

### ¿Cómo se llama?

- |                    |                          |
|--------------------|--------------------------|
| A. potencias       | D. dividir               |
| B. igual exponente | E. multiplicar           |
| C. representar     | F. aproximación numérica |

### ¿Cómo se hace?

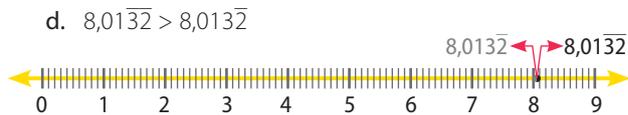
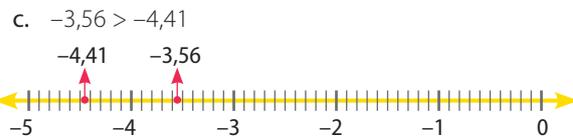
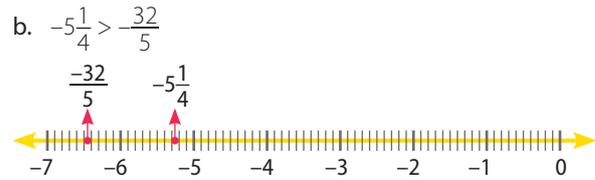
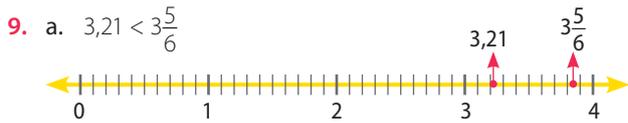
- **Pregunta s1:** Se multiplican o dividen los números y luego se aplica la regla de la multiplicación o división de signos.
- **Pregunta s2:** Se deben identificar las bases y los exponentes. Si las bases son iguales, se aplica la regla de multiplicación o división de potencias con igual base; en el caso de que los exponentes sean iguales, se pueden aplicar las reglas de multiplicación o división de potencias de igual exponente.

- **Pregunta s3:** El primer caso se refiere a sumar a 400 su 20%; por lo tanto, el cálculo es:  $\frac{400 \cdot 120}{100}$ . En cambio, el segundo considera saber qué valor es el 20% de 400; por lo tanto, su cálculo es:  $\frac{400 \cdot 20}{100}$ .

## Página 91. Refuerzo mis aprendizajes

1. a. -21      b. 24      c. 216      d. 120
2. a. 3      b.  $-1,3$       c. -2,5      d. 6,5
3. a. -3      b. -80      c.  $-2\bar{6}$
4. Múltiples soluciones.
5. a. Una posibilidad es considerar la regla  $-4 \cdot (-3)^n - 1$ , donde  $n = 1, 2, 3, \dots$  indica el término considerado. No es la única.  
b. Los dos términos siguientes son: -324 y 972.  
c. La décima posición la ocupa el número 78 732.
6. Luego de 8 horas habrá  $-14^\circ\text{C}$  en la habitación.
7. El buzo bajó a 8 metros por hora.

$-\frac{8}{3}$	$-2\frac{2}{3}$	$-2\bar{6}$	Infinito periódico
$\frac{23}{4}$	$5\frac{3}{4}$	5,75	Finito
$-\frac{7}{2}$	$-3\frac{1}{2}$	-3,5	Finito
$\frac{29}{6}$	$4\frac{5}{6}$	$4,8\bar{3}$	Infinito semiperiódico



10. De izquierda a derecha:  $\frac{-9}{10}, \frac{-3}{20}$  y  $\frac{3}{10}$ .

11. Se deben transformar las fracciones a números decimales, luego identificar el mínimo y el máximo número entero entre los que se ubican los números decimales para representarlos en la recta numérica.

12. a. El motor de mejor rendimiento es el B.  
b. El motor de rendimiento más bajo es el D.
13. a.  $\frac{11}{5}$       c.  $\frac{23}{8}$       e.  $\frac{101}{24}$   
b. 2,35      d. 11,825      f. 5,4

14. El camión lleva ahora 11,16 toneladas.

Página 92

15. a.  $\frac{40}{9}$       c. -23,45      e. 37,25  
 b. 2,84      d.  $\frac{1176}{65}$       f. -0,95

16. a.  $3^2 \text{ cm}^2$       b.  $6^3 \text{ cm}^3$

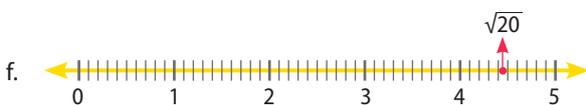
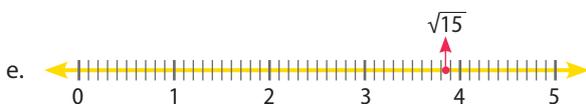
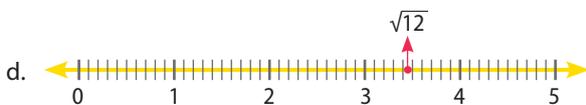
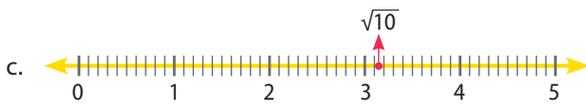
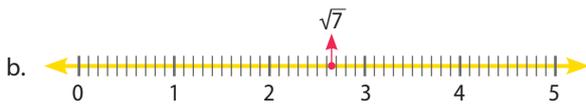
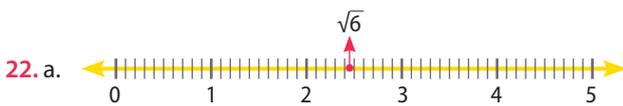
17. a.  $6^4$  resultados posibles.  
 b.  $3 \cdot 2^2$  posibles banderas.  
 c. No se puede modelar.

18. a.  $12^3$       f.  $30^3$   
 b.  $9^5$       g.  $100^3$   
 c.  $19^3$       h.  $3^2$   
 d.  $23^1$       i.  $31^4 = 961^2$   
 e.  $88^2$       j.  $4^6 = 64^2$

19. El volumen del cubo es  $3375 \text{ cm}^3$ .

20. Si vende todos los dulces, la persona ganará \$  $24^3$ .

21. a. Entre 2,6 y 2,7.  
 b. Entre 8,4 y 8,5.  
 c. Entre 5,9 y 6,0.  
 d. Entre 7,4 y 7,5.  
 e. Entre 11,7 y 11,8.  
 f. Entre 14,5 y 14,6.



23. El lado de la pared que pintó Andrea mide  $\sqrt{48}$  metros.

24.

A	B	De A a B	De B a A
50	32	-36%	56,25%
20	25	25%	-20%
54	72	33,3%	-25%
25	40	60%	-37,5%

25. a.  $1,05^3 \cdot a$ , con a un número cualquiera.  
 b.  $1,12^4 \cdot 1,08^2 \cdot a$ , con a un número cualquiera.  
 c.  $0,86^5 \cdot 1,18^3 \cdot a$ , con a un número cualquiera.

26.

$C_0$ (\$)	$C_n$ (\$)	i (%)	n	t
120 000	206 400	9	8	S
150 000	189 798	4	6	C
300 000	490 800	5,3	12	S
85 000	132 600	8	7	S
73 000	87 600	5	4	S

Página 93. ¿Qué aprendí?

Parte I

1. a. F      c. V      e. V      g. V  
 b. F      d. F      f. V  
 2. El porcentaje de ahorro de la oferta es un  $33,3\%$ .  
 3. El resultado de la multiplicación es  $2^6$ . Como regla se tiene: para a, b y  $c \in \mathbb{N}$ ,  $(a^b)^c = a^{b \cdot c}$ .  
 4. C      6. C      8. D      10. A  
 5. C      7. B      9. C      11. C

Página 94

Parte II

12. • Significa que en el año 3, la población disminuyó un 60% respecto de la que había en el año 2.  
 • Sí, porque se sabe que al aumentar un 33% la población el año 1, se obtiene la población del año 2. Si la población el año 2 es de 50 000 habitantes, entonces  $\frac{\text{año 1} \cdot 1,33,3}{100} = 50\,000$ . Por lo tanto,  $\frac{50\,000}{1,333} = 37\,509$ .  
 • La afirmación es falsa. No puede sumar las dos variaciones entre años, ya que esas variaciones ocurren en años diferentes; por lo tanto, el número al cual se aplica cada variación es distinto. Lo correcto es:  $1,333 \cdot 0,4 = 0,533$ .  
 13. Corresponde a la barra 1.  
 14. • El tablero del ajedrez tiene  $8^2$  casillas.  
 • 8 tableros de ajedrez tienen  $8^3$  casillas.  
 • 8 tableros de ajedrez tienen  $16^2$  casillas negras.  
 • 26,6%.  
 15. •  $L_0$ : longitud inicial y L es la longitud final aumentada su temperatura en  $1^\circ\text{C}$ .  
 • El alambre disminuirá de longitud, ya que la variación de temperatura será negativa y, por lo tanto, se deberá restar a la longitud inicial.  
 • La longitud del alambre será de 87,5 cm. Variación de temperatura es  $-3^\circ\text{C}$ . Multiplicación y sustracción.

Página 95. Desafío en equipo

1.

Años	Longitud arista (mm)	Volumen ( $\text{mm}^3$ )
0	1	1
50	3	27
100	5	125
150	7	343
200	9	729
250	11	1331
300	13	2197

2. El crecimiento porcentual es de 300% y el del volumen es de 2700%. La relación matemática es  $V = a^3$ .  
 3. La fórmula para calcular su volumen es:  $\left(2\left(\frac{n}{50}\right) + 1\right)^3$  donde n = 50, 100, 150, 200, 250, 300, 350, etc.

## Unidad 2 Álgebra y funciones

### Página 97

- Corresponde a la inecuación:  $\frac{c}{m} > \frac{3}{100}$ .

### Página 98 ▶ Sección 4: Expresiones algebraicas

- Representan la suma de los primeros "n" números naturales consecutivos. El n representa el último número natural que se considerará en la suma.
  - $S(n) = \frac{n(n+1)}{2}$
  - La suma de los primeros 100 números naturales es 5050 y de los primeros 1000 es 500 500.
- factor común, propiedad distributiva, área.
  - Puede ser expresión algebraica, coeficiente numérico, factor literal y términos semejantes.
  - propiedad distributiva, factor común, factorizar, área.

### Página 100 ▶ ¿Qué debo saber?

- 1
  - 6
  - 3
  - 4
  - 0,55
  - 0,125
  - 4
  - 0,125
- 1,75
  - 0,03
  - 3
  - 1
  - $\frac{1}{5}$
  - $\frac{164}{5}$
- En cada hora, la máquina excavó 12,5 m.
  - En total la máquina avanzó 143,75 m.
  - Felipe podrá terminar a tiempo, ya que tendrá 42 páginas escritas.
  - Debería escribir como mínimo 3,5 páginas por día.

### Página 101

- 4a
  - $a^3$
  - $a + (a + 1) + (a + 2) + (a + 3)$
  - $(a + b)^2$
  - $3a - 2a$
  - $2a + 8$
  - $a^2 + 2a$
- 14x
  - $3y + 2x - 1$
  - $4 - 2p$
  - $\frac{3}{8}q$
  - $-0,5 + 4a$
  - $-9d + 2f$
  - 2m
- $2x + 2x + 2x + 2x = 8x$
  - $5x + 5x + 5x = 15x$
  - $3x + 3x + 2y + 2y = 6x + 4y$
  - $6x + 6x + 6x + y + y = 18x + 2y$
- 152,6.
  - 6,1

### Página 102 ▶ Lección 15

- El mayor valor de un dado es 6 y el menor valor es 1; por lo tanto, la máxima diferencia que se puede sacar es 5.
- Porque los 4 turnos faltantes corresponden a empates entre ambos jugadores.

#### Situación 1

Multipliación y adición.

Sergio:  $6 \cdot 4$  puntos +  $2 \cdot 2$  puntos = 28 puntos.

Natalia:  $4 \cdot 4$  puntos +  $4 \cdot 2$  puntos = 24 puntos.

Una ficha azul vale 4 puntos y una roja vale 2 puntos.

R: Tras los 20 turnos, Sergio va ganando el juego.

### Página 103

#### Situación 2

Los términos semejantes tienen sus factores literales iguales.

Un 3.

R: Emilia va ganando con 16 puntos.

### Argumenta y comunica

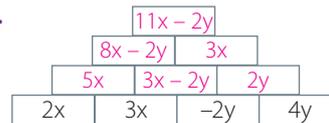
B y D, ya que tienen los mismos factores literales.

### Página 104 ▶ Practiquemos lo aprendido.

- $\frac{27}{10}$
  - 11,62
  - $\frac{7}{30}$
- De arriba a abajo x, x + 2,  $3(x + 2)$  y  $\frac{3(x+2)}{5}$ .
- 3 ● y 2 ●
  - 3 ● y 4 ●
- ● ● ● ●
  - ● ● ● ● ● ●
- Jugador 1: 2r; Jugador 2: 2a + r
  - Jugador 1: 3r + 2a; Jugador 2: 2a + 2r
- $x + x + x = 3x$
  - $5x + 5x + 3x + 2x + 2x + 3x = 20x$
  - $2a + 2a + a + a = 6a$
  - $4y + 2x + 6y + 4 + 2x + 3 = 10y + 4x + 7$
- Coeficiente: 5; factor literal: ab.
  - Coeficiente: -8; factor literal:  $t^3$ .
  - Coeficiente: -1; factor literal:  $n^5$ .
  - Coeficiente: 12; factor literal:  $x^2yz^3$ .
- $3y + 6 = 3y + 6$
  - $8m + 3n - 12 + -2m + 2n = 6m + 5n - 12$
  - $5x + x + -5 = 6x - 5$
- De arriba a abajo x, 2x.
  - De arriba a abajo x, x - 1.
  - De arriba a abajo x, 2x + 1.

### Página 105

10.



11.

3x	8y	3y	3z	-2z	5	-6	-4x
3y	3z	-2z	5	-6	-4x	3x	8y
-6	-4x	3x	8y	3y	3z	-2z	5
-2z	5	-6	-4x	3x	8y	3y	3z

12.

Perímetros para los cuadrados o rectángulos:

Azul:  $4 \cdot 3b = 12b$

Café:  $2 \cdot 3b + 2 \cdot 8a = 16a + 6b$

Amarillo:  $2 \cdot 8a + 2(8a - 3b) = 32a - 6b$

Morado:  $2 \cdot 3b + 2 \cdot 8a = 16a + 6b$

Rosado:  $4 \cdot 3b = 12b$

Verde:  $2 \cdot 3b + 2(8a - 3b) = 16a$

13.

Figura (f)	1	2	3
n	3	5	7

La expresión algebraica es:  $2f + 1 = n$ .

El valor de n en la figura 4 es 9.

- En dos horas más, Fabián estará a  $(15 + 2x)$  km.
  - El perímetro es  $2a + 2b = 12$  cm. Los valores que pueden asumir a y b son: 2 y 4; 4 y 2; 1 y 5 o 5 y 1.
  - El precio con descuento es 0,8p.
- Porque el lado izquierdo corresponde a la adición de 2 números cualquiera y el lado derecho es el doble de la multiplicación de ambos números.

16. El error de Carla fue considerar que los factores literales eran términos semejantes. La expresión correcta es:  
 $16a^2b^2 - 8a^2b^2 = 8a^2b^2$ .

#### Reflexiono

1. Puede tener muchos resultados. Depende de los valores que se le asignen a sus coeficientes literales.
2. Sí cumplen las mismas propiedades aritméticas.

#### Página 106 ▶ Lección 16

! Pueden considerarse 4 rectángulos rojos y más el cuadrado rojo del centro, y 4 rectángulos blancos en la bandera.

#### Situación 1

! Multiplicando el área de cada cuadrilátero por la cantidad de cuadriláteros del mismo tipo:

**R:** Se obtiene la siguiente expresión algebraica:  
 $4ac + 2ab + 2bc + b^2$ .

! No se pueden sumar porque no hay términos semejantes.

#### Página 107

#### Situación 2

! Propiedad asociativa.

!  $(2c + b)(2a + b) = 4ac + 2bc + 2ab + b^2$ . Se obtiene el mismo resultado.

! Multiplicación y adición.

**R:** Se obtiene la siguiente expresión algebraica:  
 $4ac + 2ab + 2bc + b^2$ .

! El resultado es el mismo que en la situación 1.

#### Argumenta y comunica

Se multiplica el primer término del primer factor con cada término del segundo factor, luego se multiplica el segundo término del primer factor con cada término del segundo factor y se reducen los términos semejantes.

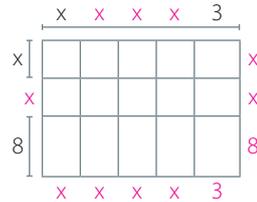
#### Página 108 ▶ Practiquemos lo aprendido.

1. a. -25                      c. -84                      e. 324  
    b. -20                      d. 180
2. a.  $12m + 15$                       c.  $4bc - c - a$   
    b.  $7q - p$                       d.  $-18x^2y + 7xy^2 - 5$
3. a.  $6ab$                       b.  $A = ab$   
    c.  $A = ab + ab + ab + ab + ab + ab = 6ab$ .  
    d. El área de ambos rectángulos es la misma, ya que el rectángulo rojo se puede formar por los rectángulos amarillos, obteniendo las mismas dimensiones.
4. a.  $2x^2 + 2xy$   
    d. El área del rectángulo es  $2x(x + y) = 2x^2 + 2xy$ .  
    e. Las áreas calculadas son iguales. Se usó la propiedad distributiva y asociativa.
5. a.  $a^3b + 3a^2b^2 + 2ab^3$   
    b.  $36a^3 + 132a^2b + 105ab^2$
6. a.  $-16xy + 8y^2$                       d.  $-21xz + 14x^2z$   
    b.  $2ax + 3axy$                       e.  $-60bx^3 - 90bx^2y$   
    c.  $8pqx - 10pq$                       f.  $35y^3 - 55y^4$

#### Página 109

7. a.  $x^3 - y^3$   
    b.  $1 - 2yz - y^2 - z^2$   
    c.  $54mn - 9m^3n^2 + 9mn^2 - 6n + m^2n^2 - n^2$

- d.  $-a^2b^2c^2 + a^2b^2c + ab^2c^2 + 3abc - ab - bc - 2$
8. a.



- El área de cada cuadrado es  $x^2$  y el área de cada tipo de rectángulo son:  $8x$ ,  $3x$  y  $24$ .
  - $8x^2 + 38x + 24$
  - El área del rectángulo mayor es  $8x^2 + 38x + 24$ .
  - Ambas áreas son iguales, ya que la suma de las áreas de las figuras más pequeñas forman el área de la figura mayor.
- b. • El perímetro es  $6x - 2$ . El área es  $2x^2 - 5x - 12$ .
- c. • Área del cuadrado mayor:  $a^2$ , área de cada rectángulo:  $ab$ , área del cuadrado menor:  $b^2$ .
- $a^2 + 2ab + b^2$
  - El área del cuadrado mayor es  $a^2 + 2ab + b^2$ .
  - El área del cuadrado mayor es igual a la suma de las áreas de las figuras más pequeñas que lo conforman.
- d. El producto de sus edades es  $6x^2 + 27x + 30$ .
9. a.  $(a + b)(a + b) = a^2 + 2ab + b^2$   
 b.  $x^2 + 14x + 49$
10. El volumen es  $x^3 + 12x^2 + 48x + 64$ .

#### Reflexiono

1. El área va a aumentar o disminuir, dependiendo de los valores de  $b$  y  $c$ :
2. Se debe calcular la diferencia entre el largo total y el largo del rectángulo azul.

#### Página 110 ▶ Lección 17

#### Situación 1

! Otra forma de descomponer sería  $2 \cdot a \cdot b$ .

**R:** Las posibles medidas del rectángulo serían:  $2$  y  $ab$ ,  $b$  y  $2a$ ,  $2b$  y  $a$ .

#### Situación 2

!  $2a + 2(a + b)$ .

! El valor del área sería  $135$  y del perímetro sería  $48$ .

! Si  $a = b$ , la expresión sería  $a^2 + a^2 = 2a^2$  y su factorización  $2 \cdot a^2$ . O también,  $2b^2$  y su factorización  $2 \cdot b^2$ .

#### Página 111

#### Situación 3

**R:** Se obtienen los factores  $a$  y  $(a + b)$ .

#### Situación 4

! Otra forma sería cambiar el orden de los lados o el orden de los segmentos.

! Porque se deben buscar dos números que sumados den como resultado  $5a$ .

! Porque la suma de los valores es  $7$ .

!  $(a + 2)(a + 3)$

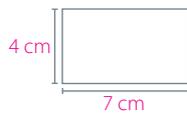
#### Argumenta y comunica

La factorización es  $(a + 5)(a - 2)$  y las condiciones que se deben cumplir son:  $x \cdot -y = -10$  y  $(x - y) = 3$ .

#### Página 112 ▶ Practiquemos lo aprendido.

1. a.  $4 \cdot 2$                       b.  $4 \cdot 4$

- c.  $8 \cdot 4 \circ 16 \cdot 2$  e.  $7 \cdot 8 \circ 28 \cdot 2$   
 d.  $9 \cdot 5$  f.  $7 \cdot 9 \circ 21 \cdot 3$   
 2. a.  $7 \cdot 3$  d.  $13 \cdot 2 \cdot 2$   
 b.  $5 \cdot 5$  e.  $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$   
 c.  $3 \cdot 2 \cdot 5$  f.  $5 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3$



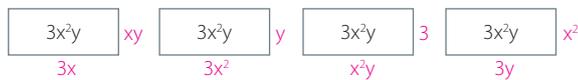
4. a. Rectángulo de lados  $x$  y  $2x$



- b. Rectángulo de lados  $6x$  e  $y$  o  $x$  y  $6y$



- c. Rectángulo de lados  $3x$  y  $xy$  o  $3x^2$  e  $y$  o  $x^2$  y  $3y$



5. a.  $3z + 6 = 3(z + 2)$   
 b.  $5m^2 + 10m = 5m(m + 2)$   
 c.  $8p^2q - 12pq^2 = 4pq(2p - 3q)$   
 d.  $4x^2 + 8x + 16 = 4(x^2 + 2x + 4)$

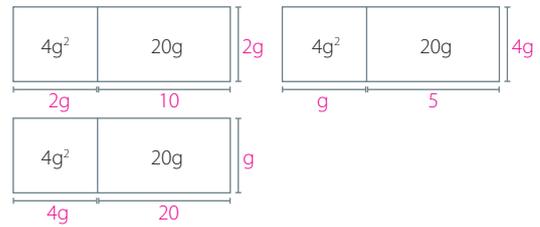
6. a. Rectángulo de lados  $2$  y  $(2a + 3)$ .



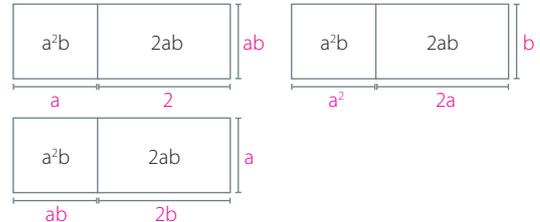
- b. Rectángulo de lados  $3$  y  $(5m + 7)$ .



- c. Rectángulo de lados  $2g$  y  $(2g + 10)$ ; rectángulo de lados  $4g$  y  $(g + 5)$ , rectángulo de lados  $g$  y  $(4g + 20)$ .



- d. Rectángulo de lados  $ab$  y  $(a + 2)$ ; rectángulo de lados  $a$  y  $(2a + 2b)$ , rectángulo de lados  $b$  y  $(a^2 + 2a)$ .



7. a.  $y(y - 7)$  d.  $5(3r - 5s + 4)$   
 b.  $3y(4x + 9)$  e.  $xy(x - y - 1)$   
 c.  $9n^2(m + 6n)$  f.  $b^2(a^2bc - 2a + 8c^2 + b)$   
 8. a.  $10x(x - 6) = 10x^2 - 60x$   
 b.  $c(ab - 4b + 2a^2) = abc - 4bc + 2a^2c$   
 c.  $(4x + 3y)(4x - 3y) = 16x^2 - 12xy + 12xy - 9y^2 = 16x^2 - 9y^2$   
 d.  $2xy^3(xy + 4x^3y^3 - 5) = 2x^2y^4 + 8x^4y^6 - 10xy^3$

Página 113

9. a. Rectángulo de lados  $(x + 4)$  y  $(x + 2)$   
 b. Rectángulo de lados  $(x + 4)$  y  $(x + 3)$   
 c. Rectángulo de lados  $(x + 6)$  y  $(x + 3)$   
 d. Rectángulo de lados  $(x + 9)$  y  $(x + 8)$   
 10. a.  $(x + 1)(x + 7)$  c.  $(b + 9)(b + 2)$   
 b.  $(m + 7)(m + 4)$  d.  $(y + 24)(y + 1)$   
 11. a. El área total es  $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ac$ .  
 b. El lado del cuadrado es  $(a + b + c)$ .  
 12. El error que cometió María Paz fue considerar que la multiplicación de  $1$  y  $6$  da  $6$ , pero al sumarlos no da  $5$ . La factorización correcta es  $(x + 3)(x + 2)$ .  
 13. Se pueden formar dos rectángulos y un cuadrado, cuyas áreas son:  $b(x - b)$ ,  $b(x - b)$  y  $(x - b)^2$ , respectivamente. Luego se suman estas expresiones.  
 • El área correspondiente es  $x^2 - b^2$ , la cual se puede factorizar como  $(x + b)(x - b)$ .

Reflexiono

1. No, porque al factorizar la expresión resulta  $(x - 2)(x - 1)$ , por ende, no se puede tener un segmento con medidas negativas.  
 2.  $x^3 - x^2(a + b + c) + x(ab + bc + ac) - abc$ .

Página 115. Mural

1. Longitudes de tetraminós:  
 Azul:  $2x, 3x, x, 2x, x, x$ . Celeste:  $4x, x, 4x, x$ .  
 Naranja:  $x, 3x, 2x, x, x, 2x$ . Verde:  $x, x, x, 2x, x, x, 2x$ .  
 Amarillo:  $2x, 2x, 2x, 2x$ . Morado:  $x, x, x, x, x, x, 3x$ .  
 Rojo:  $2x, x, x, x, 2x, x, x$ .  
 • El área de la figura es  $28x^2$ .  
 • El perímetro de la figura es  $22x$ .

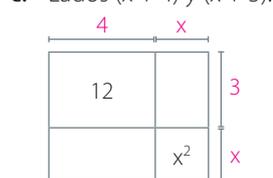
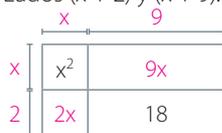
Página 116 ► ¿Cómo voy?

1. a.  $\frac{x-7}{2}$  b.  $\frac{x}{4}$  c.  $0,8a$  d.  $\frac{1}{3}x$

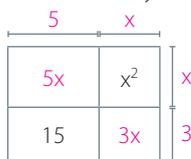
2. a.  $3x + 2y + 5z$                       d.  $4x + 4$   
 b.  $8x + 4y$                               e.  $9x + 2$   
 c.  $4x + 6y$                               f.  $10x + 6$
3. a.  $-3$                       b.  $9$                       c.  $-10$                       d.  $\frac{8}{5}$
4. a.  $11x$                               c.  $7x - 10y + 8$   
 b.  $5x + 2y + 3xy$                       d.  $16x$
5. a.  $2x + 3x = 5x$   
 b.  $3x + 5y + -2x + -2y = x + 3y$   
 c.  $5x - 3y + -5x + 3y = 0$   
 d.  $12x + 5 - 12y + 12x + -4y + -5 = 24x - 16y$
6. a.  $x^2 + 14x + 49$                       c.  $x^2 + 12x + 36$   
 b.  $x^2 + 4x + 4$                       d.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
7. a. El lado del cuadrado mayor mide  $(x + y)$ .  
 b. El lado del cuadrado menor mide  $(x - y)$ .  
 c. La expresión para el área sombreada es  $4xy$ .

### Página 117

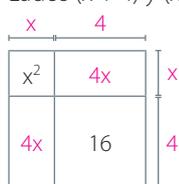
8. a.  $2x^2$                       d.  $-12x^3$                       g.  $12x^3$   
 b.  $6a^2$                       e.  $6a^3$                       h.  $10a^3b^3$   
 c.  $15a^2$                       f.  $72xyz$
9. a.  $x^2 - 9$                       c.  $4a^2 - 16$   
 b.  $a^2 - 49$                       d.  $9x^2 - 25$   
 e. El resultado corresponde al primer término al cuadrado menos el segundo término al cuadrado.
10. a. Lados:  $6x$  e  $y$  o  $x$  y  $6y$  o  $6$  y  $xy$ .  
 b. Lado del cuadrado  $4x$ .  
 c. Lados  $2$  y  $(a + b)$ .  
 d. Lados  $3x$  y  $(2x + y)$ .
11. a. Lados  $(x + 2)$  y  $(x + 9)$ .                      c. Lados  $(x + 4)$  y  $(x + 3)$ .



- b. Lados  $(x + 3)$  y  $(x + 5)$ .



- d. Lados  $(x + 4)$  y  $(x + 4)$ .



12. a. D                      c. E  
 b. A                      d. C

### Desafíos de integración

- a. El atleta corrió  $9$  km, nadó  $3$  km y anduvo en bicicleta  $39$  km.  
 b. •  $5$  cm y  $(x + 1)$  cm.  
 •  $(5x^2 + 10x + 5)$  cm<sup>3</sup>  
 c. • El área es  $16(x + y + 2)$  y el volumen es  $16(x + y)$ .  
 d. •  $b^2 + 2bc + c^2$   
 •  $(b + c)^2$ . Sí se obtiene el mismo resultado.

### Página 118 ► Resolución de problemas

- La expresión algebraica que representa las dimensiones del rectángulo.
- El área total del rectángulo y la composición de este en los cuadrados y rectángulos.

- $(3x + 5)(3x + 4) = 9x^2 + 27x + 20$ .
- Los lados del rectángulo son:  $(3x + 5)$  y  $(3x + 4)$ .

### Página 120 ► Sección 5: Ecuaciones e inecuaciones

1. a.  $27\,147$  nacimientos. Se reemplazan los valores obtenidos en la fórmula y se despeja la incógnita.  
 c. Las personas han dado mayor prioridad a su futuro profesional o personal. El país tendería al envejecimiento.

2. a. incógnita                      c. solución  
 b. desigualdad                      d. inecuación

### Página 122 ► ¿Qué debo saber?

1. a.  $1$                       b.  $-4$                       c.  $-16$                       d.  $0$
2. a. Una opción es  $-4$ .                      c. Una opción es  $-4$ .  
 b. Una opción es  $-8$ .                      d. Una opción es  $-2$ .
3. a.  $-0,08$                       c.  $-0,32$                       e.  $\frac{19}{150}$   
 b.  $35,7$                       d.  $0$
4. a.  $-\$36\,000$ .  
 b. • Es el  $85\%$ .  
 • El precio actual es de  $\$272\,000$ .  
 c.  $-8$  puntos.  
 d.  $12$  trozos.

### Página 123

5. a.  $x - 6$                       b.  $2x$                       c.  $x - (x + 1)$
6. a.  $x^2 + 4x$                       b.  $x^2 + 10x + 25$
7. a.  $-9b - 1$                       c.  $15x - 10y + 8$   
 b.  $2m + 23n + 6$                       d.  $20t - 5s + 4$
8. a. Cuadrado de lado  $(x + 3)$   
 b. Rectángulo de ancho  $(x + 3)$  y largo  $(x + 8)$ .
9. a.  $x = 4$                       c.  $x = 5$                       e.  $x = \frac{13}{9}$   
 b.  $x = 3$                       d.  $x = -\frac{4}{3}$
10. a.  $x < 3$                       c.  $x < 5$                       e.  $x < \frac{24}{7}$   
 b.  $x > -2$                       d.  $x > 5$

### Página 124 ► Lección 18

#### Situación 1

- masa de  $2$  gatos = masa de  $1$  perro
- Porque se desea crear una igualdad con el mismo tipo de variable, en este caso, la masa de un gato.

#### R: un gato

- La masa corporal de un gato es  $4$  kg y la del perro es  $8$  kg.

### Página 125

#### Situación 2

- Se divide la cantidad de centímetros por  $100$ . Porque un metro equivale a  $100$  centímetros.

#### Representarla en una balanza.

- R: La longitud de uno de los tres trozos se puede obtener con la ecuación:  $3x + 0,2 = 2,6$

$$3x = 2,4 \quad /: 3 \rightarrow x = 0,8$$

$$3x + 20 = 260$$

#### Argumenta y comunica

- Primero, se debe determinar el valor de la incógnita y luego se representa este punto en la recta numérica indicando con una flecha el sentido de la desigualdad.
- Sí.

## Página 126 ▶ Practiquemos lo aprendido.

- a.  $10 - x$     b.  $1,8 - x$     c.  $8x$     d.  $\frac{19\,400}{x}$
- a. El 10% de descuento de una polera.  
b. El puntaje total de un jugador, si se queda con los 8 puntos base y un tercio del puntaje máximo.  
c. La diferencia en la nota de Matemática entre la nota de Luis y el 4,5 de Pedro.  
d. El promedio de dos números.
- a.  $10,6x + 1,8y + 3$     c.  $18b - 15,1$   
b.  $\frac{4}{9}p - 1,2$     d.  $\frac{4}{7} - \frac{2}{3}x + \frac{23}{4}y$
- a.  $2x = 4$     b.  $5x + 1 = 2x + 4$
- a.  $2x + \frac{1}{5} = x + \frac{3}{5}$     c.  $4x + \frac{2}{5} = 2x + \frac{4}{5}$   
b.  $x + \frac{2}{5} = 5x$
- a. 

x	1	1	1	1	1
8					

    d. 

x	x	x	4,8
15			
4			

  
b. 

x	x
1,4	

    e. 

x	x	x	x	11,2
16				

  
c. 

x	x	x	7,5
9,5			

## Página 127

- a.  $x + \frac{x}{4} = 20$     f.  $2x + 4500 = 23\,000$   
b.  $\frac{x}{3} = 280$     g.  $2x + x + (x + 60,2) = 180$   
c.  $4x = 2x + 86$     h.  $\frac{x}{6} + 200 = x$   
d.  $5x + 12 = 7x - 2$     i.  $8x + 720 = 11x + 150$   
e.  $x - 15 = \frac{3}{5}(x + 15)$     j.  $25x + 8 = 22x + 13$
- a.  $2x + \frac{11}{5} = 3,6x$     b.  $4,5x + 2,7 = 16,2$
- $22,5 = x + \frac{15 \cdot 30}{60}$ . Está en movimiento durante 15 minutos.
- Como es un triángulo isósceles, sus lados laterales son iguales y la base es distinta, entonces la ecuación sería:  $2x + 5,2 = 30$ , donde  $x$  es la medida del lado lateral.
- El error que comete Catalina es que considera la quinta parte del número y luego le suma 3. La ecuación correcta es:  $\frac{x+3}{5} = \frac{7}{2}y$  y la solución es  $x = \frac{29}{2}$ .

### Reflexiono

- Existen limitaciones cuando las incógnitas o coeficientes numéricos son negativos.
- Sí, ya que el resultado depende de los valores de los coeficientes numéricos y su relación. Ejemplo:  $3x + 8 = 1$ .

## Página 128 ▶ Lección 19

### Situación 1

Representan una masa de 0,5 kg.  
•  $3x = x + 1,50$

Representan una masa de 1,5 kg.

•  $2x = 1,50$     •  $x = 0,75$

R: Cada esfera negra tiene una masa de 0,75 kg.

## Página 129

### Situación 2

•  $\frac{1}{4} + 1 = \frac{1+4}{4} = \frac{5}{4}$

•  $-x$

$$\frac{6}{5}x - x = \frac{6x - 5x}{5} = \frac{x}{5}$$

• 5

R: El valor de  $x$  que hace cierta la igualdad es  $\frac{25}{4}$ .

Se debe reemplazar el valor de  $x$  en la ecuación y verificar que la igualdad se cumpla.

### Argumenta y comunica

- Se aplicó  $+1$  para eliminar el  $-1$  junto a la incógnita en el lado izquierdo. Luego, se aplicó  $-x$  para eliminar la incógnita del lado derecho. Finalmente, se multiplicó por 5 para despejar la incógnita.
- Se debe seguir un cierto orden para resolver la ecuación.
- Las transformaciones serían: restar 0,5, sumar 1,2x y, finalmente, dividir por 1,4.

## Página 130 ▶ Practiquemos lo aprendido.

- a.  $x + \frac{1}{8} = 3x$     b.  $2x + \frac{2}{8} = 4x + \frac{1}{8}$
- a. 

$\frac{1}{10}x$	$\frac{1}{10}x$	$\frac{1}{10}x$
3		

    d. 

z	z	z	z	1
3				
10				

  
b. 

q	q	q	0,9
11			

    e. 

1p	0,5p	1,5
11		

  
c. 

w	$\frac{1}{2}$
3	

    f. 

y	1	1	1	1	1
y	y	y	y	0,8	
- a.  $x = 0,8$     b.  $x = 1,6$     c.  $x = 0,6$
- a.  $/ + \frac{3}{7}$     c.  $/ + 9,2$   
 $/ : 2$      $/ : 5$   
b.  $/ - 7$     d.  $/ + 6$   
 $/ \cdot 4$      $/ - 6z$   
 $/ : 5$

## Página 131

- a.  $p = \frac{4}{9}$     c.  $x = \frac{11}{16}$   
b.  $x = -10,5$     d.  $x = 16,1$
- a. B    b. C    c. D    d. A    e. F    f. E
- a.  $x$ : precio del libro sin IVA.  $16\,000 - 16\,000 \cdot 0,19 = x$ . El precio del libro sin IVA es \$ 12 960.  
b.  $x$ : masa corporal antes de la dieta.  $x - 0,01 \cdot x = 54$ . Su masa corporal era de 54,54 kg.  
c.  $x$ : cantidad de estudiantes que no tienen celular.  $x + 1600 \cdot \frac{3}{5} = 1600$ . Hay 640 estudiantes que no tienen celular.  
d.  $x$ : largo del sitio; ancho del sitio:  $\frac{3}{5}x$ .  
 $2x + 2(x - \frac{2}{5}x) = 160$ .  
El largo del sitio mide 50 m y el ancho es 30 m.  
e. •  $\frac{x}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x}{6} + 3 = x$   
• Con la primera lluvia recolectó 18 mm, con la segunda 9 mm y con la tercera 6 mm.
- $x$ : minutos extra hablados.  $12\,000 + 85x = 14\,975$ .  
• En 35 minutos.
- Es correcta, ya que multiplicó por  $-1$  a ambos lados, para asignar el signo al número y dejar la incógnita positiva.







**Página 150 ▶ Sección 6: Función lineal y función afín**

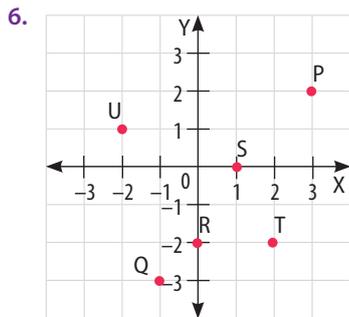
- Cada 154 m la temperatura siempre disminuye 1 °C, su variación es la misma. La constante de proporcionalidad es 154.
  - Con la constante de proporcionalidad se puede establecer la relación:  $\text{Altitud} = 154 \cdot T$ . Para determinar la disminución de temperatura a los 5 km (5000 m), se reemplaza en la ecuación:  $5000 = 154 \cdot T$ , despejando la incógnita se obtiene  $T = 32,5$  °C.
- Conceptos conocidos: proporcionalidad directa, variable, función, constante de proporcionalidad, plano cartesiano, recta. Conceptos nuevos: coeficiente de posición, función afín, pendiente, función lineal.
    - pendiente.
    - variable.

**Página 152 ▶ ¿Qué debo saber?**

- Sí.
  - Sí.
  - No.
  - No.
  - No.
- No.
  - Sí.
  - Sí.
  - No.
  - Sí.
- $y = 16$
  - $y = 6$
  - $x = 15$
  - $x = 12$
  - $y = 54$

**Página 153**

- Costará \$ 480 000.
  - Debe pagar \$ 6300.
  - Da 100 vueltas.
- A(1, 2)
  - B(-2, 3)
  - C(2, -3)
  - D(3, 0)
  - E(0, 1)
  - F(-3, -2)



- Los vértices desconocidos son (4, -4) y (-4, 4). Estos no son la única respuesta posible, ya que se puede formar el cuadrado en otras direcciones.

**Página 154 ▶ Lección 23**

**Situación 1**

- La cantidad de azúcares debe disminuir.
- Si se embotella el doble de litros de jugo, entonces se necesita el doble de gramos de azúcares.

J(L)	0,3	0,6	0,9	1,2	1,5	1,8	2,1
A(g)	24	48	72	96	120	144	168

**Página 155**

**Situación 2**

- $\frac{0,3}{0,9} = \frac{24}{72}$   
 $\frac{0,3}{0,9} = \frac{24}{720}$

- Si se podría y la relación sería  $J = 0,0125A$ , la variable independiente sería la cantidad de azúcares y la variable dependiente sería la cantidad de litros de jugos obtenidos.

•  $A(J) = 80J$

**Argumenta y comunica**

- Si el cociente entre la variable dependiente y la variable independiente es constante, se modela por una función lineal.
- Esta ecuación siempre se verifica por el par (0, 0).

**Página 156 ▶ Practiquemos lo aprendido.**

- No.
  - Sí.
  - Sí.
  - No.
- $x = 1$
  - $x = \frac{16}{3}$
  - $x = \frac{4}{5}$
  - $x = \frac{18}{5}$
- Corresponde al valor de un kilo de pan, que es \$ 650.
- No.
  - Sí.
  - Sí.
  - No.

- |       |    |    |    |     |
|-------|----|----|----|-----|
| t (s) | 15 | 20 | 30 | 55  |
| d (m) | 30 | 40 | 60 | 110 |

  - |       |     |      |      |      |
|-------|-----|------|------|------|
| A (L) | 25  | 40   | 70   | 100  |
| S (g) | 650 | 1040 | 1820 | 2600 |
  - |       |     |   |    |    |
|-------|-----|---|----|----|
| B     | 2   | 4 | 12 | 20 |
| C(kg) | 2,5 | 5 | 15 | 25 |

- $y = -4x$
  - $y = 0,4x$
  - $y = 3x$
- No, ya que  $f(0) \neq 0$ .
  - Sí, ya que  $f(0) = 0$ .
  - No, ya que los datos no son proporcionales.
- $d(t) = \frac{206}{0,6}t$

**Página 157**

- $p(l) = \frac{1}{4}l$
  - $d(m) = 2m$

- |                           |     |     |   |     |    |
|---------------------------|-----|-----|---|-----|----|
| Longitud original x (cm)  | 2   | 6   | 8 | 14  | 20 |
| Longitud imagen f(x) (cm) | 0,5 | 1,5 | 2 | 3,5 | 5  |

- Se modela por la función lineal  $f(x) = \frac{x}{4}$ .
- La foto será de 3 cm y 18 cm, respectivamente.
    - La función es:  $f(x) = 3x$ .
    - La afirmación es verdadera.
  - La función es:  $f(p) = 0,75p$ .
    - La función es:  $f(p) = 0,525p$ .
    - La función sin la oferta con tarjeta es:  $f(p) = 0,7p$  y con la oferta con tarjeta es:  $f(p) = 0,525p$ . Por lo tanto, para la rebaja usando tarjeta, los precios finales son iguales; ya que son los mismos porcentajes de descuento aplicados en otro orden.
  - La función es:  $f(x) = 1,19x$ .
    - Los precios con IVA son: \$ 2380 y \$ 5950, respectivamente.
    - Debe pagar en total \$ 8330.
10. Las tres funciones son lineales.

Reflexiono
1. Cuando $x = 0$ , y vale y. Siempre es y, independiente del valor de x, ya que no hay una relación entre x e y.
2. No es una función lineal.

**Página 158 ▶ Lección 24**

**Situación 2**

- Sí, tanto el dominio como el recorrido corresponden a todos los números mayores a 0.
- No, porque las variables pueden asumir cualquier valor mayor que 0, por tanto, se deben diagramar infinitos valores.

**Página 159**

**Situación 3**

La variable independiente es  $a$ , porque de los litros de agua depende la cantidad de gramos de sal que se puedan extraer.

**Situación 4**

- (1, 35); (2, 70); (3, 105).
- El signo de la pendiente es positivo.
- Corresponde a una recta que pasa por el origen, pero decrecerá en el sentido positivo del eje  $X$ .
- 35

**Página 160**

**Situación 6**

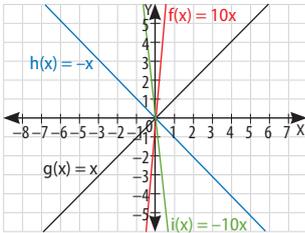
■ Sí es equivalente. Se cumple siempre.

**Situación 7**

**R:** Al recolector se le pagará \$ 3000 y a su hijo, \$ 9000.

- 9000

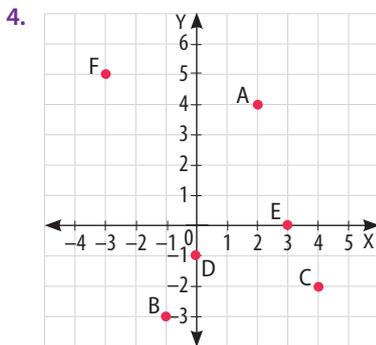
**Argumenta y comunica**



Se observa que cuando la pendiente es positiva, la inclinación de la recta es creciente en todo el recorrido del eje  $X$ , mientras que cuando la pendiente es negativa, la inclinación de la recta es decreciente en todo el recorrido del eje  $X$ .

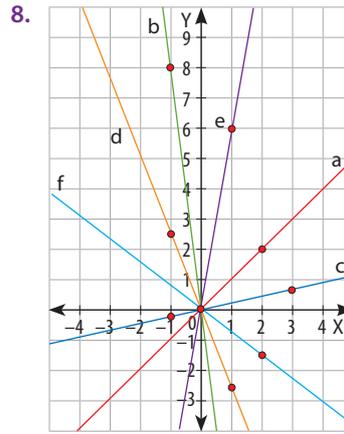
**Página 161 ▶ Practiquemos lo aprendido.**

1. a.  $y = 3x$       b.  $y = \frac{x}{2}$       c.  $y = 8x$
2. a.  $d = 12,5b$       c.  $n = \frac{19}{60}t$
- b.  $a = 0,125d$       d.  $p = 3000q$
3. A(-2, 2); B(1, -1); C(1, 3); D(-1, -3); E(0, 2); F(2, 0).



5. a.  $g(x) = 3x$       c.  $i(x) = -x$
- b.  $h(x) = \frac{x}{2}$       d.  $j(x) = -2x$
6. a. -10, -6, -3, 9      c.  $4, 2, \frac{8}{5}, -\frac{18}{5}$
- b. -8, -3, 2, 7
7. a.  $f(x) = 4x, \{2, 4, 6, 8\}, \{8, 16, 24, 32\}$
- b.  $f(x) = -1,5x, \{-8, -2, 4, 5\}, \{-7,5, -6, 3, 12\}$

**Página 162**



9. a.  $L_5$       b.  $L_2$       c.  $L_3$       d.  $L_4$
10. a. Pertenecen.      d. Pertenecen.
- b. Pertenecen.      e. Pertenecen.
- c. No pertenecen.      f. No pertenecen.

11. a.

x	k	f(kx)	k · f(x)
-3	-1	$g(3) = 0,5 \cdot 3 = 1,5$	$-1 \cdot g(-3) = -1 \cdot 0,5 \cdot -3 = 1,5$
0	-2	$g(0) = 0,5 \cdot 0 = 0$	$-2 \cdot g(0) = -2 \cdot 0,5 \cdot 0 = 0$
2	4	$g(8) = 0,5 \cdot 8 = 4$	$4 \cdot g(2) = 4 \cdot 0,5 \cdot 2 = 4$

b.

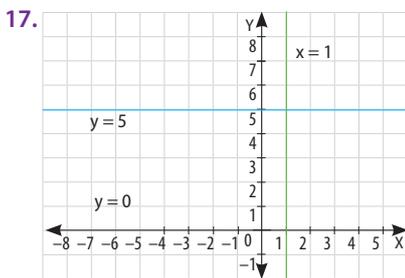
x	k	f(kx)	k · f(x)
-2	-3	$h(6) = -7 \cdot 6 = -42$	$-3 \cdot h(-2) = -3 \cdot -7 \cdot -2 = -42$
2	-1	$h(-2) = -7 \cdot -2 = 14$	$-1 \cdot h(2) = -1 \cdot -7 \cdot 2 = 14$
4	1	$h(4) = -7 \cdot 4 = -28$	$1 \cdot h(4) = 1 \cdot -7 \cdot 4 = -28$

12. a. Como  $m < 0$ , el gráfico de la función decrece en el sentido positivo del eje  $X$ .
- b. Como  $m > 0$ , el gráfico de la función crece en el sentido positivo del eje  $X$ .
- c. Como  $m < 0$ , el gráfico de la función decrece en el sentido positivo del eje  $X$ .
- d. Como  $m > 0$ , el gráfico de la función crece en el sentido positivo del eje  $X$ .
- e. Como  $m > 0$ , el gráfico de la función crece en el sentido positivo del eje  $X$ .
- f. Como  $m < 0$ , el gráfico de la función decrece en el sentido positivo del eje  $X$ .

**Página 163**

13. a.  $f(kx) = k \cdot f(x)$   
 $f(4 \cdot 2) = 4 \cdot f(2)$   
 $f(8) = 4 \cdot 0,4 \cdot 2$   
 $0,4 \cdot 8 = 3,2$   
 $3,2 = 3,2$
- b.  $f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$   
 $f(2 + -6) = f(2) + f(-6)$   
 $f(-4) = 0,4 \cdot 2 + 0,4 \cdot -6$   
 $0,4 \cdot -4 = 0,8 - 2,4$   
 $-1,6 = -1,6$
- c.  $k \cdot f(x_1 + x_2) = k \cdot f(x_1) + k \cdot f(x_2)$   
 $4 \cdot f(-8 + 10) = 4 \cdot f(-8) + 4 \cdot f(10)$   
 $4 \cdot f(2) = 4 \cdot 0,4 \cdot -8 + 4 \cdot 0,4 \cdot 10$   
 $4 \cdot 0,4 \cdot 2 = -12,8 + 16$   
 $3,2 = 3,2$

14. a. En el primer par de funciones, se observa que la pendiente cambia de sentido por el signo del número, pero que la inclinación es la misma; sólo se refleja respecto al eje Y. En el caso del segundo par de funciones, que observa que la pendiente cambia de sentido y además de inclinación, ya que cambia el signo y el valor numérico de la pendiente.
- b. En ambas gráficas, las rectas de pendientes positivas pasan por el primer y tercer cuadrante; mientras que las rectas de pendientes negativas se sitúan en el segundo y cuarto cuadrante.
15. a.
  - El automóvil A viaja más rápido.
  - La rapidez del automóvil B es 50 km/h.
  - Tardó 18 horas en realizar el viaje.
- b.
  - En el puesto de don Jorge, porque son más baratas.
  - En el puesto de don Luis, el kilogramo de naranjas cuesta \$ 333 y en el puesto de don Jorge, cuesta \$ 167.



### Reflexiono

1. El dominio y recorrido de esta función son todos los valores que puede asumir la variable independiente.
2. Se necesitan como mínimo 2 puntos para graficar una función lineal. Por ejemplo, los puntos  $A(0, 0)$  y  $B(2, -1)$ .

### Página 164 ▶ Lección 25

#### Situación 1

- Se calculó la constante de proporcionalidad entre los centímetros que crece el árbol en una semana.
- La función  $h$  considera la altura total del pino, mientras que la función lineal representa el crecimiento del pino por semana.
- R: A las 6 semanas, la altura del pino será de 17 cm.
- La respuesta no cambiaría, ya que la razón de crecimiento y la altura original no dependen de las letras de las variables.

- lineal                      5

### Página 165

#### Situación 2

- Los puntos  $(-\frac{5}{2}, 0)$  y  $(0, 5)$ . Si se puede dibujar la recta con ellos ya que son los puntos de corte con el eje X y al eje Y.
- No pertenece, porque cuando  $s = 0$ ,  $h = 5$ ; por lo tanto, no es una función lineal.

- mx                                      negativo

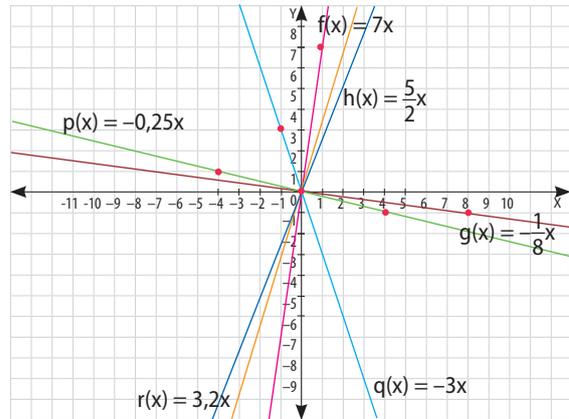
- Se transforma en una función lineal.

#### Argumenta y comunica

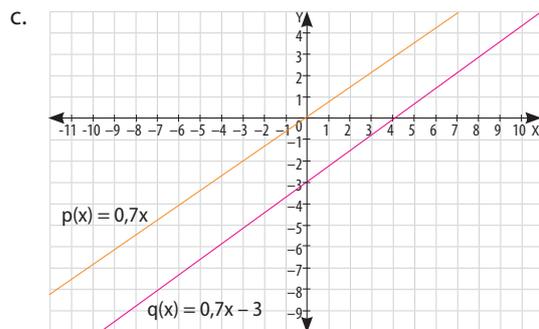
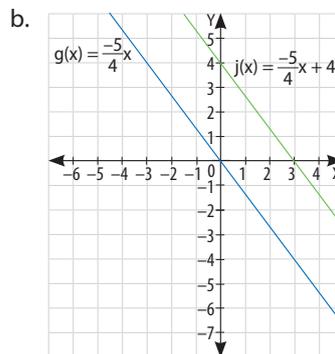
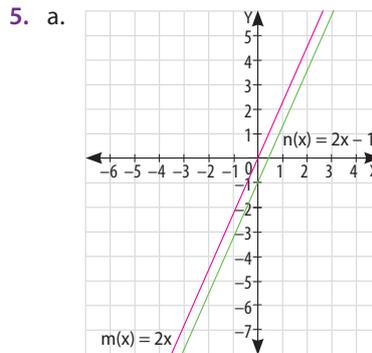
- Se pueden dibujar infinitas rectas.
- Siempre es posible unirlos mediante una recta; pero cuando hay tres puntos, no siempre es posible, ya que para que suceda, los tres puntos deben pertenecer a una misma recta. Por ejemplo, si se consideran los puntos  $A(-3, 1)$  y  $B(2, 3)$ , se pueden unir mediante una recta, pero si se agrega el punto  $C(4, 7)$ , no hay una recta que una a los tres puntos.

### Página 166 ▶ Practiquemos lo aprendido.

1. a.  $g(x) = -12x$       b.  $f(x) = 30x$       c.  $p(x) = -0,6x$   
2.



3. a. Función lineal.                      e. Función afín.  
b. Constante.                              f. Función afín.  
c. Función afín.                              g. Función afín.  
d. Función lineal.                              h. De otro tipo.
4. a.  $f(x) = 8x - 2$                               c.  $f(x) = 0,5x + 1$   
b.  $f(x) = 5,4x - 5$                               d.  $f(x) = \frac{3}{4}x - 2$



6. a.  $y = \frac{2x-5}{4}$       c.  $y = \frac{4+x}{13}$       e.  $y = \frac{24-6x}{2}$   
 b.  $y = 2x + 16$       d.  $y = 5x + 8$       f.  $y = \frac{1}{3}x + 2$   
 7. a.  $d(s) = 9000 - 500s$

**Página 167**

- b.  $d(x) = 3000 + 300x$       d.  $d(n) = 80 + 8n$   
 c.  $p(x) = 400 - 30x$       e.  $d(x) = 50x - 5000$   
 8. a. • Demora 124 segundos en caer.  
 • Pasarán 62 segundos.  
 b. • Para Sara:  $m = 50 + 0,5x$   
 Para Omar:  $m = 120 - 0,2x$   
 • Al transcurrir 100 días ambos pacientes tomarán la misma dosis.  
 c. •  $g = 450\,000 + 1200a$   
 •  $a = \frac{g - 450\,000}{1200}$   
 • Ambas funciones representan la misma situación, por ende, los puntos que satisfacen a una, también satisfacen a la otra. La diferencia es que la primera indica la ganancia obtenida, mientras que la segunda representa los artículos vendidos.  
 d. •  $a = 1000 - 50s$   
 • Al cabo de 16 semanas.  
 • No hay que regar las plantas.  
 10. El dinero total a pagar, corresponde a la suma del cobro base de envío más el 3% del monto de dinero que se envíe (e). Por lo tanto, la función se expresa como:  
 $d = 500 + 3\% \text{ de } e$ ; que es equivalente a  $d = 500 + \frac{3}{100}e$ .  
 11. Enrique está en lo correcto, ya que al tener  $n = 0$ , la pendiente de una función afín corresponde a la constante de proporción entre las variables  $x$  e  $y$ , que corresponde a la pendiente de una función lineal.

**Reflexiono**

1. Las variables  $x$  e  $y$  no están relacionadas en forma directamente proporcional.

**Página 168 ▶ Lección 26**

**Situación 1**

1. Porque son puntos que cortan la recta y son más fáciles de determinar, pero podrían ser otros puntos también.  
 2. Porque para ser función lineal, debe necesariamente pasar por el punto  $(0, 0)$ .  
 3. Porque los puntos pertenecen a la recta, por ende, deben satisfacer a la ecuación general de una función afín. El punto A representa el valor de  $x$  cuando  $y$  es 0, mientras que el punto B representa el valor de  $y$  cuando  $x$  vale 0.

**R:** La ecuación de la función afín representada en el gráfico es:  $y = \frac{1}{2}x + 2$ .

- coeficiente de posición

**Página 169**

**Situación 2**

1.  $f(x_A) = f(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 + 2 = 2$ ;  $f(x_B) = f(2) = \frac{1}{2} \cdot 2 + 2 = 3$ ;  
 $f(x_C) = f(6) = \frac{1}{2} \cdot 6 + 2 = 5$ .  
 2. La respuesta no cambiaría.  
 3. afín

**Argumenta y comunica**

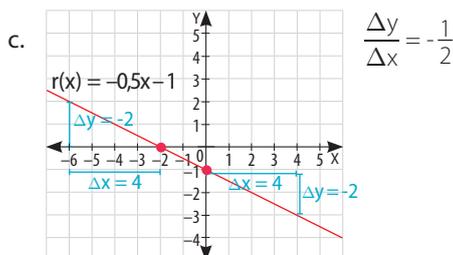
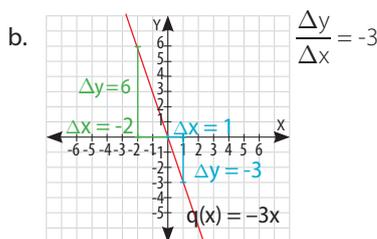
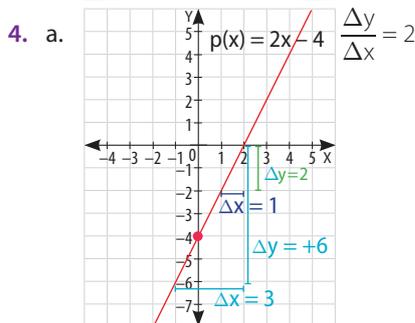
La afirmación es correcta.

**Página 170 ▶ Practiquemos lo aprendido.**

1.

x	-4	-1	0	3	7
f(x)	2,8	0,7	0	-2,1	-4,9
g(x)	-48	-12	0	36	84

2. a. Se traslada 3 unidades en sentido negativo del eje Y.  
 b. Se traslada 1 unidad en sentido positivo del eje Y.  
 c. Se traslada 2 unidades en sentido positivo del eje Y.  
 3. a.  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$       b.  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -1$       c.  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -6,5$



5. a.  $y = x + 3$       b.  $y = -\frac{2}{3}x - 2$       c.  $y = \frac{1}{2}x - 1$

**Página 171**

6. a. Función afín:  $y = 0,25x - 1$ .  
 b. Función afín:  $y = -2x + 3$ .  
 7. Se excavaron 93,75 m por semana.  
 8. a. La rampa no cumple con la norma.  
 b. La rampa no cumple con la norma.  
 c. La rampa no cumple con la norma.  
 9. La recta que une los puntos A y B tiene pendiente  $\frac{7}{2}$ , la que une los puntos B y C tiene pendiente  $-1$  y la que une los puntos A y C tiene pendiente  $\frac{1}{8}$ .  
 10. Cuando la pendiente es 3, la relación entre  $p$  y  $q$  es  $q = 11 - 3p$ , los posibles valores de  $p$  y  $q$  deben satisfacer esta relación, como por ejemplo  $q = 1$  y  $p = \frac{10}{3}$ . Cuando la pendiente es  $-2$ , la relación es  $2p + 1 = q$  (ejemplo:  $p = -3$ ,  $q = -5$ ) y cuando la pendiente es 0,8. La relación es  $q = 6,6 - 0,8p$  (ejemplo:  $p = 1$ ,  $q = 5,8$ ).

## Reflexiono

- Significa que al variar en una unidad el valor de  $x$ , la variación en el eje  $Y$  es mayor en la función  $f(x)$  que en  $g(x)$ . Gráficamente,  $f(x)$  será más inclinada que  $g(x)$ .
- Al variar en una unidad el valor de  $x$ , el valor de  $y$  varía  $\frac{m}{2}$  unidades. Gráficamente, la pendiente disminuye a la mitad, es menos inclinada y se aleja del eje  $Y$ .

## Página 172 ▶ Lección 27

### Situación 1

Para las coordenadas  $(x, y)$  de  $Q, P$  y  $S$  se cumple que  $Q$  está sobre  $L$ , y  $P$  y  $S$  están bajo  $L$ .

•  $\underline{R}$                        $\underline{P}$                        $\underline{S}$                        $\underline{Q}$

El punto  $(0, 0)$  está bajo  $L$ .

**R:** El jugador después de sus 4 lanzamientos obtuvo 0 puntos.

El puntaje del jugador es nulo.

## Página 173

### Situación 2

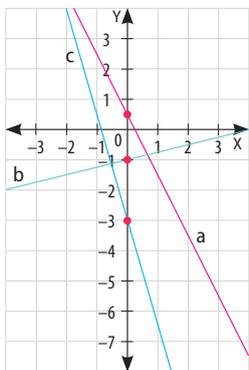
Construyendo una tabla con valores para calcular los pares  $(x, y)$  y graficarlos en el plano cartesiano; luego, dibujar la recta que pasa por esos puntos.

### Argumenta y comunica

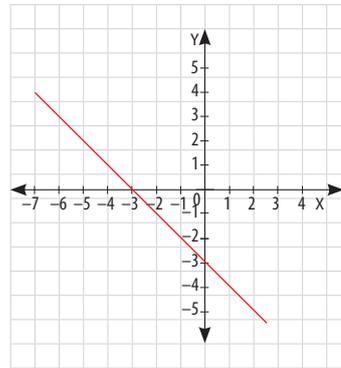
Representa el conjunto de valores de  $x$  para los cuales el valor de  $y$  es menor que  $7x - 5$ . Si se suman 6 unidades en el lado derecho, la representación mantiene su pendiente, pero se traslada 6 unidades hacia el sentido positivo del eje  $Y$ . Si se restan 6 unidades, la pendiente se mantiene, pero la recta se traslada 6 unidades hacia el sentido negativo del eje  $Y$ .

## Página 174 ▶ Practiquemos lo aprendido.

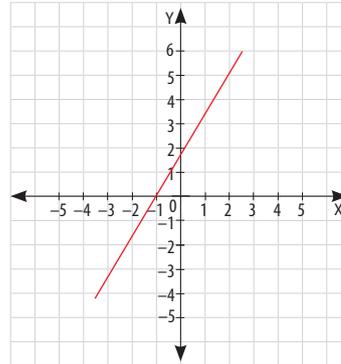
- $y = \frac{1}{3}x + 2$
  - $y = -\frac{1}{2}x - 1$
- $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -3$
  - $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 2$
  - $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 1$
  - $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 4$
- $P$  no pertenece al gráfico.
  - $Q$  sí pertenece al gráfico.
  - $R$  sí pertenece al gráfico.
  - $S$  no pertenece al gráfico.
- $x = -1$
  - $y = 11$
  - $x = 0$
  - $y = -\frac{73}{5}$



6. a.

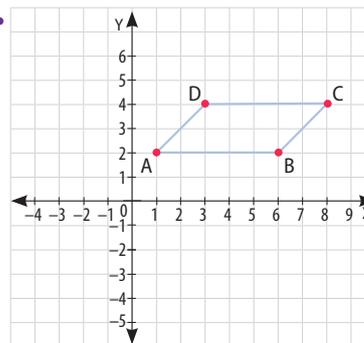


b.



## Página 175

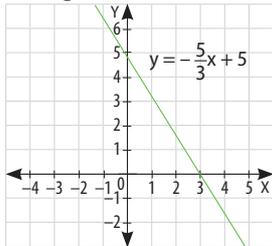
7. a. •



- La recta que une los puntos  $A$  y  $D$  es  $y = x + 1$ , la recta que une los puntos  $A$  y  $B$  es  $y = 2$ , la recta que une los puntos  $D$  y  $C$  es  $y = 4$  y la recta que une los puntos  $B$  y  $C$  es  $y = x - 4$ .
- Las rectas de los segmentos  $AD$  y  $BC$  tienen la misma pendiente, al igual que la pendiente de las rectas de los segmentos  $AB$  y  $DC$ . Se puede enunciar: "en un paralelogramo, las pendientes de los lados opuestos son iguales".
  - No colineales.
    - Son colineales.
    - No colineales.

- c. La recta intersecta al eje X en el punto (18, 0). Para determinar este punto, se debe identificar 2 puntos para calcular la pendiente, los que pueden ser (0, 3) y (6, 2). Luego, la ecuación es  $y = -\frac{1}{6}x + 3$ . Para calcular el punto que intersecta al eje X, se reemplaza  $y = 0$  en la ecuación, obteniendo el valor  $x = 18$ .

d.  $y = -\frac{5}{3}x + 5$



La recta intersecta al eje X en el punto (3, 0) y al eje Y en el punto (0, 5).

- La expresión queda como:  $\frac{x}{3} + \frac{y}{5} = 1$ . El valor p corresponde al valor donde la recta intersecta al eje X y el valor q es el valor donde la recta intersecta al eje y.
8. Para que las rectas sean paralelas, deben tener la misma pendiente. Por lo tanto, se debe calcular el valor de la pendiente de la recta y luego, definir cualquier coeficiente de posición; ya que este valor no influye en la condición. Es por esto, que se pueden obtener distintas rectas, pero con la misma pendiente.
9. María se equivocó en graficar la recta; ya que ésta no pasa por el origen, pues no es una función lineal.

#### Reflexión

1. El conjunto de valores de y que son mayores o iguales a  $4,5x + 1$ . Si se grafica la condición  $y > 4,5x + 1$ , la diferencia es que los valores que pertenecen a la recta no corresponden a la región solución.
2. No, ya que para cualquier valor de x, el valor de y será el mismo, no varía. Al representarlo en el gráfico, se tiene una recta paralela al eje X que corta al eje Y en el punto  $y = 4$ .

#### Página 176 ▶ Lección 28

■ Representa a una función afín, porque corta al eje Y en un punto distinto de cero (no pasa por el origen).

■ Sí se obtendría.

•  $20 \quad 0,074$

■ Corta al eje X en el punto  $(-270,3; 0)$ . Se puede saber considerando  $y = 0$  y resolviendo la ecuación, obteniendo  $x = -270,3$ .

R: La expresión que define la función que modela los datos de la tabla es  $V(T) = 0,074T + 20$ .

#### Página 177

##### Situación 2

■ El valor de  $C(1) - C(0)$  es \$ 4000 y de  $C(2) - C(1)$  es \$ 4000. El valor de  $C(n + 1) - C(n)$  es \$ 4000.

•  $4000n + 200\,000$

R: La función que modela la variación en el tiempo del capital invertido es:  $C(n) = 4000n + 200\,000$ .

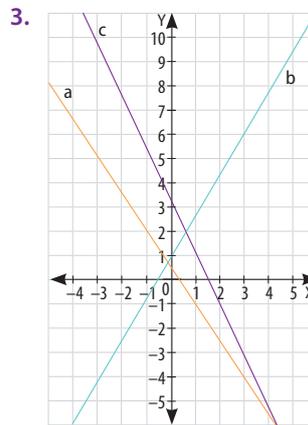
#### Argumenta y comunica

En el caso del primer modelo, se puede predecir, por ejemplo, qué temperatura se necesita para aumentar el volumen de un gas. En el segundo, se puede determinar, por ejemplo, qué período de tiempo se necesita tener el dinero para obtener un cierto monto.

- Tendría un volumen de 25,55 ml.
- Tras 18 años.

#### Página 178 ▶ Practiquemos lo aprendido.

1. a. Función lineal,  $m = 8$  y  $n = 0$ .  
b. Función afín,  $m = 9$  y  $n = 1$ .  
c. Función lineal,  $m = 0,5$  y  $n = 0$ .  
d. Función afín,  $m = -2$  y  $n = 7$ .  
e. Función afín,  $m = \frac{5}{4}$  y  $n = -\frac{3}{8}$ .  
f. Función afín,  $m = \frac{3}{7}$  y  $n = -\frac{22}{7}$ .
2. a.  $y = -x - 5$   
b.  $y = -3x + 11$   
c.  $y = -\frac{2}{11}x + \frac{39}{11}$   
d.  $y = 4x - 2$



4. • Una función lineal, porque existe la constante de proporcionalidad entre ambas variables.  
•  $D(m) = 0,0001m$ .
5. a.  $C(x)$ : costo total en pesos; x: camisetas producidas.  
 $C(x) = 350\,000 + 2000x$   
b.  $P(x)$ : pago a empresa inmobiliaria; x: meses.  $P(x) = 280\,000x$   
c.  $P(x)$ : valor plan telefónico; x: minutos hablados.  
 $P(x) = 5000 + 30x$ .

6. a.

x	$C(x + 1) - C(x) = 4$
1	$C(2) - 20 = 4 \rightarrow C(2) = 24$
2	$C(3) - 24 = 4 \rightarrow C(3) = 28$
3	$C(4) - 28 = 4 \rightarrow C(4) = 32$
4	$C(5) - 32 = 4 \rightarrow C(5) = 36$
5	$C(6) - 36 = 4 \rightarrow C(6) = 40$
6	$C(7) - 40 = 4 \rightarrow C(7) = 44$
7	$C(8) - 44 = 4 \rightarrow C(8) = 48$

Luego de 8 años, su diámetro será de 48 mm.

b.

x	$A(x + 1) - A(x) = 60$
1	$A(2) - 30 = 60 \rightarrow A(2) = 90$
2	$A(3) - 90 = 60 \rightarrow A(3) = 150$
3	$A(4) - 150 = 60 \rightarrow A(4) = 210$
4	$A(5) - 210 = 60 \rightarrow A(5) = 270$

El quinto día, el deportista hará 270 abdominales.

#### Página 179

7. a.  $f(t + 1) - f(t) = -4$ , donde  $f(1) = 200$  y t es el día considerado.  
b.  $f(t + 1) - f(t) = 50\,000$ , donde  $f(2) = 100\,000$  y t es el día considerado.

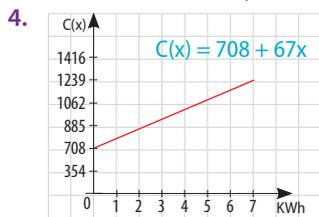
- c.  $f(t + 1) - f(t) = 3$ , donde  $f(1) = 150$  y  $t$  es el día considerado.
- d.  $f(t + 1) - f(t) = -120\,000$ , donde  $f(1) = 3\,800\,000$  y  $t$  es el año considerado.
8. a.  $C(x) = 2000 + 88x$ .  
 • Se pueden consumir 120 kilowatts.
- b.  $C(k) = 40\,000 + 500k$ .  
 • Se deben recorrer como máximo 36,3 km.
- c.  $h(a) = 2,5a + 3,5$ .  
 • Después de 12 años aproximadamente.
- d.  $\bullet$  Pierde 7 litros de agua por minuto.  
 • La capacidad total es de 182 litros.  
 • La pendiente de la recta que la representa es  $-7$ . La recta es decreciente, es decir, a medida que aumenta el valor del tiempo (eje X), los litros de agua (eje Y) disminuyen.
9. Para que el volumen sea 0, la temperatura debe ser  $-270,27^\circ\text{C}$ . Esta temperatura es el origen de la escala de temperatura absoluta o Kelvin.

### Reflexiono

- La situación posee una parte fija, es decir, cuando la variable independiente no está presente, esta parte tiene un valor fijo. Y además, tiene una parte variable, que depende de los valores que tome la variable dependiente.
- El valor de  $a$  indica la variación que hay entre los valores de  $y$  en un intervalo consecutivo, lo cual corresponde al valor de la pendiente de la función lineal o afín.

### Página 181 ► Mural

3.  $\bullet$  El cargo fijo cuesta \$ 708 y el precio del kilowatt es de \$ 67. Estas tarifas no son transversales en todo el país, sino que varían por sectores.
- $\bullet$  En base a los resultados anteriores, la expresión es:  $C(x) = 708 + 67x$ , que corresponde a una función afín.



No tiene sentido graficar en el sector negativo del eje X, ya que los valores de  $x$  deben ser positivos puesto que representan la cantidad de kilowatts consumidos.

### Página 182 ► ¿Cómo voy?

1. a.

a	1	2	3	4
b	15	30	45	60

Función lineal:  $b(a) = 15a$

b.

p	7	14	21	28
q	-2	-4	-6	-8

Función lineal:  $q(p) = -\frac{p}{3,5}$

c.

x	5	8	11	14
y	2	3,2	4,4	5,6

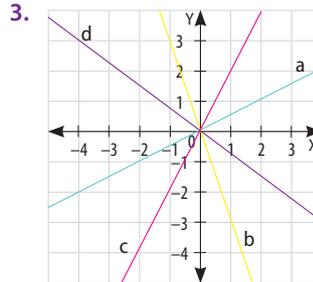
Función lineal:  $y(x) = 0,4x$

d.

j	3	8	11	15
k	2,4	6,4	8,8	12

Función lineal:  $k(j) = 0,8j$

2. a. Función lineal, cte. proporcionalidad: 7.  
 b. Función lineal, cte. proporcionalidad: 0,01.  
 c. Función afín.  
 d. Función lineal, cte. proporcionalidad: 2.  
 e. Función lineal, cte. proporcionalidad:  $0,\bar{6}$ .  
 f. Función afín.  
 g. Función lineal, cte. proporcionalidad:  $-1$ .  
 h. No es una función.

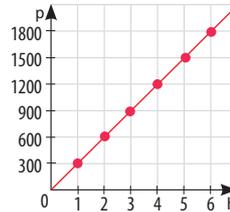


4. a. Recta q                      b. Recta p                      c. Recta r

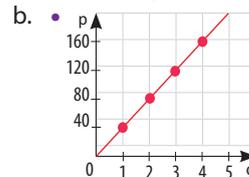
5. a.

h (hora)	1	2	3	4	5	6
p (g)	300	600	900	1200	1500	1800

El gráfico es:



- $\bullet$  Para que la vaca pueda comer 6 horas seguidas, se necesitan 1800 gramos de pasto.



- $\bullet$  La función es:  $p = 40d$ .  
 $\bullet$  El vendedor deberá trabajar aproximadamente 16 días.

6. a. Es recta.                      c. No es recta.  
 b. No es recta.                      d. Sí es recta.
7. a.  $y = x + 5$                       c.  $y = -6x - 4,2$   
 b.  $y = \frac{3x}{5} - 1$                       d.  $y = 0,25x - \frac{1}{2}$
8.  $\bullet$  Su rapidez es de 107 km/h.  
 $\bullet$  Después de 167 minutos.

### Página 183

10. a.  $m = -0,75$                       c.  $m = \frac{3}{2}$   
 b.  $m = \frac{7}{2}$                       d.  $m = \frac{10}{3}$
11. a.  $m = 1$                       c.  $m = 0$   
 b.  $m = \frac{7}{3}$                       d.  $m = -\frac{7}{6}$
12. a.  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -2,5$                       c.  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -10$   
 b.  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 3$                       d.  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = -10,5$

13. a. Bajo la recta. d. Pertenece a la recta.  
 b. Pertenece a la recta. e. Sobre la recta.  
 c. Pertenece a la recta. f. Sobre la recta.
14. a. El costo es de \$ 356.  
 b. • El valor del arriendo es de \$ 300 000.  
 • Se debe pagar \$ 966 000.

#### Desafíos de integración

- a. • Agencia A:  $A(x) = 400x + 60\,000$ .  
 Agencia B:  $B(x) = 800x$ .
- En la agencia A, por 100 km se debe pagar \$ 100 000 y por 200 km se debe pagar \$ 140 000. En la agencia B, por 100 km se debe pagar \$ 80 000 y por 200 km se debe pagar \$ 160 000.
  - Le conviene contratar la agencia A, ya que le sale más barato.
  - Si se quiere recorrer hasta 150 km es más conveniente usar la agencia B, porque el crecimiento de su gráfico es más lento entre los 0 y 150 km; por ende, es más barato que la agencia A. Si se quiere recorrer más de 150 km, entonces conviene la agencia A, ya que desde ese valor en adelante su crecimiento es más lento respecto a la recta de la agencia B; por ende, es más barata.
- b. •  $f(t + 1) - f(t) = -2500$ .  
 • El 16 de marzo.  
 • El 25 de marzo se acabará el dinero ahorrado.

#### Página 184 ► Resolución de problemas

- Se quiere saber la relación entre las escalas Fahrenheit y Celsius, representadas por una función afín.
- Para resolver, se tienen dos relaciones entre temperaturas medidas por ambas escalas.
- Comprobando la respuesta:  
 $(0, 32) \rightarrow 1,8 \cdot 0 + 32 = 32 \rightarrow 32 = 32$   
 $(100, 212) \rightarrow 1,8 \cdot 100 + 32 = 212 \rightarrow 212 = 212$
- La expresión que relaciona ambas escalas de temperatura está dada por la función afín:  
 $F = 1,8C + 32$ .

#### Página 186 ► Sintetizo mis aprendizajes

##### ¿Cómo se llama?

- A. factorizar C. términos semejantes  
 B. pictórica y simbólica D. Propiedad distributiva

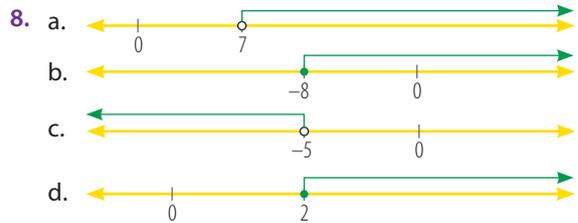
##### ¿Cómo se hace?

- **Pregunta s4:** Para multiplicar un binomio por un trinomio, se debe tomar el primer término del binomio y multiplicarlo con cada término del trinomio, usando la propiedad distributiva de la multiplicación. Lo mismo se aplica con el segundo término del binomio para, finalmente, reducir los términos semejantes y reducir la expresión algebraica.
- **Pregunta s5:** Para resolver una inecuación, primero se debe aislar a un lado de ella la incógnita y en el otro lado los términos numéricos, usando las correspondientes transformaciones paso a paso. La inecuación queda resuelta cuando se logra despejar la incógnita. Cuando se multiplica o divide ambos lados de la inecuación por un número negativo, la desigualdad se invierte.

- **Pregunta s6:** A partir de la representación gráfica de una función afín se puede determinar la pendiente identificando dos puntos de la recta y calculando el cociente entre la variación de los valores de  $y$ , y los valores de  $x$ .

#### Página 187 ► Refuerzo mis aprendizajes

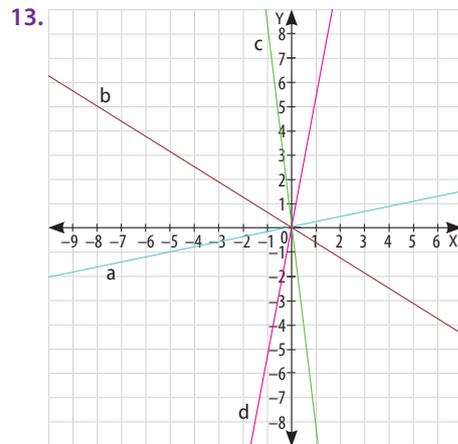
1. a.  $d = 4500 - 3p$   
 b.  $d = \frac{15000}{n} - 100$   
 c.  $t = 3h + 2(h - 2)$
2. a.  $P = 12x + 20$  c.  $P = 18x + 11$   
 b.  $P = 48y$  d.  $P = 10y + 30$
3. a.  $-3ab - 7c$  c.  $9x^2 - 3xy - x$   
 b.  $8pq - 2p - q$  d.  $-m^2 + 8m$
4. a.  $8p - 1$  c.  $-x^2 - 11x - 10$   
 b.  $7x - 36$  d.  $a^2 + 3ab - 2b^2$
5. a.  $t(t + 2t^2 - 1)$  d.  $2ab(4 - 2a + 5ab)$   
 b.  $ab(a + b + 1)$  e.  $pq^2(4pq + 7pq^2 - 5)$   
 c.  $(t + 8)(t - 4)$  f.  $(a + 5)(4st + 2s - 3t)$
6. a.  $x = -0,1$  c.  $x = -3,5$   
 b.  $x = -5$  d.  $x = \frac{315}{8}$
7. a.  $x < -6$  c.  $x \geq \frac{6}{7}$   
 b.  $x > 0$  d.  $x \geq \frac{35}{3}$



9. a.  $x \leq -1,6$  b.  $\frac{7}{5} < x$  c.  $x < 4,2$
10. a. Los números son 7 y 9.  
 b. Los números son 12, 14 y 16.  
 c. El largo del rectángulo mide 46 cm.  
 d. Se pueden comprar 25 libros.

#### Página 188

11. a. La constante de proporcionalidad es \$ 700.  
 b. Por 4 paquetes se debe pagar \$ 2800, por 5 \$ 3500 y por 8 \$ 5600.  
 c. Con \$ 10 500 se pueden comprar 15 paquetes.  
 d. La función lineal es  $C(p) = 700p$ .
12. a. 8 b. 1,2 c. 0,25





**Situación 1**

- $\frac{3}{3}$        $\frac{3}{2}$        $\frac{3 \cdot 3 \cdot 2}{3}$

**Situación 2**

**R:** El volumen de un cilindro se puede estimar contando todos los dados que quepan en él considerando que el espacio que ocupa cada dado es igual a  $u^3$ .

**Argumenta y comunica**

No, porque el cilindro que tiene menor altura se podría obtener con un corte paralelo a la base del cilindro que tiene mayor altura.

**Página 199 ▶ Practiquemos lo aprendido.**

- Prisma de base triangular: 6 vértices, 9 aristas y 5 caras.
  - Cono: 1 vértice y 2 caras.
  - Cilindro oblicuo: 3 caras.
  - Cubo: 8 vértices, 12 aristas y 6 caras.
- $> 20 \text{ cm}^3$
  - $> 80 \text{ cm}^3$
  - $> 152 \text{ cm}^3$
- F
  - F
  - F
- Usar dados no sería práctico. Se podría utilizar algún objeto con mayor volumen por ejemplo, un cajón.
- El volumen del cuerpo será igual al volumen de agua desplazado, el que se podría determinar con un instrumento graduado.
- Prismática, ya que de esta forma no quedaría espacio vacío entre las sandías.

**Reflexiono**

- Su volumen es igual a  $1 \text{ m}^3$ .
- $\text{m}^3$

**Página 200 ▶ Lección 30****Situación 1**

**R:** El volumen de la caja de Esteban es de  $72 \text{ cm}^3$ .

**Situación 2**

**I** No cambia.  $2 \text{ cm} \cdot 4 \text{ cm} = 8 \text{ cm}^2$ , luego  $8 \text{ cm}^2 \cdot 6 \text{ cm} = 48 \text{ cm}^3$ .

**R:** El volumen de la caja de Angélica es de  $48 \text{ cm}^3$ .

- base      altura

**Página 201****Situación 3**

**I** El prisma con base hexagonal porque la diferencia entre el área de su base y el área del círculo correspondiente es menor.

- base

**R:** El volumen del cilindro se puede calcular multiplicando el área basal por la altura.

- cilindro

**Argumenta y comunica**

Los volúmenes serán muy parecidos. A medida que aumenta los lados de dicho polígono el volumen se acerca cada vez más al cilindro correspondiente.

**Página 202 ▶ Practiquemos lo aprendido.**

- $4 \text{ cm}^2$
  - $12 \text{ cm}^2$
  - $3,75 \text{ cm}^2$
  - $15 \text{ cm}^2$
  - $50,24 \text{ cm}^2$
  - $\frac{5ab}{2} \text{ cm}^2$
- $10 \text{ cm}$
  - $3 \text{ dm}$
  - $3,5 \text{ hm}$
  - $6 \text{ mm}$
  - $20 \text{ cm}$

- $8 \text{ cm}^3$
  - $72 \text{ cm}^3$
  - $392 \text{ cm}^3$
- $3,04 \text{ cm}^3$
  - $36,8 \text{ cm}^3$
- $60 \text{ cm}^3$
  - $30 \text{ cm}^3$
  - $793,79 \text{ m}^3$
  - $210 \text{ cm}^3$
  - $421\,937,5 \text{ cm}^3$
  - $171,70776 \text{ mm}^3$

**Página 203**

- $V = 1920 \text{ cm}^3$
  - Quedarán fuera de la caja 29 cubos.
  - El vaso 2.
  - El volumen del acuario es  $155\,200 \text{ cm}^3$ .
    - El volumen de la piedra es  $1,5 \text{ cm}^3$ .

**Reflexiono**

- $V_{\text{cilindro}} = 1205,76 \text{ cm}^3$
  - $V_{\text{Prisma A}} = 1536 \text{ cm}^3$
  - $V_{\text{Prisma B}} = 1392 \text{ cm}^3$
- Porcentaje A =  $127,39\%$ . Porcentaje B =  $115,68\%$ . El volumen del prisma B se acerca más al volumen del cilindro, porque la base tiene una mayor cantidad de lados.

**Página 204 ▶ Lección 31****Situación 1**

**I**  $u^2$

**I** Cubriéndola con papel y recortando el material sobrante.

**R:** Respuesta variable.

**Situación 2**

**R:** Respuesta variable.

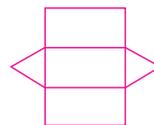
**Argumenta y comunica**

Cortando el tubo y extendiéndolo, para luego medir el largo y el ancho del rectángulo obtenido para determinar su área.

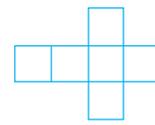
**Página 205 ▶ Practiquemos lo aprendido.**

- Prisma de base hexagonal.
  - Cilindro.
  - Prisma de base triangular.
  - Cubo.
- Suma de 14 caras del dado.
  - Suma de las áreas de 16 o 18 caras del dado.
  - Hay varias respuestas.
  - Hay varias respuestas.
  - El área de cada prisma variará de acuerdo a cómo se dispongan los dados ya que en cada caso dependerá de cuántas caras estén descubiertas.
  - $3u^3, 4u^3, 8u^3, 12u^3$
  - No, porque independientemente de cómo se dispongan los dados el volumen que depende de la cantidad de dados no va a cambiar.

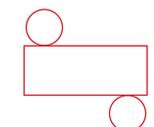
4. a.



c.



b.



- Primero medir el largo del brazo. Luego, rodear con hilo el brazo. Después medir el largo del hilo y estimar a partir de él el radio de la circunferencia correspondiente y finalmente calcular la superficie de la cara lateral de un cilindro con estas medidas.
- El área total aumenta en un 10%.

### Reflexiono

- El prisma tendrá mayor área que el cilindro porque su red tiene mayor superficie.
- Es mayor porque a la superficie del cubo de hielo original se le debe sumar dos nuevas caras.

### Página 206 ▶ Lección 32

#### Situación 1

R: Sofía necesita  $224 \text{ cm}^2$  de cartón.

l 15 cm

- área                      red

### Página 207

#### Situación 2

l  $A = \pi r^2$

R: Sofía ocupará  $942 \text{ cm}^2$  de papel celofán.

l 28,02 cm

- área                      figuras

#### Argumenta y comenta

Al cubrir con papel es posible que quede un pequeño espacio vacío entre el papel y la caja.

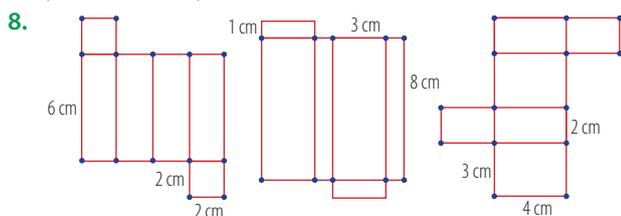
### Página 208 ▶ Practiquemos lo aprendido.

- 18,84 cm
  - 100,48 cm
  - 18,84 cm
  - 69,08 dm
- 6 mm<sup>2</sup>
  - 254,34 cm<sup>2</sup>
- Prisma de base triangular.  $A = ab + ac + bc + cd$
  - Prisma de base rectangular.  $A = 2ab + 2ac + 2bc$
  - Cubo.  $A = 6b^2$
  - Cilindro.  $A = 6,28y^2 + 6,28yh$

- $A = 223,8 \text{ cm}^2$
  - $A = 109,62 \text{ cm}^2$
- $A = 133,16 \text{ m}^2$
  - $A = 65,312 \text{ m}^2$

### Página 209

- $2260,8 \text{ cm}^2$
  - 3,27 mm.
- $150,72 \text{ cm}^2$
  - $12057,6 \text{ cm}^2$
  - En 12,5%.
- Si el diámetro mayor es igual a  $3d$ , entonces el diámetro menor es  $d$  y la altura de un rollo es  $6d$ . Para calcular el área de la superficie de dos rollos uno encima de otro se debe considerar que la altura de este nuevo cilindro es  $12d$  y el radio es  $1,5d$ . Finalmente estos valores se reemplazan en la expresión  $A = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ .



8.

No hay relación que permita asociar el área y el volumen de una figura 3D ya que, por ejemplo, todas estas figuras tienen el mismo volumen pero distinta área.

- Andrea tiene razón. Se puede verificar asignando valores para  $a$  y  $b$ , y luego determinando las áreas.
- $192 \text{ cm}^3$
  - $208 \text{ cm}^2$
- Si tienen el mismo volumen no necesariamente tienen igual área. Si tienen igual área no necesariamente tienen el mismo volumen.

### Reflexiono

- Al dividir el alimento aumenta su área superficial y por lo tanto, es más rápida la cocción del alimento. En conjunto los trozos de zapallo tienen mayor área que el zapallo original.

### Página 210 ▶ Lección 33

#### Situación 1

R: La altura del vaso debe ser de 10,62 cm.

#### Situación 2

R: Si se desea duplicar el volumen del vaso manteniendo el diámetro de su base, entonces se debe duplicar su altura.

- cilindro                      volumen

l Aumenta en un 300%.

### Página 211

#### Situación 3

l  $5400 \text{ cm}^2$ . No se duplica su área, se cuadruplica.

R: El volumen de un baúl cúbico si el área de cada una de sus caras es  $900 \text{ cm}^2$  es  $27000 \text{ cm}^3$ .

#### Situación 4

l 96000 litros.

l Rectángulos

R: La profundidad de la piscina es de 1,6 m y su área interior es de  $111,2 \text{ m}^2$ .

#### Argumenta y comunica

Calculando el volumen del cilindro correspondiente en  $\text{m}^3$  y luego transformando el resultado a litros multiplicándolo por 1000.

### Página 212 ▶ Practiquemos lo aprendido.

- $A = 412,37 \text{ m}^2$ ;  $V = 343,72 \text{ m}^3$
  - $A = 470,4 \text{ cm}^2$ ;  $V = 643,01 \text{ cm}^3$
- $x = 3,12 \text{ cm}$
  - $h = 20 \text{ m}$
- Se podrá cubrir un molde.
  - $12,67 \text{ m}^3$
  - $279554,6 \text{ mm}^2$
  - $7385,28 \text{ cm}^3$

### Página 213

- $3,83 \text{ mm}^2$
  - $22,96 \text{ mm}^2$
  - $275,4 \text{ mm}^3$
- $201,08 \text{ m}^3$
- $8309,5 \text{ m}^3$
- $107,94 \text{ cm}^3$
  - Aproximadamente  $3 : 1\,000\,000$ .
- Un cilindro.
  - $V = \pi a^2 b$ ;  $A = 2\pi ab + 2\pi a^2$

### Reflexiono

- $\pi : 4$
- Su altura debe aumentar al doble.

#### Página 215. Mural

- $106,42 \text{ cm}^2$  y  $63,076 \text{ cm}^3$

#### Página 216 ▶ ¿Cómo voy?

- $150 \text{ cm}^3$
  - $1099 \text{ cm}^3$
  - $60 \text{ cm}^3$
  - $602,88 \text{ cm}^3$

- | Volumen               |
|-----------------------|
| $192 \text{ cm}^3$    |
| $384,65 \text{ cm}^3$ |
| $576,89 \text{ mm}^3$ |

- $x = 7 \text{ cm}$
  - $x = 4,75 \text{ mm}$
- $7,91 \text{ m}^3$
  - 8 vasos. El último vaso tendrá  $60 \text{ cm}^3$ .
  - $3215,36 \text{ m}^3$
- Puedes envolver con papel la caja de bombones y estimar su área con dados de  $1 \text{ cm}^3$  de volumen.
  - Se recorta el envase de leche y se estima su área con dados de  $1 \text{ cm}^3$  de volumen.
  - Con un papel de envolver se cubre la superficie del florero, se corta y se estima su área con dados de  $1 \text{ cm}^3$  de volumen.
  - Puedes medir la altura y el contorno de la base con un cordel y estimar las medidas con cubos de  $1 \text{ m}^3$  de volumen.

#### Página 217

- Es un prisma de base triangular.
  - $130,75 \text{ cm}^3$
- $x = 7,07 \text{ mm}$
  - $x = 2,88 \text{ cm}$
- $142800 \text{ cm}^3$ . 142,8 litros.
    - Por ejemplo puede tener las siguientes dimensiones: 170 cm, 35 cm y 48 cm; 85 cm, 70 cm y 48 cm; 85 cm, 35 cm y 96 cm, etc.
  - $151200 \text{ cm}^3$
  - $440,33 \text{ cm}^2$

#### Desafíos de integración

- $2,98 \text{ m}^3$
  - $0,94 \text{ m}^3$
- Le sobra barniz. Aproximadamente  $0,24 \text{ m}^2$ .

#### Página 218 ▶ Resolución de problemas

- Las especificaciones técnicas de ambos contenedores.
- Se debe comprar el contenedor 2.

#### Página 220 ▶ Sección 8: Teorema de Pitágoras

- Fue un importante matemático y filósofo griego. El teorema de Pitágoras se utiliza para determinar la medida de uno de los lados de un triángulo rectángulo a partir de los otros dos.
  - 1 pie equivale a 30,48 cm. Es una unidad de longitud que está basada en el pie humano y que fue utilizada por civilizaciones antiguas. Unidades que no se ocupan en Chile son por ejemplo el pie, la yarda, la milla.

- Una forma es dibujar dos segmentos perpendiculares,  $\overline{AC} = 10$  y  $\overline{BC} = 3$ , para luego ubicar un punto P en el segmento  $\overline{AC}$  de manera tal que  $\overline{CP} + \overline{BP} = 10$ .

- hipotenusa
  - GeoGebra
  - triángulo

#### Página 222. ¿Qué debo saber?

- 10
  - 12
  - 11 cm
- 16
  - 30
- 19
  - 13
  - 15 cm
- 21
  - 25
- Equilátero y acutángulo
  - Isósceles y acutángulo.
  - Escaleno y acutángulo.
  - Isósceles y acutángulo.
- Isósceles.
  - Triángulo rectángulo.

#### Página 223

- Sí se puede construir.
  - No se puede construir.
- Se puede construir.
  - No se puede construir.
  - Se puede construir.
  - No se puede construir.
  - Se puede construir.
  - Se puede construir.
- $17,5 \text{ cm}^2$
  - $12 \text{ cm}^2$
  - $25 \text{ cm}^2$
  - $60 \text{ cm}^2$

#### Página 224 ▶ Lección 34

#### Página 225

##### Situación 2

Los catetos miden a y b, y la hipotenusa c.

R: La expresión que define al teorema de Pitágoras es  $a^2 + b^2 = c^2$ .

#### Página 226

##### Situación 3

Rectas perpendiculares son aquellas que al interceptarse forman cuatro ángulos rectos. Las rectas paralelas son las que no se interceptan en ningún punto.

#### Página 227

##### Situación 4

Es un cuadrilátero que no tiene lados paralelos.

#### Página 228

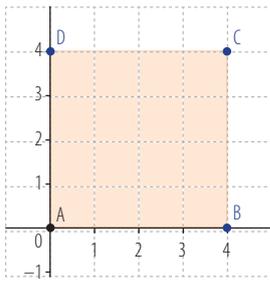
##### Argumenta y comunica

Sí, ya que  $5^2 = 3^2 + 4^2$ . Esto significa que el triángulo es rectángulo, que la hipotenusa mide 5 cm y los catetos miden 3 y 4 cm, respectivamente.

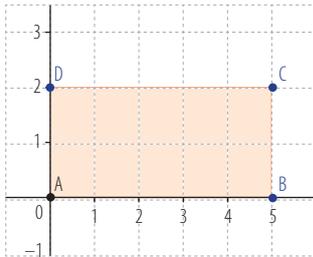
#### Página 229 ▶ Practiquemos lo aprendido.

- 9
  - 8,8
  - 11
  - 15,5
  - 20
  - 23,7
- a, b son catetos; c es hipotenusa.
  - d, e son catetos; f es hipotenusa.
  - a, g son catetos; b es hipotenusa.
  - No hay catetos ni hipotenusa.

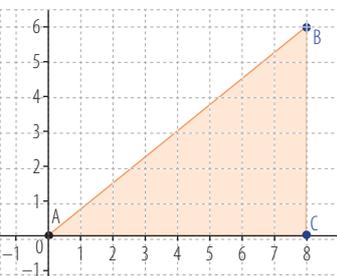
3. a.



b.



c.



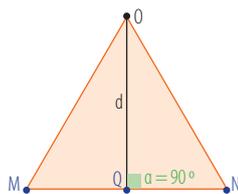
4. a. No es correcta la afirmación. La relación correcta es  $x^2 = y^2 + z^2$ .  
 b. No es correcta la afirmación. La relación correcta es  $u^2 = s^2 + t^2$ .  
 c. La afirmación es correcta.  
 d. No es correcta la afirmación. La relación correcta es  $j^2 = h^2 + i^2$ .
5. a.  $b = \sqrt{c^2 - a^2}$                       b.  $c = \sqrt{a^2 + b^2}$
6. a.  $a = 10$  cm                      c.  $c = 15$  m                      e.  $c = 30$  cm  
 b.  $b = 32$  mm                      d.  $b = 48$  m                      f.  $c = 20$  mm

**Página 230**

7. a. Sí se verifica el teorema, ya que la suma de las áreas de los cuadrados de lados 10 y 24 unidades, es igual al área del cuadrado de lado 26 unidades.  
 b. Sí se verifica el teorema, ya que la suma de las áreas de los cuadrados de lados 20 y 21 unidades, es igual al área del cuadrado de lado 29 unidades.  
 c. Sí se verifica el teorema, ya que la suma de las áreas de los cuadrados de lados 8 y 15 unidades, es igual al área del cuadrado de lado 17 unidades.
10. Sí, se verifica el teorema de Pitágoras ya que la suma de las áreas de las figuras rojas y la figura azul es igual al área de las figuras amarillas, celestes y negra.

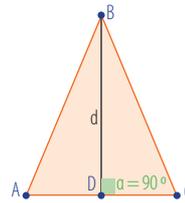
**Página 231**

11. a.



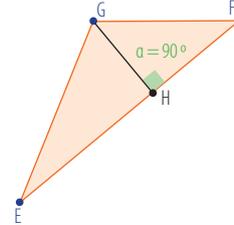
Se forman los triángulos rectángulos MOQ y NOQ.

b.



Se forman los triángulos rectángulos ABD y CBD.

c.



Se forman los triángulos rectángulos EGH y FGH.

12. Al dibujar un triángulo en GeoGebra con las medidas de las distancias entre las esquinas y luego medir los ángulos, debe cumplirse que uno de los ángulos mide  $90^\circ$ .  
 13.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ , por lo tanto  $(a + b)^2$  no es igual a  $a^2 + b^2$ .  
 15. Siendo  $a$  la longitud de los catetos y  $c$  la hipotenusa, al aplicar el teorema de Pitágoras se obtiene que los catetos miden 3 cm. Estos valores son enteros.

**Reflexiono**

- No, solo se puede aplicar en triángulos rectángulos.
- Alguna de las ventajas de GeoGebra son la rapidez para dibujar y medir longitudes y áreas, variar medidas y constatar que se establecen relaciones entre ellas. Algunas desventajas son que solo se permiten medidas con dos decimales y el tamaño de las figuras es limitado.
- Infinitos, por ejemplo 3, 4, 5 y 5, 12, 13.

**Página 232 ▶ Lección 35**

**Situación 1**

Porque la trayectoria de la nadadora es el resultado de su desplazamiento en sentido vertical hacia arriba y la corriente del río en sentido horizontal hacia la derecha.

**R:** La nadadora recorre una distancia de 26 m.

No, porque aplicando el teorema de Pitágoras se obtiene 49,03 m.

**Situación 2**

Un triángulo isósceles tiene dos lados de igual medida.

**R:** La longitud de la varilla debe ser igual a 2,83 m aproximadamente.

Reemplazando en la expresión del teorema de Pitágoras.

**Página 233**

**Situación 3**

**R:** La longitud de la diagonal mide 26 m.

A partir de las medidas obtenidas de las diagonales de la cara y del ortoedro, y aplicando el teorema de Pitágoras.

**Situación 4**

Es posible construir un triángulo rectángulo con las medidas de esas varillas.

**Argumenta y comunica**

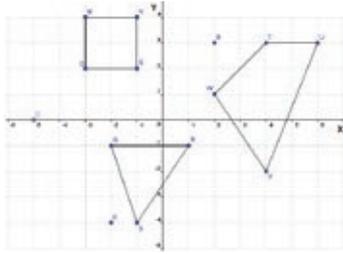
$10^2 + 24^2 = 26^2$ , sí se cumple.

$15^2 + 36^2 = 39^2$ , sí se cumple.



## Página 245

3.



4. a.  $H(3, 2)$ ;  $I(5, 2)$ ;  $J(5, -1)$ ;  $K(3, -1)$   
 b.  $L(-2, -1)$ ;  $M(1, -1)$ ;  $N(0, -3)$   
 c.  $O(-1, 4)$ ;  $P(0, 4)$ ;  $Q(0, 3)$ ;  $R(-1, 3)$
5. a. La primera y tercera figura son congruentes.  
 b. La primera y tercera figura son congruentes. La segunda y cuarta figura son congruentes.  
 c. La segunda y cuarta figura son congruentes.

## Página 246 ▶ Lección 36

### Situación 1

- ! Es un hexágono.
- ! Son congruentes.
- trasladar

## Página 247

### Situación 2

- ! El tamaño y la forma son iguales.
- R:** Las coordenadas de los vértices del polígono  $A'B'C'D'E'F'$  son  $A'(5, -1)$ ;  $B'(6, -1)$ ;  $C'(6, 2)$ ;  $D'(4, 2)$ ;  $E'(3, 1)$ ;  $F'(5, 1)$ .
- ! Habría obtenido la misma solución.

## Página 248

### Situación 3

- ! Se obtiene el mismo vector  $\vec{v} = (-4, -3)$ .
- R:** Las coordenadas del vector que define la traslación de la figura 1 en el plano cartesiano son  $\vec{v} = (-4, -3)$ .
- !  $(4, 3)$

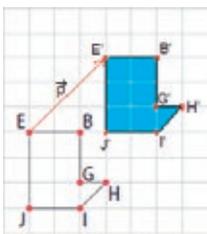
### Argumenta y comunica

- No sufre ninguna transformación ya que cada uno de sus puntos permanece en el mismo lugar.
- Significa que tiene la misma forma y el mismo tamaño.

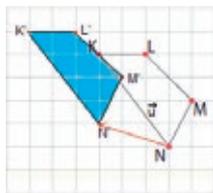
## Página 249 ▶ Practiquemos lo aprendido.

1.  $A(-2, 3)$   $E(-3, -1)$   
 $B(0, 1)$   $F(3, 0)$   
 $C(1, 2)$   $G(-1, -3)$   
 $D(1, -2)$

2. a.



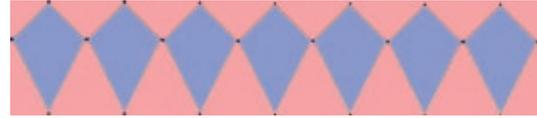
b.



3. a.  $D'(-6, -4)$  c.  $F'(11, -3)$   
 b.  $E'(-4, 1)$  d.  $G'(0, 0)$
4. a.  $I'(0, 4)$   
 b.  $H'(4, 4)$   
 c.  $E'(2, 1)$ ;  $F'(3, 0)$ ;  $G'(1, -1)$

- d.  $A'(-4, 2)$ ;  $B'(-2, 2)$ ;  $C'(-2, 0)$ ;  $D'(-4, 0)$
- e.  $J'(-1, 1)$ ;  $K'(2, 1)$

5.



### Reflexiono

1. Se puede sumar el punto Q con el vector  $\vec{a} = (1, 2)$  y el resultado sumarlo con el vector  $\vec{b} = (-3, 4)$ . O sumar los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , y el resultado sumarlo con el punto Q.
2. Sí son congruentes y se realizó una traslación.

## Página 250 ▶ Lección 37

### Situación 1

- !  $A(2, 1)$ ;  $B(4, 4)$ ,  $A'(-2, 1)$  y  $B'(-4, 4)$ . La primera coordenada del punto imagen tiene el signo opuesto al de su preimagen, esto es,  $P(x, y) \rightarrow P'(-x, y)$ .

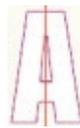
## Página 251

### Argumenta y comunica

- Sí, por ejemplo un rectángulo tiene 2 ejes de simetría. Sí, el círculo tiene infinitos ejes de simetría.

## Página 252 ▶ Practiquemos lo aprendido.

1. a.



c. No hay.

d.

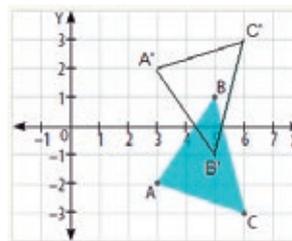


b. No hay.

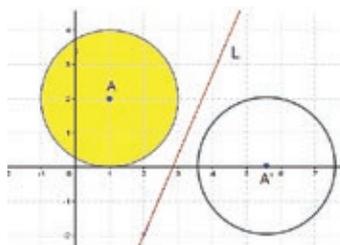
2. a.  $\vec{v} = (4, 2)$

b.  $\vec{v} = (-3, -2)$

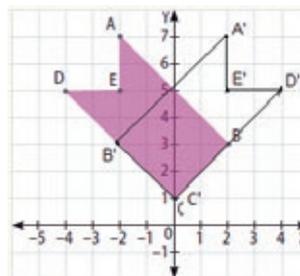
3. a.



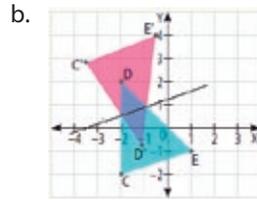
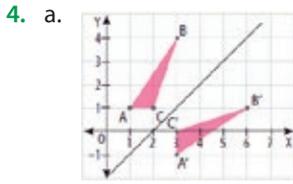
b.



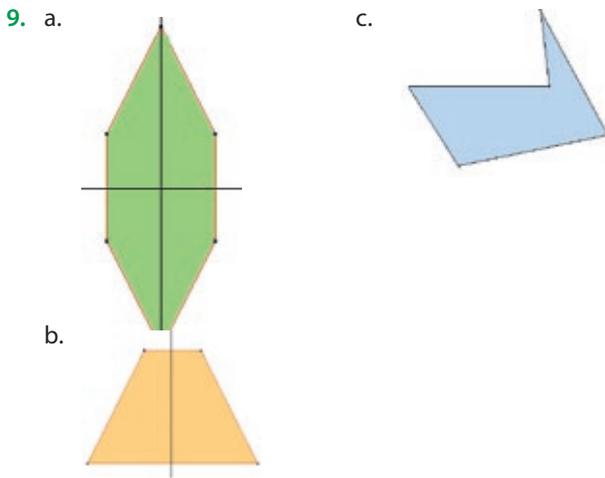
c.



**Página 253**



5. a. D'(0, 6)  
 b. G'(-4, 2)  
 6. a. R(4, -1); S(4, -5), T(1, -5); U(1, -1)  
 b.  $4 + 4\sqrt{2}$  unidades.  
 7. Según la imagen se puede trazar un eje de simetría.  
 8. No. Al reflejar primero el punto P respecto de  $L_1$  y después de  $L_2$  se obtiene como imagen un punto distinto que si se refleja primero respecto de  $L_2$  y después de  $L_1$ .



**Reflexiono**

- Porque la figura original y su imagen tienen la misma forma y mismo tamaño, es decir, son congruentes.
- El punto obtenido es el punto original pero con ambas coordenadas con el signo opuesto. Si se invierte el orden de reflexión se obtiene el mismo punto.

**Página 254 ▶ Lección 38**

**Situación 1**

- Son congruentes.
- Son congruentes.

**Página 255**

**Situación 2**

- Negativo, porque fue en sentido horario.
- R: El centro de rotación es O(4, 3) y el ángulo de rotación es  $60^\circ$ .
- El centro de rotación es O(4, 3) y el ángulo de la rotación  $-60^\circ$  o  $300^\circ$ .

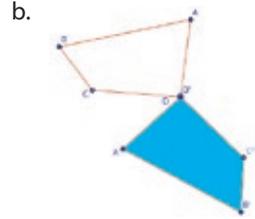
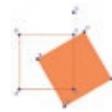
**Argumenta y comunica**

- Estoy de acuerdo, ya que se cumple cualquiera sea el punto  $(x, y)$ . Por ejemplo, al rotar el punto  $(-2, 3)$  en  $90^\circ$  se obtiene  $(-3, -2)$ ; en  $180^\circ$ ,  $(2, -3)$ ; en  $270^\circ$ ,  $(3, 2)$  y en  $360^\circ$ ,  $(-2, 3)$ .

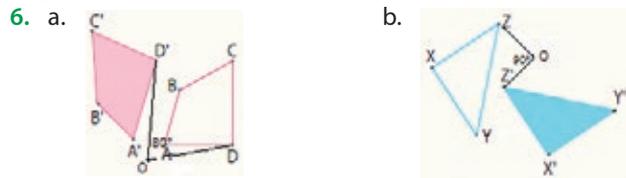
**Página 256 ▶ Practiquemos lo aprendido.**

1. a. No      b. Sí      c. No      d. Sí

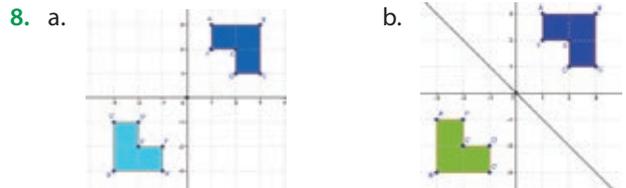
2. a. Eje Y.  
 3. a.  $30^\circ$   
 4. a.  $P'(-2, -7)$   
 b.  $Q'(-5, -3)$   
 c.  $R'(-4, 0)$



**Página 257**



7. a. Son congruentes.  
 b.  $O'(5, 3)$ ;  $P'(2, 1)$ ;  $Q'(1, 3)$ ;  $R'(4, 5)$   
 c. O coincide con Q', P coincide con R', Q coincide con O' y R coincide con P'.



- c. Las imágenes tienen la misma posición en el plano pero las coordenadas de sus vértices no coinciden.  
 9. a. En América del Sur.  
 b. Océano Glacial Ártico, Océano Antártico, Asia y Sudamérica.  
 c. Rotación en  $90^\circ$  respecto del origen.  
 10. No es correcta. Por ejemplo, si se rota en  $90^\circ$  el punto  $P(1, 3)$  respecto del origen se obtiene el punto  $P'(-3, 1)$  y si se rota en  $-90^\circ$  se obtiene el punto  $P'(3, -1)$ .

**Reflexiono**

- No. Por ejemplo si se rota el punto  $P(2, 3)$  respecto del punto  $O(1, 1)$  se obtiene el punto  $P'(0, -1)$
- Sí. Por ejemplo si se rota el punto  $P(4, 2)$  en  $90^\circ$  respecto del origen se obtiene el punto  $P'(-2, 4)$ . Si se rota el punto  $P'(-2, 4)$  en  $-90^\circ$  respecto del origen se obtiene el punto  $P(4, 2)$ .

**Página 258 ▶ Lección 39**

**Situación 1**

- Porque el vector de traslación es  $\vec{v} = (5, 2)$ .
- Sí, siempre ocurre esto en una traslación.
- Sí, porque tienen igual forma e igual tamaño y la traslación es una transformación isométrica.

R: Las coordenadas de los vértices de la imagen son  $A'(6, 3)$ ;  $B'(9, 3)$ ;  $C'(9, 5)$  y  $D'(6, 5)$ .

La imagen de la figura se mueve de acuerdo al nuevo vector de traslación.

- 10      10      iguales      6      6      iguales

**Página 259**

**Situación 2**

- ! Sí, son perpendiculares. Sí, es siempre así para una reflexión.
- ! Sí, son paralelos. Sí, es siempre así para una reflexión.
- ! Sí, son congruentes porque tienen la misma forma y el mismo tamaño y la reflexión es una transformación isométrica.

**R:** Las coordenadas de los vértices de la imagen reflejada respecto del eje X son  $A'(1, -1)$ ,  $B'(4, -3)$  y  $C'(2, -4)$ . Las coordenadas de los vértices de la imagen reflejada respecto del eje Y son  $A''(-1, 1)$ ,  $B''(-4, 3)$  y  $C''(-2, 4)$ . Las coordenadas de los vértices de la imagen reflejada respecto a la recta de ecuación  $y = x - 3$  son  $A'''(4, -2)$ ,  $B'''(6, 1)$  y  $C'''(7, -1)$ .

! Sí se cumple.

**Página 260**

**Situación 3**

- ! No, porque no todos sus lados y ángulos miden lo mismo.
- ! A una rotación de  $240^\circ$ .
- ! A una rotación de  $-90^\circ$ .

•  $A'(5, 1)$   $B'(5, 3)$   $C'(4, 6)$   $D'(2, 4)$   $E'(2, 1)$   
enteros

$A'''(-5, -1)$   $B'''(-5, -3)$   $C'''(-4, -6)$   $D'''(-2, -4)$   $E'''(-2, -1)$

! Sí se verifica.

!  $A''(-4, 8)$ ;  $B''(-5, 8)$ ;  $C''(-6, 5)$ ;  $D''(-3, 7)$ ;  $E''(-2, 5)$   
 $E''(-2, 2)$ ;  $O(1)$

**Página 261**

**Situación 4**

! Se debe hacer clic en  y seleccionar *Polígono* o hacer clic en  y seleccionar *Segmento*.

! Se debe hacer clic en  y seleccionar *Rotación*.

**R:** La reflexión respecto de un punto es equivalente a una rotación de  $180^\circ$  respecto de ese mismo punto.

•  $180^\circ$

**Argumenta y comunica**

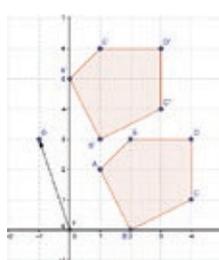
Rotar una figura en  $180^\circ$  respecto de un punto O es equivalente a reflejarla respecto del punto O.

**Página 262 ▶ Practiquemos lo aprendido.**

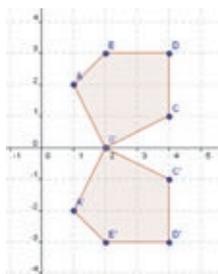
1. a. Rotación respecto del punto (1, 1) en  $124^\circ$ .
- b. Reflexión respecto de la recta  $y = x$ .
2. a.  $A'(-0, 2)$ ;  $B'(-1, 4)$ ;  $C'(0, 4)$ ;  $D'(1, 2)$ ;  $E'(0, 2)$ ;  $F'(1, 2)$ ;  $G'(2, -2)$
- b.  $A'(2, -1)$ ;  $B'(-1, -1)$ ;  $C'(-1, -4)$ ;  $D'(3, -4)$ ;  $E'(3, -3)$ ;  $F'(1, -2)$ ;  $G'(2, -2)$
- c.  $A'(-2, 1)$ ;  $B'(-2, -1)$ ;  $C'(1, -1)$ ;  $D'(1, 0)$ ;  $E'(-1, 2)$
- d.  $A'(-2, 5, 4)$ ;  $B'(-0, 4, 1)$ ;  $C'(-0, 4, 1)$ ;  $D'(0, 2, 9)$ ;  $E'(1, 7, 1)$ ;  $F'(0, 2, 9)$ ;  $G'(4, 3, 6)$

**Página 263**

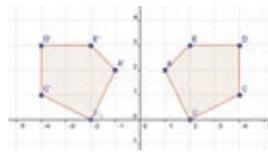
3. a.



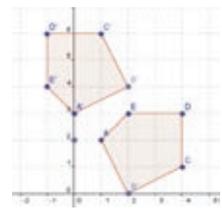
b.



c.



d.



4. a.  $A = 6 u^2$ ;  $P = 8 + \sqrt{2} u$
- b.  $A = 5 u^2$ ;  $P = 12 u$
5. a. • Sí. • Sí. • Sí. • Sí.
- b. Queda en la posición original.
- c. Queda en la posición original.
7. No es correcto. Aplicar al segmento AB una rotación de  $180^\circ$  respecto del punto (1, 3) es equivalente a aplicar una rotación de  $-180^\circ$  pero respecto del mismo punto (1, 3).
8. En GeoGebra, debes hacer clic en la aplicación Polígono y dibujar el triángulo a partir de los vértices dados. Luego, se dibuja el punto  $(-4, 7)$ . Finalmente se utiliza la aplicación Simetría Central para reflejar el triángulo.

**Reflexiono**

1. Aplicando una reflexión respecto a alguno de sus lados.
2. El cuadrado obtenido ocupa la misma región del plano que el original aunque todos sus puntos, excepto el centro de rotación, han cambiado de posición.

**Página 264 ▶ Lección 40**

**Situación 1**

! Ubicando el principio del vector en cada vértice del triángulo. La imagen de cada vértice estará ubicado en la punta de la flecha del vector. Luego, se unen las imágenes de los vértices y se obtiene el triángulo trasladado.

**R:** Las coordenadas de los vértices de la imagen del triángulo son  $A''(5, -3)$ ;  $B''(6, -1)$ ;  $C(4, 1)$ .

! (7, -1)

• traslaciones (7, -1)

**Página 265**

**Situación 2**

! Se traza un segmento perpendicular al eje Y a partir de cada vértice del cuadrado. La distancia que hay de la figura original al eje Y es la misma que la del eje Y a la imagen obtenida.

**R:** Las coordenadas de los vértices de la imagen del cuadrado son  $A''(4, -2)$ ;  $B''(2, -2)$ ;  $C''(2, -4)$ ;  $D''(4, -4)$ .

! Dos: reflexión axial y reflexión central.

• rotación central

**Página 266**

**Situación 3**

! En sentido antihorario, porque su valor es positivo.

**R:** Las coordenadas de los vértices de la imagen del segmento AB tras aplicarle dos rotaciones sucesivas son  $A''(1, -2)$  y  $B''(3, -1)$ .

!  $90^\circ$ . Es el ángulo correspondiente a la composición de los ángulos de cada rotación.

•  $90^\circ$

**Página 267**

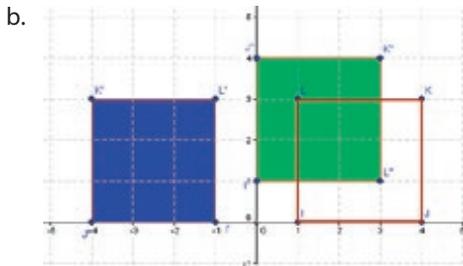
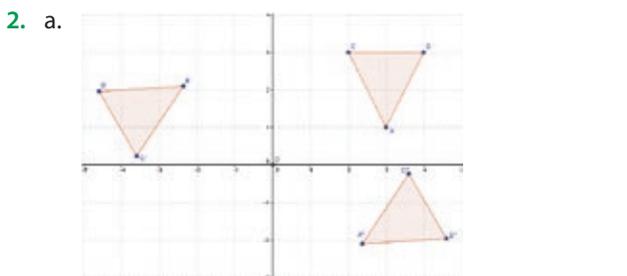
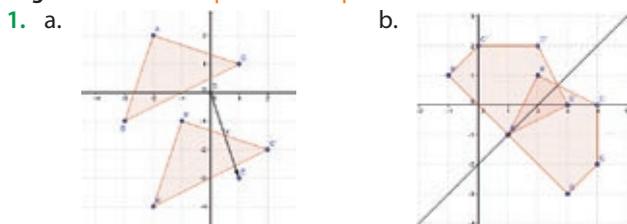
**Situación 4**

- Se ubica un punto en el origen. Se selecciona Rotación, luego se pincha con el mouse el punto en el origen y luego en algún punto del triángulo. En el cuadro de diálogo que se desplegará se introduce el valor  $75^\circ$ .
- En la entrada se debe escribir  $y = 0,3x$ . Se selecciona Simetría Axial, luego se pincha con el mouse un punto de la recta y luego en algún punto del triángulo  $A'B'C'$ .
- Se dibuja el vector  $\vec{v} = (5, 2)$  en el plano cartesiano. Se pincha con el mouse en algún punto del triángulo  $A''B''C''$  y luego en algún punto del vector.
- No se obtiene el mismo resultado. Las composiciones de transformaciones isométricas no son conmutativas.

**Argumenta y comunica**

Sí, son correctas.

**Página 268 ▶ Practiquemos lo aprendido.**



3. a. Vector  $\vec{v} = (0, -8)$       b. Vector  $\vec{v} = (6, 0)$

**Página 269**

- 4. a. Traslación según el vector  $(2, 0)$ . Traslación según el vector  $(2, -1)$ .
- b. Rotación en  $90^\circ$  respecto del origen. Reflexión respecto del eje X.
- c. Reflexión respecto del eje Y. Reflexión respecto de la recta  $y = x$ . Rotación en  $270^\circ$  respecto del origen.
- 5. a.  $\vec{v} = (1, 3)$       c.  $\vec{v} = (12, -7)$
- b.  $\vec{v} = (-9, -1)$       d.  $\vec{v} = (13, 9)$
- 6. María tiene razón puesto que esto sucede cuando el número de reflexiones es par y los ejes de reflexión son paralelos.

- 7. No consideró la distancia que hay del punto A a la recta  $A(4, 3)$ .
- 8. Una posibilidad es reflejar respecto del eje X y la imagen obtenida trasladarla según el vector  $\vec{v} = (3, -1)$ .

Reflexiono
1. Sí, porque en una transformación isométrica la figura original y su imagen son congruentes.
2. Trasladando el punto $A'(-3, 5)$ según el vector $\vec{u} = (7, 2)$ .

**Página 270 ▶ Lección 41**

**Situación 1**

- Trazando una perpendicular al segmento BC que pase por A que mida el doble de la distancia de A al segmento BC. En el extremo de ese segmento estará la imagen de A.
- Son reflexiones axiales. Porque se refleja respecto a un eje que en este caso es el lado del triángulo.
- hexágono      5
- 5

**Página 271**

**Situación 2**

- $(0; 2,4)$  y  $(2,4; 0)$ .
- 1 : 2. Porque los lados de ambas figuras miden lo mismo.
- Sí, sumando a las coordenadas de cada vértice los vectores de traslación según corresponda.

R: Es posible cubrir todo el plano a partir de las figuras 2D que se muestran en la figura.

**Argumenta y comunica**

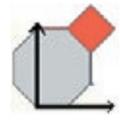
Un triángulo equilátero tiene 3 ejes de simetría y un cuadrado 4. El número de ejes de simetría de un polígono regular es igual al número de sus lados. Así, un pentágono regular tiene 5 ejes de simetría y un octógono regular 8.

**Página 272 ▶ Practiquemos lo aprendido.**

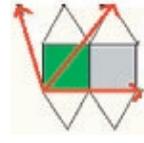
- 1. Figura 2: traslación. Figura 3: traslación + rotación. Figura 4: traslación + reflexión. Figura 5: traslación + reflexión + rotación.
- 2. a. Centro de rotación es el origen y el ángulo de rotación es  $180^\circ$ .
- b. Centro de rotación es  $(-1, 1)$  y el ángulo de rotación de  $90^\circ$ .
- 3. a. Se puede construir realizando una composición de reflexiones a un cuadrado.
- b. Se puede construir realizando una composición de reflexiones a un triángulo equilátero.

**Página 273**

- 4. a. Composición de traslaciones según los vectores indicados.



- b. Composición de traslaciones según los vectores indicados.



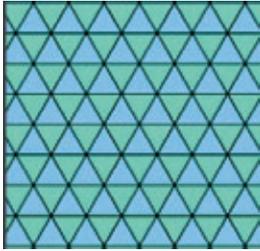
- c. Composición de traslaciones según el vector indicado.



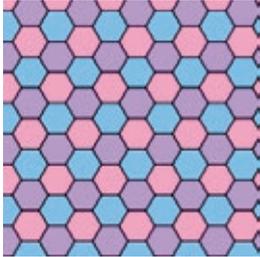
- d. Reflexión axial y giros de 180°.



5. a.



- b.



- 7.

• La figura base es .

• Traslaciones, reflexiones y rotaciones.

**Reflexiono**

1. No, porque los ángulos interiores de un heptágono regular miden aproximadamente  $128,57^\circ$  y los de un nonágono regular  $140^\circ$  y tanto  $\frac{360^\circ}{128,57^\circ}$  como  $\frac{360^\circ}{140^\circ}$  no son números enteros.

2. Sí, es posible.

**Página 275 ▶ Mural**

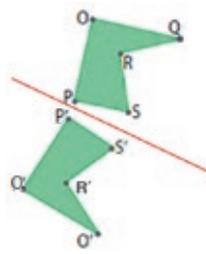
- Si fabricaran los paneles en forma cilíndrica quedaría espacio entre las celdas, es decir, no se teselaría el espacio y no se ocuparía eficientemente.
- Reflexiones axiales respecto de los lados de los hexágonos.
  - Deben tener necesariamente la misma forma, pero no el mismo tamaño.

**Página 276 ▶ ¿Cómo voy?**

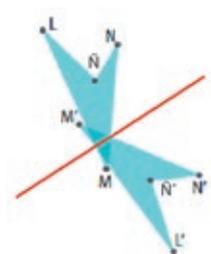
- $\vec{p} = (1, 1)$
  - $\vec{q} = (0, -2)$
  - $\vec{r} = (-2, -1)$
- $O'(0, -3)$
  - $(-8, -1)$
  - $(-17, 7)$  y  $(17, -7)$

3. a.  $C(3, -5)$       b.  $D(0, -6)$       c.  $E(1, 2)$

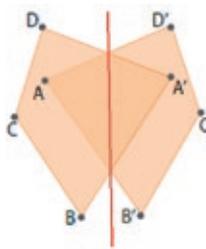
4. a.



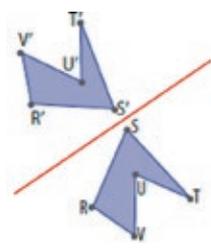
- c.



- b.



- d.



- $180^\circ$  y  $(2, -3)$ .
  - $90^\circ$  y  $(0, 1)$ .
  - $270^\circ$  y  $(5, 1)$ .

**Página 277**

- $A'(2, 8)$ ;  $B'(3, 6)$ ;  $C'(4, 9)$
  - $O'(2, -4)$ ;  $P'(0, -4)$ ;  $Q'(0, -2)$ ;  $R'(1, -2)$ ;  $S'(1, -1)$ ;  $T'(2, -1)$
  - $D'(4, 6; 2, 5)$ ;  $E'(7, 2; 4)$ ;  $F'(5, 7; 6, 6)$ ;  $G'(3, 1; 5, 1)$
- F
  - F
  - F
- No
  - No
  - Sí
  - No

**Desafíos de integración**

- $48 \text{ cm}^3$
- 5 planos de simetría.

**Página 278 ▶ Resolución de problemas**

- De qué base procedían los rescatistas.
- Las coordenadas donde la expedición tuvo el accidente, las coordenadas de la ubicación de las bases y la representación vectorial de los movimientos que hicieron los rescatistas.
- Los rescatistas procedían de la base Beta.

**Página 280 ▶ Sintetizo mis aprendizajes**

**¿Cómo se llama?**

- A. triángulo rectángulo      C. hipotenusa  
B. software

**¿Cómo se hace?**

- Pregunta s7:** Con la expresión  $A = 2\pi r^2 + \pi r^2 h$ , donde  $r$  es el radio de la base circular y  $h$  la altura del cilindro.
- Pregunta s8:** Se puede verificar con el teorema recíproco de Pitágoras.
- Pregunta s9:** Rotando cada uno de los vértices dados el centro y el ángulo de rotación. Se traza un segmento que una el vértice con el centro de rotación y con el compás se traza una circunferencia cuyo radio sea la medida de este segmento. Con el transportador ubicado en el centro de rotación se marca en la circunferencia el punto que se corresponde con el ángulo de rotación. Este punto será la imagen del vértice.

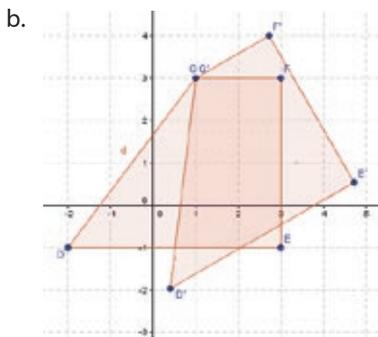
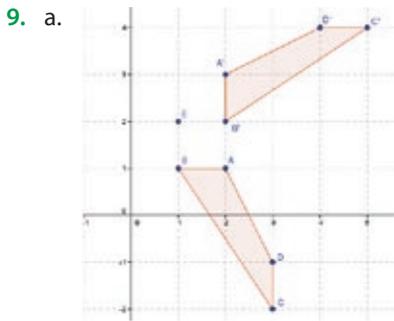
**Página 281 ▶ Refuerzo mis aprendizajes**

- $395,6 \text{ cm}^3$
  - $20,38 \text{ cm}^3$
  - $251,2 \text{ cm}^3$
  - $339,12 \text{ cm}^3$

2. a.  $268 \text{ cm}^2$       b.  $141,66 \text{ cm}^2$       c.  $28,44 \text{ cm}^2$   
 3. a.  $1\,500\,000 \text{ cm}^3$       b.  $706,5 \text{ cm}^2$   
 4. a.  $1 \text{ cm}$       c.  $4 \text{ cm}$   
 b.  $12 \text{ cm}$       d.  $3,7 \text{ cm}$   
 5. a.  $540 \text{ cm}^2$   
 b. No, porque por el teorema recíproco de Pitágoras este triángulo no es rectángulo.  
 c. A  $500 \text{ m}$ .

**Página 282**

6. a.  $F(1, 3); G(1, 1); H'(3, 0); I'(3, 2)$   
 b.  $A'(3, 1); B'(4, 4); C'(6, 3)$   
 c.  $L'(3, 5); M'(5, 6); N'(4, 5); Ñ'(5, 4); O'(3, 4)$   
 d.  $S'(6, 2); T'(5, 1); U'(6, -1); V'(7, 0)$   
 7. a.  $A'(-1, 2); B'(1, 2); C'(1, 4); D'(-1, 4)$   
 b.  $A'(2, 2); B'(4, 2); C'(4, 4); D'(2, 4)$   
 c.  $A'(3, -1); B'(5, -1); C'(5, 1); D'(3, 1)$   
 d.  $A'(-2, -6); B'(0, -6); C'(0, -4); D'(-2, -4)$   
 e.  $A'(-5, -3); B'(-3, -3); C'(-3, -1); D'(-5, -1)$   
 f.  $A'(1, -4); B'(3, -4); C'(3, -2); D'(1, -2)$   
 8. a.  $R(3, -5)$       c.  $K'(-4, 6)$   
 b.  $G'(0, 4)$       d.  $H'(-5, 0)$



10. a. Es falsa.      b. Es falsa.      c. Es Falsa.  
 11. a. Hexágono, cuadrado y triángulo.  
 b. Cuadrado y triángulo.  
 c. Octógono y cuadrado.  
 d. Hexágono y triángulo.

**Página 283 ▶ ¿Qué aprendí?**

**Parte I**

1. a. F      c. F      e. F      g. F  
 b. V      d. V      f. V  
 2.  $\sqrt{2}a \text{ cm}$   
 3.  $3,3 \text{ cm}^2$   
 4. A      5. B      6. C

7. B      8. A      9. C

**Página 284**

**Parte II**

10. • Aumenta.      •  $1 : 1$ . Sí.      •  $6,25 \text{ m}^2$   
 11.  $\sqrt{2} : 1$   
 12. •  $V = \pi\sqrt{2}H$   
 • Congruentes.  
 •  $V = \pi\sqrt{2} \frac{H+H'}{2}$   
 13. Imagen 3.

**Página 285 ▶ Registra tus aprendizajes**

**Desafío en equipo**

1.  $3,01 \text{ cm}^3$       2.  $48,7\%$       3.  $62,63 \text{ cm}$

**Unidad 4 Estadística y probabilidad**

**Página 286**

- Dificultad para distinguir los colores.

**Página 287**

- $0,25$

	$X_N$	$X_D$
$X_D$	$X_N X_D$	$X_D X_D$
Y	$X_N Y$	$X_D Y$

La probabilidad de que no sea daltónico es  $0,5$ .

**Página 288 ▶ Sección 10: Interpretación y comparación de gráficos**

1. a. Es mayor el porcentaje de oxígeno en la corteza terrestre.  
 b.  $345 \text{ g}$ .  
 2. a. variable cuantitativa.  
 b. histograma  
 c. frecuencia  
 d. variable cualitativa.  
 e. gráfico circular

**Página 290 ▶ ¿Qué debo saber?**

1. a.  $62,5\%$       b. Aprox.  $92,6\%$

2.

Cantidad de celulares	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada
1	5	0,33	5
2	3	0,20	8
3	4	0,27	12
4	2	0,13	14
5	1	0,07	15

**Página 291**

3. a. V      b. V      c. V      d. F  
 4. a. La suma de los porcentajes es mayor que  $100\%$ .  
 b. La graduación del eje vertical no es correcta.

**Página 292 ▶ Lección 42**

**Situación 1**

11 y 4,5

R: ll.º menor menos

1 Por ejemplo, la cantidad de errores promedio de cada curso y la de todos los cursos.

**Página 293**

**Situación 2**

R:	<u>18</u>	<u>30 s</u>	<u>60 s</u>
	<u>20</u>	<u>60 s</u>	<u>90 s</u>
	<u>10</u>	<u>90 s</u>	<u>120 s</u>

1 El tercer intervalo.

**Página 294**

**Situación 3**

1 Gráfico de pastel, gráfico de torta o gráfica de 360 grados.  
 1 Por ejemplo, Porcentaje del tipo de errores cometidos por los alumnos y las alumnas.

• 100%

1 Sustitución de letras 216°, Tilde 108°, Cambio de palabras 36°.  $\text{Ángulo} = \text{porcentaje} \cdot 360^\circ$ .

• 60% 30% 10%

R: El tipo de error que más frecuentemente cometieron los alumnos y las alumnas fue Sustitución de letras.

**Situación 4**

• el precio de la gasolina la semana

1 Otros tipos de gráficos son los pictogramas, los gráficos de barra comparativos, gráficos de área, etc.

R: disminuyó

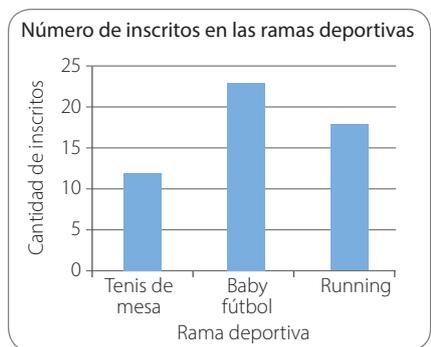
**Argumenta y comunica**

En el eje horizontal del gráfico de barras presentado en la situación 1 se representan datos cualitativos y en el del histograma de la situación 2, datos cuantitativos continuos.

Es más recomendable utilizar un histograma.

**Página 295 ▶ Practiquemos lo aprendido.**

1.



- 2. a. El río D. b. Los ríos A y C.
- 3. a. Entre los horarios de 7:30 y 12:00.  
 b. En el horario de 7:30.  
 c. Sí, porque la rapidez de los automóviles en horas punta sobrepasa los 60 km/h.
- 4. a. La sucursal B. b. La sucursal B.

**Reflexiono**

- 1. Solamente si los datos no son cuantitativos y continuos.
- 2. Cuando en él se grafica una muestra representativa de la población estudiada.

**Página 296 ▶ Lección 43**

**Situación 1**

R: A circular

**Página 297**

**Situación 2**

1 Es un gráfico de líneas. Es adecuado porque se puede apreciar la variación de la estatura.

1 Una de las causas puede ser cambios en la alimentación.

R: 1907 aumentó

**Página 298**

**Situación 3**

1 Aparentemente son muy similares.

1 Favorable es la cantidad de fibra y desfavorable, la cantidad de azúcares.

R: No se puede optar por ninguno de los cereales si se desea que contenga mayor cantidad de fibra y menor cantidad de azúcares.

**Página 299 ▶ Practiquemos lo aprendido.**

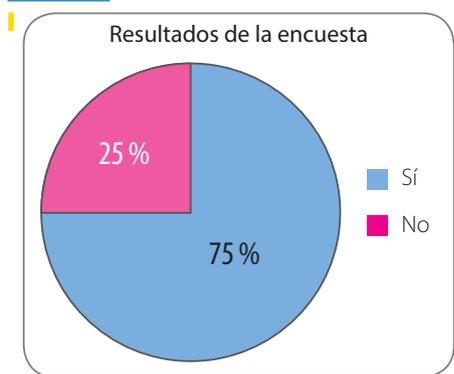
- 2. a. La educación pública tiene mayor porcentaje de alumnos egresados de la especialidad humanista.  
 b. La educación privada tiene mayor porcentaje de alumnos egresados de la especialidad matemática.
- 3. a. Sí b. Sí
- 4. a. La respuesta depende del año: en 2007, subvencionado; en 2009, todos igual y 2011, municipal.  
 b. Es difícil visualizar cuál de los datos es mayor.

**Reflexiono**

- 1. Sí, los porcentajes son los mismos.
- 2. No necesariamente, ya que no siempre es posible, pero es lo ideal para mantener la proporción de las barras.

**Página 300 ▶ Lección 44**

**Situación 1**



R: Los gráficos que confeccionaron los estudiantes para representar la información de su encuesta fueron adecuados.

1 Gráfico de barras para la pregunta 1 y solo el histograma para la pregunta 2.

**Página 301**

**Situación 2**

R: El segundo gráfico representa de mejor manera la tendencia al alza.

### Situación 3

El IV.º C.

IV.º A: 4, IV.º B: 7, IV.º C: 3, IV.º D: 4.

R: La estudiante eligió correctamente el gráfico.

Un gráfico de barras.

#### Argumenta y comunica

- cuantitativos discretos: si importa la proporción, el adecuado es el gráfico circular; si no, pueden ser el gráfico de barras o el de líneas.
- cuantitativos continuos: histograma.
- cualitativos: si importa la proporción, el adecuado es el gráfico circular; si no, puede ser el gráfico de barras.
- cuantitativos discretos agrupados: histograma.

#### Página 302 ▶ Practiquemos lo aprendido.

- a. cualitativo.
    - b. cuantitativo continuo.
    - c. cuantitativo discreto.
    - d. cuantitativo discreto.
  - a. histograma
    - b. gráfico de barras
  - a. • No, porque no se aprecia bien la proporción entre los datos y el total.  
• No se aprecian claramente las proporciones.
    - b. • Que el nivel socioeconómico bajo es el que tiene un menor porcentaje de participación y el nivel socioeconómico alto, un mayor porcentaje. Además, en todos los niveles es mayor el porcentaje de jóvenes que no participan en voluntariado que los que sí lo hacen.
- Un gráfico de barras comparado.

#### Página 303

- a. • Cuantitativo discreto.  
• Un gráfico circular es más conveniente.  
• Podemos concluir, por ejemplo, que la mayor parte del público pertenece al segmento de 18 años a 25 años; la menor parte, al segmento de mayores de 50 años y que el 75,7% del público tiene entre 18 años y 29 años.
  - b. • Dato cualitativo  
• Sí, permite comparar proporcionalmente los datos.  
• Un gráfico circular.
- a. • En un gráfico de barras comparado.

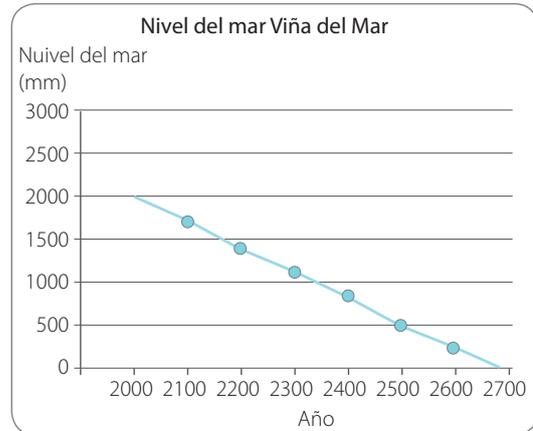
#### Reflexiono

1. Sí, por ejemplo con dos barras de distintos colores asociada una al valor del dólar y la otra el valor del euro.
2. En un gráfico de barras sí, pero en un gráfico circular, no.

#### Página 305 ▶ Mural

1. Aumento de temperatura, reducción de la superficie de glaciares, elevación del nivel del agua de los mares y océanos, afectación de los ecosistemas por el cambio en el clima, etc.

2. El año 2683.



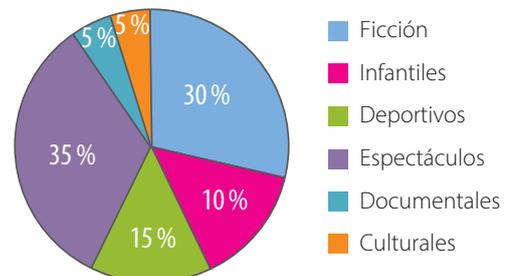
3. Reducir las emisiones de seis gases de efecto invernadero que causan el calentamiento global: dióxido de carbono, metano, óxido nitroso, hidrofluorocarburos, perfluorocarburos y hexafluoruro de azufre. Hasta ahora los dignatarios del documento han disminuido las emisiones en un 5%.

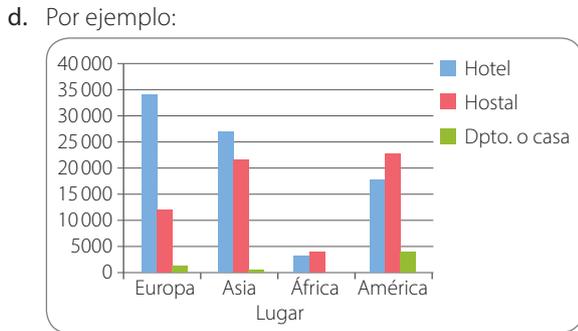
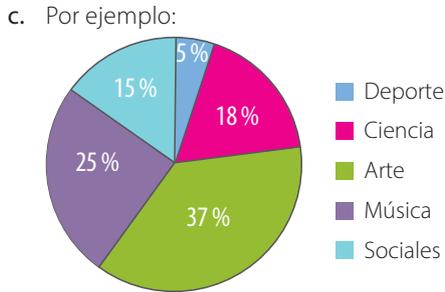
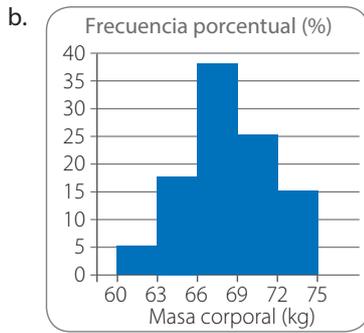
#### Página 306 ▶ ¿Cómo voy?

- a. 53,3%
  - b. En un 5%.
- a. El idioma predilecto fue castellano y los idiomas que menos prefirieron francés e italiano.
  - b. Inglés: 30  
Francés: 12  
Portugués: 18  
Castellano: 48  
Italiano: 12
- a. Para responder a esta pregunta es necesario qué cantidad de jóvenes hay en cada sector socioeconómico.
  - b. En el nivel alto y el nivel medio la mayoría prefiere U. Cruch, en el nivel bajo la mayoría prefiere IP.
  - c. Aumentando la barra del sector socioeconómico medio correspondiente a IP y disminuyendo la barra del sector socioeconómico medio correspondiente a U.Cruch.

#### Página 307

- a. El día jueves.
  - b. Temperatura mínima promedio:  $-2^{\circ}\text{C}$ .  
Temperatura máxima promedio:  $4^{\circ}\text{C}$ .
5. a. Por ejemplo:





**Desafíos de integración**

- Julio fue el mes más lluvioso y febrero, el menos lluvioso.
  - Mayo, junio y julio.
  - 12 °C.
- Las precipitaciones promedio fueron constantes entre enero y marzo, pero no las temperaturas promedio.
  - No porque son magnitudes distintas.

**Página 308 ▶ Resolución de problemas**

- El número de estudiantes hombres de 7.º básico que almuerzan en el colegio.
- Un gráfico de barras que muestra la cantidad de estudiantes hombres, mujeres y total por curso que almuerzan en el colegio.
- Se puede comprobar la respuesta sumando el total de hombres de 7.º Básico con el total de mujeres de 7º básico que almuerzan en el colegio. Este resultado debe ser igual a la suma del total de alumnos de 7º básico que almuerza en el colegio (barras verdes).
- 33 estudiantes hombres de 7.º básico almuerzan en el colegio.

**Página 310 ▶ Sección 11: Medidas de posición**

- Entre sus beneficios está que mejora la oxigenación del organismo, mejora la autoestima y el estado de ánimo
  - Podrían estar ordenados desde el más antiguo al más reciente. 48,1 48,1 48,3 49,3 49,3 49,4 49,5 49,6 49,8 50,2 50,4 50,6 50,7 51,4 52,2 52,3 53,4 53,7 53,8 55,2.
  - Ordenados los datos de menor a mayor y formando grupos de 5 datos; los primeros 5 datos corresponderán al 25% de los mejores tiempos y los últimos 5 datos corresponderán al 25% de los peores tiempos.
- medidas de posición, cuartil y percentil.

**Página 312 ▶ ¿Qué debo saber?**

1. a.

Tiempo (horas)	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa	Frecuencia acumulada
[2, 4[	1	0,03	1
[4, 6[	4	0,13	5
[6, 8[	7	0,22	12
[8, 10[	8	0,25	20
[10, 12[	6	0,19	26
[12, 14]	6	0,19	32

b.

Tipo de transporte	Frecuencia absoluta	Frecuencia relativa
Taxis	2 000	0,11111
Buses	5 000	0,27777
Microbuses	8 000	0,44444
Colectivos	3 000	0,16666
Total	18 000	1

2.

Precipitaciones (mm)	Frecuencia absoluta
[8, 10[	1
[10, 12[	3
[12, 14[	12
[14, 16[	7
[16, 18]	7

**Página 313**

- La cantidad de goles. c. 1,7 goles
  - 5 goles d. 0 goles
- 6 horas c. 2 horas
  - 2,75 horas d. 2,5 horas
- 23 trabajadores c. 8 trabajadores
  - 2 trabajadores d. 3 trabajadores

**Página 314 ▶ Lección 45**

**Situación**

I A la mediana.  
 R: Bajo 524 está el 60 % de los postulantes.

- 30%
- 40                      100                      80
- 471

**Argumenta y comunica**

Si los datos se ordenan de menor a mayor el percentil, P es aquel dato tal que los datos a la izquierda de él (incluyéndolo) representa el P% de los datos, y los datos a la derecha de él corresponden al (100 – P)% de los datos.

**Página 315. Practiquemos lo aprendido.**

- | País de origen | Frecuencia absoluta | Frecuencia relativa |
|----------------|---------------------|---------------------|
| Argentina      | 20                  | 0,17                |
| Bolivia        | 20                  | 0,17                |
| Ecuador        | 50                  | 0,42                |
| Perú           | 20                  | 0,17                |
| Uruguay        | 10                  | 0,08                |
| Total          | 120                 | 1                   |
- a. 0                      b. 4                      c. 1
- a. [1,54; 1,62[        b. [1,62; 1,70]        c. [1,62; 1,70]
- a. 50 niños. Al percentil 70.  
b. La mediana corresponde al percentil 50. El percentil 50 corresponde a 11 meses, lo que quiere decir que el 50% de los niños aprende a caminar antes de los 11 meses.
- Significa que el niño pertenece al 40% de niños de menor longitud.

**Reflexiono**

- Nos dice cómo está posicionado un valor respecto al total de una muestra.
- No, pero el determinar la frecuencia acumulada facilita los cálculos.

**Página 316 ▶ Lección 46**

**Situación**

- El número de respuestas correctas: 0, 0, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4.
- 1                      1
  - A la mediana.
  - 2                      2
- R: Los valores que permiten dividir en 4 partes iguales los datos de la tabla son los cuartiles  $Q_1 = 0$ ,  $Q_2 = 1$  y  $Q_3 = 2$ .

**Argumenta y comunica**

Con el mismo procedimiento anterior, pero con cada cuartil incluido en un intervalo.

**Página 317 ▶ Practiquemos lo aprendido.**

- Media = 5,1                      Moda = 6                      Mediana = 5
- a. 0    c. 4  
b. 1    d. 7
- a.  $Q_1 = 1$  automóvil,  $Q_2 = 1$  automóvil,  $Q_3 = 2$  automóviles  
b.  $Q_1 = n.º 38$ ,  $Q_2 = n.º 39$ ,  $Q_3 = n.º 40$
- a. [100, 200[                      b. [200, 300[                      c. [300, 400[
- a. F    b. F    c. F
- Porque el ambos valen  $\frac{75}{100} = \frac{3}{4}$ .

**Reflexiono**

- Los percentiles dividen en un número mayor de grupos un conjunto de datos. El cuartil 1 es equivalente al percentil 25, el cuartil 2 es equivalente al percentil 50 y el cuartil 3 es equivalente al percentil 75.
- Para variables cuantitativas sí, para variables cualitativas no, porque estas no pueden ordenarse de menor a mayor.

**Página 318 ▶ Lección 47**

**Situación 1**

- $Q_1 = P_{25}$ ,  $Q_2 = P_{50}$ ,  $Q_3 = P_{75}$

**Página 319**

**Situación 2**

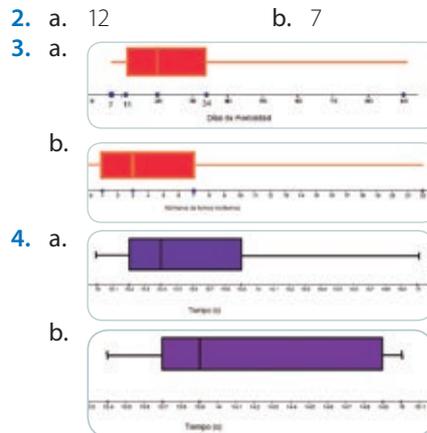
- 0,05  
R: 1,59 m                      1,62 m                      1,76 m
- Heterogénea, porque los bigotes de su diagrama de cajón son largos y su mediana está ubicada alejada del centro del cajón.

**Argumenta y comunica**

Porque significa que una gran cantidad de los datos se concentra en un intervalo pequeño. A menor rango intercuartil menor heterogeneidad.

**Página 320 ▶ Practiquemos lo aprendido.**

- $Q_1 = 2$  caries                       $Q_2 = 3$  caries                       $Q_3 = 3$  caries  
 $Q_1$  indica que el 25% de los pacientes tiene 2 caries o menos.  
 $Q_2$  indica que el 50% de los pacientes tiene 3 caries o menos.  
 $Q_3$  indica que el 75% de los pacientes tiene 3 caries o menos.
- a. 12    b. 7    c. 17



**Página 321**

- \$ 100 000 y \$ 3 200 000.
  - \$ 100 000 y \$ 200 000.
  - Entre \$ 800 000 y \$ 3 200 000.
  - No.



- El equipo B, porque la mediana y los cuartiles son mayores.

**Reflexiono**

- Que la proporción de las superficies de los cuartiles es la misma.
- Sí, por ejemplo, si todos los datos tuvieran el mismo valor, entonces  $Q_1 = Q_2 = Q_3 = \text{mínimo} = \text{máximo}$ .

**Página 322 ▶ Lección 48**

**Situación 1**

- La nota mínima fue un 2, la máxima un 7. Además,  $Q_1 = 3,8$ ,  $Q_2 = 5,7$  y  $Q_3 = 7$ .
- Porque  $Q_3$  tiene el mismo valor que el máximo.

**Página 323**

**Situación 2**

- 2

Porque  $Q_3$  coincide con el valor máximo.

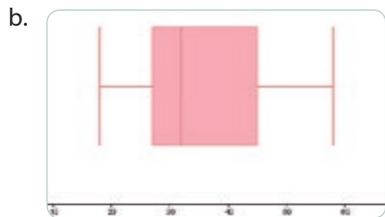
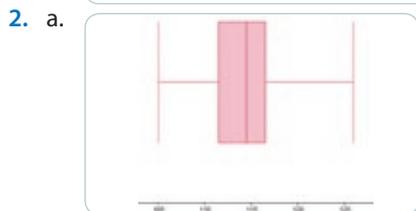
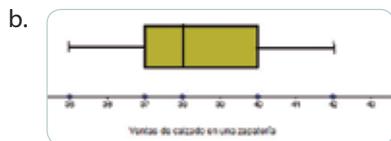
R: 2                      7                      tercer cuartil                      menor

### Argumenta y comunica

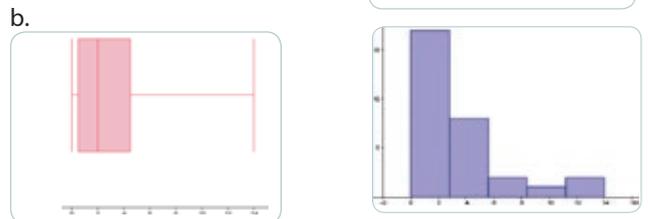
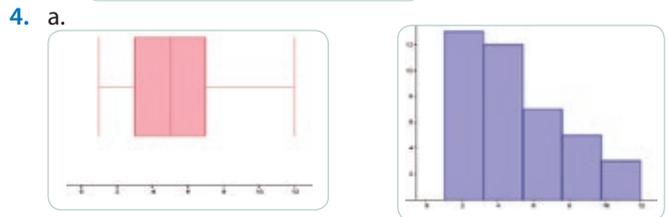
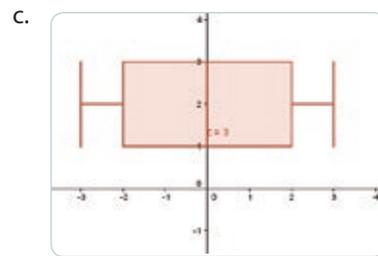
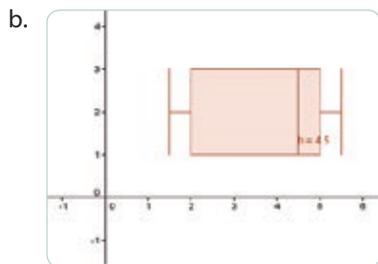
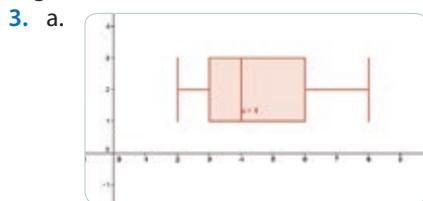
- Una línea vertical al eje X.
- Una distribución perfectamente simétrica de mediana 3,5.
- Un cajón sin bigotes y de mediana 2,5.

### Página 324 ▶ Practiquemos lo aprendido.

1. a. Valor mínimo = 35                      Valor máximo = 42  
 $Q_1 = 37$                        $Q_2 = 38$                        $Q_3 = 40$   
 Valor mínimo indica el menor número de calzado vendido.  
 $Q_1$  indica que el 25% de los calzados vendidos eran de talla 37 o menor.  
 $Q_2$  indica que el 50% de los calzados vendidos eran de talla 38 o menor.  
 $Q_3$  indica que el 75% de los calzados vendidos eran de talla 40 o menor.  
 Valor máximo indica el mayor número de calzado vendido.



### Página 325



5. a. Valor mínimo: 100 mg/dL;  $Q_1 = 130,5$  mg/dL;  
 $Q_2 = 207$  mg/dL;  $Q_3 = 249$  mg/dL; y valor máximo:  
 300 mg/dL.  
 c. El 25% de las personas tiene un nivel de colesterol de 130,5 mg/dL o menos. El 25% de las personas tiene un nivel de colesterol igual o superior a 249 mg/dL. Etc.

### Reflexiono

1. Sí, si algunos de los datos son negativos.
2. Sí, si el valor mínimo es igual a al primer cuartil y el valor máximo es igual al tercer cuartil.

### Página 326 ▶ Lección 49

Los tiempos máximos y mínimos del ciclista fueron disminuyendo. Esto significa que con el tiempo fue mejorando su rendimiento.

	Mes 1	Mes 2	Mes 3
Tiempo mínimo (min)	55	50	48
Tiempo máximo (min)	70	60	54
Rango total (min)	15	10	6

	Mes 1	Mes 2	Mes 3
Cuartil 1 (min)	60	53	49
Cuartil 2 (min)	66	55	50
Cuartil 3 (min)	68	58	52

La mediana fue disminuyendo.

R: 50                      25                      50

22 minutos

### Página 327 ▶ Practiquemos lo aprendido.

1. a. F                      c. V                      e. F  
    b. V                      d. V
2. a.  $Q_1 = 3$                       b.  $Q_2 = 5$                       c.  $Q_3 = 5$

3. a. B, 8                      c. C, 7                      e. A  
 b. A, 2                      d. B
4. La planta 2 contamina más ya que el cajón está a la derecha.

#### Reflexiono

- Significa que la diferencia entre el tercer cuartil y el primero de los conjuntos de datos es la misma.
- El bigote izquierdo empieza en el mismo valor.

#### Página 329 ► Mural

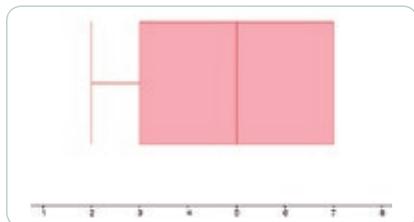
- Lo que se llama "quintil 1" en la clasificación de familias corresponde a las familias cuyo ingreso está entre el valor mínimo y el quintil 1 (según la definición estadística); lo que se llama "quintil 2" corresponde a los ingresos comprendidos entre el quintil q y el quintil 2, etc.
- Está en el quintil 3. Deberían aumentar en \$ 267 420 sus ingresos para avanzar en un quintil.

#### Página 330 ► ¿Cómo voy?

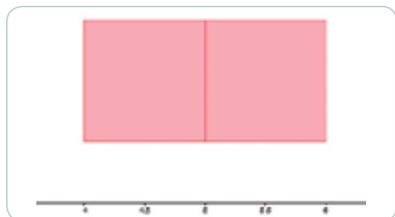
- [20, 30[ litros. El 23% de los camiones consumen menos de 30 litros de gasolina.
  - [30, 40[ litros. El 45% de los camiones consumen menos de 40 litros de gasolina.
- 4 ampollas. El 50% de las cajas tienen 4 o menos ampollas defectuosas.
  - 2 ampollas. El 20% de las cajas tienen 2 o menos ampollas defectuosas.
- a. El 25% de los clientes que retiran dinero en un banco en un día retiran \$ 20 000 o menos.  
 El 50% de los clientes que retiran dinero en un banco en un día retiran \$ 45 000 o menos.  
 El 75% de los clientes que retiran dinero en un banco en un día retiran \$ 60 000 o menos.

b. No.                      c. No.

4. a Carlos



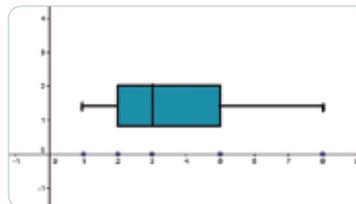
Patricia



b. Patricia

5.  $Q_1 = 58$  kg                       $Q_2 = 61,4$  kg                       $Q_3 = 78,4$  kg

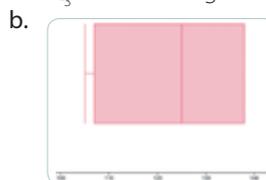
6. a. Valor máximo = 1.º b                      Valor mínimo = 8.º b  
 b.  $Q_1 = 2.º$  b                       $Q_2 = 3.º$  b                       $Q_3 = 5.º$  b  
 c.



- d. Por ejemplo, el 25% se matriculó en 1.º o 2.º básico. El 25% se matriculó en 5.º, 6.º, 7.º u 8.º básico. El nivel más bajo en que se matricularon alumnos fue 1.º básico y el más alto 8.º. Etc.

#### Página 331

7. a. Valor mínimo = 105 mm Hg  
 Valor máximo = 138 mm Hg  
 $Q_1 = 107$  mm Hg  
 $Q_2 = 125$  mm Hg  
 $Q_3 = 138$  mm Hg



- c. Sí, porque son los indicadores de posición los que determinan la forma del diagrama de cajón.
8. a. F                      c. V                      e. V  
 b. F                      d. F

#### Desafíos de integración

- a. • El 50% de los datos se ubica por sobre o debajo de la mediana.  
 • 50 minutos  
 • 30 minutos y 130 minutos, respectivamente.
- b. • 67,5 cm  
 • Bajo el percentil 3  
 • Bajo el percentil 3. Esto significa que tiene la estatura de aproximadamente el 3% de los niños de su edad.

#### Página 332 ► Resolución de problemas

- Una estrategia conveniente es Construir un diagrama.
- Ambos diagramas de cajón se diferenciarían en el valor de la mediana.

#### Página 334 ► Sección 12: Probabilidades

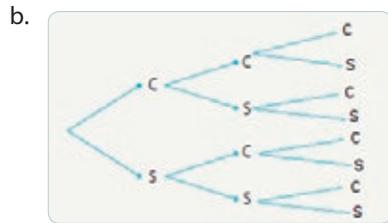
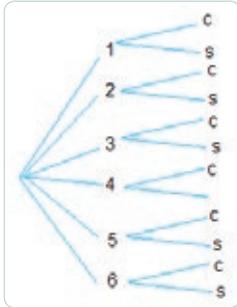
9. a. 75% son amarillos y la probabilidad de que un ejemplar sea verde es 0,25. Un color tiene más probabilidades de perpetuarse en la descendencia porque está asociado a un gen dominante.  
 b. La probabilidad de que un ejemplar sea liso es 0,75 y la probabilidad de que sea verde y rugoso es 0,0625.  
 c. Sí, es aplicable.
10. a. espacio muestral  
 b. diagrama de árbol  
 c. probabilidad

#### Página 336 ► ¿Qué debo saber?

1. a. Es una prueba que puede dar lugar a resultados de carácter determinista o aleatorio.

- b. Conjunto de resultados posibles que se pueden dar en un experimento aleatorio.  
 c. Cálculo matemático de las posibilidades que existen de que un evento suceda.  
 d. Que depende del azar.

2. a. D c. A  
 b. C d. B  
 3. a. V b. V c. F  
 4. a.



5. a. {cara-sello, sello-sello, cara-cara, sello-cara}  
 b. 0,75 c. 0,25

**Página 337**

6. a.  $0,\overline{3}$  c.  $0,1\overline{6}$  e.  $0,1\overline{6}$   
 b. 0,5 d.  $0,1\overline{6}$   
 7. a. 0,202 c. 0,556  
 b. 0,161 d. 0,605  
 8. a. 0 c. 0,267 e. 1  
 b. 0 d. 1 f. 0,733

**Página 338 ▶ Lección 50**

**Situación**

De 8 maneras.

R: El albañil puede elegir de 6 maneras los materiales.

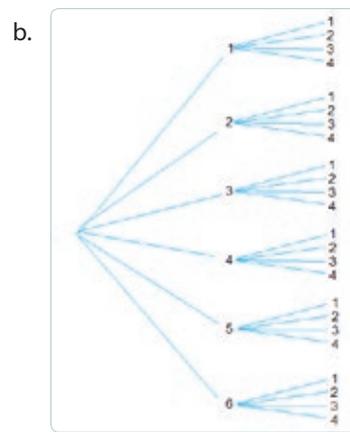
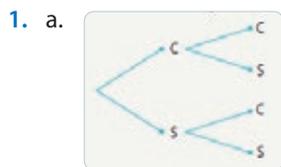
No cambiarían porque  $2 \cdot 3 = 6$ .

- 1                      3                      2                      6

**Argumenta y comunica**

Permite visualizar un problema y facilita el cálculo de probabilidades asociadas cuando el número de ramas no es demasiado grande.

**Página 339 ▶ Practiquemos lo aprendido.**



2. a. 12 maneras b. 8 rutas  
 3. a. 12 pares  
 b. 27 combinaciones  
 c. 20 combinaciones  
 d. 72 tipos  
 4. 12 formas

**Reflexiono**

1. Repitiendo cada opción en una columna  
 2. No.

**Página 340 ▶ Lección 51**

**Situación 1**

• 60

R: Es práctico usar un diagrama de árbol para calcular la cantidad de maneras en que los equipos se pueden repartir los 3 primeros puestos.

**Página 341**

**Situación 3**

R: La cardinalidad del espacio muestral es 8.

**Situación 4**

¡ Cara y sello.

¡ Rey de copas, rey de oros, as de espadas y as de oros.

•  $2 \cdot 4 = 8$

R: Multiplicando el número de resultados posibles del experimento con la moneda por el número de resultados posibles del experimento con las cartas.

**Argumenta y comunica**

Es práctico cuando el número de ramas no es demasiado grande. Su ventaja es que permite visualizar el problema.

**Página 342 ▶ Practiquemos lo aprendido.**

1. a. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10} b. {1, 2, 3, 4, 5, 6}  
 2. 8 menús distintos.

3.

Círculo	Verde (V)	Azul (A)	Rojo (R)	Morado (M)
Verde (V)	(V, V)	(V, A)	(V, R)	(V, M)
Azul (A)	(A, V)	(A, A)	(A, R)	(A, M)
Rojo (R)	(R, V)	(R, A)	(R, R)	(R, M)
Morado (M)	(M, V)	(M, A)	(M, R)	(M, M)

• 16

•  $4 \cdot 4$

• La cardinalidad es el producto del número de filas por el número de columnas.

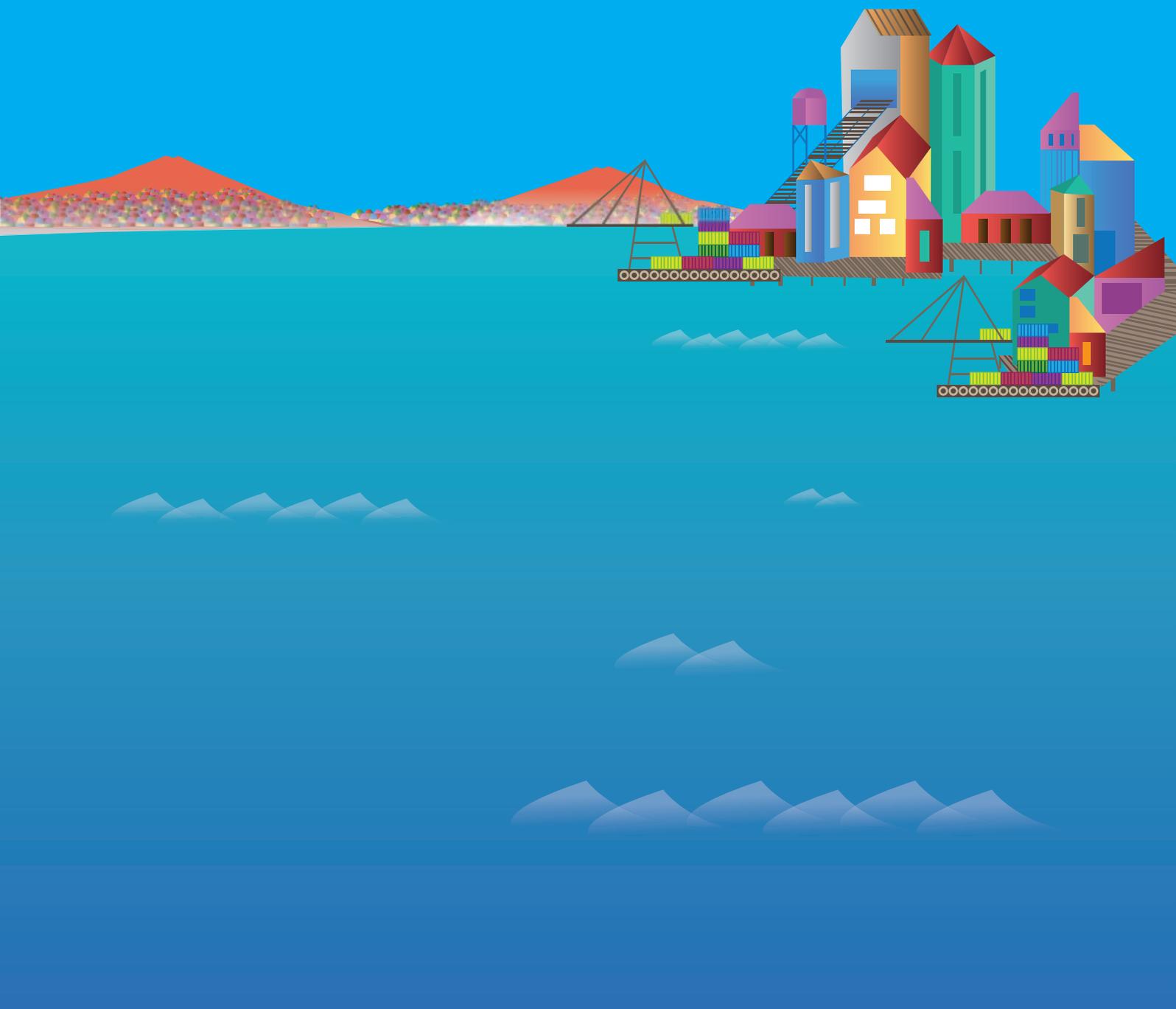
4. a. 12 maneras b.  $4 \cdot 3$   
 c. No, porque ahora el primer lugar está determinado.











ISBN 978-956-349-952-0



9 789563 499520



EDICIÓN ESPECIAL PARA EL  
MINISTERIO DE EDUCACIÓN  
PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN

