TEXTO DEL ESTUDIANTE

Matemática

7° BÁSICO

Richard Merino Leyton
Verónica Muñoz Correa
Bernardita Pérez Ureta
Pedro Rupin Gutiérrez

Ministerio de Educación
Gobierno de Chile

EDICIÓN ESPECIAL PARA EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN
PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN
AÑO 2017

sm

TEXTO DEL ESTUDIANTE

Matemática

7° BÁSICO

Richard Merino Leyton
Magíster en Didáctica de la Matemática
Profesor de Matemática
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Verónica Muñoz Correa
Profesora de Matemática
Pontificia Universidad Católica de Chile

Bernardita Pérez Ureta
Magíster en Didáctica de la Matemática
Profesora de Matemática
Pontificia Universidad Católica de Valparaíso

Pedro Rupin Gutiérrez
Profesor de Matemática
Licenciado en Matemática
Pontificia Universidad Católica de Chile

En las ceremonias de los pueblos originarios de Chile se emplean distintos símbolos espirituales. Uno de ellos es el *kultrun*, utilizado en las ceremonias mapuche. En la cosmovisión de este pueblo, la forma semiesférica representa la mitad del universo.

Texto del estudiante

Matemática 7.° básico

El Texto del estudiante Matemática 7.° básico es una creación del Departamento de Estudios pedagógicos de Ediciones SM, Chile.

Dirección editorial
Arlette Sandoval Espinoza

Coordinación editorial
María José Martínez Cornejo

Coordinación área Matemática
Carla Frigerio Cortés

Edición
Gladys Osorio Railef
Catalina Manosalva Iturriaga
Daniela Cienfuegos Fernández

Autoría
Richard Merino Leyton
Verónica Muñoz Correa
Bernardita Pérez Ureta
Pedro Rupin Gutiérrez

Asesoría didáctica
Guadalupe Álvarez Pereira

Corrección de estilo
María Paz Contreras Aguirre

Desarrollo de solucionario
Marco Linares Rodríguez

Dirección de arte
Carmen Gloria Robles Sepúlveda

Coordinación de diseño
Gabriela de la Fuente Garfias

Diseño y diagramación
Karina Riquelme Riquelme

Diseño de portada
Estudio SM

Ilustraciones
Archivo editorial

Producción fotográfica
Carlos Johnson Muñoz
Archivo editorial

Gestión de derechos
Loreto Ríos Melo

Jefatura de producción
Andrea Carrasco Zavala

Este texto corresponde al Séptimo año de Educación Básica y ha sido elaborado conforme al Decreto Supremo N° 614/2013, del Ministerio de Educación de Chile.

ISBN: 978-956-349-949-0 / Depósito legal: 261002
Se terminó de imprimir esta edición de 235300 ejemplares en el mes de octubre del año 2016.
Impreso por A Impresores

Presentación

El texto que tienes en tus manos es una herramienta elaborada pensando en ti.

Tú serás el protagonista de tu propio aprendizaje y el texto será el vehículo que, junto al profesor o profesora, te oriente y te acompañe en la adquisición de los contenidos, el desarrollo de las habilidades, los procedimientos y las actitudes propios de la Matemática.

1 ¿Qué es la Matemática?

Es una herramienta fundamental que explica la mayoría de los avances de nuestra sociedad y les sirve de soporte científico. La matemática es dinámica, creativa, utiliza un lenguaje universal y se ha desarrollado como medio para aprender a pensar y para resolver problemas. Así es capaz de explicar los patrones y las irregularidades, la continuidad y el cambio.

2 ¿Qué aprenderé?

Conocerás el conjunto de los números enteros, representarás, calcularás e interpretarás porcentajes y relaciones proporcionales, modelarás situaciones mediante ecuaciones e inecuaciones, conocerás la circunferencia y el círculo, realizarás construcciones geométricas, organizarás e interpretarás datos y comprenderás las medidas de tendencia central y la probabilidad. Además, aprenderás a utilizar estrategias de resolución de problemas para que te desenvuelvas en tu vida diaria.

3 ¿Cómo aprenderé?

Desarrollando tus habilidades de argumentación y comunicación de ideas, conclusiones y fundamentos, de selección y aplicación de modelos, de representación de conceptos en distintas modalidades y de resolución de problemas en distintos contextos de la vida diaria.

4 ¿Para qué?

Para desarrollar y confiar en tu propio razonamiento y para que seas capaz de aplicar los conceptos, los procedimientos y las habilidades propios de la matemática a la resolución de los problemas de tu vida cotidiana en contextos personales, profesionales y sociales.

5 ¿Qué espero yo?

Te invitamos a protagonizar tu aprendizaje y a tomar un lugar activo para construir un mundo cada vez mejor.

Índice

Más allá de tu texto

Para descubrir nuevas actividades, pídele ayuda a tu profesor(a) para acceder a los recursos digitales que se sugieren en el texto.

Recurso digital complementario

A lo largo de tu Texto también encontrarás códigos que podrás ingresar en la página http://codigos.auladigital.cl para visitar los sitios web sugeridos.

Unidad 3 Geometría 176

Unidad 4 Estadística y probabilidad 278

UNIDAD 1

Números

La capa de ozono

El 90 % del ozono presente en la atmósfera se encuentra en la estratósfera. Su función es absorber la radiación UV y así protegernos de sus dañinos efectos. Sin embargo, durante 1960 y 1970 la columna total de ozono ha disminuido entre un 2 % y un 5 %, lo que se aprecia en un adelgazamiento, conocido como agujero, de la capa de ozono en la Antártica, fenómeno observado en primavera que se gesta en invierno, donde las temperaturas de la estratósfera (cercanas incluso a 80 grados Celsius bajo cero) forman nubes que luego con los primeros rayos del sol y producto de reacciones químicas, destruyen el ozono.

¿Qué beneficios tiene, para la vida terrestre, la presencia de ozono en la estratósfera?

¿Qué aprenderé?

- Comprender la adición y la sustracción de números enteros.
- Explicar la multiplicación y la división de fracciones y decimales positivos.
- Resolver problemas que involucren la multiplicación y la división de fracciones y de decimales positivos.
- Comprender el concepto de porcentaje.
- Utilizar potencias de base 10 con exponente natural.

¿Cuál es su importancia?

- Posibilitan comprender cómo los distintos tipos de números y sus reglas respecto de las operaciones básicas permiten modelar situaciones cotidianas.
- Permiten aprender a aproximar, estimar y calcular con precisión. Además, permiten formarse una noción clara sobre la cantidad, la magnitud y la medida de determinados objetos.

Actitudes

- Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones.
- Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria.
- Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva respetando los aportes de todos, manifestando disposición a entender sus argumentos.

¿Para qué otra finalidad pueden servir estos aprendizajes?

¿Con qué tipo de números puedes asociar las bajas temperaturas, como por ejemplo las de la estratósfera o las de la Antártica?

Si las temperaturas registradas en un período de tiempo fueran solo bajo cero grados, ¿de qué manera obtendrías su variación?

¿Cómo interpretas que la disminución de la columna total de ozono entre 1960 y 1970 haya sido cercana al 5 %?

Sección 1

Números enteros

Actitud: Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria.

Activo ideas previas

Junto con un compañero, lean el texto y reflexionen en torno a las preguntas propuestas.

En las aguas oceánicas del continente antártico se encuentra el *kril* o (*Euphausiacea)*, un crustáceo muy similar a los camarones de unos 3 a 6 centímetros de longitud.

Considerado uno de los animales más abundantes del planeta, este crustáceo tiene la capacidad de adaptarse a bajas temperaturas y suele vivir entre 10 °C (grado Celsius) y 2 °C **bajo cero**. Algunas especies de *kril* permanecen en la superficie mientras que otras descienden hasta profundidades de 1000 metros **bajo el nivel del mar**.

El *kril* es alimento para aves, peces y ballenas. Estas últimas pueden consumir hasta dos toneladas de una vez.

- En el segundo párrafo se destacaron dos expresiones, bajo cero y bajo el nivel del mar. ¿Qué significan? ¿Cómo se pueden representar?

  ____

  ____

  ____

- Señalen otras situaciones que deben entregarse con información adicional, como "sobre o bajo cero", al hablar de temperaturas; o "sobre o bajo el nivel del mar", al referirse a altitudes.

  ____

  ____

  ____

Activo conceptos clave

Los siguientes listados muestran los conceptos clave de la sección. Con algunos de ellos, completa las actividades.

Recurso digital complementario

Número positivo	Valor absoluto	Minuendo
Número negativo	Sumando	Elemento neutro
Números enteros	Adición	Inverso aditivo
Recta numérica	Opuesto	Conmutatividad
Mayor que: >	Sustraendo	Asociatividad
Menor que: <		

- Dos conceptos que indiquen términos de una operación:

  ____

- Un concepto nuevo para ti:

  ____

- Una posible definición del concepto nuevo:

  ____

Pienso mis procesos

Observa las imágenes centrales y completa.

Explica con tus palabras lo que muestra la imagen inferior de la derecha.

¿Qué relación observas entre cada imagen y el número que lo acompaña?

¿Dónde has visto o escuchado números como los de las imágenes?

¿De qué piensas que se tratará esta sección?

¿Qué estrategias de estudio podrías usar para trabajar en esta sección?

¿Qué metas te propones cumplir al finalizar esta sección?

¿Qué debo saber?

Activa tus conocimientos previos respondiendo la pregunta lateral, luego resuelve la actividad. Para terminar, registra tus logros.

¿Qué debes considerar para representar números naturales en la recta numérica?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
10 o más puntos	9 o menos puntos

¿Qué errores cometiste?

Representar números

1 Ordena de menor a mayor. (3 puntos)

a. 3; 1; 5; 4.

b. 5348; 5438; 5834; 5384.

c. 0,4; 4,4; 0,44; 0,042.

2 Compara utilizando >, < o = según corresponda. (6 puntos)

a. 2 ______ 5

b. 0 ______ 3

c. 10 500 ______ 10 500

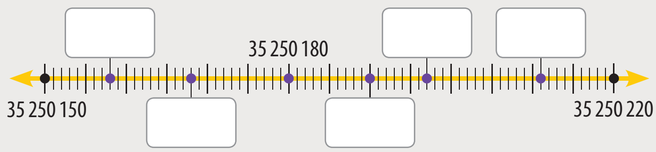
d. 99 999 ______ 100 000

e. 8939 ______ 8839

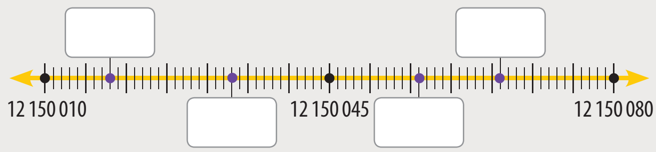
f. 1201 ______ 1210

3 Identifica los números representados en cada recta numérica. (5 puntos)

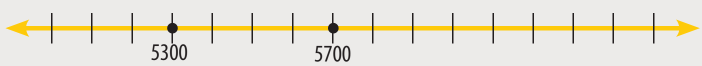
a.



b.



4 Ubica los siguientes números en la recta numérica: 6300, 5400, 6100 y 5000. (2 puntos)



¿En qué orden se suman y restan los números naturales?

¿Qué operación se resuelve primero en los ejercicios del ítem 6?

Resolver operaciones

5 Calcula las adiciones y las sustracciones. (8 puntos)

a. 3 + 5 + 10 – 6 – 4

b. 38 – 25 + 13 – 8

c. 12 – 9 + 35 – 12

d. 58 + 102 – 60 + 40

e. 17 + 16 + 30 – 2 – 1

f. 104 – 56 – 18 – 10

g. 305 – 35 – 100 + 195

h. 70 – 10 + 80 – 5 + 90 – 0

6 Resuelve las operaciones combinadas. (3 puntos)

a. 3 • 5 + 3 • 6 – 5

b. 8 • 4 – 8 • 3 + 8 • 2

c. 14 + 50 – 4 • 3

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
8 o más puntos	7 o menos puntos

¿Qué dificultades tuviste?

7 Completa con los números que faltan. (3 puntos)

a.

	6		0	2	5		3
+	1	3		7		1	
		4	3		7	5	7

b.

	7		4		8	8	5		4
–		5	4	7	3		2	1	3
	7	2		2		2		1	

c.

	7	0	3		5	4
–		5		9		2
	5		1	3	1	

¿Qué estrategias utilizas para resolver problemas?

Resolver problemas con números naturales

8 Resuelve los siguientes problemas: (10 puntos)

a. En la recta numérica, ¿qué números naturales se encuentran a dos unidades del 5?

b. Señala algún número par n que cumpla la siguiente condición: $5 < n < 9$.

c. La señora Julia, que tiene una cuenta en el almacén de su barrio, en una semana compró verduras por \$ 4565 y \$ 3800 en artículos de aseo. Si abonó \$ 6000 el sábado, ¿cuánto quedó en su cuenta?

d. ¿Cuál es el sucesor del sucesor de 5?

e. Si al sucesor de un número se le restan dos unidades, ¿qué número se obtiene con respecto al número original?

f. La temperatura de cierto líquido puesto al fuego sube 3 °C por minuto. Si al comienzo tenía una temperatura de 18 °C, ¿cuál sería su temperatura después de 4 minutos?, ¿y después de 20 minutos?

g. Rodrigo debe \$ 120 000, los que paga en cuotas de \$15 000 mensuales. ¿Cuántos meses se demorará en pagar toda su deuda en el caso que no haya intereses?

h. Teresa tenía 18 años hace 5 años. ¿Qué edad tendrá dentro de 5 años? y ¿qué edad tenía hace 10 años?

i. ¿Qué se obtiene al sumar cero a un número cualquiera?

j. Calcula:

$8 + 3$ y $3 + 8$

$15 + 47$ y $47 + 15$

- ¿Qué puedes concluir?
- ¿Crees que sucede lo mismo con cualquier par de números? Justifica.

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
6 o más puntos	5 o menos puntos

¿Qué errores cometiste?

Lección 1

¿Cómo es el conjunto de los números enteros?

Propósito

Conocer los números enteros y dar significado a los signos positivo y negativo.

¿Para qué?

Si el minuendo es menor que el sustraendo, no hay respuesta en el conjunto de los números naturales.

Por otro lado, en lo cotidiano, muchas situaciones como los husos horarios y las temperaturas se representan utilizando números enteros.

Palabras clave

Número positivo
Número negativo
Números enteros

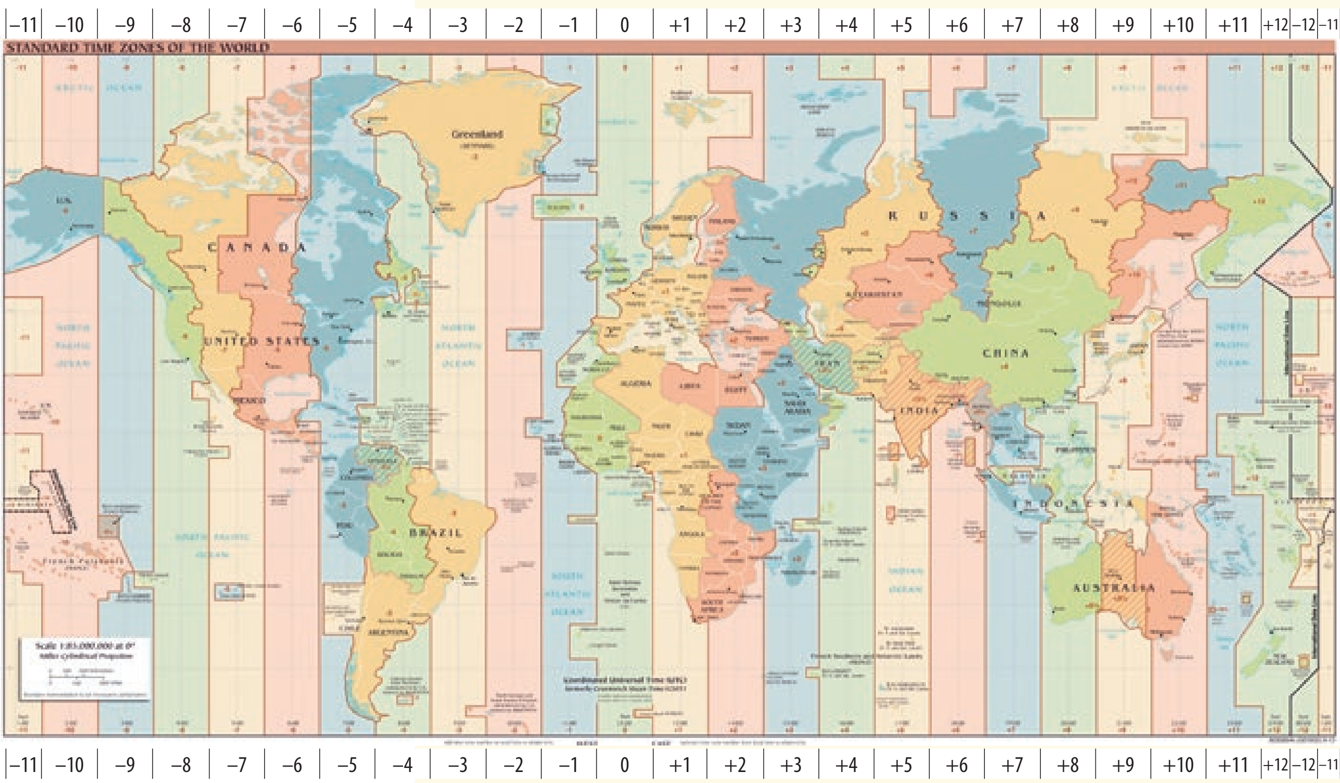
Taller El huso horario

Reúnanse en parejas y realicen la siguiente actividad:

El mapa muestra los llamados husos horarios. Estos son las 24 divisiones de la Tierra que forman áreas, a las que les corresponde una hora determinada. Hacia el este del meridiano de Greenwich (meridiano de referencia mundial) la hora aumenta en una unidad cada huso horario, y hacia el oeste disminuye en la misma proporción. Algunos países acomodan la hora no coincidiendo con el huso en que se encuentran, por ejemplo, a Chile continental le corresponde el huso –5, pero a partir de enero de 2015 utiliza de manera permanente el huso –3.

Respondan las siguientes preguntas de acuerdo al huso horario que geográficamente corresponde a los países nombrados.

1. Si un giro a la tierra tiene 360° y el día tiene 24 horas, ¿cuántos grados abarca cada huso horario?
2. Si en Greenwich son las 3 de la tarde, ¿qué hora será en Santiago?
3. Desde Chile continental, Ramón sale en un avión a las 10 de la noche, vuela hacia el este hasta llegar a Francia, ¿cuántas horas debe atrasar o adelantar su reloj?
4. Si Teresa quiere llamar a las 8 de la noche (hora de Chile continental) desde Egipto, ¿a qué hora debe llamar?
5. Averigüen algún lugar que tenga una diferencia horaria de 7 horas más y otra de 5 horas menos respecto de Chile.
6. ¿Por qué los husos horarios varían en dirección este-oeste y no norte-sur?
7. ¿Qué significa el signo negativo (–) y positivo (+) en el mapa?



Autor: Time Zone Boy Wikimedia Commons.

Situación Representar hechos cotidianos

Al inicio de la sección, cuando hablamos del *kril*, se destacaron algunas palabras necesarias para completar la información, como bajo cero o bajo el nivel del mar.

¿Cómo podemos representar este tipo de información?

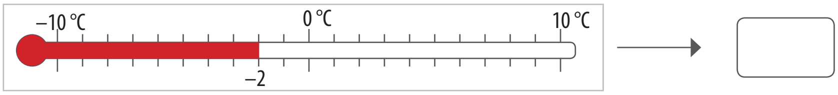
Paso 1 Identifica la información.

La temperatura del agua puede ser de 2 °C **bajo cero**.

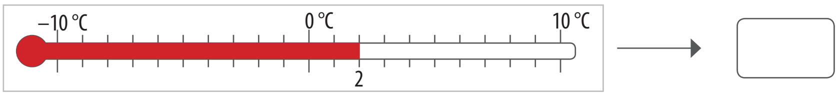
La temperatura del agua también puede ser de 2 °C **sobre cero.**

Paso 2 Asocia a una de esas expresiones un número negativo y a la otra, un número positivo y represéntalas en un termómetro.

La temperatura del agua puede ser de 2 °C **bajo cero**.



La temperatura del agua también puede ser de 2 °C **sobre cero**.



Así, conceptos como bajo el nivel del mar, gastos y déficit se indican con el signo ______________________. Por el contrario, sobre el nivel del mar, ganancias y superávit se asocian con el signo ______________________.

Ampliando

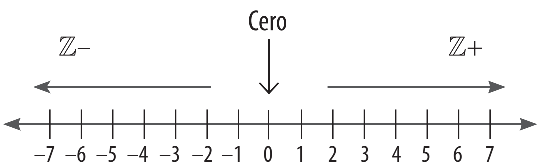
Michael Stifel
(1487 - 1567)

La difusión de los símbolos germánicos (+) y (–) se popularizó con el matemático alemán Stifel (1487 – 1567) en el siglo XV. Antes de ello se utilizaba la abreviatura de **p** para los positivos y **m** para los negativos.

Para concluir

- El conjunto de los **números enteros** está compuesto por los números positivos (naturales), el cero y los números negativos (inverso aditivo de cada natural). Este conjunto se denota con el símbolo $\mathbb{Z}$.

$$\mathbb{Z} = \{\ldots -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$$



El número –2 se lee "dos negativo o menos dos".
El número +2 se lee "dos positivo o dos". En estos casos, no es necesario anteponer el signo +.

- El **inverso aditivo** (opuesto) de cualquier número **x** es otro número que sumado con **x**, da como resultado cero.

Argumenta y comunica

- Si existen los números 2,7 y $\frac{1}{2}$, ¿existirán también los números –2,7 y $\frac{-1}{2}$? Discútelo con tus compañeros y compañeras.
- ¿Siempre los números opuestos entre ellos están a igual distancia del cero? Prueba con distintos valores.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Calcula mentalmente.

a. 12 – 8
b. 17 – 3
c. 27 + 7
d. 28 – 12 + 20
e. 58 – 5 + 12
f. 75 – 34

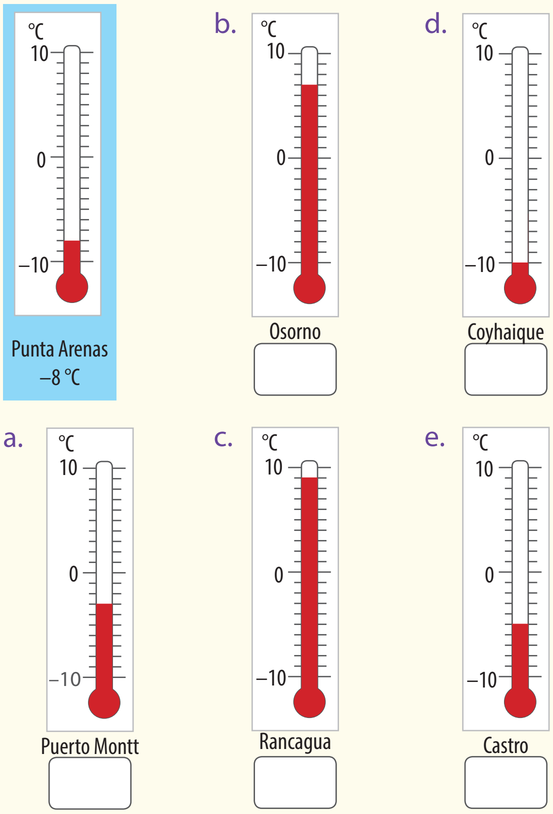
2. Analiza si las siguientes operaciones se pueden realizar en el conjunto de los números naturales. En los casos afirmativos, calcula el resultado.

a. 18 – 24
b. 24 – 18
c. 13 + 6 – 21
d. 2 • 5 – 10 • 3
e. 15 : 3 – 16 : 4
f. 24 : 6 – 40 : 10

3. ¿Qué operaciones entre números naturales siempre tienen solución en ese mismo conjunto?

Práctica guiada

4. Representa cada una de las temperaturas con un número entero. Luego responde.



f. ¿En qué ciudades se registraron temperaturas bajo cero?

g. ¿En qué ciudad se registró la menor temperatura?

5. Interpreta cada situación y represéntala con un número entero.

La ballena nada a 5 metros bajo el nivel del mar.

Como dice "bajo", se representa con el –5.

a. La paloma volaba a 3 metros de altura.

b. El estacionamiento del departamento de Ana está en el segundo subterráneo.

c. La temperatura mínima en Punta Arenas fue de 3 °C bajo cero.

d. La cima del cerro Ñielol se ubica a 335 metros sobre el nivel del mar.

e. En el mar chileno se encuentran fosas marinas de 9500 metros de profundidad.

f. La sonda exploratoria llegó a 3500 metros bajo el nivel del mar.

6. Escribe una oración asociada a cada número entero.

–4

En la madrugada
la temperatura fue de –4 °C o 4 °C bajo cero.

a. 0
b. –5
c. 700
d. –5400
e. –7800
f. 9 358 111

7. Escribe, en cada caso, una oración que tenga un significado opuesto al de la original e identifica los dos números involucrados.

El camión retrocedió 300 m.

El camión avanzó 300 m.

Retroceder: –300, y avanzar: 300.

a. El avión se elevó 250 m.

b. Ariel subió 6 pisos.

c. Cecilia ganó $ 1500 de interés mensual.

8. Representa con un dibujo los elementos de cada situación.

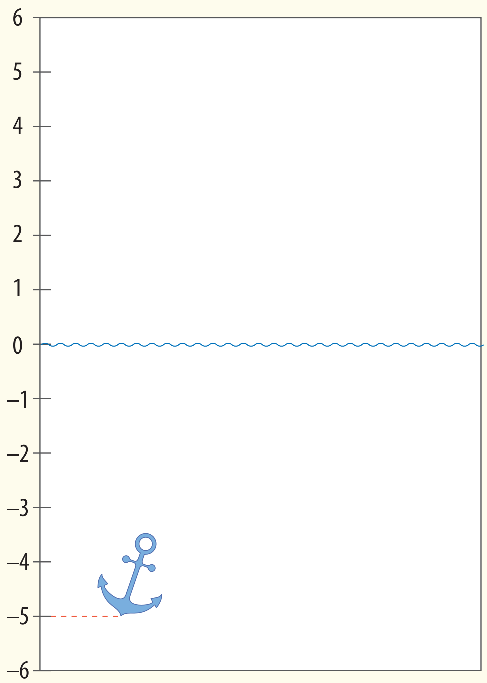
El ancla del barco está a
5 metros de profundidad.

a. Una estrella de mar está a 4 metros de profundidad.

b. Un pez está a un metro de profundidad.

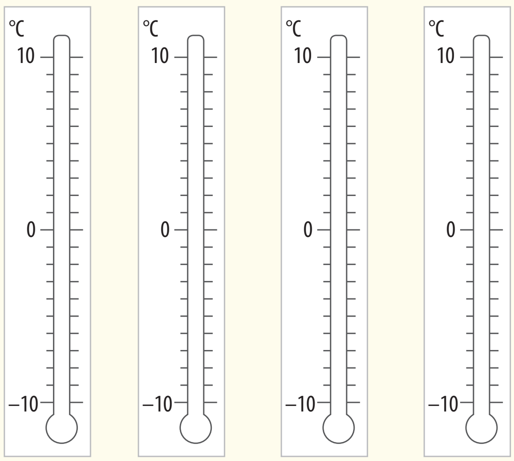
c. Un pelícano vuela a 5 metros de altura.

d. Un pulpo está a 2 metros de profundidad.



Aplica

9. **Representa en los termómetros las temperaturas que se indican.**



3 °C | 2 grados bajo cero | 8 °C | 4 grados bajo cero

10. **Señala si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Si es falsa, corrige el error.**

a. ______ El –7 pertenece a los números naturales.

b. ______ Los números enteros están compuestos por los números naturales, sus inversos aditivos y el cero.

c. ______ Bajar 5 metros puede expresarse como –5 m.

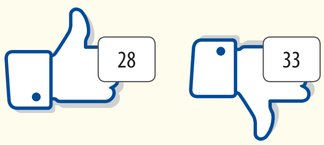
d. ______ El cero es un número entero.

e. ______ El –32 es un número entero positivo.

f. ______ El inverso aditivo de –18 es 18.

g. ______ Todos los números naturales también son enteros.

11. **Un nuevo video en Internet recibió la siguiente votación:**



a. Interpreta la información.

b. Escribe la información con números enteros.

12. **Desafío. Se sabe que el inverso aditivo de 8 es–8 y que el inverso aditivo del inverso aditivo de –8 es el mismo –8.**

Si se suma un número con su inverso aditivo 100 veces y se suman estos 100 resultados:

a. ¿Cuál será la suma total?

b. Y si se suman 101 veces en vez de 100, ¿cuál será el resultado?

Reflexiono

1. ¿Cuáles son las diferencias entre el conjunto de los números naturales y el conjunto de los números enteros?
2. ¿Todos los elementos del conjunto de los números naturales, tienen antecesor? Justifica tu respuesta con algunos ejemplos.

Refuerzo

1. Encierra en un círculo la operación que no se puede realizar en el conjunto de los números naturales.

   a. 5 – 3 b. 7 – 1 c. 5 – 11

2. Represent cada situación con un número entero.
   - La Gran Torre Santiago tiene 300 metros de altura.
   - El termómetro marca 18 grados bajo cero.

Lección 2

¿Cómo se pueden representar y ordenar los números enteros?

Propósito

Representar y ordenar números enteros.

¿Para qué?

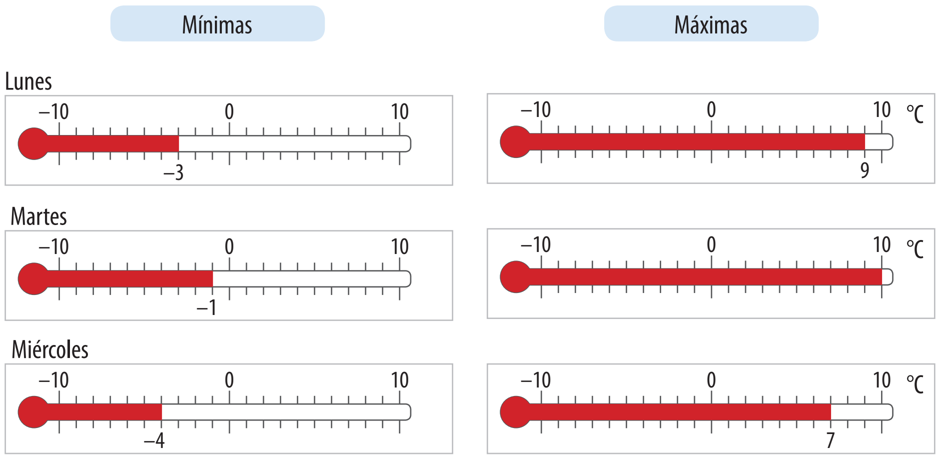
Una forma gráfica de representar números enteros es en la recta numérica. Ahí los números se visualizan, lo que permite establecer una relación de orden entre ellos y, por consiguiente, una comparación.

Palabras clave

Recta numérica
Mayor que: >
Menor que: <
Valor absoluto

Situación 1 Representar en la recta numérica

A continuación, se muestran las temperaturas mínimas y máximas de tres días en Coyhaique.



Para ver las diferencias de temperaturas, se quiere organizar la información en una misma gráfica. **¿Cómo ubicar los números en una recta numérica?**

Paso 1 Identifica los datos.

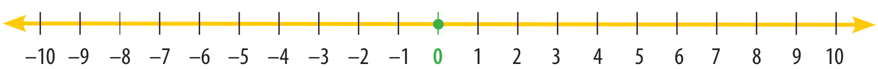
Temperaturas mínimas: ☐ ; ☐ ; ☐

Temperaturas máximas: ☐ ; ☐ ; ☐

Representa estos números en la recta numérica.

Paso 2 Marca el punto de referencia correspondiente al cero.

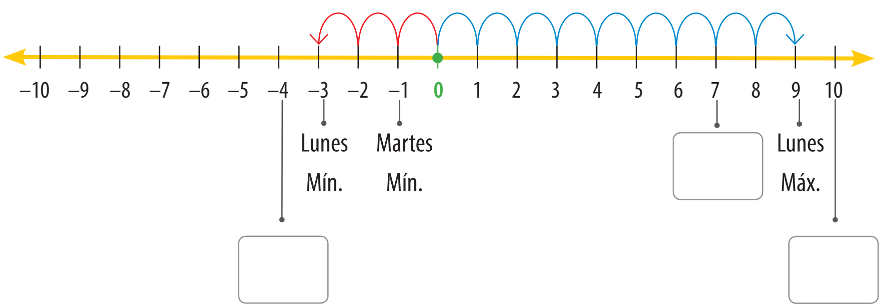
Realiza marcas equidistantes hacia la derecha y hacia la izquierda, para ubicar los números positivos y negativos, respectivamente.



Ayuda

Para graduar una recta debes considerar que su extensión sea adecuada de acuerdo a los números que quieras ubicar. Además, la separación entre cada uno de los números debe ser de igual tamaño.

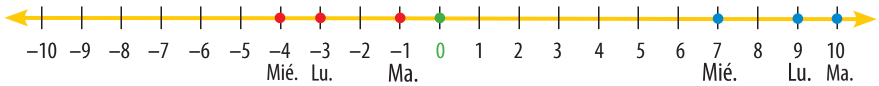
Paso 3 Ubica los números en la recta numérica.



Situación 2 Ordenar y comparar números enteros

¿Cómo saber qué temperatura es mayor o menor?

Paso 1 Ubica los números en la recta numérica.

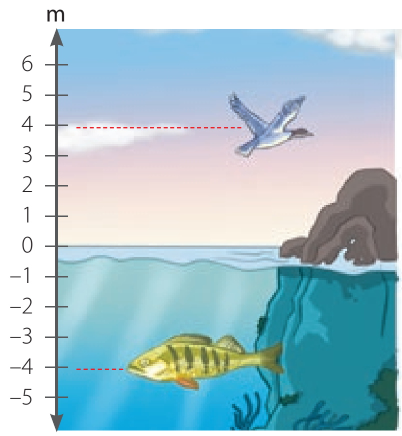


Paso 2 Observa la posición de los números y compara.

El número 9 está a la ________ del 7, por lo tanto, ☐ > ☐. Esto significa que la temperatura máxima del ________ fue mayor que la del ________.

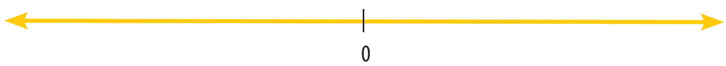
El número –4 está a la ________ del –3, por lo tanto, ☐ > ☐. Esto significa que la temperatura mínima del ________ fue menor que la del ________.

Situación 3 Representar el valor absoluto



Respecto a la imagen, **¿qué animal está más cerca de la superficie del mar?**

Paso 1 Representa en la recta numérica la ubicación de cada animal.



Paso 2 Calcula la distancia entre cada animal y la superficie.

Entre el pájaro y la superficie hay ________ metros.
Entre el pez y la superficie hay ________ metros.

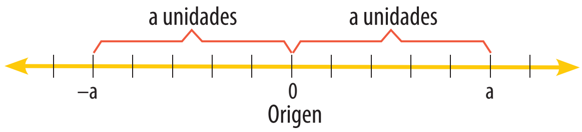
Paso 3 Compara las distancias.

______ es igual a ______, por lo tanto ambos están a ________ distancia de la superficie, este concepto de distancia se relaciona con el valor absoluto.

Para concluir

- El conjunto de los números enteros ($\mathbb{Z}$) se puede representar en forma ordenada en la **recta numérica**.
- Al comparar números enteros en la recta numérica horizontal:
  - Los números que están a la izquierda (de un valor de referencia) en la recta numérica son menores que él.
  - Los números que están a la derecha (de un valor de referencia) en la recta numérica son mayores que él.
- El **valor absoluto** de un número **a** se escribe $|a|$ y gráficamente corresponde a la distancia en la recta numérica entre **a** y cero.

$|a|$ = distancia de a con respecto al cero.



Argumenta y comunica

- Si dos números son negativos y el valor absoluto de uno es mayor que el valor absoluto del otro, ¿cuál es mayor?

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. En cada pareja de números, encierra el mayor.
   a. 2 y 7.
   b. 8 y 1.
   c. 204 y 240.
   d. 1500 y 1700.

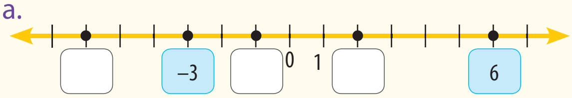
2. Ordena de mayor a menor cada grupo.
   a. 3, 5, 1, 8
   b. 0, 17, 24, 21, 36
   c. 101, 111, 110, 121
   d. 253, 114, 178, 428, 220

3. Representa en una recta numérica los siguientes números: 5, 8, 4, 6 y 9.

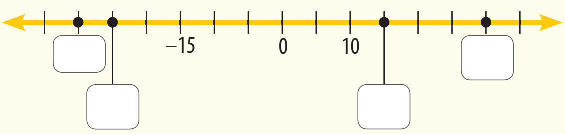
Práctica guiada

4. Escribe los números enteros según corresponda.

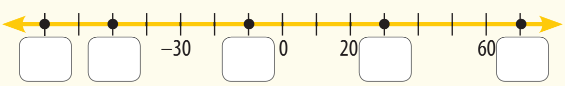
a.



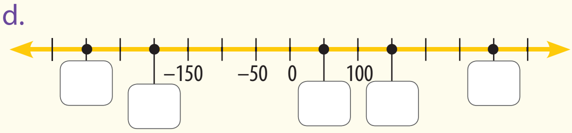
b.



c.



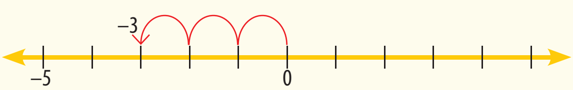
d.



5. Ubica cada número en la recta numérica.

$\boxed{-3}$

Es un negativo, por lo tanto, se ubica a la izquierda del 0.



a. –4
b. 2
c. –1
d. 4
e. –2
f. 3

6. Compara utilizando los signos > , < o =, según corresponda.

$\boxed{-4 \text{ y } -6}$

–4 está a la derecha de –6, por lo tanto, es mayor.
Luego, –4 > –6.

a. –8 ______ –5
b. –6 ______ 0
c. –12 ______ 5
d. –12 ______ –8
e. 8 ______ 0
f. –3 ______ 14

7. Une cada número de la columna A con su valor absoluto de la columna B.

A	B
a. –3	–3
b. 7	3
c. –5	4
d. 4	5
e. 3	7
f. –4	–4
g. –7	–7

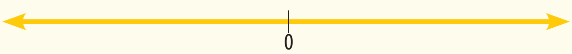
Aplica

8. Representa en la recta numérica cada grupo de números. Escoge la graduación adecuada.

a. –5, –3, 1, 2, 6.

b. 400, –600, 700, 300, –200.

c. –12, –8, 10, 4, 9.



9. Señala si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Si es falsa, corrige el error.

a. ______ El número –25 es menor que –100.
b. ______ El número –7 es mayor que –77.
c. ______ El número 14 es menor que –37.
d. ______ El opuesto de –5 es menor que el opuesto de 5.
e. ______ El número –4 está a 5 unidades del 1.
f. ______ El número 3 está a 6 unidades del 8.

10. Completa la tabla.

7 está a la derecha de 2	7 es mayor que 2	7 > 2
	–3 es menor que 1	
		6 > –5
	–1 es mayor que –4	
1 está a la izquierda de 2		
		0 < 3

11. Responde las siguientes preguntas:

a. ¿Qué número(s) tiene(n) un valor absoluto igual a 12?

b. ¿Qué número(s) está(n) a 6 unidades del 0?

c. ¿Qué número(s) entero(s) tiene(n) un valor absoluto menor que 2?

d. ¿Existe algún número cuyo valor absoluto sea negativo?

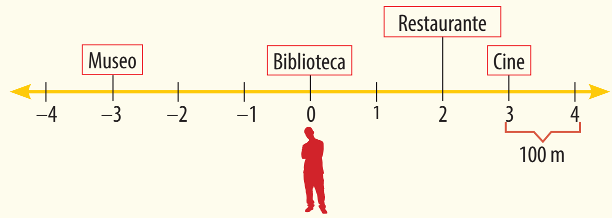
e. ¿Qué número(s) está(n) a 3 unidades del –2?

f. ¿Qué número se encuentra entre el 10 y el 14 y es par?

g. ¿Qué número(s) entero(s) se ubica(n) en la recta numérica entre el –1 y el 7 y es (son) impar(es)?

12. Interpreta la siguiente situación y luego responde.

Rodrigo está en la biblioteca, que se ubica en la posición del número cero. Considera que la distancia entre dos lugares con números consecutivos es 100 m.



a. Si Rodrigo camina al restaurante, ¿qué distancia recorrería?

b. Si Rodrigo camina hacia el museo, ¿a qué distancia se encontraría de la biblioteca una vez que llegue?, ¿por qué?

c. ¿Qué lugar le queda más lejos de donde estaba originalmente, el museo o el cine?

13. Conecta con la historia. A continuación, se entrega una lista de matemáticos con sus respectivos años de nacimiento.

Ordénalos desde el que nació primero hasta el último.

Pitágoras	______	582 a.C.
María Gaetana	______	1718 d.C.
Euclides	______	325 a.C.
Tales de Mileto	______	624 a.C.
Arquímedes	______	287 a.C.
Abel	______	1802 d.C.

14. Encuentra el error. Belén dibujó una recta numérica y cometió 3 errores. ¿Cuáles son?

15. Desafío. Si el número p está a m unidades del 0, ¿a qué distancia del 0 se ubica el opuesto de p?

Reflexiono

1. ¿Qué ventajas ofrece el uso de la recta numérica para resolver problemas con números enteros?
2. ¿De qué otra forma se podrían representar los números enteros? Comparte tu propuesta con el curso.

Refuerzo

1. Ubica en la recta numérica dos pares de números enteros tales que su distancia sea de 12 y 7 unidades, respectivamente.
2. Se ubican en la recta numérica los números –4 y 3. ¿Cuántas unidades a la derecha se debe trasladar el número 3 para que la distancia entre ellos sea el doble de la que había inicialmente?

Lección 3

¿Cómo sumar números enteros?

Propósito

Sumar números enteros.

¿Para qué?

A diario existen situaciones que se resuelven aplicando adiciones, sin embargo, en ocasiones los sumandos son cantidades negativas, como al sumar las pérdidas de dinero en empresas o al calcular los metros de excavación en una construcción, entre otras.

Palabras clave

Adición
Sumando
Valor absoluto

Materiales

– 12 fichas de color rojo
– 12 fichas de color azul
– Dos dados

Taller Juego de los sumandos enteros

Formen parejas y reúnan los materiales indicados y jueguen.

Cada participante juega con fichas de un solo color: las rojas representan los números negativos y las azules, los positivos.

Ambos jugadores lanzan los dados por turnos, toman tantas fichas de su color como los dados lo indiquen y las colocan sobre la mesa.

Las fichas se irán descartando de a pares, una azul con una roja, y las sobrantes en la mesa se las llevará el jugador al que le corresponde el color de las fichas.

Gana el participante que obtenga la mayor cantidad de fichas, por ejemplo:

<u>Partida 1</u>

El participante A obtiene un 4 y el B, un 6.

	Representación	Asociación numérica
Participante A		–4
Participante B		+6

Se aplica la regla del juego y quedan en la mesa dos fichas azules, que representan un +2, las que son recogidas por el participante B.

<u>Partida 2</u>

El participante A obtiene un 6 y el B, un 4.

	Representación	Asociación numérica
Participante A		
Participante B		

1. Completen la tabla con la asociación numérica del resultado de cada jugador.
2. Al aplicar las reglas del juego, ¿qué número quedó representado en la mesa?, ¿quién ganó esta partida?
3. ¿Existe similitud entre el resultado de la partida 1 y 2?, ¿por qué?

<u>Partida 3</u>

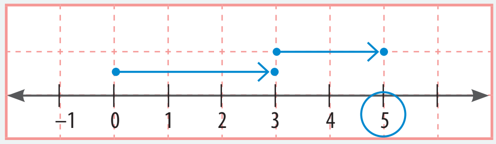
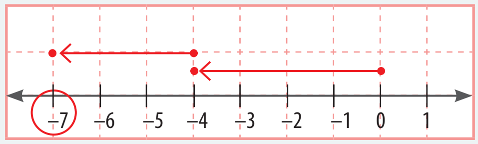
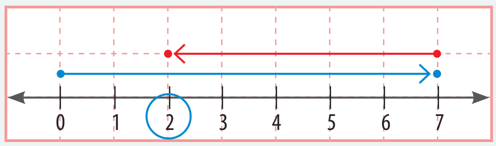
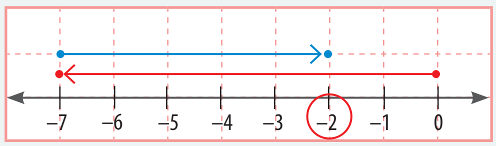
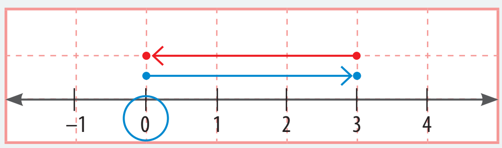
El participante A obtiene un 3 y el B saca lo mismo.

	Representación	Asociación numérica
Participante A		
Participante B		

4. Completen la tabla con la asociación numérica del resultado de cada jugador.
5. ¿Qué jugador ganó esta partida? Justifiquen su respuesta.
6. Juega con tu compañero y anoten en sus cuadernos los resultados de 10 partidas. ¿Quién ganó?, ¿por qué?
7. Si cada partida representa una adición de números enteros, ¿qué reglas pueden deducir? Compartan y discutan con el curso.

Situación Sumar números enteros

En algunas partidas del juego anterior el resultado fue negativo, en otras positivo y en otras cero. Analizaremos estos distintos casos de adición con el apoyo de la recta numérica, donde para sumar un número positivo se avanza y para sumar uno negativo se retrocede.

Caso	Adición	Procedimiento	Representación gráfica	Total
Ambos sumandos son positivos.	(+3) + (+2)	Marca desde el 0 al 3, luego avanza 2 unidades y quedarás en el +5.		5
Ambos sumandos son negativos.	(–4) + (–3)	Marca desde el 0 al –4, luego retrocede 3 unidades y quedarás en el –7.		
Un sumando es positivo y el otro es negativo.	(+7) + (–5)	Marca desde el 0 al 7, luego retrocede 5 unidades y quedarás en el 2.		
	(–7) + (+5)	Marca desde el 0 al –7, luego avanza 5 unidades y quedarás en el –2.		
Un sumando es el inverso aditivo del otro.	(+3) + (–3)	Marca desde el 0 al +3, luego retrocede 3 unidades y quedarás en el 0.		

Para concluir

Para **sumar números** enteros:

- Si los sumandos son del **mismo signo**, se suman los valores absolutos y se conserva el signo.
- Si los sumandos son de **distinto signo**, se restan los valores absolutos (al mayor le restamos el menor) y se conserva el signo del número de mayor valor absoluto.

Argumenta y comunica

- Dados dos números **m > 0** y **n < 0**, ¿se puede saber el signo de **m + n**?, ¿cómo? Si no es así, ¿qué otra información se necesita?

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Calcula mentalmente.

a. 15 + 3
b. 18 + 5
c. 21 + 18
d. 150 + 30
e. 180 + 50
f. 210 + 180

2. Resuelve las operaciones.

a. 25 + 2 • 72 + 12
b. 120 – 40 + 6 • 8
c. 18 + 5 • 4 – 20
d. 12 358 • 0 + 768 • 1

3. Determina el valor absoluto.

a. |0|
b. |6|
c. |–32|
d. |3 + 7|

Práctica guiada

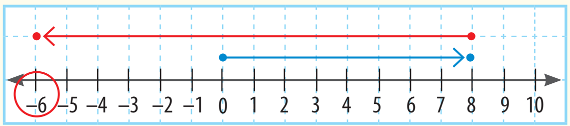
4. Determina el signo del resultado de la adición.

(–3) + (–5)

Como ambos sumandos son negativos, el resultado de la adición también tiene signo negativo.

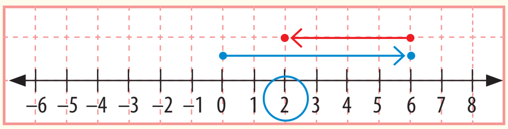
a. 7 + 5
b. (–8) + (–2)
c. 0 + (–7)
d. 13 + 0
e. (–120) + 18
f. (–13) + (–5) + (–6)

5. Escribe la adición representada en cada caso.



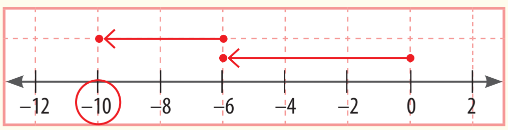
8 + (–14)

a.



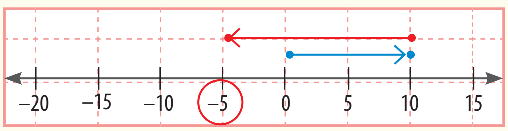
________ + ________ = ________

b.



________ + ________ = ________

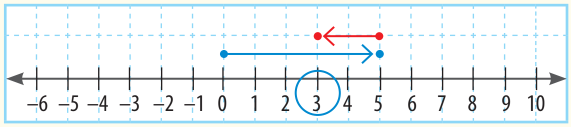
c.



________ + ________ = ________

6. Representa cada adición en la recta numérica y calcula su resultado.

5 + (–2) = 3



a. (–12) + (–5)
b. 18 + (–11)
c. 8 + (–3)
d. 9 + (–14)

7. Suma cada número dado siguiendo la secuencia de la figura.

Entra el $\boxed{-2}$ $\xrightarrow{+}$ $\boxed{-3}$ $\xrightarrow{+}$ $\boxed{4}$ → Sale el $\boxed{}$

Paso 1 Suma al número el primer término de la secuencia: (–2) + (–3) = –5.

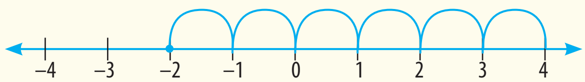
Paso 2 Suma a este resultado el segundo término de la secuencia: (–5) + 4 = –1.

Luego, el número que sale es –1.

a. Entra el –3, sale el ________
b. Entra el 3, sale el ________
c. Entra el 11, sale el ________
d. Entra el –7, sale el ________

8. Completa con el término que falta. Para ello, apóyate en la recta numérica.

(–2) + ________ = 4



Ubica en la recta el sumando dado (–2) y observa cuánto se avanza o retrocede para llegar al resultado (4). Luego, la cantidad de saltos es el término que falta (6), con su signo correspondiente.

a. (–5) + ________ = –6
b. 15 + ________ = 11
c. ________ + 12 = 19
d. (–3) + ________ = –5
e. ________ + (–4) = –10
f. (–14) + ________ = 0

Aplica

9. Completa con la palabra que falta.

a. Al sumar números enteros negativos, el resultado es un número entero

______________________________.

b. Al sumar números enteros positivos, el resultado es un número entero

______________________________.

c. Al sumar un número con su opuesto, el resultado es

______________________________.

10. La recepción de un hotel se encuentra en el nivel 0. Hacia arriba los pisos comienzan con el 1 y hacia abajo, con el –1.

a. Yolanda, quien reparte periódicos en el hotel, se encontraba en el piso 7, luego bajó 3 pisos, después subió 7 y finalmente bajó otros 5. ¿A qué piso llegó?

b. ¿Cuántos pisos debe subir el ascensor si está en el –5 y lo llaman del 12?

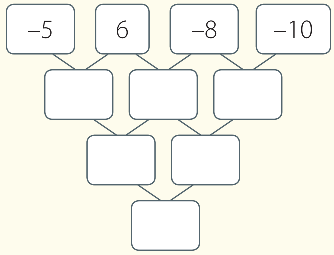
11. Don Gustavo tiene una cuenta en el almacén de su barrio. El lunes compró mercadería por $ 7500, el martes compró verduras por $ 3600 y el miércoles abonó $ 10 000. ¿En qué situación quedó su cuenta si antes del lunes no debía?

12. Un termómetro marca –4 °C a las 4 de la mañana. Si la temperatura aumenta 2 °C cada hora, ¿qué temperatura habrá al mediodía?

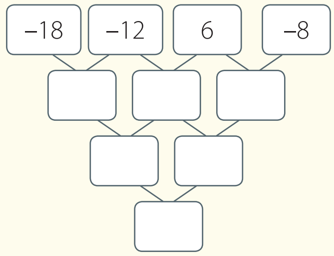
13. Un grupo de amigos va a escalar un cerro. A medida que suben, la temperatura baja 1 °C cada 150 metros. Si la temperatura era de 22 °C cuando comenzaron a subir, ¿qué temperatura habrá cuando hayan ascendido 900 metros?

14. Completa sumando los números de a pares.

a.



b.



15. **Juego.** Completa los cuadrados mágicos.

Recuerda que la suma de las columnas y de las filas debe ser la misma.

a.

–10		–6
	–4	
–2		2

b.

12		4
–8	0	
		–12

16. **Desafío.** Suma –3 a cada número dado en el cuadrado mágico a. del ejercicio anterior y determina si el resultado también es un cuadrado mágico.

17. **Argumenta.** Toño dice que para sumar (–3) + (–2) + (–8) puede sumar 3 + 2 + 8 y hallar el opuesto de la suma obtenida.

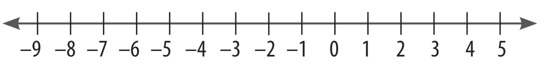
Explica con tus palabras la estrategia de Toño.

Reflexiono

Con respecto a la adición de números positivos en el conjunto de los enteros, ¿es posible aplicar el mismo procedimiento si se quiere sumar solo números negativos?, ¿y si los números fuesen positivos y negativos?

Refuerzo

1. Representa en la recta numérica la siguiente operación: –8 + 5 – 4.



2. ¿Cuál es el número que se ubica a la misma distancia en la recta numérica, de los números –8 y 4?

Lección 4

¿Cómo restar números enteros?

Propósito

Restar números enteros.

¿Para qué?

Hay distancias que se obtienen a partir de operaciones con números negativos. Por ejemplo, si se quiere saber cuántos metros hay entre dos buzos que están a 4 y 7 metros, respectivamente, bajo el nivel del mar. Resolver este tipo de situaciones implica restar las cantidades asociadas, en este caso, las profundidades de los buzos.

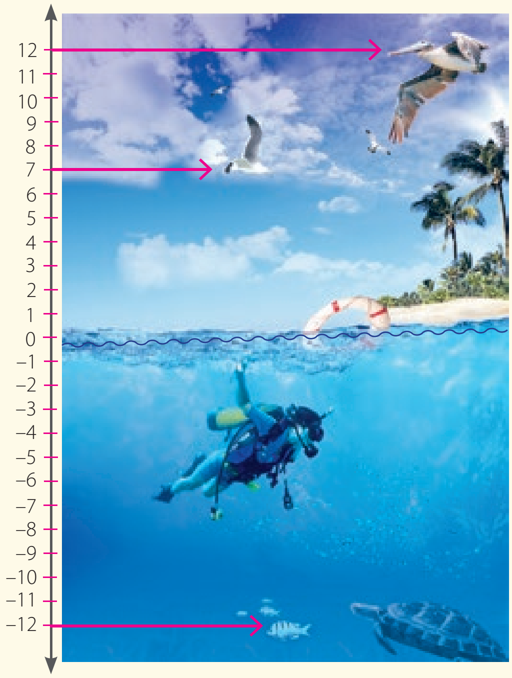
Palabras clave

Inverso aditivo u opuesto
Sustraendo
Minuendo

Taller Bajando a las profundidades con los números enteros

Reúnanse en parejas y realicen las siguientes actividades:

Un pelícano que vuela a 12 m de altura ve un cardumen de peces y baja, cruzándose con una gaviota a los 7 m de altura, hasta que llega al cardumen que está a 12 m bajo el nivel del mar.



1. ¿Cuántos metros había bajado el pelícano cuando se cruzó con la gaviota? Para calcular la distancia requerida, ¿qué operación se debe plantear?

____

____

2. ¿Cuántos metros bajó el pelícano hasta el nivel del mar? Representen en la recta numérica.

–12 –11 –10 –9 –8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

3. ¿Cuántos metros bajó desde el nivel del mar hasta el cardumen? Representen en la recta numérica.

–12 –11 –10 –9 –8 –7 –6 –5 –4 –3 –2 –1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

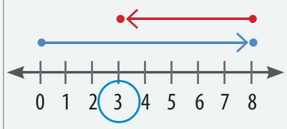
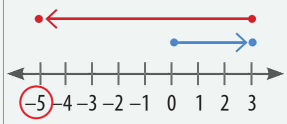
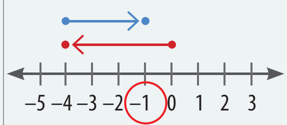
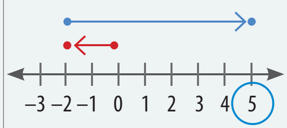
4. ¿Cuántos metros recorrió en total el pelícano? Escriban una sustracción que permita calcular la respuesta.

____

____

Situación Restar números enteros

Con el taller anterior viste que la sustracción de números enteros se puede representar en la recta numérica retrocediendo en ella, al igual que cuando restamos un número positivo, que es lo mismo que sumar el inverso aditivo del número. Analiza algunos casos.

Caso	Sustracción	Expresión como adición del inverso aditivo	Representación gráfica	Total
Ambos términos son positivos y el minuendo es mayor que el sustraendo.	(+8) – (+5)	(+8) + (–5)		3
Ambos términos son positivos y el minuendo es menor que el sustraendo.	(+3) – (+8)	(+3) + (–8)		
Ambos términos son negativos y el minuendo es menor que el sustraendo.	(–4) – (–3)	–4 + (+3)		
Ambos términos negativos. El minuendo es mayor que el sustraendo.	(–2) – (–7)	(–2) + (+7)		

Ampliando

En una sustracción:

a – b = c

a: Minuendo; b: Sustraendo; c: Resta

¿Existen otros casos de sustracción? Muestra al menos dos diferentes a los presentados.

¿Por qué en una sustracción si el sustraendo es negativo este se coloca entre paréntesis?

Para concluir

- La **resta de números enteros** se obtiene sumando al minuendo el **inverso aditivo** del sustraendo.
- La sustracción y la adición de números enteros se pueden combinar para generar una **operación combinada**. En este caso, puedes:
  - Transformar las sustracciones en adiciones.
  - Operar de izquierda a derecha.

Argumenta y comunica

- Observa los resultados:

  3 – 7 = –4

  3 + (–7) = –4

  (–4) – (–5) = 1

  (–4) + 5 = 1

  ¿Qué relación observas entre los resultados de las operaciones del mismo color? ¿Por qué sucede esto? Aplica el procedimiento a otros números y comprueba la veracidad de tus conclusiones. Discútelo con un compañero o compañera.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Calcula mentalmente. Para esto, descompón los números.
   a. 715 – 13
   b. 328 – 17
   c. 435 – 8
   d. 598 – 31

2. Señala las sustracciones que pueden resolverse en el conjunto de los números naturales.
   a. 3 – 5
   b. 21 – 18 – 4
   c. 25 – 13
   d. 86 – 21 – 42

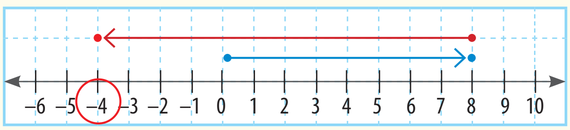
3. Resuelve las sustracciones.
   a. 9 – 4
   b. 12 – 7
   c. 18 – 0
   d. 25 – 13
   e. 12 – 5 – 3
   f. 36 – 19 – 5
   g. 55 – 11 – 40
   h. 107 – 25 – 23

Práctica guiada

4. Une cada sustracción con la adición del opuesto que corresponde.

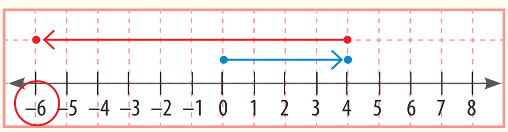
a. 12 – 8	(–6) + (–9)
b. (–6) – 9	18 + 6
c. 3 – 15	(–3) + 4
d. 4 – (–5)	12 + (–8)
e. (–3) – (–4)	3 + (–15)
f. 18 – (–6)	(–12) + 8
g. (–12) – (–8)	4 + 5

5. Escribe las sustracciones representadas.



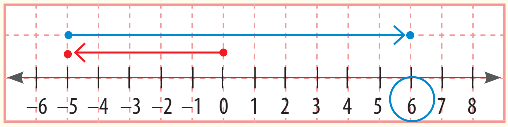
8 – 12 = –4

a.



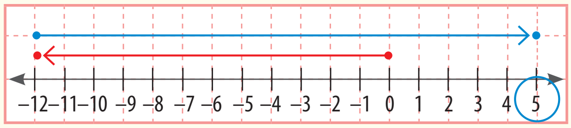
_____ ◯ _____ = _____

b.



_____ ◯ _____ = _____

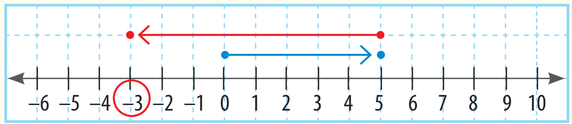
c.



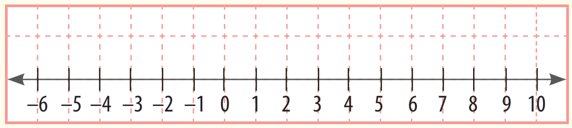
_____ ◯ _____ = _____

6. Resuelve cada sustracción representándola en la recta numérica.

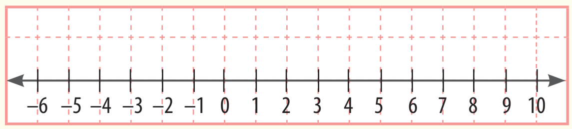
$\boxed{5 - 8 = -3}$



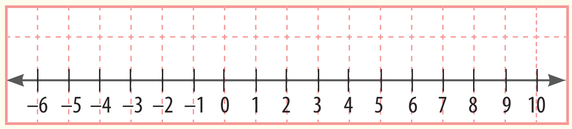
a. (–3) – (–4) = _____



b. 7 – (–2) = _____



c. 8 – 10 = _____



7. Completa la tabla.

x	y	x – y	y – x	x – (–y)	(–x) – (–y)
3	4	3 – 4 = –1	4 – 3 = 1	3 – (–4) = 7	(–3) – (–4) = 1
5	–3				
–8	2				
–3	–4				

Aplica

8. Resuelve las sustracciones.

a. 37 – 29

b. 15 – 24

c. 1000 – 1049

d. 120 – (–78)

e. 130 – (–210)

9. Calcula las operaciones.

a. (–15) – 15 + (–30)

b. 125 + (–220) – (–120)

c. 12 – 15 + (–9) – (–15) – 12

d. (–10) + (–8) + 7 – 6 + (–12) – 0

10. Completa restando cada par de números considerando como minuendo el de la izquierda.

a. –6 | 14 | 12 | –14

b. –8 | 4 | –12 | –20

11. Una persona tiene una deuda de $ 15 000 y necesita saber en qué situación queda si:

a. Gasta $ 6000.

b. Abona $ 6000.

12. Un buzo se encuentra a 20 m bajo el nivel del mar y bajo él hay un submarino a 30 m bajo el nivel del mar. ¿Cuál es la distancia entre el buzo y el submarino?

13. El precio del dólar el lunes pasado era $ 530, el martes bajó $ 3, el miércoles subió $ 6, el jueves se mantuvo constante y el viernes subió $ 2. ¿Cuál fue el precio del dólar el viernes?

14. Si se pone un envase con agua a 20 °C en el congelador, su temperatura baja 4 °C cada hora. ¿Cuántas horas se necesitan para que el agua se congele si esto sucede a los 0 °C? Explica el procedimiento que seguiste.

15. Si Antonio tuviera 15 años menos, su edad sería 15 años. ¿Cuántos años tendrá en 15 años más?

16. **Argumenta.** Dentro de los números naturales no siempre se puede calcular la diferencia entre dos números, por ejemplo 3 – 5. ¿Qué operación piensas que no siempre tendrá un resultado en los números enteros? Da un ejemplo.

17. **Crea.** A partir de la siguiente operación, plantea un problema y resuélvelo.

$$(-13\,000) - 6500$$

18. **Demuestra.** En una sustracción, ¿es siempre la resta menor que el minuendo? Si no es así, plantea dos contraejemplos.

19. **Desafío.** Alfredo tenía $ t, gastó $ m y ganó $ p. Escribe una expresión que represente el dinero que tiene Alfredo actualmente.

Reflexiono

1. ¿Estás de acuerdo con la afirmación: "siempre que restamos números enteros el resultado es positivo"? Justifica con dos ejemplos.
2. Considerando 11 – 17 + 3, ¿el resultado es el mismo si se resuelve de izquierda a derecha que si se hace de derecha a izquierda? Explica.

Refuerzo

1. La temperatura en una ciudad baja de –3 °C a –9 °C durante la noche. ¿Cuántos grados disminuyó?
2. Pedro y Anita resuelven un ejercicio, pero no llegan al mismo resultado. Señala quién lo resolvió correctamente y justifica.

Pedro	Anita
–12 + 15 + (–15)	–12 + 15 + (–15)
+ 3 + (–15)	–12 + 0
12	–12

Lección 5

¿Cuáles son las propiedades de la adición de números enteros?

Propósito

Facilitar las operaciones con números enteros a partir de sus propiedades.

¿Para qué?

En la adición, es posible identificar ciertas reglas que se cumplen al trabajar con números enteros. El buen uso de los paréntesis y de las propiedades en el desarrollo de los ejercicios permiten resolver problemas y facilitan el cálculo.

Palabras clave

- Propiedades de la adición
- Elemento neutro
- Inverso aditivo u opuesto
- Conmutatividad
- Asociatividad
- Clausura

Taller Regularidades en la adición

Reúnanse en parejas y realicen la actividad propuesta. Completen la tabla y luego respondan las preguntas.

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª
a	b	c	a + b	b + a	a + (–a)	c + 0	(a + b) + c	a + (b + c)	–(–a)
–3	–6	–5							
–2	–4	–3							
–1	–2	1							
1	2	3							
2	4	5							

1. Comparen la **3.ª** columna con la **7.ª**. ¿Qué hipótesis podrían formular? Averigüen cómo se llama esta propiedad.
2. Observen los valores de la **6.ª** columna. ¿Cómo podrían describir lo que sucede? ¿Piensan que esta propiedad se cumple para cualquier entero? Justifiquen sus respuestas.
3. Comparen las columnas **4.ª** y **5.ª**. ¿Qué propiedad de la adición de números naturales se estaría cumpliendo también en los números enteros?
4. Observen los encabezados de las columnas **8.ª** y **9.ª**. ¿Qué significa la presencia de paréntesis en cada ejercicio de esas columnas? ¿Cómo son los resultados de ellas?, ¿por qué?
5. Expliquen con sus palabras el significado de los resultados obtenidos en la columna **10.ª**.

Para concluir

Las **propiedades de la adición** de números enteros son las que se presentan a continuación. Estas facilitan los cálculos de las operaciones.

Elemento neutro: el elemento neutro para la adición es el cero. Esto significa que si a cualquier número entero se le suma cero, el resultado es el mismo número.

$$a + 0 = a, \quad a \in \mathbb{Z}$$

Inverso aditivo u opuesto: dos números son opuestos si al sumarlos se obtiene cero como resultado.

$$a + (-a) = 0, \quad a \in \mathbb{Z}$$

Conmutatividad: el orden de los sumandos no varía la suma.

$$a + b = b + a, \quad a, b \in \mathbb{Z}$$

Asociatividad: el modo de agrupar los sumandos no varía el resultado.

$$(a + b) + c = a + (b + c), \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

Clausura: toda adición de números enteros tiene resultado en $\mathbb{Z}$.

Argumenta y comunica

- ¿Estas propiedades también se cumplen en la resta de números enteros? Justifica y comenta con tus compañeros.
- ¿Cuál de estas propiedades no se cumple en el conjunto de los números naturales? ¿Por qué?

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. **Identifica los números del recuadro que cumplen con la condición dada y escríbelos donde corresponda.**

0	8	–4	–8
4	–7	11	3

a. El inverso aditivo de 8: ________.

b. El resultado de (–7) + 0: ________.

c. El opuesto del opuesto de 4: ________.

d. El resultado de 5 + (2 + (–4)): ________.

Práctica guiada

2. **Une con una flecha las propiedades y sus ejemplos.**

a. Propiedad asociativa	–9 + 0 = –9
b. Elemento neutro	2 + (–6) = (–6) + 2
c. Propiedad conmutativa	[–8 + 4] + (–6) = – 8 + [4 + (–6)]
d. Inverso aditivo	0 + (–4) = –4 5 + (–5) = 0

3. **Reconoce la propiedad que se utilizó en cada ejercicio.**

[20 + (–3)] + (–1) = 20 + [(–3) + (–1)]

Asociatividad

a. 26 + (–76) = (–76) + 26

b. [5 + (–13)] + 12 = 5 + [(–13) + 12]

c. 19 + (–8) + (–15) = 19 + (–15) + (–8)

4. **Escribe dos propiedades de la adición y plantea un ejemplo en cada caso.**

Propiedad asociativa

[2 + (–3)] + 5 = 2 + [(–3) + 5]

a. Propiedad ________________

Ejemplo: ________________

b. Propiedad ________________

Ejemplo: ________________

Aplica

5. **Evalúa si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Fundamenta ambas.**

a. ____ Al resolver –25 + 25, el resultado es el elemento neutro para la adición.

b. ____ Al sumar un número entero con el elemento neutro para la adición resulta el elemento neutro.

c. ____ Un número entero y su inverso aditivo tienen igual valor absoluto.

d. ____ El valor absoluto de un número entero siempre tiene un inverso aditivo negativo.

6. **Verifica algunas propiedades de la adición en ℤ. Luego, explícalas con tus palabras.**

a. Conmutativa: 3 + (–5) = (–5) + 3

b. Asociativa: (–5 + 3) + (–16) = –5 + (3 + (–16))

c. Elemento neutro: –5 + 0 = –5

d. Inverso aditivo: –16 + –(–16) = 0

7. **Encuentra el error y luego corrígelo.**

–15 + 7 – 2 – 9

= (–15 + 7) – (2 – 9)

= –8 – (–7)

= –8 + 7

= –1

Reflexiono

1. ¿Por qué hay propiedades que no se cumplen en los números naturales, pero sí en los números enteros? Justifica tu respuesta.

2. Se afirma que sumar (–3) + 5 + (–8) + 4 es igual a sumar (–3) + (–8) + 5 + 4, ¿es correcto? Justifica.

Refuerzo

Un submarino se encuentra a 20 metros bajo el nivel del mar. Si luego baja 3 metros más, ¿cuántos metros deberá subir en total para salir del agua?

Mural

Actitud: Demostrar interés y perseverancia en la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.

¡Cuidado con los personajes medievales!

La baraja española destaca entre todos los juegos de cartas del mundo por la riqueza de sus diseños. Ello se debe a que las figuras son de inspiración medieval y sus palos representan los distintos estamentos de la época: comerciantes, clero, nobleza y siervos, a través de oros, copas, espadas y bastos, respectivamente. Por otro lado los personajes medievales representados en las cartas, sota, caballo y rey, simbolizan a los jóvenes al servicio del reinado (pajes), a los hombres de la caballería y al poder máximo del monarca, respectivamente.

Con ella, puedes realizar diversos juegos en grupos, en los cuales puedes aplicar estrategias para obtener el triunfo.

A continuación, te invitamos a que juegues con tus compañeros o compañeras utilizando la baraja española, en donde deberán aplicar propiedades de la sección de números enteros.

¿Cómo jugar?

- Reúnanse en grupos de cuatro participantes. En cada partida se reparten 5 cartas a cada jugador.
- Volteen las cartas sobre la mesa y sumen los puntos. Recuerden anotar en una tabla el puntaje obtenido en la partida.
- Realicen 5 partidas. Gana el jugador que logre el mayor puntaje, tras sumar todos los puntos obtenidos en las 5 partidas.

Materiales:
2 mazos de naipe español

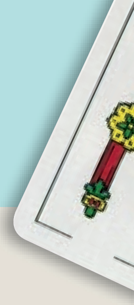
Reglas del juego

En cada partida, cada jugador al ver sus cartas tiene derecho a pedir un cambio de dos cartas como máximo antes de voltear.

Los números de las cartas con los personajes medievales (sota, caballo y rey) representan puntaje negativo.

El jugador que obtenga el puntaje más alto de cada partida puede exigir el cambio de todas las cartas de su mano por las de otro jugador, una vez en la próxima partida.

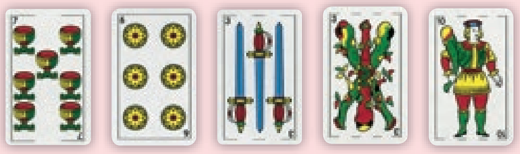
El jugador que obtenga el puntaje más bajo de cada partida no juega en la siguiente.



Veamos un ejemplo:

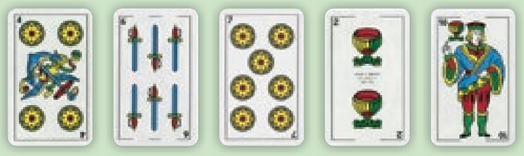
PARTIDA

JUGADOR 1



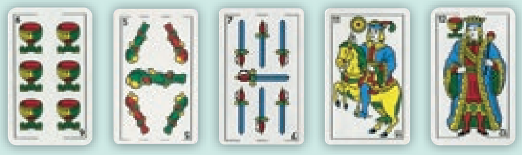
7 + 6 + 3 + 3 − 10 = 9

JUGADOR 2



4 + 6 + 7 + 2 − 10 = 9

JUGADOR 3



6 + 5 + 7 − 11 − 12 = –5

JUGADOR 4

–11 + 7 + 3 + 4 + 2 = 5

Anoten sus resultados aquí:

	PARTIDA 1	PARTIDA 2	PARTIDA 3	PARTIDA 4	PARTIDA 5	PUNTAJE TOTAL
JUGADOR 1						
JUGADOR 2						
JUGADOR 3						
JUGADOR 4						

ACTIVIDAD EN GRUPO

Cuando haya terminado el juego, responde en tu cuaderno:

1. ¿Cuál es el mayor puntaje que se puede obtener en la primera partida?, ¿y el menor?
2. En una partida, ¿pueden dos jugadores obtener el mismo puntaje negativo?
3. Si un jugador ha ganado en las 3 primeras partidas, ¿significa que será el vencedor del juego? Justifica tu respuesta.
4. Si durante una partida tienes la posibilidad de cambiar las cartas de tu mano por las de otro jugador, ¿qué aspectos considerarías para tomar esa decisión? Argumenta y da un ejemplo.

¿Cómo voy?

Lección 1: Conocer los números enteros y dar significado a los signos positivo y negativo

1. Completa la tabla con las palabras a las que le asignarías un número positivo (+) o uno negativo (–).

a. Crecimiento
b. Deuda
c. Ingresos
d. Ganancia
e. Pérdida
f. Bajar

+			
–			

2. Escribe el número entero que representa la situación.

a. Déficit de 50 mm de agua.

____

b. Crecimiento de 20 cm.

____

c. 30 m bajo el nivel del mar.

____

d. 12 °C bajo cero.

____

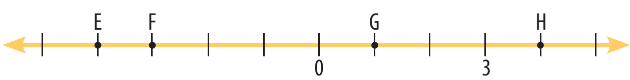
3. Crea una situación que se pueda representar con números positivos y negativos.

Lección 2: Representar y ordenar números enteros

4. Ubica en la recta numérica los siguientes números enteros.

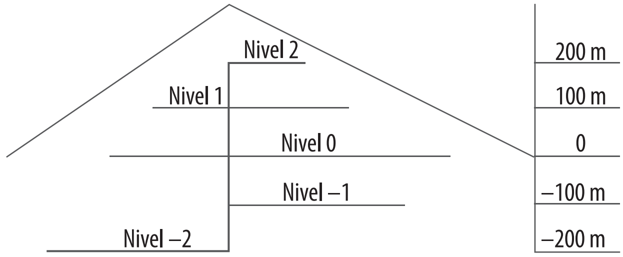
a. 0
b. –4
c. 5
d. –1
e. 3
f. –3

5. Identifica los números representados en la recta numérica.



a. E ⟶ _______
b. F ⟶ _______
c. G ⟶ _______
d. H ⟶ _______

6. El esquema muestra el corte de una mina.



a. ¿Cuál es la distancia entre el nivel 2 y el nivel –1?
b. ¿Cuál es la distancia entre los niveles –2 y 0?
c. Se quiere construir un nuevo nivel exactamente en la mitad entre los niveles 0 y –1 ¿Cuántos metros bajo el nivel 0 estaría?

Lección 3: Sumar números enteros

7. Escribe el inverso aditivo de cada número.

a. 3 ⟶ _______
b. –5 ⟶ _______
c. 10 ⟶ _______
d. –18 ⟶ _______

8. Une las adiciones con el signo que le corresponde el resultado.

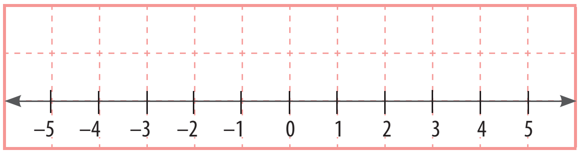
a. (–3) + 1
b. 4 + (–5)
c. 8 + 3
d. (–11) + 5
e. (–2) + 7
f. 12 + 15
g. (–6) + (–4)

+

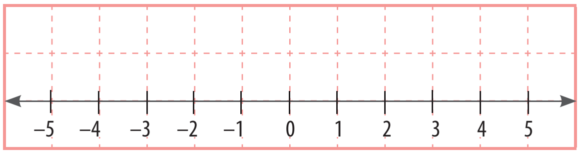
–

9. Representa cada adición en la recta numérica.

a. (–1) + 4 =



b. (–2) + 2 =



10 Calcula las adiciones.

a. 125 + (–25) = ____________

b. (–278) + (–22) = ____________

c. 312 + 118 = ____________

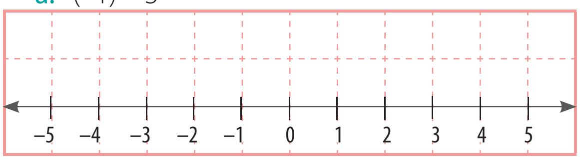
d. (–24) + 24 = ____________

11 Un buzo desciende 20 m bajo el nivel del mar a un banco de esponjas, luego baja 12 m más hasta la entrada de una cueva submarina. Una vez que llega ahí sube 15 m. ¿A cuántos metros bajo el nivel del mar se encuentra el buzo al final de la situación?

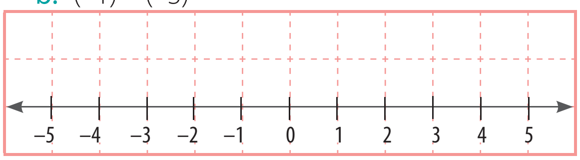
Lección 4: Restar números enteros

12 Representa cada sustracción en la recta numérica.

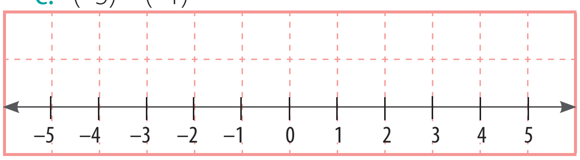
a. (–1) – 3 =



b. (–1) – (–3) =



c. (–5) – (–1) =



13 Calcula las sustracciones.

a. 3 – 12 = ______

b. (–3) – 8 = ______

c. (–12) – (–4) = ______

d. 64 – (–21) = ______

14 Resuelve las operaciones combinadas.

a. 35 – 24 – 18 + 11 = ______

b. (–4) + (–8) – (–6) – (–2) = ______

15 Los Martínez son muy organizados con sus cuentas. Por eso, tienen un cuaderno donde anotan todos sus gastos y ganancias.

Fecha	Ítem	Gasto	Ganancias	Total
	Saldo mes abril			25 000
03–mayo	Luz	–18 000		7000
07–mayo	Agua	–23 000		
10–mayo	Sueldo 1		450 000	
12–mayo	Supermercado	–42 450		
18–mayo	Gas	–23 000		

a. ¿Por qué los gastos los anotaron como números negativos?
b. Completa la última columna.
c. ¿Qué otros gastos podrían tener los Martínez? Averigua algunos gastos fijos de tu casa y agrégalos en la tabla.

Lección 5: Facilitar las operaciones con números enteros a partir de sus propiedades.

16 Identifica la propiedad que se utilizó.

16 + (–3) + (–13)

=16 + [(–3) + (–13)] ____________

=16 + (–16) ____________

= 0 ____________

17 Resuelve utilizando las propiedades.

a. [–6 + (–14) + 2] + [(–10) + (10)]
b. 20 – (–10) + 56 – 13 + (–43)

Desafío de integración

1. Ana María tiene $ 30 000 en su cuenta vista y retira $ 18 000 para un pago. Luego el banco paga un cheque de $ 26 000 con cargo a la cuenta de Ana María y finalmente le descuentan una comisión, por mantenimiento de la cuenta, equivalente a $ 2500. ¿Cuál es el saldo de su cuenta?
2. La temperatura bajó 3 °C cada hora durante 6 horas y luego subió 2 °C cada hora por 8 horas.
   Si inicialmente la temperatura era de –12 °C, ¿cuál fue la temperatura final?

Resolución de problemas

Actitud: Demostrar interés y perseverancia frente a la resolución de problemas.

Hacer un diagrama

Cuando un problema está relacionado con distancias o lugares, puedes hacer un diagrama que muestre los datos y las relaciones entre ellos.

Estrategias

- Hacer un diagrama.
- Usar ensayo y error sistemático.
- Usar problemas más sencillos.
- Destacar información relevante.
- Hacer una tabla.
- Encontrar un patrón.
- Plantear una ecuación o una inecuación.
- Usar razonamiento lógico.

El punto más alto del Aconcagua se ubica a casi 7000 metros sobre el nivel del mar. Los andinistas deben tener en cuenta que la temperatura baja a medida que se escala el monte. Cierto día, en el campamento base del monte, a 900 metros de altura, la temperatura es de 23 °C y el equipo que comenzará el ascenso sabe que aproximadamente la temperatura baja 1 °C cada 200 metros. El segundo campamento, donde pasarán la noche, se encuentra a 3500 metros, ¿qué temperatura habrá ahí?

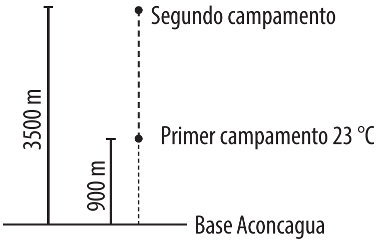
¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema?

¿Qué datos tienes para resolver?

Crea un plan para resolver

Para resolver este problema puedes usar la estrategia Hacer un diagrama, para ello representa las alturas a las que se encuentran los campamentos 1 y 2.

Aplica la estrategia



Resuelve

Verifica la respuesta

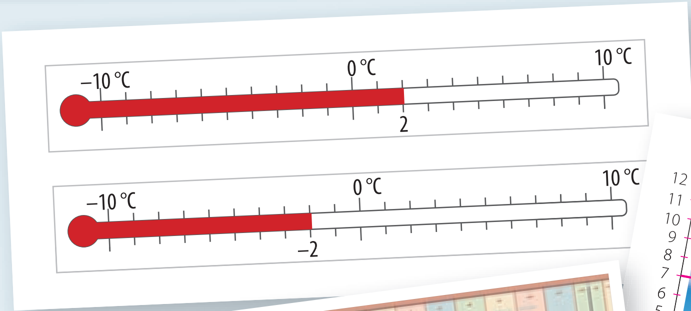
Comunica la respuesta

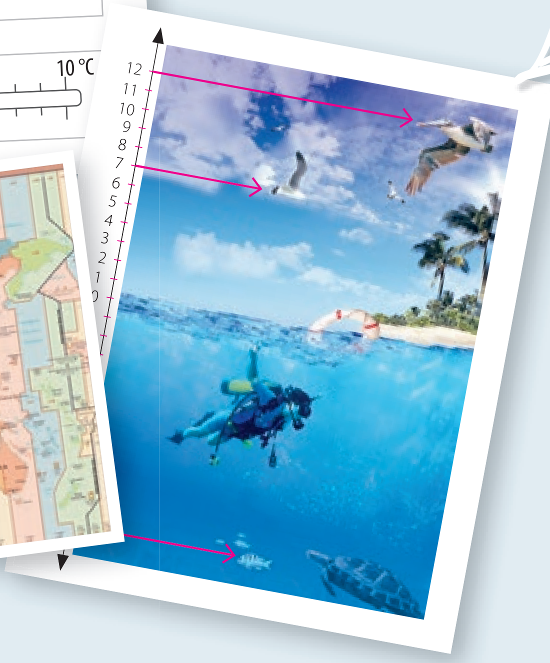
Vuelvo a mis procesos

Observa las imágenes centrales y completa.

¿Qué fortalezas reconoces en tu trabajo?

¿Qué dificultades tuviste durante el desarrollo de la sección? Indica al menos 2.





Crea un problema relacionado a cada una de las imágenes centrales.

De las metas que te propusiste al inicio de esta lección, ¿cuáles cumpliste y cuáles te faltaron?

Evalúa tu colaboración con tus compañeros en las actividades y talleres grupales.

Actitud: Demostrar interés y esfuerzo en la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.

Fracciones, decimales y porcentajes

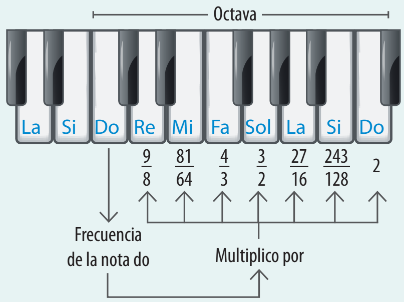
Activo ideas previas

Lee el texto respecto al funcionamiento de un piano y luego responde las preguntas.

El piano es un instrumento de cuerda percutida, es decir, el sonido se genera cuando las cuerdas entran en vibración al ser golpeadas por un pequeño martillo. Así, al presionar una tecla, cada una de estas cuerdas vibra con una frecuencia determinada, la cual es medida en hertz (Hz). La distancia entre ocho teclas blancas de un piano corresponde a una octava. Por ejemplo, si se elige presionar la tecla del do, su octava será la próxima tecla do que tendrá el doble de frecuencia.

Para obtener las frecuencias de las notas que se encuentran en una octava, se multiplica la frecuencia de do por las fracciones que se indican en el esquema. Por ejemplo:

Si do tiene una frecuencia de 2093 Hz, su octava será 4186 Hz.
Y la frecuencia de fa será 2790 Hz.



- ¿Cómo interpretarías el número $\frac{4}{3}$ que acompaña a la nota **fa** en el esquema?

____

- Si do tuviera una frecuencia de 261 Hz, ¿qué harías para obtener la frecuencia de **mi**?

____

Activo conceptos clave

El siguiente listado muestra las palabras clave de la sección. Con alguna de ellas, completa las actividades.

Recurso digital complementario

Fracción
Número decimal
Denominador
Numerador
Producto
Cociente

Relación
Porcentaje
Razón
Parte
Todo
IVA

Impuesto
Incremento porcentual
Disminución porcentual
Monto líquido
Monto bruto

- Dos conceptos asociados a la economía: ______________________
- Dos conceptos que indiquen una operación: ______________________
- Un concepto nuevo para ti: ______________________
- Una posible definición del concepto nuevo: ______________________

Pienso mis procesos

Observa la imagen central y completa.

Describe lo que se muestra.

¿Qué información entregan los números de la imagen?

¿En qué otras situaciones has visto números como los de la imagen?

¿De qué piensas que se tratará esta sección?

¿Qué estrategia de estudio podrías usar para trabajar en esta sección?

¿Qué metas te propones cumplir al finalizar esta sección?

¿Qué debo saber?

Activa tus conocimientos previos respondiendo la pregunta lateral, luego resuelve la actividad. Para terminar, registra tus logros.

¿Qué característica debe tener el entero en una representación gráfica de fracciones?

Describe el procedimiento que permite obtener fracciones equivalentes.

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

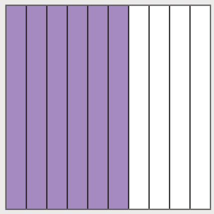
Logrado	Por lograr
9 o más puntos	7 o menos puntos

¿Qué errores cometiste?

Reconocer fracciones y números decimales

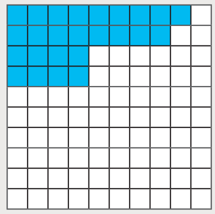
1 Escribe la fracción y el número decimal representados. (4 puntos)

a.



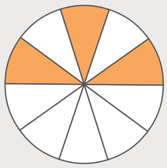
______ ______

c.



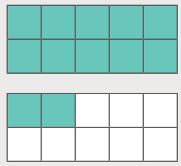
______ ______

b.



______ ______

d.



______ ______

2 Amplifica o simplifica según lo indicado. (4 puntos)

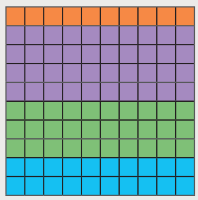
a. Amplifica $\frac{1}{5}$ por 7. $\longrightarrow$ ______

b. Amplifica $\frac{2}{7}$ por 9. $\longrightarrow$ ______

c. Simplifica $\frac{15}{9}$ por 3. $\longrightarrow$ ______

d. Simplifica $\frac{32}{116}$ por 4. $\longrightarrow$ ______

3 Observa la cuadrícula y luego responde. (4 puntos)



a. ¿Qué fracción de la cuadrícula representan los recuadros naranjas?

b. ¿Qué fracción de la cuadrícula representan los recuadros verdes?

c. ¿Cuál es la diferencia entre la fracción que representan los recuadros morados y la que representan los recuadros celestes?

d. ¿Qué fracción de la cuadrícula representan los recuadros naranjas más los recuadros verdes?

4 Señala el nombre de la posición del dígito rojo. (4 puntos)

a. 0,21

b. 5,108

c. 1,372

d. 2,411

Explica el procedimiento para sumar y restar fracciones de distinto denominador.

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
5 o más puntos	4 o menos puntos

Sumar y restar fracciones

5 Calcula las adiciones y las sustracciones. (6 puntos)

a. $\frac{5}{8} + \frac{1}{2}$

b. $\frac{5}{6} - \frac{5}{12}$

c. $4\frac{1}{4} + 8\frac{1}{12}$

d. $\frac{2}{14} + \frac{3}{21} + \frac{1}{7}$

e. $\frac{4}{5} + \frac{1}{9} - \frac{2}{3}$

f. $\frac{4}{18} + \frac{18}{15} + 3\frac{4}{9}$

6 En una cosecha se recolectaron $12\frac{4}{5}$ kg de papas y $5\frac{1}{7}$ kg de tomates. Si se vendieron $5\frac{4}{9}$ kg de papas y $2\frac{1}{3}$ kg de tomates, ¿cuántos kilogramos de verduras quedaron en total? (2 puntos)

¿Qué sucede con la coma al sumar o restar números decimales?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
5 o más puntos	4 o menos puntos

¿Qué dificultades tuviste? ¿Cómo las puedes superar?

Sumar y restar números decimales

7 Calcula las operaciones combinadas. (4 puntos)

a. 15,37 + 8,297 + 0,3

b. 0,008 – 0,002 + 0,888

c. 34,7 – 0,003 + 9,34

d. 5,03 – 0,999 + 59

8 Una botella contiene 0,86 litros de agua y otra, 1,7 litros. ¿Cuántos litros contienen las dos en total? (1 punto)

9 Rosario tiene 2,5 kg de manzanas, 5,3 kg de plátanos y 0,8 kg de frutillas. ¿Cuántos kilogramos de fruta tiene Rosario? (1 punto)

10 Ubica los números en el cuadrado mágico de tal manera que en cada fila y en cada columna la suma sea 1,5. (2 puntos)

	0,70	
		0,1
	0,3	

0,2 · 0,8 · 0,5 · 0,6 · 0,40 · 0,9

Lección 6

¿Cómo se relacionan las fracciones con los números decimales?

Propósito

Expresar fracciones como números decimales y viceversa.

¿Para qué?

Expresar fracciones como números decimales y viceversa permite establecer la relación que existe entre ellos y su aplicación en situaciones cotidianas. Por ejemplo, para cocinar, ya que ahí las medidas se expresan de ambas formas.

Palabras clave

Número decimal
Fracción decimal
Denominador
Numerador

Ampliando

Número decimal finito: si la parte decimal contiene una cantidad finita de cifras. Ejemplo: 4,25.

Número decimal infinito periódico: la parte decimal se repite infinitamente. Ejemplo:

$2{,}6666... = 2{,}\overline{6}$ → Período

Número decimal infinito semiperiódico: la parte decimal contiene una parte no periódica (anteperíodo) y otra periódica (período). Ejemplo:

$0{,}233333... = 0{,}2\overline{3}$ → Período

Anteperíodo

Situación 1 Convertir una fracción en número decimal

¿Cómo se expresa $\frac{7}{200}$ como un número decimal?

¿Qué es una fracción decimal?

Paso 1 Expresa la fracción como fracción decimal.

En este caso, amplifica de manera que el denominador sea 1000.

$$\frac{7}{200} = \frac{7 \cdot 5}{200 \cdot 5} = \frac{35}{1000}$$

Se amplifica por 5.

¿Por qué en este caso no se puede transformar la fracción simplificando?

Paso 2 Escribe la fracción como número decimal.

$$\underbrace{\frac{35}{1000}}_{3\text{ ceros}} = \underbrace{0{,}035}_{3\text{ cifras decimales}}$$

La cantidad de ceros del denominador corresponde a la cantidad de cifras decimales.

¿Cómo nombras este número decimal?

Situación 2 Convertir un número decimal en fracción

¿Cómo se expresa 0,75 como fracción?

Paso 1 Identifica el numerador. Este corresponde al número original, pero sin la coma. En este caso es 75.

Paso 2 Identifica el denominador. Este corresponde a un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales haya. En este caso es ☐.

$$\underbrace{0{,}75}_{2\text{ cifras decimales}} = \frac{75}{\underbrace{100}_{2\text{ ceros}}}$$

Paso 3 Simplifica hasta obtener una fracción irreductible $\frac{75 : 25}{100 : 25} = \frac{\square}{\square}$

Para concluir

- Para expresar una **fracción como número decimal finito**, puedes amplificarla o simplificarla de tal manera que se obtenga una fracción decimal, y luego escribir el número decimal que corresponda. También puedes transformar la fracción dividiendo el numerador por el denominador.
- Para expresar un **número decimal como fracción**, debes identificar el numerador y el denominador. Luego, se simplifica hasta obtener una fracción irreductible.

Argumenta y comunica

- Cuando leemos el número decimal 0,45 decimos "45 centésimos". Entonces, ¿por qué podemos decir que este decimal tiene 4 décimas y 5 centésimas?

Repaso

1. Indica cuántas décimas, centésimas y milésimas tiene cada número decimal.

a. 0,2
b. 0,53
c. 0,04
d. 0,006

2. Calcula las adiciones de fracciones.

a. $\frac{1}{2} + \frac{3}{4}$
b. $\frac{24}{10} + \frac{4}{100}$

Práctica guiada

3. Transforma las fracciones en números decimales.

$$\boxed{\frac{8}{20}}$$

Paso 1 Expresa como fracción decimal. En este caso, simplifica por 2.

$$\frac{8:2}{20:2} = \frac{4}{10}$$

Paso 2 Como hay un cero en el denominador, debe tener solo una cifra decimal: $\frac{4}{10} = 0,4$

a. $\frac{28}{40}$
b. $\frac{36}{30}$
c. $\frac{728}{20}$
d. $\frac{1456}{4000}$

4. Transforma los números decimales en fracciones irreductibles:

$$\boxed{1,62}$$

Paso 1 El numerador de la fracción es el número original, pero sin la coma. En este caso, es 162.

Paso 2 El denominador será un uno seguido de tantos ceros como cifras decimales haya. En este caso, tres.

$$\frac{162}{100}$$

Paso 3 Simplifica.

$$\frac{162:2}{100:2} = \frac{81}{50}$$

a. 0,25
b. 0,375
c. 1,3
d. 1,125

Aplica

5. Juan fue a la fiambrería y pidió $\frac{1}{8}$ de kilogramo de jamón al vendedor. Si la balanza del local da la masa en gramos, ¿cuánto marcó al colocar su pedido?

6. Miguel fue a comprar, por encargo de su papá, $\frac{3}{4}$ kg de pan, y la balanza marcó 0,753 kg. ¿Cumplió con el encargo?

7. **Argumenta.** ¿Es posible convertir un número decimal en dos o más fracciones diferentes o la conversión es única? ¿Y es posible convertir una fracción en uno o más decimales diferentes o la conversión es única?

8. **Argumenta.** Al preguntarles a dos alumnos "¿A qué número decimal equivale $\frac{1}{2}$?", se obtuvieron las siguientes respuestas:

¿Quién está en lo correcto? Justifica tu respuesta.

9. **Desafío.** Para realizar una actividad manual, Josefina necesita 0,375 m de cordel. En la ferretería solo venden trozos de 1 m y ella no tiene cómo medir los 0,375 m. ¿Cómo podría cortar exactamente esa medida?

Reflexiono

Si se tiene una fracción con denominador 9, por ejemplo, $\frac{2}{9}$, ¿qué sucede con su representación decimal? Comenta con tus compañeros y compañeras.

Refuerzo

Un detergente se vende en botellas de $\frac{3}{4}$ litro, y en cada envase esta información aparece como un número decimal. ¿Cómo se señala en el envase la cantidad que trae de detergente?

Lección 7

¿Cómo se multiplican y dividen fracciones?

Propósito

Multiplicar y dividir fracciones.

¿Para qué?

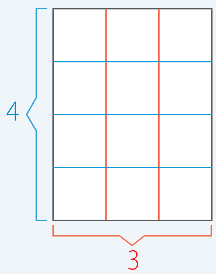
Las fracciones se utilizan en distintos contextos, como por ejemplo, en la gastronomía es común modificar las recetas. Así, las cantidades de ingredientes, expresadas en fracciones, se multiplican y dividen a fin de llegar al volumen necesario dependiendo de cuántas porciones se quieran obtener.

Palabras clave

Producto
Cociente

Ampliando

Para representar pictóricamente 3 • 4, dividimos verticalmente por un factor (3) y horizontalmente por el otro (4).



Luego, el producto son las partes resultantes de multiplicar filas por columnas (12).

Web

Para reforzar y practicar la multiplicación y división de fracciones, ingresa el código TM7P042 en el sitio web del texto.

Recuerda que
Las páginas webs o su contenido pueden variar.

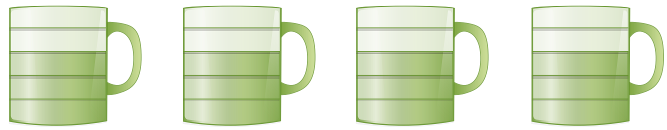
Multiplicación de fracciones

Situación 1 Multiplicar un número natural por una fracción

Para cocinar un queque se necesitan $\frac{3}{5}$ de una taza de harina. **¿Cuántas tazas se necesitan para hacer 4 queques?**

Paso 1 Representa la cantidad de harina para hacer un queque.

Paso 2 Representa la cantidad de harina para hacer 4 queques.



$$\frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} + \frac{3}{5} = \frac{12}{5}$$

Lo anterior corresponde al producto de 4 veces $\frac{3}{5}$, matemáticamente: $\longrightarrow$ $\square \cdot \frac{\square}{\square} = \frac{\square}{\square}$

Luego, para hacer 4 queques se necesitan $\frac{\square}{\square}$ de tazas de harina.

Ayuda

Para transformar $\frac{12}{5}$ en número mixto:

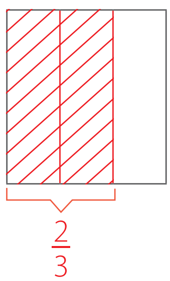
$12 : 5 = 2 \longrightarrow$ Entero
-10
$2 \longrightarrow$ Numerador

Luego, $2\frac{2}{5} \longrightarrow$ Conserva el denominador

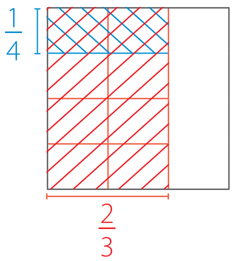
Situación 2 Multiplicar una fracción por otra fracción

Maritza plantará $\frac{2}{3}$ de un terreno y ha decidido que $\frac{1}{4}$ de esa parte lo destinará a tomates. **¿Qué parte del total del terreno será destinada al cultivo de tomates?**

Paso 1 Representa el terreno que plantará, es decir, $\frac{2}{3}$.



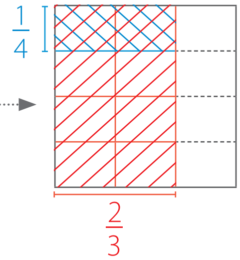
Paso 2 Representa el terreno que destinará a tomates.



Representa lo destinado a tomates dividiendo horizontalmente el terreno para plantar en 4 partes y pintando 1.

Paso 3 Prolonga las líneas horizontales para observar en cuántas partes queda dividido el terreno.

Las partes pintadas de dos colores son 2, que corresponden al producto de los numeradores, $2 \cdot 1$.



El terreno está ahora dividido en 12 partes, que corresponden al producto de los denominadores, $3 \cdot 4$.

Entonces, se ha multiplicado $\frac{2 \cdot 1}{3 \cdot 4} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{2}{12}$.

A partir de lo presentado, explica con tus palabras la regla para multiplicar fracciones.

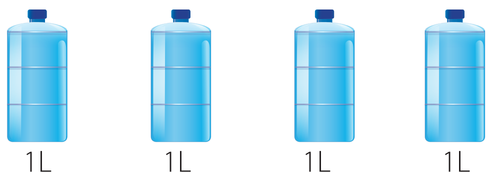
Así, el terreno achurado con dos colores representa lo destinado a tomates, en este caso, ___________ partes de un total de ___________.

División de fracciones

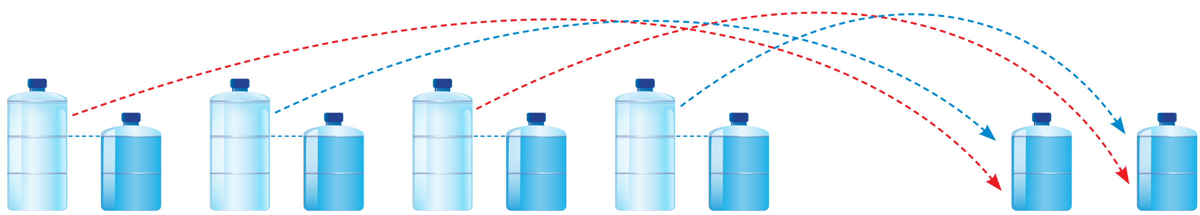
Situación 3 Dividir un número natural por una fracción

Un laboratorio quiere transvasar 4 litros de agua a frascos de $\frac{2}{3}$ de litro. **¿Cuántos frascos se pueden llenar?**

Paso 1 Dibuja 4 enteros, que representan cada litro de agua, y divídelos en 3 partes iguales, que representan la capacidad de los frascos.



Paso 2 Reparte la cantidad total.



Luego, el laboratorio puede llenar ___________ frascos.

Ampliando

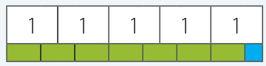
Las multiplicaciones de fracciones se pueden representar usando papel lustre.

Consigue algunos papeles lustre y realiza la multiplicación $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4}$, cuadriculando adecuadamente uno de ellos. También puedes doblarlo para representar los factores y obtener así el producto.

Recurso digital complementario

Ampliando

La división $5 : \frac{2}{3}$ puede resolverse así:



Cada rectángulo verde representa $\frac{2}{3}$ y el rectángulo celeste la mitad de un rectángulo verde.

Como en las 5 unidades es posible dibujar 7,5 rectángulos, entonces:

$$5 : \frac{2}{3} = 7{,}5$$

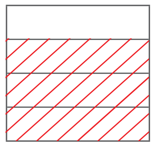
Puedes comprobar que si multiplicas el primer factor por el denominador de la fracción, y luego divides este producto por el numerador de la fracción, obtienes el resultado final:

$$5 : \frac{2}{3} = 5 \cdot \frac{3}{2} = \frac{15}{2} = 7{,}5$$

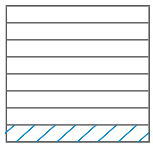
Situación 4 Dividir una fracción por otra fracción

¿Cómo representar gráficamente la división $\frac{3}{4} : \frac{1}{8}$?

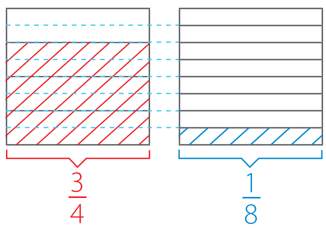
Paso 1 Representa el dividendo, $\frac{3}{4}$.



Paso 2 Representa el divisor, $\frac{1}{8}$.



Paso 3 Observa cuántas veces $\frac{1}{8}$ cabe en $\frac{3}{4}$.



$\frac{1}{8}$ cabe ________ veces en $\frac{3}{4}$.

Esto corresponde a igualar los denominadores amplificando $\frac{3}{4}$ por 2, para luego dividir.

$\frac{3 \cdot 2}{4 \cdot 2} = \frac{6}{8} \longrightarrow \frac{6}{8} : \frac{1}{8} = \frac{6}{8} \cdot \frac{8}{1} = 6$

Luego, $\frac{3}{4} : \frac{1}{8} = \boxed{}$

¿Qué relación existe entre la división y la multiplicación? Discútela con tu curso.

Para concluir

- Para **multiplicar** fracciones, puedes representar gráficamente o bien multiplicar numerador con numerador y denominador con denominador, es decir:

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{a \cdot c}{b \cdot d}; \text{ con } b \text{ y } d \neq 0$$

- Para **dividir** fracciones, puedes representar gráficamente o bien resolver la multiplicación entre el dividendo y el inverso multiplicativo del divisor.

$$\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{a \cdot d}{b \cdot c}; \text{ con } b, c \text{ y } d \neq 0$$

Argumenta y comunica

- Observa las siguientes divisiones:

$\frac{1}{1} : \frac{1}{8} = 8$ $\quad$ $\frac{2}{1} : \frac{1}{8} = 16$

$\frac{3}{1} : \frac{1}{8} = 24$ $\quad$ $\frac{4}{1} : \frac{1}{8} = 32$

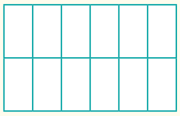
¿Cuál será el resultado de $\frac{5}{1} : \frac{1}{8}$?, ¿y el de $\frac{100}{1} : \frac{1}{8}$?

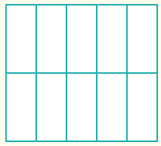
¿Qué relación observas entre la división y el cociente?

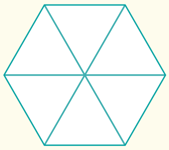
¿Qué sucedería si en lugar de estos datos usaras otros?

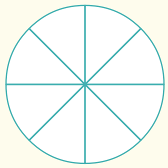
Repaso

1. Representa cada fracción.

a.  $\frac{4}{12}$

c.  $\frac{5}{10}$

b.  $\frac{3}{6}$

d.  $\frac{3}{8}$

2. Calcula las divisiones.

a. $348 : 4$

b. $152 : 8$

c. $1337 : 7$

d. $1520 : 4$

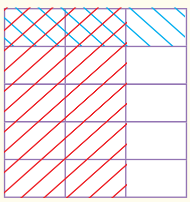
Práctica guiada

3. Representa cada multiplicación y calcula el producto.

$$\boxed{\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5}}$$

Paso 1 Representa el 1.° factor y el 2.° factor con líneas verticales y horizontales, respectivamente.

Paso 2 Observa la cantidad de partes pintadas de 2 colores en relación con el total de divisiones.



Luego, $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{15}$

a. $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} =$

b. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} =$

c. $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} =$

4. Escribe cada adición como una multiplicación y calcula el resultado.

$$\boxed{\frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}}$$

Paso 1 Dado que se suma tres veces la fracción, equivale a la multiplicación $3 \cdot \frac{1}{5}$.

Paso 2 Multiplica el entero por el numerador.

$\frac{3 \cdot 1}{5} = \frac{3}{5}$

a. $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$

b. $\frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + \frac{5}{2}$

5. Completa el $\bigcirc$.

$$\boxed{\frac{2}{5} \cdot \frac{\bigcirc}{2} = \frac{14}{10}}$$

Aplica la operación inversa.

$2 \cdot \bigcirc = 14 \longrightarrow 14 : 2 = 7$

a. $\frac{15}{\bigcirc} \cdot \frac{\bigcirc}{45} = \frac{45}{90}$

b. $\frac{\bigcirc}{2} \cdot \frac{42}{55} = \frac{42}{\bigcirc}$

c. $\frac{15}{31} \cdot \frac{4}{\bigcirc} = \frac{\bigcirc}{62}$

6. Resuelve las divisiones

$$\boxed{\frac{6}{5} : \frac{3}{10}}$$

Dividir fracciones es equivalente a multiplicar el dividendo por el inverso multiplicativo del divisor.

$\frac{6}{5} : \frac{3}{10} = \frac{6}{5} \cdot \frac{10}{3} = 4$

a. $3 : \frac{1}{2}$

c. $\frac{1}{2} : \frac{1}{4}$

b. $5 : \frac{1}{8}$

d. $\frac{3}{5} : \frac{3}{10}$

Aplica

7. Resuelve las multiplicaciones. Si es posible, simplifica y obtén un número mixto.

a. $\frac{8}{7} \cdot \frac{3}{10}$

b. $\frac{3}{16} \cdot \frac{48}{15}$

c. $\frac{5}{6} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{40}{25}$

d. $\frac{2}{25} \cdot \frac{10}{3} \cdot \frac{15}{8}$

8. Calcula las divisiones y escribe el resultado como una fracción irreductible.

a. $\frac{2}{5} : \frac{3}{4}$

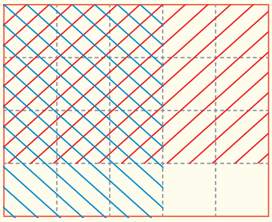
b. $\frac{5}{4} : \frac{5}{4}$

c. $\frac{3}{8} : \frac{3}{9}$

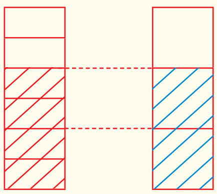
d. $\frac{3}{4} : \frac{6}{7}$

9. Valeria dibujó las siguientes representaciones:

a. ¿Qué multiplicación de fracciones representó?



b. ¿Qué división de fracciones representó?



10. Señala si cada afirmación es verdadera o falsa. Justifica en ambos casos.

a. ______ El producto de dos fracciones puede ser un número natural.

b. ______ El cociente de dos fracciones siempre es un número mixto.

c. ______ Al dividir dos fracciones se utiliza el inverso aditivo de una de ellas.

d. ______ Al multiplicar dos fracciones, se multiplica el numerador de la primera por el denominador de la segunda para obtener el denominador.

11. Completa las tablas. Para la división, considera los números de la columna como dividendos y los números de la fila, como divisores.

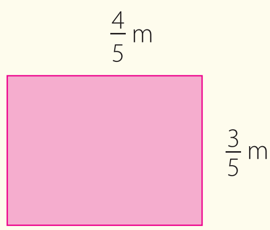
a.

$\cdot$		$\frac{2}{7}$	
$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{40}$		
	$\frac{4}{45}$		$\frac{1}{27}$
		$\frac{4}{21}$	

b.

$:$		$\frac{3}{5}$	
	$\frac{8}{3}$		
		$\frac{25}{21}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{2}$		$\frac{6}{10}$

12. Calcula el área del rectángulo.



13. Martina tenía una cuerda que cortó por la mitad. A uno de esos trozos le cortó un tercio y el trozo menor de estos lo volvió a cortar por la mitad. ¿Qué parte de la cuerda es uno de los trozos finales?

Haz un esquema y comparte tu procedimiento con un compañero para escoger la mejor alternativa.

14. Cecilia y su esposo prepararon 4 kg de mermelada de guinda que quieren guardar para el invierno en frascos de $\frac{2}{3}$ de kg. ¿Cuántos frascos necesitan?

15. Nicolás compró $8\frac{1}{4}$ kg de queso en la feria. Al llegar a su local, lo cortó para hacer paquetes de $\frac{3}{4}$ kg de queso cada uno. ¿Cuántos paquetes pudo hacer?

16. Una cuadrilla de trabajadores arreglará 15 km de pavimento. Se tiene calculado que repararán $\frac{5}{8}$ km al día.

a. ¿Cuántos días se demorarán así?

b. Si se descompone una máquina, solo podrán arreglar $\frac{3}{5}$ km al día. ¿Cuántos días se demorarán así?

c. El Ministerio de Obras Públicas fija un plazo de 20 días. Para cumplir con esta condición, ¿qué fracción del trabajo deberían hacer por día?

17. Matías y Jessica deben pintar una reja. El primer día Matías pinta la mitad de la reja, el segundo día Jessica pinta la mitad de lo que queda y el tercer día Matías termina de pintar la reja.

a. ¿Qué parte de la reja pintó Jessica?

b. ¿Qué parte de la reja pintó Matías?

18. Desafío. Observa las siguientes divisiones y luego responde las preguntas.

$2 : 2 = 1$ $\qquad 2 : \frac{1}{2} = 4$ $\qquad 2 : \frac{1}{4} = 8$

$2 : \frac{1}{8} = 16$ $\qquad 2 : \frac{1}{16} = 32$ $\qquad 2 : \frac{1}{32} = 64$

a. ¿Qué sucede con los dividendos?

b. ¿Qué sucede con los divisores?

c. ¿Qué sucede con el cociente?

d. Si el divisor disminuye mucho más, ¿qué piensas que pasaría con el cociente? Justifica.

19. Juego. Completa el cuadrado mágico multiplicativo con los siguientes números:

1 $\quad$ 1 $\quad \frac{1}{3} \quad$ 3 $\quad$ 3

9 $\quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{3}$

Se debe cumplir la siguiente condición: el producto entre los números de las filas y entre los números de las columnas del cuadrado tiene que ser 1.

Reflexiono

1. Se quiere dividir tres fracciones. ¿El resultado es el mismo si se opera de izquierda a derecha o viceversa? Argumenta.

2. El resultado de multiplicar dos fracciones siempre será una fracción menor que ambos factores. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica con ejemplos.

Refuerzo

1. Representa pictóricamente el resultado de $\frac{2}{5} \cdot \frac{3}{7}$.

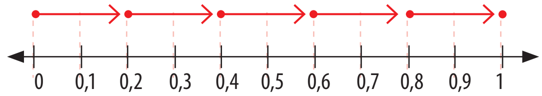
2. Clara reparte $\frac{24}{5}$ litros de bebida en vasos de $\frac{1}{5}$ de litro. ¿Cuántos vasos alcanza a llenar?

Lección 8

¿Cómo se multiplican y dividen decimales?

Multiplicación de decimales

Observa la representación:



¿Qué se repite? y ¿cuántas veces?

¿Con qué operaciones matemáticas la puedes asociar?

Situación 1 Multiplicar un número natural por un decimal

El entrenador de ciclismo de Marco estipula que este debe entrenar 7 horas diarias y cada hora tiene que recorrer 13,5 km en bicicleta.

¿Cuántos kilómetros diarios de entrenamiento debe considerar Marco?

Hay que encontrar el producto entre los kilómetros y las horas, es decir, multiplicar 13,5 • 7. El entrenador propone una forma y Marco, otra.

Entrenador

Paso 1 Multiplica los números como si fueran naturales, sin considerar la coma.

$\underline{135 \cdot 7}$

$\square$

Paso 2 Cuenta las cifras decimales del factor decimal.

$13{,}\underline{5} \cdot 7$ ← Hay una cifra decimal.

Paso 3 En el producto, cuenta de derecha a izquierda tantos lugares como cifras decimales hay en los factores y escribe la coma.

94,5

Hay una cifra decimal, se corre la coma un lugar.

Marco

Paso 1 Transforma el número decimal en fracción.

$13{,}5 = \frac{\square}{\square}$

Paso 2 Multiplica la fracción por el número natural.

$\frac{135}{10} \cdot 7 = \frac{945}{10}$

Paso 3 Transforma la fracción en número decimal.

$\frac{945}{10} = 94{,}5$

Hay 1 cero, entonces debe tener 1 cifra decimal.

¿Cómo son los resultados de ambos?

Luego, Marco debe entrenar diariamente ________ kilómetros.

Propósito

Multiplicar y dividir decimales.

¿Para qué?

Calcular el área de una mesa de 1,5 metros de largo y 0,7 metros de ancho, o vaciar un litro de leche en vasos de 0,2 litros necesariamente implica operar con decimales. Aprender diversas técnicas para multiplicar y dividir números decimales, permite resolver este tipo de situaciones cotidianas.

Palabras clave

Producto

Factores

Cociente

Ayuda

Las cifras decimales son aquellas que se ubican después (o a la derecha) de la coma. Por ejemplo: 32,468 tiene tres cifras decimales, el 4, el 6 y el 8.

Observa las siguientes multiplicaciones:

1,247 • 10 = 12,47

1,247 • 100 = 124,7

1,247 • 1000 = 1247

¿Qué sucede con la coma al multiplicar por 10, 100 y 1000?

Situación 2 Multiplicar un número decimal por otro decimal

Para el aniversario de un colegio se quiere empapelar una pared con cartulina, para que los alumnos puedan escribir una frase que refleje su sentir por el colegio. La pared tiene 4,55 metros de largo y 3,7 metros de alto. **¿Cuánta cartulina requieren?**

Se debe calcular el área de la pared, la cual tiene forma rectangular. Entonces, necesitan calcular 4,55 • 3,7 metros cuadrados de papel.

Dos profesores proponen sus estrategias.

Profesor 1

Paso 1 Multiplica ambos números como si fueran naturales, sin considerar la coma.

$$\begin{array}{r} 455 \cdot 37 \\ \hline 3185 \\ +\ 1365 \\ \hline 16\,835 \end{array}$$

Paso 2 Cuenta la cantidad de cifras decimales de ambos factores.

$$4{,}\underline{55} \cdot 3{,}\underline{7}$$

3 cifras decimales

Paso 3 En el producto, cuenta de derecha a izquierda tantos lugares como cifras decimales hay en los factores y escribe la coma.

$$16{,}835$$

Hay 3 cifras decimales, se corre la coma 3 lugares

Profesora 2

Paso 1 Transforma los números decimales en fracciones.

$$4{,}55 = \frac{455}{100} \text{ y } 3{,}7 = \frac{37}{10}$$

Paso 2 Multiplica las fracciones.

$$\frac{455}{100} \cdot \frac{37}{10} = \frac{16\,835}{1000}$$

Paso 3 Transforma la fracción a número decimal.

$$\frac{16\,835}{1000} = 16{,}835$$

3 ceros, debe tener 3 cifras decimales

¿Cómo son los resultados de ambos?

Luego, necesitan ________ metros cuadrados de cartulina.

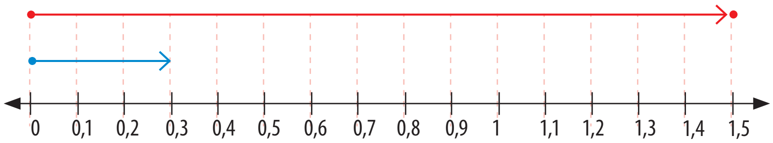
Web

Para reforzar y ejercitar las multiplicaciones entre decimales, ingresa el código TM7P049 en el sitio web del texto.

Recuerda que Las páginas webs o su contenido pueden variar.

División de decimales

Observa la representación:



¿Cuántas flechas azules, ubicadas una tras otra, equivalen a la flecha roja?

¿Con qué operación matemática puedes asociar esto?

Situación 1 Dividir un número decimal por uno natural

Se quiere cortar un listón de madera de 8,4 metros en 6 partes iguales, para hacer una repisa. **¿Qué medida tendrá cada trozo?**

Dos maestros proponen dos estrategias para calcularla.

Maestro 1

Paso 1 Divide la parte entera por 6, obtiene 1 y lo anota en el cociente. El producto de 1 por 6 lo pone bajo la parte entera, 8; luego resta y queda 2.

$$\begin{array}{l} 8{,}4 : 6 = 1 \\ \underline{-\,6} \\ \;\;2 \end{array}$$

Paso 2 Baja la cifra siguiente: como es una cifra decimal, escribe coma en el cociente.

$$\begin{array}{l} 8{,}4 : 6 = 1, \\ \underline{-\,6\;\;\;} \\ \;\;2\,4 \end{array}$$

Paso 3 Divide 24 décimos por 6, obtiene 4, y lo anota en el cociente después de la coma. El producto de 4 por 6 lo pone bajo 24 décimos y resta. Como el resto es cero, ha finalizado la división.

$$\begin{array}{l} 8{,}4 : 6 = 1{,}4 \\ \underline{-\,6\;\;\;} \\ \;\;2\,4 \\ \underline{-\,2\,4} \\ \;\;\;\;0 \end{array}$$

Maestro 2

Paso 1 Transforma el número decimal en fracción decimal.

$$8{,}4 = \frac{84}{10}$$

Paso 2 Divide la fracción por el número natural 6. Para esto, multiplica por el inverso multiplicativo.

$$\frac{84}{10} : 6$$

$$\frac{84}{10} \cdot \frac{1}{6} = \frac{84}{60}$$

Paso 3 Simplifica esta fracción por 6.

$$\frac{84 : 6}{60 : 6} = \frac{14}{10}$$

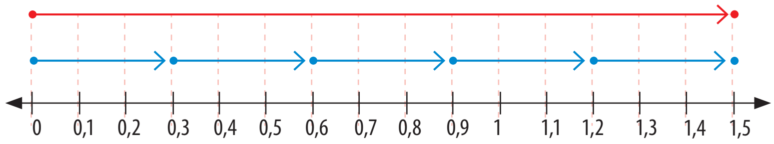
Paso 4 Expresa como decimal.

$$\frac{14}{10} = 1{,}4$$

Los maestros utilizaron estrategias distintas, pero llegaron a la misma medida.

Luego, cada trozo debe medir ________ metros.

Al inicio te preguntaste cuántas flechas azules equivalen a la flecha roja.



Cinco fechas azules equivalen a la roja.

Esta equivalencia podemos representarla simbólicamente como la división $1{,}5 : 0{,}3 = 5$.

¿Pero cómo lo hacemos cuando los números son más complejos de representar?

Situación 2 Dividir un número decimal por otro decimal

Con un dosificador se incorporan 0,2 kg de crema a una torta. Si el dosificador se carga con 0,78 kg de crema, **¿para cuántas tortas alcanzará?** Dos panaderos proponen estrategias distintas.

Panadero 1

Paso 1 Multiplica el dividendo y el divisor para obtener un número natural en el divisor. En en este caso, por 10.

$0{,}78 \cdot 10 \; : \; 0{,}2 \cdot 10$

$\boxed{} : \boxed{}$

Paso 2 Divide la parte entera por 2, obtiene 3 y lo anota en el cociente. Escribe el producto de 3 por 2 bajo la parte entera (7), resta y queda 1. Baja la cifra siguiente, como es decimal, escribe coma en el cociente.

$$\begin{array}{l} 7{,}8 : 2 = 3{,} \\ -6 \\ \hline \;\;1\,8 \end{array}$$

Paso 3 Divide 18 décimos por 2, obtiene 9 y lo anota en el cociente. Coloca el producto de 9 por 2 bajo 18 décimos y resta. Como el resto es cero, ha finalizado la división.

$$\begin{array}{l} 7{,}8 : 2 = 3{,}9 \\ -6 \\ \hline \;\;1\,8 \\ -1\,8 \\ \hline \;\;\;\;0 \end{array}$$

Panadero 2

Paso 1 Transforma el dividendo y el divisor en fracción.

$0{,}78 : 0{,}2 = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} : \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$

Paso 2 Divide las fracciones. Para esto, multiplica por el inverso multiplicativo.

$\dfrac{78}{100} \cdot \dfrac{10}{2} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\begin{matrix} :2 \\ :2 \end{matrix} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$

Paso 3 Expresa la fracción como un número decimal.

$\dfrac{390}{100} = \boxed{}$

Ambos panaderos dicen que se pueden rellenar ________ tortas completas.

Para concluir

- Para **multiplicar números decimales** una estrategia es:
  1. Multiplica como si fueran números naturales.
  2. Agrega la coma al resultado, deben quedar tantas cifras en la parte decimal como el total de cifras decimales que tienen ambos factores juntos.
- Para **dividir números decimales** una estrategia es:
  Transforma el divisor en un número natural, amplificando por 10, 100, 1000, etc. y divide.

Argumenta y comunica

- Resuelve las siguientes divisiones y responde.
  92,3 : 10
  92,3 : 100
  92,3 : 1000
  ¿Qué sucede con la coma?
  ¿Sucederá lo mismo con otros decimales? Prueba para 5,78 ; 60,03 y 4,203
- ¿Qué puedes concluir acerca de dividir por 10, 100 y 1000?

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Une la fracción con el número decimal que corresponda.

Fracción	Número decimal
$\frac{23}{100}$	2,3
$\frac{5}{1000}$	0,23
$\frac{5}{10}$	0,5
$\frac{23}{10\,000}$	0,005
$\frac{5}{100}$	0,05
$\frac{23}{10}$	0,0023

2. Calcula las siguientes operaciones. Expresa cada resultado como una fracción irreductible.

a. $\frac{3}{5} \cdot 15 =$

b. $\frac{5}{4} \cdot \frac{12}{25} \cdot \frac{4}{15} =$

c. $\frac{4}{3} : \frac{24}{15} =$

d. $\frac{5}{4} : \frac{12}{25} =$

e. $\frac{3}{5} \cdot 5 =$

f. $\frac{15}{16} : \frac{25}{8} =$

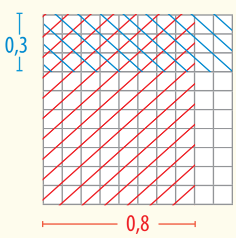
Práctica guiada

3. Representa cada multiplicación en la cuadrícula y calcula el producto.

$\boxed{0{,}8 \cdot 0{,}3}$

Paso 1 Representa 0,8 en la cuadrícula.

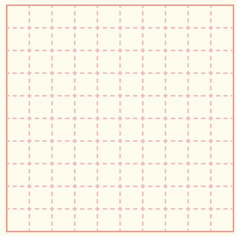
Paso 2 Representa 0,3 en la misma cuadrícula.



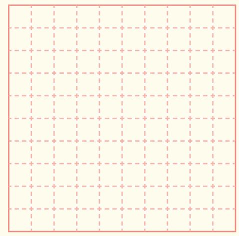
Paso 3 Indica la cantidad de partes que quedan de dos colores en relación con el total de divisiones. En este caso, 24 de 100.

Luego, 0,8 • 0,3 = 0,24.

a. 0,3 • 0,5



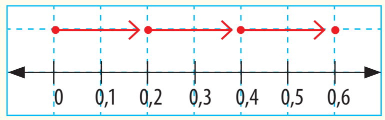
b. 0,4 • 0,8



4. Representa cada multiplicación en la recta numérica y calcula el producto.

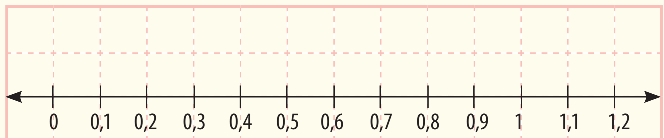
$\boxed{0{,}2 \cdot 3}$

Desde cero, avanza 3 veces 0,2.

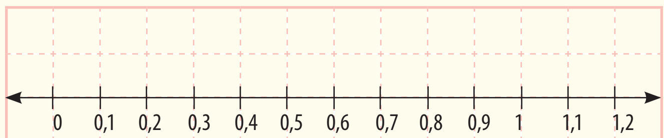


Luego 0,2 • 3 = 0,6.

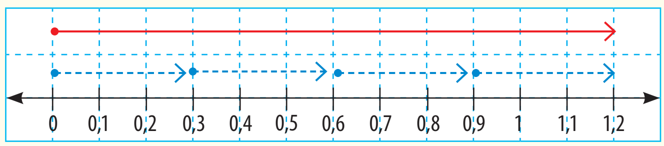
a. 0,2 • 5



b. 0,1 • 7

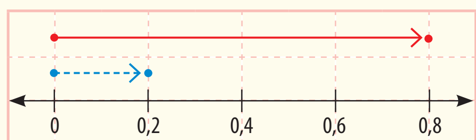


5. Escribe la división representada y encuentra el cociente.

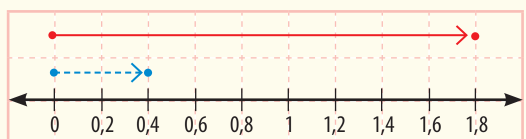


La flecha azul cabe 4 veces en la flecha roja, es decir: 1,2 : 0,3 = 4.

a.



b.



6. Calcula las multiplicaciones.

0,4 • 1,2

Paso 1 Resuelve como si fueran números naturales: 4 • 12 = 48.

Paso 2 Escribe el producto con la cantidad de cifras decimales que tengan en total ambos factores: 0,48.

a. 1,3 • 5
b. 4,9 • 4
c. 5,5 • 2,8
d. 1,204 • 8,2
e. 3,12 • 4,07
f. 13,1 • 25,4

7. Resuelve las divisiones.

3,36 : 0,4

Paso 1 Multiplica el divisor y el dividendo por 10. Así, se obtiene 33,6 : 4.

Paso 2 Divide.

```
 33,6 : 4 = 8,4  → Divide la parte entera por 4.
−32
 ---
  16             → Divide 16 décimos por 4.
 − 16
 ---
   0//
```

a. 101,6 : 8
b. 85,96 : 14
c. 7,77 : 0,42
d. 54, 3 : 3
e. 56,8 : 14,2
f. 0,756 : 1,4

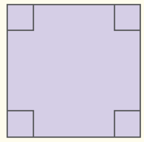
Aplica

8. Calcula mentalmente.

a. 8,2 • 100
b. 0,041 • 10
c. 2,34 : 10
d. 10,04 : 1000
e. 1,01 : 1000
f. 702,4 : 100

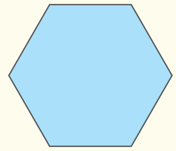
9. Calcula la medida del lado de cada polígono regular (sus lados tienen igual longitud).

a.



Cuadrado de perímetro 20,52 cm.

b.

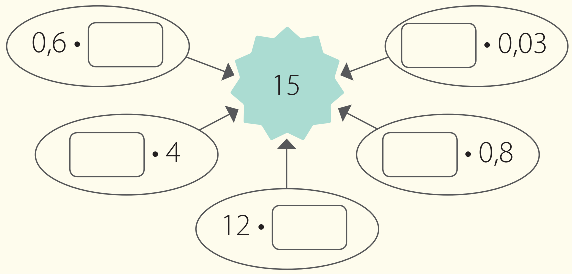


Hexágono de perímetro 43,2 cm.

10. El doctor le dijo a Vicente que debe tomar 1,5 ml de jarabe 3 veces al día durante 5 días. ¿Cuánto jarabe necesita?

11. Un ciclista recorrió 145,8 km en 6 horas. Si mantuvo una rapidez constante, ¿cuántos kilómetros recorrió en una hora?

12. **Juego.** Encuentra el factor que falta para que cada producto sea 15.



13. **Desafío.** Óscar dice que multiplicar un número por 0,2 es lo mismo que dividirlo por 5.

a. Comprueba la veracidad de lo que dice Óscar con los números 1,5 y 3,8. ¿Qué sucede? ¿Por qué?

Rosa tiene otro un truco: dice que dividir por 0,5 es lo mismo que multiplicar por 2.

b. Comprueba la veracidad de lo que dice Rosa con los números 4,5 y 6,3. ¿Qué sucede? ¿por qué?

c. Crea un truco diferente a los anteriores.

Reflexiono

1. ¿Por qué al multiplicar dos números decimales positivos menores que 1 el resultado siempre es menor que ambos factores?
2. ¿Por qué es necesario amplificar cuando en una división el divisor es un número decimal?

Refuerzo

1. Describe el procedimiento para multiplicar:

   0,03 • 0,51 • 7,5

2. Sofía empaqueta 4,8 kilogramos de saborizante en bolsitas de 0,03 kilogramos. ¿Cuántas bolsitas necesita en total?

Lección 9

» Propósito

Comprender los porcentajes.

¿Para qué?

Muchas encuestas se aplican para obtener datos relevantes de la sociedad, que luego los medios de comunicación dan a conocer a la población por medio de porcentajes. Así, comprender la relación entre fracciones y porcentajes, nos permite acceder a dicha información.

Palabras clave

Razón

Porcentaje

¿Qué es y cómo representar un porcentaje?

Muchas veces has oído oraciones como las siguientes: "El 45 % de las mujeres en edad laboral trabaja", "2 de cada 5 jóvenes en Chile estudian en la universidad".

La primera oración se refiere a porcentajes y la siguiente, a razones. A continuación, estudiaremos cómo se relacionan ambos temas.

Situación 1 Representar para comparar dos cantidades

En un monedero hay 12 monedas y 1 de cada 2 es de $ 100.

¿Cuántas monedas de $ 100 hay?

Paso 1 Agrupa las monedas.

En este caso agrupamos de dos en dos, cuidando que siempre haya una de $100.

1 de cada 2

Cantidad de monedas de $ 100 por grupo.

Cantidad de monedas por grupo.

Paso 2 Indica la cantidad de monedas.

Por cada grupo de dos monedas, _______ de ellas es de $100.

Situación 2 Comparar dos cantidades

Si ahora se tienen 50 monedas e igualmente 1 de cada 2 es de $ 100. **¿Cómo saber cuántas son de $ 100 sin tener que representarlas?**

Paso 1 Averigua el total de grupos que se deben formar.

- Si hay 50 monedas en total, divide 50 en 2, ya que cada grupo debe contener 2 monedas.

$50 : 2 = \boxed{}$ → Obtienes _______ grupos de _______ monedas.

Paso 2 Averigua el total de monedas de $ 100.

- Multiplica la cantidad de grupos, en este caso _______, por la cantidad de monedas de $ 100, que hay en cada grupo, en este caso 1.

$\boxed{} \cdot \boxed{} = \boxed{}$ → Obtienes la cantidad de monedas de $ 100.

Nota que decir que **1 de cada 2** monedas es de $ 100, es equivalente a decir que **2 de cada 4** monedas es de $ 100 o que **4 de cada 8** monedas es de $ 100, esto es lo que llamamos una comparación por razón.

Ampliando

En la antigua Roma, los porcentajes eran de gran importancia en su economía. Aunque todavía no se reconocía al porcentaje como tal, ellos aplicaban fracciones con denominador 100 para calcular impuestos por sus bienes o a la venta de esclavos.

Situación 3 Comparar con un total de 100

Imagina ahora que hay 100 monedas en total y la relación entre las de $ 100 y el total se mantiene, 1 de cada 2 monedas es de $ 100. **¿Cuántas monedas de $ 100 hay?**

Paso 1 Agrupa las monedas.

100 : ☐ = ☐ → Obtienes ______ grupos de ______ monedas.

¿Cuántas monedas debe tener cada grupo? y ¿por qué?

Paso 2 Averigua el total de monedas de $ 100, para ello multiplica la cantidad de grupos por la cantidad de monedas de $ 100 de cada uno.

Cantidad de grupos. → 50 • 1 = 50 ← Cantidad total de monedas de $ 100.

Cantidad de monedas de $ 100 por grupo.

Paso 3 Expresa la relación como porcentaje si se sabe que este es una comparación de cantidades considerando un total de 100.

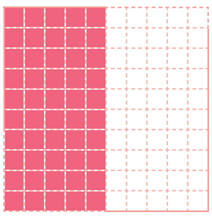
En el monedero 50 de cada 100 monedas son de $ 100, esto significa un 50 por ciento de monedas de $ 100 y se escribe 50 %.

50 % equivale a $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$

Ayuda

Nota que decir que 1 de cada 2 monedas es de $ 100 es equivalente a decir que 50 de cada 100 monedas son de $ 100.

Paso 4 Representa en una cuadrícula 100 partes iguales y pinta 50.



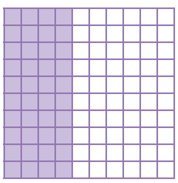
→ $\frac{50}{100} = 0{,}5$

Para concluir

- Una **razón** es una comparación de dos cantidades mediante un cociente. Se escribe:

  $a : b = \frac{a}{b}$, y se lee "**a** es a **b**".
- El **porcentaje** compara cantidades considerando un total de 100.
- Todo porcentaje se puede expresar como fracción y, por ende, como decimal:

  40 % es equivalente a $\frac{40}{100} = \frac{2}{5} = 0{,}4$ →



Argumenta y comunica

- ¿Por qué piensas que la comparación se realiza con un total de 100?, ¿podría ser con otra cantidad? Discute tu postura con la de otros compañeros y compañeras y explícales tu razonamiento.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. **Escribe las fracciones como números decimales.**

a. $\frac{3}{10}$ c. $\frac{4}{5}$ e. $\frac{12}{200}$

b. $\frac{4}{8}$ d. $\frac{7}{100}$ f. $\frac{13}{25}$

2. **Escribe los números decimales como fracciones.**

a. 0,9 c. 1,03 e. 0,04

b. 0,13 d. 3,041 f. 21,2

3. **Escribe las fracciones como fracciones irreductibles.**

a. $\frac{4}{12}$ c. $\frac{32}{40}$

b. $\frac{35}{49}$ d. $\frac{81}{27}$

Práctica guiada

4. **Identifica la razón que corresponde a cada situación.**

4 de cada 5 jóvenes tienen celular. ¿Cuál es la razón entre la cantidad de jóvenes y la tenencia de celular?

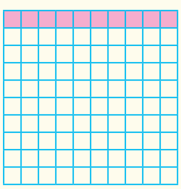
Si 4 de 5 jóvenes tienen celular, entonces se dice "cuatro es a cinco".

a. Según un estudio, solo 1 de cada 4 adolescentes hace la cantidad de ejercicio recomendada para su edad. ¿Cuál es la razón entre el total de adolescentes y los que hacen la cantidad de ejercicio recomendada?

b. Según los resultados de una encuesta, 4 de cada 10 chilenos llevan una alimentación poco saludable. ¿Cuál es la razón entre los chilenos que se alimentan saludablemente y el total de los chilenos?

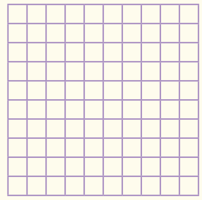
5. **Representa cada porcentaje en una cuadrícula. Luego, escríbelo como fracción y como número decimal.**

El 10 % de las personas practica algún deporte.

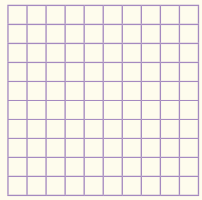


10 % $\longrightarrow \frac{10}{100} = 0{,}1$

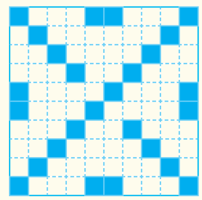
a. El 90 % de las personas trabaja.



b. El 67 % de los estudiantes de un colegio vive en la comuna.

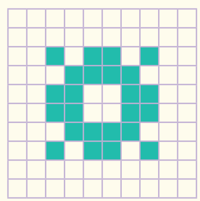


6. **Indica el porcentaje que representa el área sombreada.**

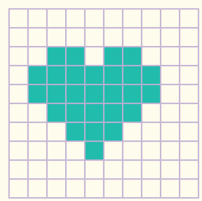


Hay 26 cuadrados sombreados de 100, por lo tanto, el porcentaje corresponde al 26 %.

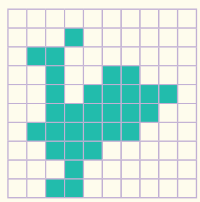
a.



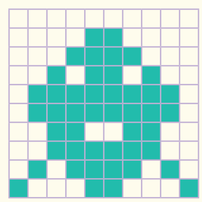
c.



b.



d.



7. **Escribe el porcentaje correspondiente a cada situación.**

Una de cuatro personas lee el diario todos los días.

Paso 1 Representa la situación con una fracción.

Una de cuatro personas $\longrightarrow \frac{1}{4}$

Paso 2 Amplifica la fracción para que tenga denominador 100.

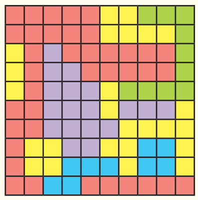
$$\frac{1 \cdot 25}{4 \cdot 25} = \frac{25}{100}$$

Así, el 25 % de las personas lee el diario diariamente.

a. La mitad de la sociedad prefiere el verano.
b. Por liquidación, se bajaron todos los precios en $\frac{1}{5}$.
c. Ese equipo de fútbol ha ganado 3 de cada 4 partidos que ha jugado.

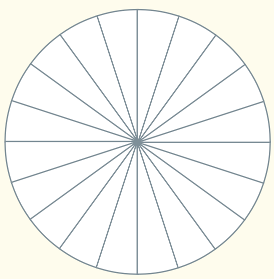
Aplica

8. Escribe el porcentaje que representa cada color.



Color	Porcentaje
__________	______
__________	______
__________	______
__________	______
__________	______

9. Representa en el gráfico circular los porcentajes dados.



a. 50 % ⟶ Rojo
b. 25 % ⟶ Verde
c. 10 % ⟶ Azul
d. 5 % ⟶ Amarillo
e. 10 % ⟶ Café

10. Completa la tabla.

Fracción	Decimal	Porcentaje
$\frac{1}{10}$	0,1	10 %
$\frac{1}{4}$		
	0,02	
		60 %
$\frac{4}{5}$		

11. Argumenta. Las siguientes tablas muestran dos procedimientos para representar un porcentaje como número decimal. Complétalas y luego responde.

Porcentaje	Representación decimal utilizando fracciones
33 %	$\frac{33}{100} = 0{,}33$
6 %	
0 %	

Porcentaje	Representación decimal utilizando x : 100
94 %	94 : 100 = 0,94
50 %	
8 %	

¿Qué procedimiento prefieres? Fundamenta tu respuesta mencionando ventajas y desventajas de cada uno.

12. Desafío. Con tus palabras, explica a un compañero o compañera el significado de la oración: “Los participantes de una competencia en un colegio dieron el 200 % de su capacidad”.

Reflexiono

1. ¿Las fracciones $\frac{2}{5}$ y $\frac{8}{20}$ referidas a un mismo conjunto representarán el mismo porcentaje?, ¿por qué?
2. Se afirma que para obtener el 1 % de un número, basta con multiplicarlo por 0,01. ¿Es cierta esta afirmación? Justifica.

Refuerzo

1. Una encuesta revela que el 34 % de los integrantes de un taller deportivo participará en el torneo de la ciudad. ¿Cuál es la razón de participación?
2. ¿Qué porcentaje se presenta en la situación “Pedro bebió tres cuartas partes de un litro de jugo”?

Lección 10

¿Cómo calcular porcentajes?

Propósito
Calcular porcentajes.

¿Para qué?
Calcular porcentajes tiene una gran utilidad en la vida cotidiana. Por ejemplo, si quieres comprar un producto con descuento, podrás calcular lo que finalmente pagarás al aplicar el porcentaje de descuento.

Palabras clave
Porcentaje
Todo
Parte

Situación 1 Calcular un porcentaje mentalmente

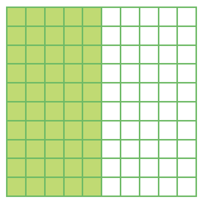
Generalmente te encuentras con porcentajes como 50 %, 25 % y 20 %. Ya sabes qué significa el porcentaje y cómo representarlo, ahora aprenderás a calcularlo con relación a una cantidad.

Una tienda tiene los descuentos que se muestran en la imagen lateral. **¿Cuánto dinero ahorra en cada producto?**

Los siguientes porcentajes se pueden calcular mentalmente.

Pantalón

Paso 1 Sabemos que 50 % es equivalente a $\frac{50}{100} = \frac{1}{2}$ del todo.



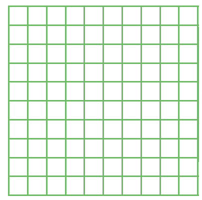
Paso 2 Entonces, calcular el 50 % es lo mismo que dividir el total por 2.

12 000 : 2 = 6000

El descuento es de $ 6000.

Zapatos

Paso 1 Sabemos que 20 % es equivalente a $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$.



¿Cuántos cuadrados debes pintar?

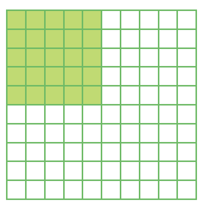
Paso 2 Entonces, calcular el 20 % es lo mismo que dividir el total por 5.

15 500 : 5 = $\boxed{}$

El descuento es de ________.

Polera

Paso 1 Sabemos que 25 % es equivalente a $\frac{25}{100} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$.



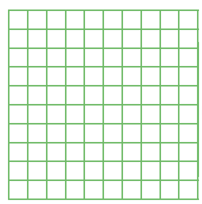
Paso 2 Entonces, calcular el 25 % es lo mismo que dividir el total por 4.

6800 : 4 = $\boxed{}$

El descuento es de ________.

Gorro

Paso 1 Sabemos que 10 % es equivalente a $\frac{10}{100} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$.



¿Cuántos cuadrados debes pintar?

Paso 2 Entonces, calcular el 10 % es lo mismo que dividir el total por 10.

4900 : 10 = $\boxed{}$

El descuento es de ________.

Situación 2 Calcular un porcentaje cualquiera

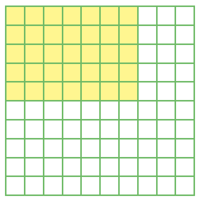
¿Cuál es el valor del descuento del cinturón?

Se debe calcular el 35 % de 8900.

Paso 1 Divide el valor del cinturón en 100 partes, para conocer el valor de cada parte.

$$8900 : 100 = 89$$

Paso 2 Considera las partes pedidas.



Cada parte vale $ 89.

Como se consideran 35 partes y cada una equivale a 89, se debe multiplicar el cociente del paso 1 por 35.

$$\boxed{} \cdot 35 = \boxed{}$$

Luego, el cinturón tiene un descuento de ______.

Ampliando

Otra forma de calcular porcentajes es con la calculadora. Para ello, debes tener en cuenta que calcular un porcentaje equivale a multiplicar la cantidad por la fracción o el decimal que representa dicho porcentaje.

El 35 % de 8900 equivale a:

$$\frac{35}{100} \cdot 8900 = 3115$$

O bien:

$$0{,}35 \cdot 8900 = 3115$$

Situación 3 Encontrar un porcentaje

Si la rebaja de la chaqueta es de $ 14 040, **¿cuál fue el porcentaje de descuento que se le aplicó?**

Paso 1 Divide el valor de la chaqueta en 100 partes, para conocer el valor de cada parte.

$$36\,000 : 100 = 360$$

Cada parte vale $ 360.

Paso 2 Encuentra la cantidad de partes consideradas, es decir, cuántas partes de 360 se necesitan para obtener 14 000.

$$360 \cdot ¿? = 14\,040$$

Aplica la operación inversa.

$$14\,040 : 360 = \boxed{}$$

Por lo tanto, $ 14 040 corresponden al ______ de $ 36 000.

Cuando conozco el porcentaje de descuento y el valor de este descuento, ¿cómo averiguar el monto inicial?

Para concluir

- Para **calcular un porcentaje cualquiera** de una cantidad: Divide la cantidad en 100. Luego, multiplica el cociente anterior por el porcentaje.
- Para **encontrar qué porcentaje es un número de otro**: Divide uno de los números por el otro. Luego, multiplica el resultado anterior por 100.

Argumenta y comunica

- ¿Cómo calcularías mentalmente el 75 % de 400? ¿Puede haber otras respuestas igualmente válidas?
- Comenten sus estrategias en parejas.

Lección 10

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Calcula las multiplicaciones.

a. $0{,}7 \cdot 400 =$

b. $0{,}3 \cdot 520 =$

c. $1{,}5 \cdot 350 =$

d. $1{,}3 \cdot 840 =$

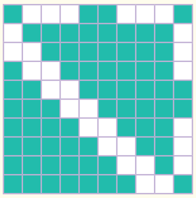
e. $\frac{1}{5} \cdot 755 =$

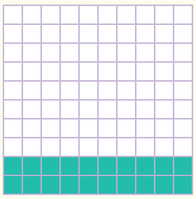
f. $\frac{2}{3} \cdot 663 =$

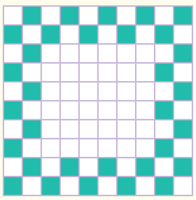
g. $\frac{4}{5} \cdot 865 =$

h. $\frac{15}{20} \cdot 8020 =$

2. Escribe el porcentaje que representa la parte coloreada respecto del total.

a.  ________________

b.  ________________

c.  ________________

3. Representa cada enunciado como un porcentaje.

a. A la fiesta, $\frac{1}{4}$ de los invitados no llevó regalo. ________________

b. A la décima parte de la audiencia no le gustó la película. ________________

c. 8 de cada 10 personas donaron alimentos no perecibles. ________________

d. Solo la mitad del curso ha traído la autorización para el paseo. ________________

Práctica guiada

4. Calcula mentalmente.

El 20 % de 1200.

20 % es igual a la quinta parte del entero, porque: $\frac{20}{100} = \frac{1}{5}$.

$1200 : 5 = 240$

a. 10 % de 50.

b. 20 % de 300.

c. 25 % de 120.

d. 20 % de 40.

e. 10 % de 500.

f. 50 % de 250.

g. 25 % de 36.

h. 50 % de 84.

Explica la estrategia que utilizastes en dos de ellas.

5. Calcula los porcentajes.

El 18 % de 1400.

$$\frac{18}{100} \cdot 1400 = \frac{18 \cdot 1400}{100} = 252$$

a. El 20 % de 3000.

b. El 25 % de 7200.

c. El 10 % de 5560.

d. El 50 % de 9400.

e. El 10 % de 874.

f. El 25 % de 320.

g. El 75 % de 1000.

h. El 20 % de 820.

6. Pinta del mismo color las etiquetas que son equivalentes.

10 % de 500

20 % de 150

10

30

30 % de 60

50

25 % de 40

18

45 % de 160

72

Aplica

7. Determina el porcentaje que falta para que se descargue el programa completo.

a. 

b. 

8. Explica los avisos con tus palabras.

a. 

b. 

9. Susana respondió el 80 % de las preguntas de un examen. Si este consta de 40 preguntas, ¿cuántas contestó?

10. En una fábrica hay 3500 obreros de los cuales el 75 % son mujeres. ¿Cuántos hombres trabajan en la fábrica?

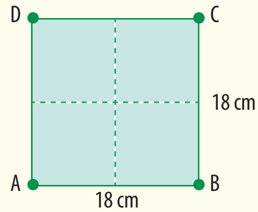
11. Alejandra le cuenta a Pablo que en su álbum tiene pegadas 270 láminas, las que corresponden al 90 % del total. Pablo le cuenta que a él le falta el 15 % para completar el mismo álbum.

¿Cuántas láminas le faltan a Pablo para completar su álbum?

12. Mariana repartió 80 láminas entre sus amigos. Pedro recibió el 30 %, Lorena recibió un 15 % más que Pedro y Martín recibió el resto de las láminas.

¿Cuántas láminas recibió cada uno?

13. **Desafío.** Se tiene un cuadrado de lado 18 cm, como el de la figura.



a. ¿Cuál es su área?

b. Si cada lado se reduce en un 50 %, ¿cuál es el área del nuevo cuadrado?

c. Dibuja el nuevo cuadrado en la figura dada.

d. ¿Qué porcentaje del área del cuadrado original es el área del nuevo cuadrado?

14. **Explica.** Esteban dice que para calcular el 30 % de 150 puede realizar lo siguiente:

El 10 % de 150 es 15 y $3 \cdot 15 = 45$. Luego, el 30 % de 150 es 45.

Explica la estrategia que utilizó Esteban.

15. **Argumenta.** Josefina dice que para calcular el 25 % de una cantidad esta se divide por 4, por lo tanto, para calcular el 12,5 % se debe dividir por 8. ¿Por qué es correcto el método de Josefina?

16. **Crea** una situación que se resuelva a partir de cada ejercicio.

a. $\frac{12}{100} \cdot 25\,000$.

b. El 5 % del 30 % de $ 189 990.

Reflexiono

1. Si a una cantidad se le aplica un descuento del 25 %, ¿daría el mismo resultado que si se le aplica un descuento del 15 % y luego otro del 10 %? Explica.
2. El 40 % de un número se puede representar en una cuadrícula de 200 partes iguales pintando 80 de estas. ¿Estás de acuerdo con la afirmación? Justifica.

Refuerzo

1. ¿Cuánto dinero se ahorra Juan si al comprar un reloj de $20 000 este tenía un 35 % de descuento?
2. Si un pantalón tiene un precio de $ 10 990 y a este se le aplica un descuento de $ 3297, ¿qué porcentaje de descuento se le hizo?

Lección 11

¿Cómo se utilizan los porcentajes en la vida cotidiana?

Propósito

Aplicar porcentajes en diferentes contextos.

¿Para qué?

El uso de porcentajes en la vida cotidiana es muy frecuente, ya que permite expresar disminuciones y aumentos de cantidades determinadas. Estos se utilizan mucho en economía, sobre todo en lo vinculado a los impuestos que pagan tanto las empresas como las personas, con el objeto de que el Estado recaude dinero para implementar sus políticas públicas.

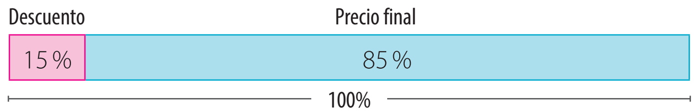
Palabras clave

- Disminución porcentual
- Incremento porcentual
- Monto bruto
- Impuesto
- Monto líquido
- IVA
- Valor neto
- Valor bruto

Situación 1 Disminuir porcentualmente

Por la temporada de verano, el precio de los tomates tiene una baja del 15 %. Si este era de $ 800 por kilogramo, **¿cuánto cuesta el kilogramo de tomates con el descuento de verano?**

Paso 1 Representa gráficamente la situación.



Para calcular la disminución porcentual veremos dos estrategias:

Opción 1

Paso 2 Calcula el porcentaje real que se pagará.

Resta del 100 % el porcentaje de descuento.

$100\,\% - 15\,\% = \boxed{}$

Paso 3 Calcula entonces el ____% del precio que hasta ahora tenía el tomate.

$800 : 100 = 8$

$8 \cdot \boxed{} = \boxed{}$

Opción 2

Paso 2 Calcula el 15 % de descuento.

$800 : 100 = 8$

$8 \cdot 15 = \boxed{}$

Paso 3 Resta el descuento al valor inicial.

$800 - \boxed{} = \boxed{}$

El precio de los tomates con el descuento es $__________ el kilogramo.

Situación 2 Impuesto retenido

Ignacio es ceramista y trabaja a honorarios, es decir, al finalizar un período de trabajo, entrega una boleta a su cliente para que este le pague sus servicios. A este valor, llamado monto bruto, se le retiene el 10 % de impuesto, y lo que recibe es el monto líquido.

Si en enero el pago bruto por sus servicios fue $ 336 000, **¿cuál es el monto líquido que recibirá?**

Paso 1 Calcula el 10 % de sus honorarios brutos. → $336\,000 : 10 = \boxed{}$

Paso 2 Resta el impuesto a los honorarios. → $336\,000 - \boxed{} = \boxed{}$

¿Por qué para calcular el 10 % basta con dividir por 10?

Por lo tanto, sus honorarios líquidos serán $__________.

Situación 3 IVA

El IVA (Impuesto al Valor Agregado) es uno de los principales impuestos y es el que se cobra por el consumo de bienes. En Chile, equivale al 19 %. A su vez, el valor neto es aquel que no incluye impuestos, mientras que el valor bruto es aquel que sí los incluye.

Si el valor neto de un producto es $ 3900, ¿cuánto dinero debe pagar un consumidor después de aplicarle el IVA?

Paso 1 Calcula el IVA. → $\frac{19}{100} \cdot 3900 = \boxed{}$ o $0{,}19 \cdot 3900 = \boxed{}$

Paso 2 Agrega el IVA al valor neto. → $3900 + \boxed{} = \boxed{}$

Luego, el valor bruto que pagará un consumidor es $__________.

Ayuda

Recuerda que para calcular el porcentaje de una cantidad también puedes multiplicar dicha cantidad por la fracción o el decimal equivalente.

Para concluir

- Existen distintas aplicaciones de los porcentajes en la vida cotidiana:
  - **Disminución porcentual:** Variación porcentual donde el valor original disminuye en un porcentaje determinado, el que se debe restar.
  - **Incremento porcentual:** Variación porcentual donde el valor original aumenta en un porcentaje determinado, el que se debe sumar.
  - El **Impuesto al Valor Agregado (IVA)** actualmente corresponde al 19 % del valor neto (sin IVA) de un producto.
  - El **Impuesto retenido** por las boletas de honorarios corresponde al 10 % del valor bruto.

Argumenta y comunica

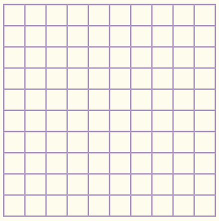
- Si el precio de un libro es $ 3500 y ya está incluido el IVA, ¿cómo puedes encontrar su valor antes de que se agregara este impuesto?

Practiquemos lo aprendido

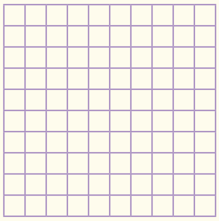
Repaso

1. **Representa los porcentajes en cuadrículas.**

a. 15 %



b. 38 %



2. **Representa cada porcentaje como fracción y como número decimal.**

Porcentaje	Notación decimal	Notación fraccionaria
65 %		
20 %		
48 %		
35 %		
1 %		
99 %		

3. **En un curso de 40 estudiantes, el 40 % son mujeres.**

a. ¿Cuántas mujeres hay en el curso?

b. ¿Qué porcentaje del curso son hombres?

Práctica guiada

4. **Une cada expresión con el incremento respectivo.**

600 aumentado en un 4 %	124,23
20 aumentado en un 33 %	8
15 aumentado en un 15 %	26,6
123 aumentado en un 1 %	624
4 aumentado en un 100 %	17,25

5. **Encuentra el porcentaje de variación entre la cantidad inicial y la cantidad final.**

Cantidad inicial: 500. Cantidad final: 100.

Paso 1 Divide la cantidad final por la inicial.

100 : 500 = 0,2

Paso 2 Expresa el decimal como porcentaje.

0,2 = 20 %

a. Cantidad inicial: 300. Cantidad final: 150.

b. Cantidad inicial: 125. Cantidad final: 125.

c. Cantidad inicial: 120. Cantidad final: 30.

d. Cantidad inicial: 200. Cantidad final: 150.

e. Cantidad inicial: 800. Cantidad final: 80.

Aplica

6. **Clasifica las situaciones de acuerdo a si se trata de un incremento o una disminución porcentual. Fundamenta tus elecciones.**

a. El estanque de un automóvil tiene 35 litros de capacidad. Se inició un viaje con el estanque completo y se consumió el 20 % de su capacidad.

b. Macarena pagó $ 11 250 por un vestido que tenía un 25 % de descuento.

c. Una cuenta de ahorro en cierto banco tiene un pequeño interés mensual. Carlos tenía $ 43 200 depositados y a fin de mes tiene $ 47 100.

7. **Una tienda rebajó todos sus precios. Calcula los nuevos valores de estos productos.**

a.

c.

b.

d.

8. Completa la boleta de Claudia. Calcula el valor líquido que recibirá si sus honorarios son $ 250 000.

NOMBRE:
RUT:
GIRO(S)
DIRECCIÓN:

BOLETA DE HONORARIOS ELECTRÓNICA
Nº

Señor(es):
Domicilio:

Fecha:
Rut:

Por atención profesional

Clases de Matemática	
Total honorarios $:	
10% impto. retenido:	
Total:	

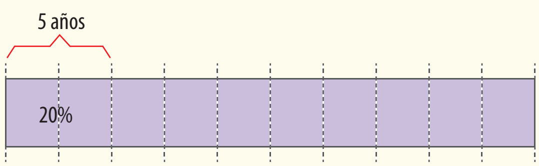
Fecha /Hora Emisión:
08766G6R5GY5444DY5556
Res. Ex. Nº 83 de 08/04/2015
Verifique este documento en www.sii.cl

9. Completa la tabla de mercadería agregándole el IVA a cada producto para su venta. Recuerda que el IVA es el 19 %.

Producto	Valor neto	IVA	Valor bruto
Aceite	$ 1200		
Harina	$ 800		
Pasta	$ 750		
Bebida	$ 1300		

10. Héctor dice que el 20 % de su edad corresponde a 5 años.

Apoyándote en el diagrama, señala:



a. ¿Cuántos años tiene Héctor?

b. ¿Cuántos años corresponden al 80 % de su edad?

11. En una tienda venden una cocina en $ 150 000. Ese precio considera un 40 % de ganancia y el resto es el costo de producción.

a. ¿Qué cantidad corresponde a la ganancia de la venta de la cocina?

b. ¿Cuál es el costo de producción de la cocina?

12. Un consultorio atiende diariamente a 800 niños y 600 adultos en promedio. Se desea aumentar en un 10 % la capacidad de atención de niños y en un 20 % la de adultos.

a. ¿Cuántos niños esperan atender?

b. ¿Cuántas personas en total (niños y adultos) quieren atender?

13. En una empresa trabajaban 380 personas y ahora solo trabajan 304.

a. ¿Qué porcentaje es 304 de 380?

b. ¿En qué porcentaje se redujo el número de trabajadores de la empresa?

14. **Encuentra el error.** Isabel dice que si un producto con IVA cuesta $ 17 850, entonces para encontrar el precio sin IVA se calcula el 19% de $ 17 850 y se le resta.

¿Por qué Isabel está equivocada?

15. **Desafío.** El INE (Instituto Nacional de Estadísticas) indicó que el IPC (Índice de Precios al Consumidor) en octubre de 2013 fue de −0,5 %.

a. Relaciona lo que sabes del significado del signo negativo con los porcentajes, y explica lo que se quiere decir con esa cifra.

b. Si un producto costaba $ 10 000 en septiembre de 2013, ¿cuánto costaría en octubre de ese mismo año, si estuvo afecto a la variación del IPC?

Reflexiono

1. Si a un producto se le aplica un descuento sobre otro descuento, ¿cómo calcularías su valor final?
2. Al precio de un producto de una multitienda se le aplica un alza de un 20 %. A la semana siguiente, su precio disminuye en un 20 %. ¿El precio será el mismo que el original? Fundamenta tu respuesta.

Refuerzo

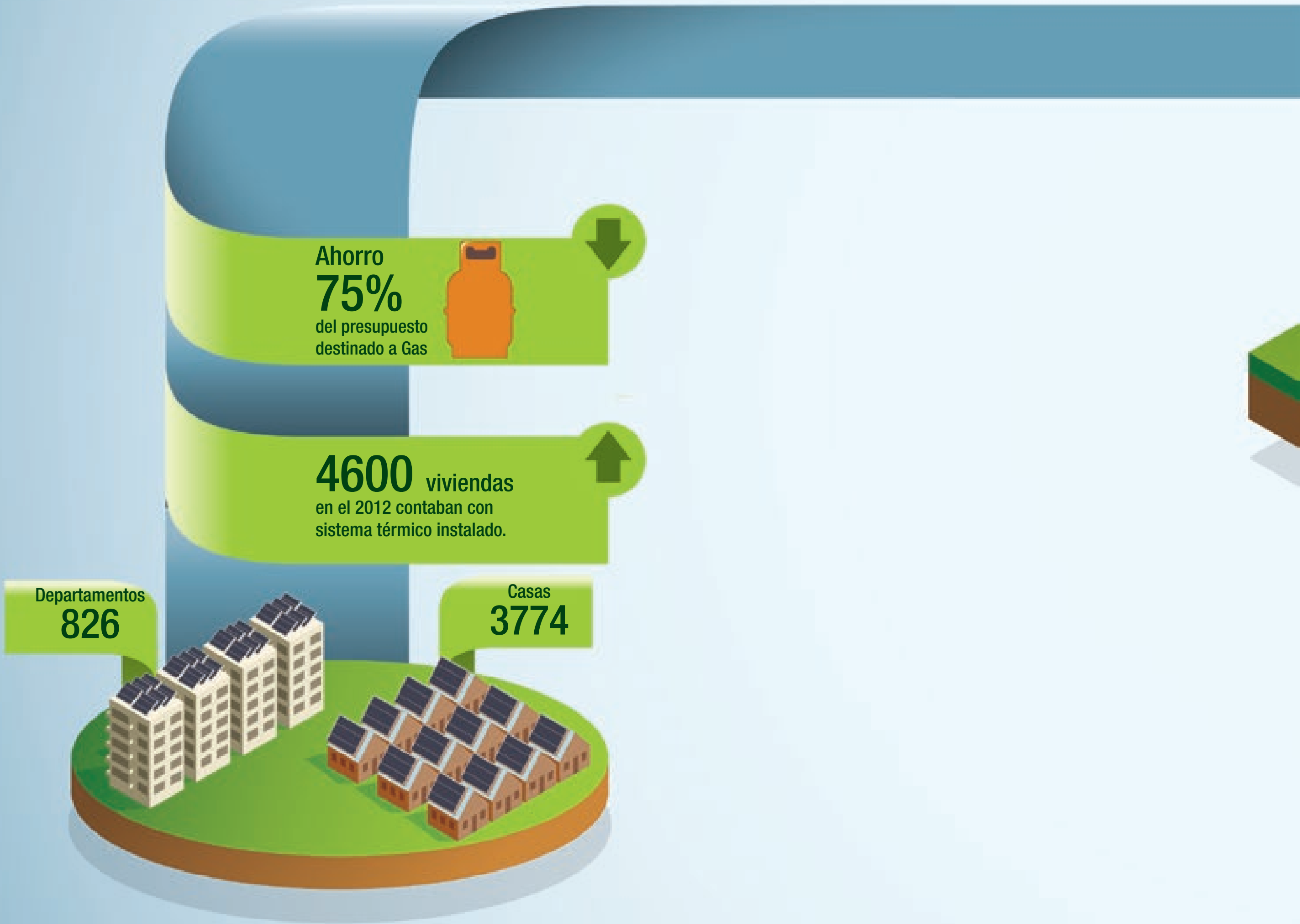
1. El valor neto de una radio en una tienda es de $ 35 000. ¿Cuál es su valor bruto?
2. En una empresa reajustan anualmente los sueldos de sus empleados de acuerdo con la variación anual del IPC. Si un año el IPC es del 4,6 %, ¿cuál será el nuevo sueldo de un empleado que ganaba $ 485 000?

Mural

Actitud: Trabajar en equipo en forma responsable, manifestando disposición a entender sus argumentos.

La energía Solar
fuente inagotable

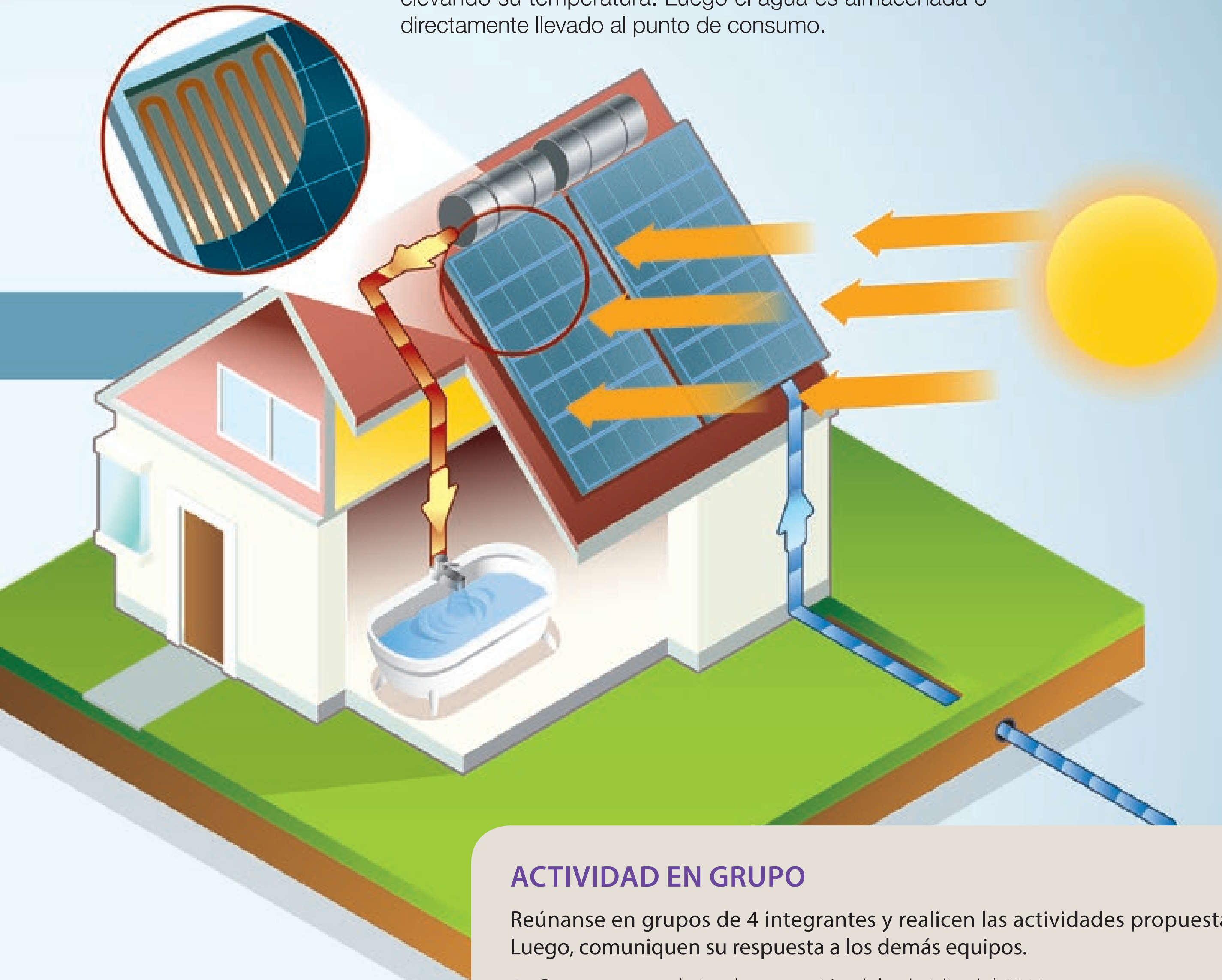
El 2010, el gobierno chileno implementó un subsidio, el cual permite financiar la implementación de sistemas solares para producir agua caliente en viviendas. Esta medida busca que se ahorre aproximadamente un 75 % en el presupuesto destinado al gas. En el 2012, ya 4600 viviendas contaban con sistemas térmicos instalados, de las cuales 3774 correspondían a casas y 826 a departamentos.



Copiapó, sede de la planta fotovoltaica más grande de Latinoamérica

El parque solar más grande de Latinoamérica, "Amanecer Solar CAP", fue inaugurado en junio del 2014 y se encuentra en el desierto de Atacama. Tiene una potencia instalada de 100 MW y capacidad suficiente para abastecer el equivalente al 15 % de la demanda energética de la compañía minera y de acero Grupo CAP.

El panel absorbe la energía del Sol en forma de calor, por él pasa un fluido (agua) al que se le transfiere el calor elevando su temperatura. Luego el agua es almacenada o directamente llevado al punto de consumo.



ACTIVIDAD EN GRUPO

Reúnanse en grupos de 4 integrantes y realicen las actividades propuestas. Luego, comuniquen su respuesta a los demás equipos.

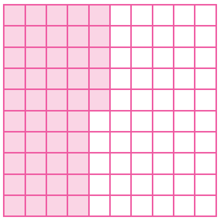
1. Con respecto a la implementación del subsidio del 2010:
   - ¿Qué fracción representa el número de casas con respecto al total de viviendas instaladas con sistema solar?
   - ¿Qué porcentaje de las viviendas corresponde a departamentos?
   - Si el consumo familiar mensual de gas es de $ 23 000, ¿cuánto dinero ahorraría la familia instalando un colector solar?
2. La planta Amanecer Solar CAP es capaz de abastecer el 15 % de la potencia que necesita su compañía minera. ¿A cuánta potencia corresponde este porcentaje?
3. Investiguen qué otras energías renovables se utilizan en el resto del mundo y cómo se han implementado. Elaboren un cuadro comparativo con las ventajas y desventajas que pueden tener al implementarse en Chile masivamente.
4. Si bien, la energía solar permite un ahorro significativo, la gran parte de las viviendas de nuestro país funcionan a base de energía eléctrica. Elaboren una lista de medidas que se pueden aplicar en familia para ahorrar energía en el hogar y preséntenla al resto del curso.

¿Cómo voy?

Lección 6: Expresar fracciones como números decimales y viceversa

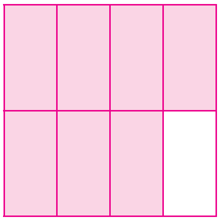
1 Escribe como fracción y como número decimal cada representación.

a.



Fracción decimal	Número decimal

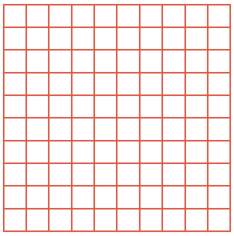
b.



Fracción decimal	Número decimal

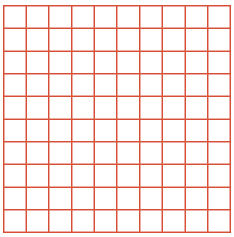
2 Representa en la cuadrícula los números decimales y escríbelos como fracción.

a. 0,12



$\frac{\square}{\square}$

b. 0,4



$\frac{\square}{\square}$

3 Expresa cada fracción como número decimal.

a. $\frac{19}{2}$

c. $\frac{3}{20}$

b. $\frac{7}{4}$

d. $\frac{11}{25}$

4 Expresa cada número decimal como fracción irreductible.

a. 0,4

c. 0,84

b. 0,56

d. 1,02

5 Entre dos amigos se han tomado $\frac{3}{4}$ de una botella de litro de bebida. ¿Cuántos litros de bebida quedan en la botella?

Lección 7: Multiplicar y dividir fracciones

6 Representa gráficamente las multiplicaciones.

a. $\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{5}$

b. $\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{9}$

7 Resuelve las operaciones.

a. $\frac{3}{4}\cdot\frac{16}{12}=$

d. $\frac{4}{15}\cdot\frac{3}{5}=$

b. $2\frac{1}{3}:6\frac{2}{3}=$

e. $\frac{1}{5}\cdot\frac{12}{8}\cdot\frac{5}{2}=$

c. $\frac{3}{5}:\frac{9}{15}=$

f. $2\frac{1}{6}:\frac{18}{26}=$

8 Encuentra los términos que faltan.

a. $\frac{\square}{8}\cdot\frac{3}{5}=\frac{12}{40}$

c. $\frac{12}{\square}\cdot\frac{\square}{4}=\frac{36}{60}$

b. $\frac{3}{7}:\frac{1}{\square}=\frac{45}{7}$

d. $\frac{\square}{16}:\frac{2}{3}=\frac{21}{\square}$

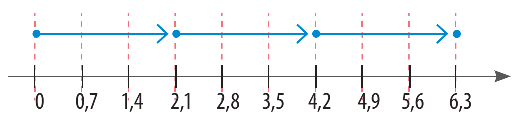
9 La edad de Rosa es $\frac{3}{5}$ de la edad de Julio. Si Julio tiene 20 años, ¿qué edad tiene Rosa?

10 Un tarro de pintura alcanza para pintar $\frac{2}{3}$ de una muralla. ¿Cuánta pintura se necesita para pintar 5 murallas iguales?

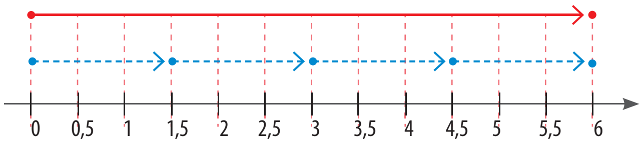
Lección 8: Multiplicar y dividir decimales

11 Identifica la operación representada.

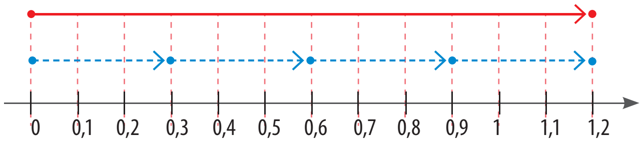
a.



b.



c.



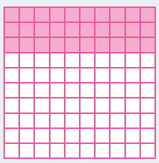
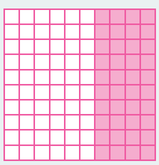
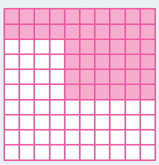
12 Resuelve las operaciones.

a. 0,8 • 0,04 =
b. 0,2 • 1,06 =
c. 3,5 : 0,5 =
d. 2,8 : 0,1 =

13 Calcula el área del cuadrado.

Lección 9: Comprender los porcentajes

14 Completa la tabla.

Representación	Porcentaje	Fracción	Decimal
			
			
			

Lección 10: Calcular porcentajes

15 Calcula los porcentajes.

a. 20 % de 520.
b. 18 % de 118.
c. 80 % de 25.
d. 10 % de 380.

16 Calcula el porcentaje necesario para obtener lo pedido en cada caso.

a. 575 aumentado en un 0,3 %.
b. 321 aumentado en un 5 %.
c. 4565 disminuido en un 20 %.
d. 3444 disminuido en un 25 %.

Lección 11: Aplicar porcentajes en diferentes contextos

17 Si el costo de un producto es $ 4350, ¿cuál es su precio al agregarle el IVA?

18 El perímetro de un cuadrado es 20 cm. Si sus lados se reducen en un 10 %, ¿cuál es el perímetro del cuadrado que se obtiene?

19 La masa corporal de un recién nacido debe aumentar mes a mes. Si desde el nacimiento al primer mes se espera un incremento del 25 %, ¿cuál debería ser la masa de un bebé de un mes cuyo registro fue de 3560 g al momento de nacer?

Desafío de integración

1. El monto depositado en una cuenta de ahorro en cierto banco aumenta un 0,2% mensualmente. Si Carlos tenía $ 43 200 en una cuenta de ese tipo en este banco, ¿en cuánto aumentará este monto luego de cinco meses?
2. La UF (Unidad de Fomento) es una unidad de cuenta usada en Chile, reajustable de acuerdo a la inflación. Fue creada durante el gobierno de Eduardo Frei Montalva con el fin de revalorizar los ahorros, permitiendo que el dinero en bancos y entidades financieras mantuviera su poder adquisitivo. En la actualidad la UF se reajusta diariamente.
   a. En el año 1990 la UF equivalía a $ 7043,38, y una década después su valor fue $ 15 763,32. ¿En qué porcentaje se incrementó su valor?
   b. En el año 2014 la UF terminó con un valor de $ 24 627,10. Para el 2015 se esperaba un incremento del 0,65 %. Investiga si esta estimación fue correcta calculando la variación entre la UF del 2015 y la del 2014.

Resolución de problemas

Actitud: Demostrar interés y perseverancia frente a la resolución de problemas.

Hacer un diagrama

Cuando un problema está relacionado con porcentajes o cantidades decimales, puedes elaborar un diagrama que muestre la distribución de los datos y permita compararlos.

Estrategias

- Hacer un diagrama.
- Usar ensayo y error sistemático.
- Usar problemas más sencillos.
- Hacer una tabla.
- Encontrar un patrón.
- Plantear una ecuación o una inecuación.
- Usar razonamiento lógico.

Chile es el país con mayor producción de cobre a nivel mundial. Actualmente, aquí se produce cerca del 30 % del cobre de mina del mundo, por lo cual la minería es uno de los pilares fundamentales de la economía chilena. La Comisión Chilena del Cobre (Cochilco) señaló en un comunicado que el 2012 la producción nacional de cobre de mina fue de 5 434 000 toneladas, mientras que en el 2013 tuvo un aumento que generó una variación del 6,3 %. ¿Cuántas toneladas de cobre de mina produjo Chile en el 2013?

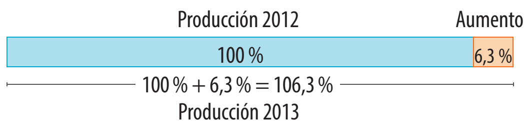
¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema?

¿Qué datos tienes para resolver?

Crea un plan para resolver

Para resolver este problema puedes utilizar la estrategia Hacer un diagrama. Para ello, representa en una barra el porcentaje de producción del 2012 y su incremento.

Aplica la estrategia



Resuelve

Verifica la respuesta

Comunica la respuesta

Vuelvo a mis procesos

Observa las imágenes centrales y completa.

Nombra un aspecto que aprendiste de las fracciones, los decimales y los porcentajes.

¿En qué partes de la sección requeriste más tiempo? ¿A qué se debió?


BOLETA DE HONORARIOS ELECTRÓNICA
Nº

NOMBRE:
RUT:
GIRO(S):
DIRECCIÓN:

Fecha:

Señor(es):
Domicilio:

Rut:

Por atención profesional

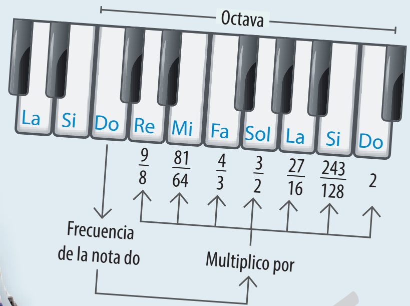
Clases de Matemática

Total honorarios $:

10% impto. retenido:

Total:

Fecha /Hora Emisión:
08766G6R5GY5444DY5556
Res. Ex. Nº 83 de 08/04/2015
Verifique este documento en www.sii.cl



¿Cuál de los procedimientos aprendidos en la sección pueden ser útiles en la vida cotidiana?

De las metas que te propusiste al inicio de esta lección, ¿cuáles cumpliste y cuáles te faltaron?

¿Cómo fue tu contribución y compromiso con tus compañeros en los trabajos grupales?

Sección
3

Potencias

Actitud: Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la vida diaria.

Activo ideas previas

Lee el texto acerca de las distancias de los planetas del sistema solar y luego responde.

La Tierra se ubica en el sistema solar, que está formado por un grupo de objetos astronómicos, como estrellas, planetas y satélites naturales. Todos ellos giran en órbitas alrededor del Sol, gracias a la fuerza de gravedad. Este sistema se formó hace unos 4 600 000 000 años, a partir del colapso de una nube molecular.

Hasta el año 2006 se consideraba que en el sistema solar había nueve planetas, pero ese año la comunidad científica reclasificó al más pequeño y lejano, Plutón, como un planetoide.

En la tabla aparecen las distancias desde el Sol hasta cada uno de los planetas y su diámetro ecuatorial.

Planeta	Distancia (m)	Diámetro ecuatorial (m)
Mercurio	57 910 000 000	4 878 000
Venus	108 200 000 000	12 100 000
Tierra	149 600 000 000	12 756 000
Marte	227 940 000 000	6 787 000
Júpiter	778 330 000 000	142 984 000
Saturno	1 429 400 000 000	120 536 000
Urano	2 870 990 000 000	51 108 000
Neptuno	4 504 300 000 000	49 538 000

- ¿Qué método utilizarías para calcular la distancia que hay entre Júpiter y Saturno?

  ___

- La tabla anterior contiene números muy grandes. ¿De qué otra forma piensas que se podrían expresar estas distancias para facilitar los cálculos?

  ___

Activo conceptos clave

Los siguientes listados muestran las palabras clave de la sección. Con ellas, completa las actividades.

Recurso digital complementario

Potencia de base 10 Base Exponente	Descomponer Valor posicional Notación científica	Componer Factor Decimal entre 1 y 10

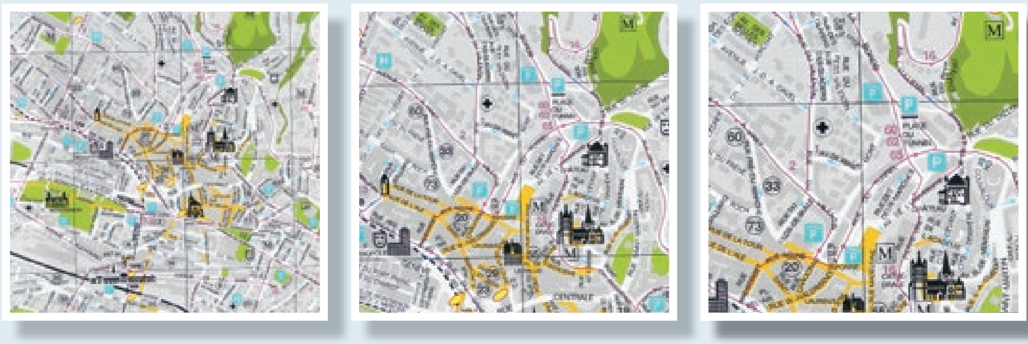
- Dos conceptos asociados a la formación de números: ___.
- Un concepto nuevo para ti: ___.
- Una posible definición para el concepto nuevo: ___.

Pienso mis procesos

Observa la imagen central y responde.

Según las actividades anteriores y la imagen central, ¿qué temas piensas que se abordarán en esta sección?, ¿por qué?

¿Cuál piensas que es la relación entre el zoom y el tema que se abordará en esta sección?



¿En qué otras situaciones cotidianas se utilizan grandes números?

¿Qué metas te propones cumplir al finalizar esta sección?

¿Qué estrategias te propones utilizar para trabajar en esta sección?

¿Qué debo saber?

Activa tus conocimientos previos respondiendo la pregunta lateral, luego resuelve la actividad. Para terminar, registra tus logros.

¿Qué significa que nuestro sistema de numeración sea posicional?

¿Cómo se conoce el valor posicional de una cifra?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
15 o más puntos	14 o menos puntos

¿Qué errores cometiste?

Identificar el valor posicional de las cifras

1 Descompón aditivamente, según el valor posicional de las cifras. (6 puntos)

a. 28 899 413
b. 100 001 001
c. 987 060 085
d. 324 007 451
e. 89 623 070
f. 5 073 311

2 Completa la tabla. (5 puntos)

Números	CMi	DMi	UMi	CM	DM	UM	C	D	U
997 152				9	9	7	1	5	2
234 428									
2 568 556									
997 152									
47 981 347									

3 Compón los números. (4 puntos)

a. 70 000 000 + 9 000 000 + 200 000 + 80 000 + 3000 + 100 + 80 =
b. 700 000 000 + 400 000 + 1000 + 900 + 40 =
c. 9 UM + 8 C + 3 D + 9 U =
d. 2 000 000 + 8000 + 900 + 90 + 9 =

4 Identifica la posición y el valor posicional de la cifra destacada. (6 puntos)

Números	Posición	Valor posicional
3 **7**82 002	CM	700 000
45 5**6**7 561	DM	
889 31**2** 011		
7 **1**11 111		
7 314 200		
12**5** 342 010		

5 Si se aumenta en 6 el dígito de la decena de millón en el número 124 887 962, ¿en cuántas unidades aumenta el número? (2 puntos)

6 El dígito 4 ocupa el lugar de las unidades de mil, de las centenas y de las decenas en un número de cinco cifras. Si el dígito de las unidades es el doble que el dígito de las decenas y el valor posicional de 7 es setenta mil unidades, ¿cuál es el número? (2 puntos)

Explica el procedimiento para calcular el área de estas figuras geométricas.

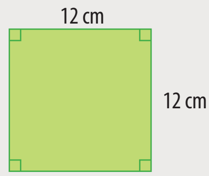
Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
3 o más puntos	2 o menos puntos

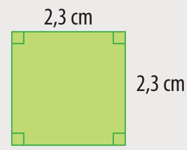
Calcular áreas

7 Calcula el área de cada figura. (4 puntos)

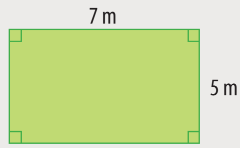
a.



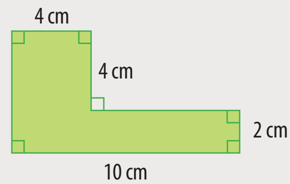
c.



b.



d.



Explica en qué consiste la descomposición prima de un número natural.

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
5 o más puntos	4 o menos puntos

Descomposición prima de números

8 Realiza la descomposición prima de los números naturales. (8 puntos)

a. 4
b. 9
c. 16
d. 27
e. 32
f. 36
g. 64
h. 81

Explica el procedimiento para multiplicar y para dividir números decimales.

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
8 o más puntos	7 o menos puntos

Multiplicar y dividir números decimales

9 Resuelve las multiplicaciones. (6 puntos)

a. 2,3 • 10
b. 0,123 • 100
c. 12,043 • 10
d. 1000 • 3,120
e. 10 • 705,3 • 100
f. 87,11 • 10 000

10 Resuelve las divisiones. (6 puntos)

a. 31,4 : 10
b. 0,88 : 1000
c. 632,4 : 100
d. 47,036 : 10 000
e. 0,0002 : 1000
f. 0,000124 : 100

Lección 12

¿Cómo representar números utilizando potencias de base 10?

Propósito

Representar potencias de base 10.

¿Para qué?

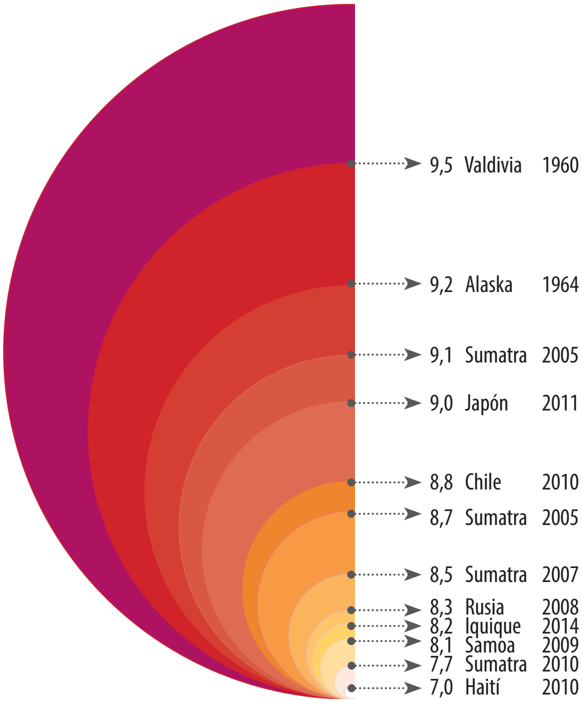
Existen cantidades numéricas muy grandes que resultan difíciles de interpretar. Por ejemplo, la energía que se libera en un terremoto, la masa de la Tierra en kilogramos o las distancias entre los planetas en kilómetros. Sin embargo, este tipo de cantidades se pueden expresar utilizando potencias de base 10 que permiten escribir las cifras de manera abreviada.

Palabras clave

Potencia de base 10
Base
Exponente

Si miras la infografía, ¿qué puedes deducir de la magnitud de un sismo? ¿Cómo aumenta?

Magnitud de un sismo



Ampliando

El mayor terremoto registrado en toda la historia fue de 9,5 grados en la escala de Richter. Ocurrió en la ciudad de Valdivia, Chile, en 1960, y en él fallecieron 2000 personas.

Situación Magnitud de un sismo

La magnitud de un sismo puede medirse con la escala de Richter, actualmente modificada y llamada escala de magnitud de momento.

Cada categoría de esta tabla aumenta exponencialmente; en este caso, es 10 veces más intensa que la anterior.

Escala de magnitud de momento	
Magnitud	**Clasificación**
3	Microevento
4	Menor
5	Leve
6	Moderado
7	Fuerte
8 o más	Potente

Ayuda

La escala de Richter determina la magnitud de los sismos inferiores a 6,9 grados. Cuando un sismo supera esta magnitud, se mide con la escala sismológica de magnitud de momento.

¿Cuántas veces más intenso es un terremoto grado 8 que un sismo grado 4?

Grado 5 es 10 veces mayor que grado 4.

Grado 6 es 100 veces mayor que grado 4.

Grado 7 es 1000 veces mayor que grado 4.

Grado 8 es 10 000 veces mayor que grado 4.

Entonces, un terremoto grado 8 es 10 000 veces más intenso que uno grado 4 y no el doble, como podría pensarse.

Este número puede escribirse como $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 10^4$. A esto le llamamos potencia de base 10.

Base → 10^4 ← Exponente

¿Qué significa la base y qué significa el exponente en una potencia?

Taller Representar potencias de base 10

Reúnanse en parejas y realicen la siguiente actividad:

En la situación anterior vimos que las magnitudes de un sismo aumentan 10 veces respecto a la categoría anterior.

La siguiente tabla ordena esos datos.

A	B	C	D	E
10	100	1000	10 000	100 000
10	$10 \cdot 10$	$10 \cdot 10 \cdot 10$		
		10^3	10^4	

1. En la primera fila, ¿cuántos ceros siguen al número 1 en la columna C?
2. En la segunda fila, ¿cuántos factores 10 hay en la columna C?
3. ¿Qué relación hay entre el exponente de la columna C y los datos determinados en las preguntas **1.** y **2.**?
4. Si observan la columna D, ¿qué relación identifican entre el número de ceros que siguen al número 1 y el exponente que acompaña a la base 10?
5. ¿Qué pueden concluir respecto a la cantidad de ceros que siguen al número 1 y la cantidad de factores 10 en cada caso?
6. ¿Cómo escribirían como una potencia el número 100 000 000 000 000?
7. Completen la tabla.
8. ¿Qué pueden concluir con respecto a las potencias de base 10?

Para concluir

- Una **potencia** de exponente natural es la multiplicación de un número repetidas veces por sí mismo. Se expresa de la forma a^n y se lee "a elevado a n".

Exponente

Base → $a^n = \underbrace{a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{\textbf{n} \text{ veces } \textbf{a} \text{ como factor}}$

a es la base y corresponde al valor que se repite.

n es el exponente y corresponde al número de veces que se repite la base como factor.

- El valor de una **potencia de base 10** y exponente natural es siempre un 1 seguido de tantos ceros como el exponente lo indique.

Argumenta y comunica

- ¿Por qué piensas que a las potencias de exponente 2 se les dice "al cuadrado" y a las de exponente 3, "al cubo"?
  Argumenta tu respuesta usando una representación.
- Con un compañero o compañera, evalúen sus propuestas y escojan la mejor.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Escribe la descomposición prima de los siguientes números:

a. 27 **c.** 81

b. 32 **d.** 128

2. Calcula las multiplicaciones.

a. 23 • 10 **c.** 2,34 • 1000

b. 100 • 100 **d.** 0,44 • 100

Práctica guiada

3. Calcula el valor de las potencias.

$\boxed{10^6}$

El exponente es 6, entonces el valor de la potencia tiene 6 ceros: 1 000 000.

a. $10^2 =$ ____________________

b. $10^3 =$ ____________________

c. $10^8 =$ ____________________

d. $10^{10} =$ ____________________

4. Compara, utilizando > , < o =, las siguientes potencias de base 10.

$\boxed{10^3 \text{ y } 10^4}$

Compara los exponentes: 3 < 4. Por lo tanto, $10^3 < 10^4$.

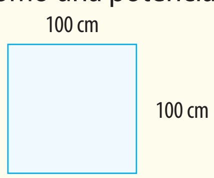
a. 10^5 ______ 10^7

b. 10^3 ______ 10^2

c. 10^1 ______ 10^3

d. 10^1 ______ 10^1

5. Calcula el área de cada cuadrado. Entrega la respuesta como una potencia de base 10.



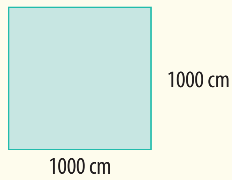
Paso 1 Calcula el área de un cuadrado (base por altura).

100 • 100 = 10 000

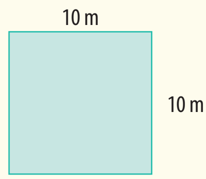
Paso 2 Expresa como potencia.

10 000 tiene 4 ceros, entonces el área del cuadrado es 10^4 cm^2.

a.



b.



Aplica

6. Relaciona el valor y la potencia de base 10 que le corresponde. Para ello, pinta ambos recuadros del mismo color.

10 000 | 10^1 | 1 000 000 | 10^{12} | 1 000 000 000 000 | 10^4 | 10^8 | 10^6 | 10 | 100 000 000 | 10^7 | 10 000 000

7. Reemplaza la ★ por el exponente que corresponde.

a. $100 = 10^{★}$

b. $10\,000\,000 = 10^{★}$

c. $1\,000\,000\,000 = 10^{★}$

d. $1\,000\,000 = 10^{★}$

8. Identifica cuáles de los siguientes valores pueden ser escritos como potencias de base 10. Para ello, escribe la potencia.

a. 10 **d.** 1 111 110

b. 110 **e.** 100 000 000

c. 100 010 **f.** 1010

9. ¿Cuántos ceros tienen los siguientes números?

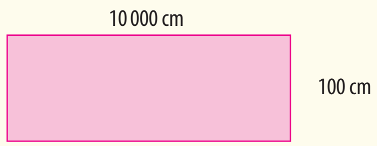
a. 10^{31} ____________________

b. 10^{18} ____________________

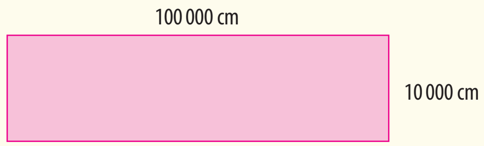
c. 10^{21} ____________________

10. Calcula el área de cada rectángulo. Escribe la respuesta como potencia de base 10.

a.



b.



11. Escribe cada resultado como una potencia de base 10.

a. 999 990 + 10 =

b. 320 034 – 220 039 + 5 =

c. 344 444 444 – 244 444 444 =

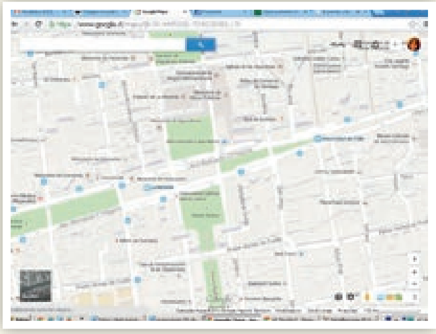
d. 10 000 – (6436 + 2564) =

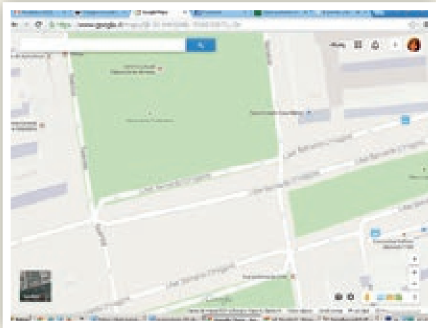
12. Luciano compró un MP4 en $ 36 299 y un equipo de música en $ 74 990. Al pagar, el vendedor le informó que ambos productos estaban con descuento, por lo que se le descontó $ 11 289 al total de la compra. ¿Cuánto dinero gastó en total Luciano?

Escribe este valor como una potencia de base 10.

13. En internet hay programas geográficos que permiten hacer *zoom* a imágenes de la Tierra. Este *zoom* aumenta el tamaño de la imagen por factores de 10.

A la imagen 1 se le aplicó el factor de aumento 10^2 y la imagen 2 tiene factor de aumento 100 000.





a. ¿Cuántos aumentos se realizaron entre la imagen 1 y la 2?

b. Escribe como potencia cada uno de los aumentos hasta obtener la imagen 2.

14. **Detecta el error**. Tomás expresó los siguientes valores como potencias de 10.

$100 = 10^3$

$1000 = 10^4$.

Explica qué error cometió.

15. **Desafío**. Si lo estudiado en esta lección pudiera aplicarse a potencias con bases distintas de 10, ¿cómo se escribirían los siguientes productos?

a. $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 =$

b. $\frac{1}{3} \cdot 1 \_ 3 \cdot \frac{1}{3} =$

c. $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 =$

Reflexiono

1. ¿Qué condiciones debe cumplir un número para que pueda ser escrito como potencia de base 10? Argumenta utilizando un ejemplo.
2. Si un número natural se escribe como una potencia de base 10, ¿el exponente siempre indicará la cantidad de ceros del número? Justifica tu respuesta.

Refuerzo

1. El dueño de un terreno cuadrado de lado 100 000 cm quiere sembrarlo con hortalizas. ¿Cómo se escribe el área total del terreno utilizando potencias de base 10?
2. Catalina quiere escribir el resultado de 400 + 400 + 18 300 – 2 • 4550 como una potencia de base 10. ¿Qué valor debe tener el exponente?

Lección 13

¿Cómo se relacionan las potencias de base 10 con el sistema decimal?

Propósito

Relacionar las potencias de base 10 con el sistema decimal.

¿Para qué?

En toda civilización, el sistema numérico que se utilice tiene un papel fundamental en su progreso, sobre todo en la economía. El sistema decimal se usa en la mayor parte del mundo (excepto en áreas como la informática) y tiene relación con las potencias de base 10. Así, las cantidades numéricas se pueden expresar de distintas maneras, dependiendo del tipo de información con la que se trabaje y el propósito que se tenga.

Palabras clave

Descomponer
Valor posicional
Componer

Situación 1 Descomponer un número natural en potencias de base 10

En cursos anteriores has visto que para descomponer un número aditivamente según su valor posicional debías utilizar la adición. **¿Cómo descomponer aditivamente 23 532?**

Paso 1 Identifica el valor posicional de cada cifra.

¿De qué depende el valor posicional de las cifras de un número?

Decenas de mil (DM)	Unidades de mil (UM)	Centenas (C)	Decenas (D)	Unidades (U)
4	5	3	4	7

$$40\,000 + 5000 + 300 + 40 + 7$$
$$4 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1\,000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 1$$

Paso 2 Representa como potencia de base 10.

Nota que se ha descompuesto el número en múltiplos de 10 000, 1000, 100, 10 y 1. Así, se pueden reemplazar por potencias de base 10.

Un número elevado a 0 da siempre 1.

$$4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$

Situación 2 Componer un número natural

Si, en cambio, se conoce la descomposición, por ejemplo $4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$, **¿cómo se puede componer el número?**

Paso 1 Escribe el valor de cada potencia de base 10.

$$4 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 7 \cdot 10^0$$
$$4 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1000 + 3 \cdot 100 + 4 \cdot 10 + 7 \cdot 1$$

Paso 2 Multiplica.

$$40\,000 + 5000 + \boxed{} + \boxed{} + \boxed{}$$

Paso 3 Ubica las cifras en la tabla según su valor posicional.

Decenas de mil (DM)	Unidades de mil (UM)	Centenas (C)	Decenas (D)	Unidades (U)
4	5			

Luego, el número es: ________.

Ampliando

El sistema decimal tiene sus orígenes en la India, pero fueron los árabes quienes lo dieron a conocer al utilizarlo en el comercio alrededor del mundo. Así, nuestro sistema de numeración decimal y posicional recibe también el nombre de "sistema de numeración indoarábigo".

Taller Potencias de base 10 y el sistema de medición

Realicen la siguiente actividad en parejas.

En las ciencias a menudo se utilizan los múltiplos de una unidad de medida (como el metro), los cuales se indican ubicando un prefijo delante del símbolo. Por ejemplo, kilómetro tiene el prefijo kilo (k) que significa 1000, por eso 1 kilómetro es equivalente a 1000 metros.

1. Averigüen los prefijos y valores para las potencias de la tabla. Luego, complétenla.

Potencia	Valor	Prefijo
10^9	1 000 000 000	
10^6		
10^3	1000	
10^2	100	hecto
10^1		deca
10^0	1	

2. ¿Qué relación hay entre la cantidad de ceros y el exponente?
3. ¿Con qué fin se utilizan estos prefijos? Averigüen al menos un ejemplo de cada uno.
4. Si de esta manera abreviada escribimos números muy grandes, ¿cómo piensan que se podrán escribir números muy pequeños?

Ampliando

Existen discos duros con una capacidad de un terabyte.

Web

Para reforzar y practicar ingresa el código TM7P081 en el sitio web del texto.

Recuerda que Las páginas webs o su contenido pueden variar.

Para concluir

- Para **descomponer aditivamente** un número utilizando potencias de base 10, se debe escribir cada valor posicional como una potencia de base 10 y multiplicarla por la cifra correspondiente.
  Por ejemplo, 3 478 094.

(CMi)	(DMi)	(UMi)	(CM)	(DM)	(UM)	(C)	(D)	(U)
100 000 000	10 000 000	1 000 000	100 000	10 000	1000	100	10	1
10^8	10^7	10^6	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0
		3	4	7	8	0	9	4

- Su descomposición es:

$$\begin{aligned} 3\,478\,094 &= 3\,000\,000 + 400\,000 + 70\,000 + 8000 + 0 + 90 + 4 \\ &= 3 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 7 \cdot 10^4 + 8 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0 \end{aligned}$$

- También es posible realizar el procedimiento inverso, es decir, componerlo.
  Por ejemplo: $3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0 = 3429$
- Todo número, excepto el cero, elevado a cero es igual a uno.

$$10^0 = 1$$

Argumenta y comunica

- ¿Cuál es el número más grande que puedes escribir utilizando los dígitos 8, 5, 0, 4 y 1 sin repetir ninguno? ¿Qué argumento matemático te permite asegurar que este es el número más grande que se puede escribir? Compara tu respuesta con la de un compañero o compañera.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Escribe como potencia de base 10.

a. $10 \cdot 10$

b. $10 \cdot 10 \cdot 10$

c. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

d. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10$

2. Escribe como potencias de base 10.

a. 1

b. 10

c. 1000

d. 100 000 000 000

3. Escribe el exponente que corresponde para que se cumpla la igualdad.

a. $10^{\square} = 100$

b. $10^{\square} = 10\,000$

c. $10^{\square} = 100\,000\,000$

d. $10^{\square} = 1$

Práctica guiada

4. Escribe como una potencia de base 10 el valor de la cifra marcada con rojo. Para ello, completa la tabla.

Número	Valor	Descomposición	Potencia
796 553	6000	$6 \cdot 1000$	$6 \cdot 10^3$
234 670			
5 674 981			
54 821 036			

5. Conecta cada potencia de 10 con el valor posicional que representa en la descomposición de un número.

a. 10^2	Centena de mil
b. 10^6	Centena
c. 10^4	Unidad
d. 10^0	Decena de mil
e. 10^5	Unidad de millón

6. Descompón aditivamente utilizando potencias de base 10.

$\boxed{3482}$

$3 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 8 \cdot 10 + 2 \cdot 1$

$3 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$

a. 123 862

____

b. 1 054 212

____

7. Compón los números.

$\boxed{4 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 6}$

$4 \cdot 100\,000 + 1 \cdot 10\,000 + 5 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 2 \cdot 10 + 6 = 415\,526$

a. $1 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 5$

b. $5 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1 + 8$

c. $6 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^6 + 6 \cdot 10^5 + 8 \cdot 10^4 + 9 \cdot 10^3 + 5 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10^1 + 8$

8. Completa las equivalencias.

1 hm = 1 000 dm

a. 1 m = ______ cm

b. 1 km = ______ m

c. 1 cm = ______ dm

d. 1 dam = ______ cm

Aplica

9. Escribe, usando potencias de 10, las siguientes magnitudes:

a. La distancia de la Tierra a una galaxia espiral en la constelación de la Osa Mayor: 7 000 000 000 000 000 000 000 km.

____

b. La energía que irradia el Sol durante un año: 40 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 000 Joule.

____

c. La velocidad de la luz (aproximada): 300 000 000 m/s.

____

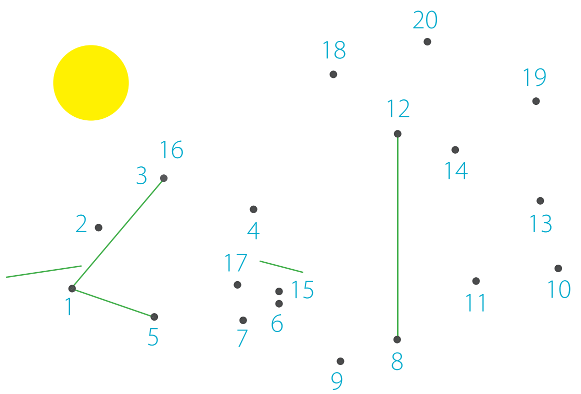
d. Un año luz (distancia recorrida por la luz durante un año): 10 000 000 000 000 km.

____

10. Juega. Relaciona cada expresión (desde la a. hasta la i.) con su valor correspondiente (desde el 1 hasta el 20). Luego, une los puntos del dibujo según la numeración de los resultados calculados. Por ejemplo, el resultado de la expresión en a. corresponde al valor numerado con 1, y el de la expresión en b., al valor numerado con 3; entonces, el punto 1 del dibujo se une con el punto 3. Así, el punto 3 se unirá con el número del valor que le corresponda a la expresión en c., etc.

a. $7 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^2$
b. $4 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^3$
c. $7 \cdot 10^8 + 3 \cdot 10^3$
d. $4 \cdot 10^8 + 2 \cdot 10^4$
e. $4 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^2$
f. $4 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^3$
g. $7 \cdot 10^7 + 3 \cdot 10^3$
h. $7 \cdot 10^6 + 3 \cdot 10^2$
i. $5 \cdot 10^7 + 6 \cdot 10^4$

1. 70 000 300
2. 7 030 000
3. 4 002 000
4. 400 002 000
5. 700 003 000
6. 400 020 000
7. 703 000
8. 40 000 200
9. 700 000 030
10. 40 002 000
11. 7 003 000
12. 70 003 000
13. 40 200 000
14. 4 000 020
15. 7 000 300
16. 50 060 000
17. 17 003 000
18. 4 022 000
19. 7 033 000
20. 27 003 000



11. Resuelve los problemas utilizando potencias de base 10.

a. Si 1 m equivale a 1000 mm, y 1 km equivale a 1000 m, ¿cuántos milímetros hay en 10^5 km?

b. La arista de un cubo mide 10^3 cm y sabemos que 1 litro equivale a 1000 cm^3. ¿Cuántos litros de capacidad tiene el cubo?

c. En un 7.° básico se considera que un estudiante tiene un nivel de lectura rápido si lee más de 200 palabras por minuto. Si un alumno de este curso leyó 10 000 palabras en 100 minutos, ¿está en el nivel rápido?, ¿por qué?

12. Investiga. Daniela realizó el siguiente cálculo en su calculadora científica:

15 964 825 • 1 000 000, y obtuvo el siguiente resultado: 1,5964825 E13.

Investiga qué significa esta notación de la calculadora y qué tiene que ver esto con las potencias de base 10.

Reflexiono

1. Al descomponer aditivamente un número natural en potencias de base 10, ¿qué relación hay entre los sumandos y la cantidad de cifras del número?

2. Si un número tiene 7 cifras, entonces en su descomposición aditiva se utilizará al menos una potencia de base 10 con exponente 7. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.

Refuerzo

1. Descompón el número 2 400 603 utilizando potencias de base 10.

2. Matías debe componer aditivamente un número utilizando los dígitos 4, 5, 7, 3 y 0. ¿Qué valor debe tener el dígito 5 para que su valor posicional se exprese en una potencia de base 10 y exponente 3?

Lección 14

¿Qué es la notación científica?

Situación 1 Introducción a la notación científica

Propósito

Escribir números en notación científica.

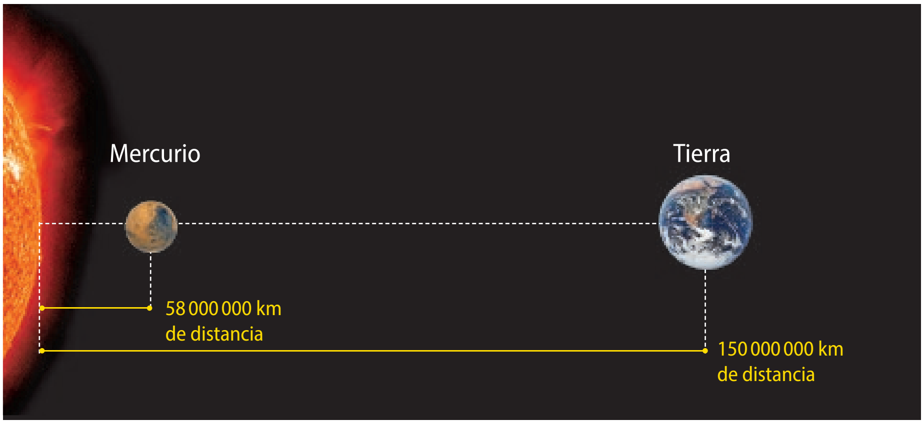
¿Para qué?

Los avances de la ciencia, especialmente en astronomía, donde se trabaja con números muy grandes, permiten realizar mediciones cada vez más precisas. Por ejemplo, se calculó la distancia entre la Tierra y el planeta Kepler 22b, 600 años luz descubierto en 2011. Estas investigaciones requieren trabajar con estimaciones y cálculos, para dar a conocer los datos a la comunidad. La notación científica permite trabajar con estas grandes cantidades, facilitando tanto los cálculos como su lectura.

Palabras clave

Factor
Potencia de base 10
Notación científica

Aproximadamente, la distancia de la Tierra al Sol es de 150 000 000 km, mientras que de Mercurio al Sol es 58 000 000 km.



¿Cómo escribir estos números de manera abreviada usando potencias de base 10?

Paso 1 Descompón cada número en dos factores, de manera que uno sea una potencia de base 10.

Ayuda
Descomponer un número en sus factores consiste en escribirlo como la multiplicación de sus factores.

150 000 000	58 000 000
15 → 10 000 000	58 → ☐

Paso 2 Escribe como el producto entre un número y una potencia de base 10.

$15 \cdot 10\,000\,000$	$58 \cdot$ ☐
↓	↓
$15 \cdot 10^7$	☐ $\cdot$ ☐

Las potencias de base 10 nos permiten escribir números de manera abreviada, facilitando su lectura y escritura.

Paso 3 Reescribe el problema reemplazando los números por escritura con potencias de base 10

____
____
____

¿Cómo ayuda esta escritura numérica a entender contextos de la naturaleza?

Situación 2 Notación científica para números grandes

Nuestro planeta está compuesto por una masa de tierra y otra de agua. Esta última corresponde aproximadamente a un 71 % del volumen de la Tierra, lo que equivale a unos 1 386 000 000 km^3.

Como estos números son sumamente grandes, conviene escribirlos de forma abreviada en notación científica.

Esta notación consiste en escribir un número como el producto de un número decimal cuya parte entera es un valor entre 1 y 9, y una potencia de base 10.

¿Cómo escribir este número utilizando la notación científica?

Paso 1 Descompón el número en dos factores, de manera que uno sea una potencia de base 10.

$$1386 \cdot 1\,000\,000$$

Paso 2 Expresa el factor natural como un número decimal cuya parte entera está entre 1 y 9.

$$\underbrace{1386} \cdot 1\,000\,000$$

$$1{,}386 \cdot 1000 \cdot 1\,000\,000$$

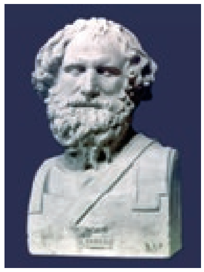
> **Ayuda**
> Al multiplicar un decimal por una potencia de base 10, se corre la coma hacia la derecha tantos lugares como ceros tenga la potencia.

Paso 3 Multiplica las potencias de base 10 y luego expresa el número usando la notación científica.

$$1{,}386 \cdot \underbrace{1000 \cdot 1\,000\,000}$$

$$1{,}386 \cdot 1\,000\,000\,000 = 1{,}386 \cdot 10^9$$

Entonces, el terreno cubierto de agua, 1 386 000 000 km^3, expresado en notación científica es 1,386 • 10^9 km^3.



Autor: Ancora Luciano

Notación científica

El primer intento de representar números demasiado grandes y operar con ellos se le atribuye a Arquímedes, quien quiso estimar la cantidad de granos de arena existentes en el universo. Para hacer sus cálculos creó un sistema de numeración, en el que denominó a 10^4 una miríada, y a 10^8 una miríada de miríadas.

Para concluir

- La **notación científica** permite escribir en forma simple números muy grandes o muy pequeños. Consiste en expresar un número como el producto entre un número mayor o igual que 1 y menor que 10, y una potencia de base 10.
  Ejemplo:
  $450\,000\,000 = 4{,}5 \cdot 100\,000\,000 = 4{,}5 \cdot 10^8$

Argumenta y comunica

- ¿Qué piensas que sucederá con los exponentes para los números pequeños? ¿Existen? Justifica.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Realiza las operaciones y responde.

a. 1,57 • 10
b. 1,57 • 100
c. 1,57 • 1000
d. 1,57 • 10 000
e. ¿Qué regularidad podrías plantear?

2. Descompón los números en dos factores.

a. 45
b. 1200
c. 144
d. 3332
e. 23 000
f. 250 000

Práctica guiada

3. Expresa en notación científica.

427 000 000 000 000

Paso 1 Mueve la coma hacia la izquierda hasta obtener un número entre 1 y 9 (ambos inclusive), el cual se multiplicará por una potencia de base 10.

4,27 000 000 000 000

Paso 2 Cuenta el número de lugares que moviste la coma hacia la izquierda. Ese número corresponderá al exponente de la potencia de base 10.

Entonces, 427 000 000 000 000 = $4{,}27 \cdot 10^{14}$.

a. 64,2
b. 352 000 000
c. 22 500 000 000 000
d. 3 897 000 000 000 000
e. 138 000 000 000 000 000
f. 270 000 000 000 000 000

4. Escribe el número que expresa cada notación científica.

$3{,}5 \cdot 10^7$

El exponente del 10 es positivo, lo que indica que debemos mover la coma 7 posiciones a la derecha. Entonces, es 35 000 000.

a. $2{,}4 \cdot 10^{10}$
b. $7{,}01 \cdot 10^5$
c. $5 \cdot 10^{11}$
d. $4{,}5 \cdot 10^3$
e. $3{,}9 \cdot 10^7$
f. $5{,}645 \cdot 10^{12}$

5. Escribe en notación científica los siguientes números. Para ello, completa la tabla.

Número	Usando múltiplos de 10	Notación científica
15 000	1,5 • 10 000	$1{,}5 \cdot 10^4$
9 860 000		
56 400 000		
12 000 000 000		

6. Relaciona cada número con su notación científica. Para ello, pinta ambos recuadros del mismo color.

$3 \cdot 10^{10}$

$2 \cdot 10^7$

20 000 000

500 000 000 000 000

$2 \cdot 10^5$

3 000 000

30 000 000 000

$3 \cdot 10^6$

$5 \cdot 10^{14}$

200 000

Aplica

7. Escribe en notación científica los números de los siguientes datos.

a. La población mundial se estima en 7 000 000 000 de personas.

______

b. La unidad astronómica (UA) es una unidad de medida que corresponde a la distancia media entre la Tierra y el Sol, cuyo valor es de 150 000 000 000 m aproximadamente.

______

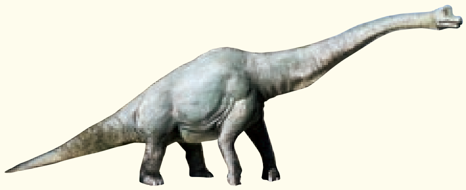
c. El cometa Halley ha sido visto en muchos retornos y hay registros escritos de todos ellos durante los últimos dos milenios. Halley tiene una máxima distancia al Sol de 5 295 000 000 km, aproximadamente.

______

d. La masa del Sol es aproximadamente 1 989 100 000 000 000 000 000 000 000 000 kg.

______

e. La desaparición de los dinosaurios fue hace 65 millones de años.



8. **El Sol tiene un diámetro de $1{,}4 \cdot 10^9$ metros y el de la Tierra es de 13 000 000 metros.**

a. Escribe el diámetro de la Tierra en notación científica.

b. Para comparar ambos diámetros, ¿qué factor consideras, el decimal o la potencia de base 10? Justifica tu respuesta.

9. **Descubre el error. Matías quiere expresar en notación científica el radio de Júpiter, 71 492 km. Para ello, realiza lo siguiente.**

$71\,492 \cdot 10^3$
$71\,492 \cdot (10 + 10 + 10)$
$2\,144760$
$2{,}144760 \cdot 10^6$ m

¿Es correcta la conversión que hizo Matías? Justifica tu respuesta.

10. **Investiga. Busca en Internet las respuestas a las siguientes preguntas y escríbelas utilizando la notación científica.**

a. ¿Cuál es la masa de Saturno?

b. ¿Cuál es la edad de la Tierra?

c. ¿Cuál es la distancia entre Neptuno y la Tierra?

d. El tiempo en segundos que demora Júpiter en dar la vuelta al Sol.

11. **Conecta con la biología. Un adulto normalmente tiene entre 4,3 y 5,9 millones de glóbulos rojos por 0,001 litros de sangre. Si en un examen de una persona que tiene en total 5 litros de sangre dice que tiene 4,6 millones de glóbulos rojos por cada 0,001 litros de sangre, ¿cuántos glóbulos rojos tendrá en total?**

12. **Conecto con la astronomía. La velocidad de la luz es $3 \cdot 10^8$ m/s y la distancia del Sol a Plutón es $5{,}9 \cdot 10^9$ km.**

a. ¿Qué distancia recorre la luz en un año?

b. ¿Cuántos segundos tarda la luz del Sol en recorrer los primeros $6 \cdot 10^{10}$ m hacia Plutón?

c. Un año luz es la distancia que recorre la luz durante un año. La estrella Alfa-Centauro está a 4,3 años luz de la Tierra. ¿A cuántos kilómetros corresponde esa distancia?

13. **Crea. Ingresa el código TM7P087 en el sitio web del texto, donde podrás conocer cómo se representa el orden de magnitud a través de la notación científica, desde un átomo muy pequeño hasta grandes magnitudes del universo. Luego, junto a un compañero o compañera, inventa tres situaciones en donde compares la magnitud de dos elementos, y responde.**

a. ¿Qué procedimiento utilizaron para comparar las magnitudes?

b. ¿Qué elementos se deben considerar al comparar dos magnitudes que tienen unidades de medida diferentes?

Reflexiono

1. Se afirma que los números $2 \cdot 10^5$, $0{,}2 \cdot 10^6$ y $0{,}00002 \cdot 10^{10}$ son equivalentes. ¿Es cierto? Fundamenta tu respuesta.

2. Todo número entero se puede expresar en notación científica. ¿Estás de acuerdo? Comparte tu respuesta con tus compañeros y compañeras.

Refuerzo

Describe el procedimiento para escribir 36 000 000 000 utilizando la notación científica. Comenta con un compañero o compañera los pasos que seguiste y lo que debe considerar para verificar el resultado.

Actitud: Abordar de manera flexible y creativa la búsqueda de soluciones a problemas de la sociedad.

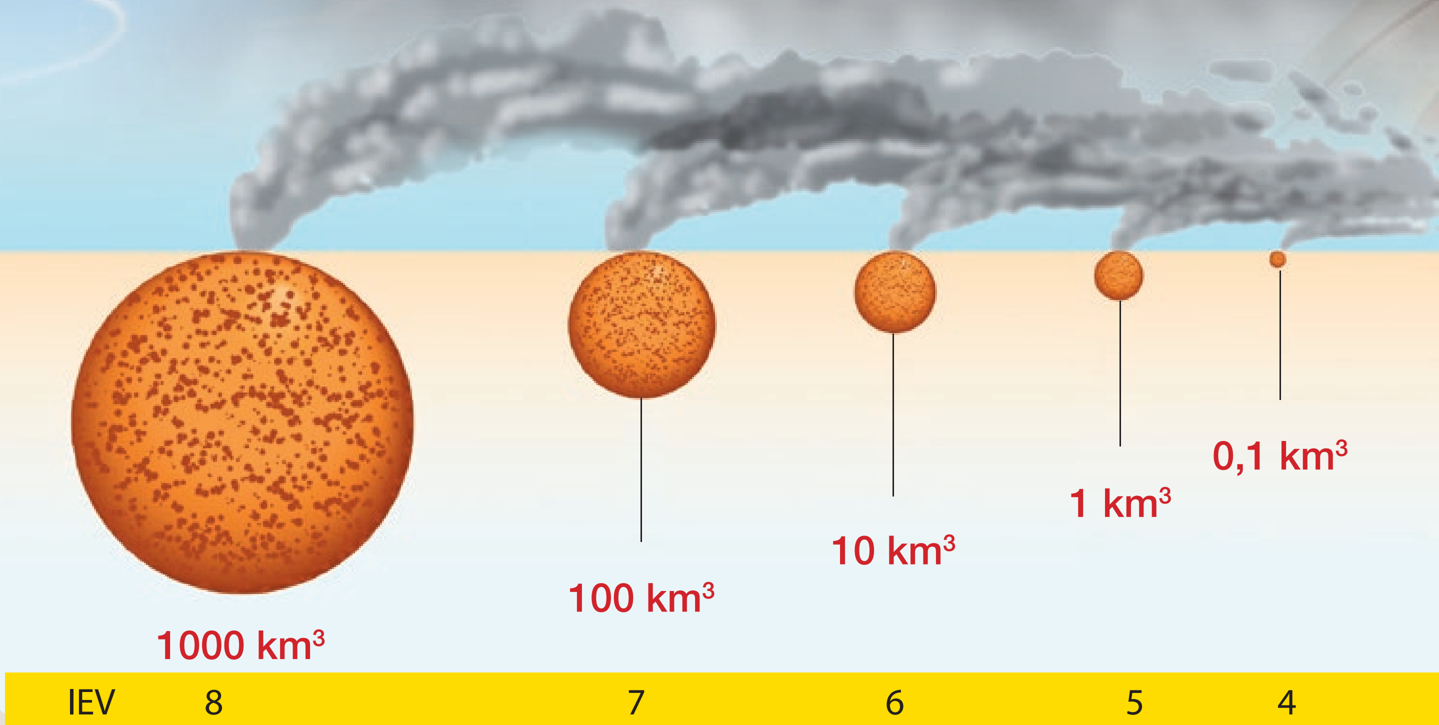
Volcanes

la gran manifestación de la naturaleza

A lo largo de los años, grandes erupciones volcánicas han marcado la historia de la humanidad. Un ejemplo de esto, fue la erupción del Krakatoa, volcán ubicado en una isla en Indonesia que en 1883 no solo destruyó las islas cercanas, sino que además produjo tsunamis que dejaron cerca de 36 000 víctimas fatales.

¿Cómo se mide la magnitud de una explosión volcánica?

Científicos han ideado una escala para medir la magnitud de una explosión volcánica. El índice de explosividad volcánica (IEV) permite clasificar de 0 a 8 el grado que alcanza un volcán en erupción, considerando aspectos como el volumen de material que arroja en la erupción, así como también la altura de la columna de la nube que alcanza. Así, por ejemplo, la erupción del Krakatoa en 1883 alcanzó un IEV de 6.



Luego de 43 años, en abril del 2015 el volcán Calbuco volvió a entrar en erupción, generando el desalojo inmediato de las personas cercanas al lugar. Según estudios del Sernageomin, el volcán emitió en solo tres días 210 millones de metros cúbicos de ceniza.

ACTIVIDAD EN GRUPO

Reúnanse en grupos de 4 integrantes y desarrollen las actividades propuestas. Luego, comuniquen sus respuestas a los demás equipos.

1. El índice de explosividad volcánica contiene cantidades muy grandes. ¿Cómo se pueden expresar estos números utilizando potencias de base 10?
2. La erupción de Tambora (Indonesia) se conoce como la erupción más grande que se ha registrado en el último tiempo, con un IEV de 7.
   - ¿Cómo pueden expresar esta magnitud en notación científica?
   - Si se necesita señalar el volumen de material arrojado en m^3, ¿cómo lo harían? Justifiquen su respuesta.
3. Investiguen qué otras erupciones volcánicas se han registrado en Chile y qué consecuencias significaron para el medioambiente y su población. Intercambien sus respuestas con los demás equipos.
4. En abril del 2015, se registró una erupción en el volcán Calbuco, por lo que las autoridades decretaron alerta roja en la zona. Investiguen acerca de los planes de evacuación y elaboren un afiche sobre las medidas que debe tomar la población ante un acontecimiento como este. Luego, preséntenlo a su curso.
5. Investiguen a qué categoría pertenecen los IEV. Según la actividad volcánica del volcán Calbuco, ¿a cuál pertenece esta erupción?

¿Cómo voy?

Lección 12: Representar potencias de base 10

1 Escribe utilizando potencias de base 10.

a. 10 • 10 • 10 • 10 =

b. 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 • 10 =

c. 10 • 10 • 10 =

d. 10 =

e. 1 =

2 Escribe el valor de las potencias.

a. $10^5 =$

b. $10^6 =$

c. $10^8 =$

d. $10^3 =$

e. $10^4 =$

f. $10^{10} =$

3 Identifica los números que se pueden expresar como potencias de base 10, escribiendo esas potencias.

a. 5000

b. 100 000

c. 11 000

d. 10 000 000

e. 10 100

f. 1000

4 Escribe cada resultado como una potencia de base 10.

a. 1000 + 998 890 + 110

b. 12 141 000 + 87 859 000

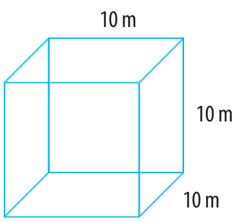
c. 10 374 – 3800 + 3426

d. 100 000 + 128 030 – 128 039 + 9

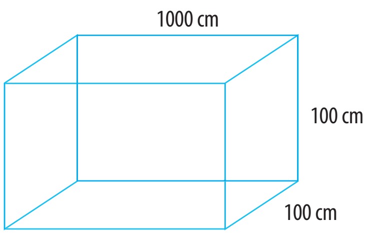
e. 10 000 000 – (6 435 500 + 2 564 500)

5 Calcula el volumen de cada paralelepípedo y escribe las respuestas como potencias de base 10.

a.



b.



Lección 13: Relacionar las potencias de base 10 con el sistema decimal

6 Identifica el valor posicional de cada dígito destacado. Para ello, escríbelo como una potencia de base 10.

a. 7**4** 990

b. 9**3**00

c. 521 000 9**9**0

d. 9 1**9**0 880

e. 4**5** 307 660

f. 6**9**8 213

7 Completa la tabla.

Posición	Valor posicional	Potencia de 10
Decena		
		10^5
	10 000	
	100	
		10^8
Unidad de mil		
		10^6
Decena de millón		
		10^0

8 Descompón aditivamente utilizando potencias de base 10.

a. 1358

b. 123 645

c. 55 000 284

d. 3 532 102

9 Compón cada número.

a. $2 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1$

b. $6 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

c. $1 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3$

d. $7 \cdot 10^6 + 9 \cdot 10^5 + 5 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3$

e. $1 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 9 \cdot 10^1$

Lección 14: Escribir números en notación científica

10 Escribe en notación decimal (número con todas sus cifras).

a. $4{,}5 \cdot 10^4$

b. $6{,}18 \cdot 10^{15}$

c. $2{,}7 \cdot 10^{10}$

d. $5{,}45 \cdot 10^4$

11 Escribe utilizando notación científica.

a. 60 000 000
b. 430 000
c. 653,21
d. 5 230 000
e. 534,7
f. 48 340 000

12 Escribe en notación científica o decimal, según corresponda.

Notación decimal	Notación científica
31,2	
453,6	
	$6{,}0002 \cdot 10^3$
21 000,4	
	$3{,}12 \cdot 10^2$
210,004	
	$5{,}35 \cdot 10^4$
	$7{,}12 \cdot 10^3$
4536	

13 Completa el $\blacktriangle$ de modo que se mantenga la igualdad.

a. $23{,}48 = 2{,}348 \cdot 10^{\blacktriangle}$
b. $108{,}4 = \blacktriangle \cdot 10^2$
c. $3480{,}5 = \blacktriangle \cdot 10^3$
d. $7\,800\,000 = 7{,}8 \cdot 10^{\blacktriangle}$

14 Completa la tabla escribiendo en notación decimal.

Dato	Notación científica	Notación decimal
Radio de nuestra galaxia	$1{,}5 \cdot 10^{13}$ m	
Radio de la Tierra	$6{,}378 \cdot 10^6$ m	6 378 000 m
Tiempo de rotación de la Tierra alrededor de su eje	$8{,}6 \cdot 10^4$ s	
Distancia entre la Tierra y la Luna	$3{,}844 \cdot 10^8$ m	

15 Escribe los diámetros en notación científica.

Astros	Diámetro (km)	Notación científica
Sol	1 392 000	
Tierra	12 756	
Júpiter	142 984	
Luna	3476	

16 La distancia media de la Tierra a la Luna es de 384 400 km y la distancia de la Tierra al planeta más cercano, Venus, es 41 400 000 km.

Escribe ambas distancias en notación científica.

17 La masa del Sol es, aproximadamente, 330 000 veces la de la Tierra. Si la masa de la Tierra es $6 \cdot 10^{24}$ kg, calcula la masa del Sol.

18 Señala una ventaja de utilizar la notación científica.

Desafío de integración

1. Una fuente de agua vacía, con una capacidad de 400 litros, tiene tres mangueras conectadas. Dos de ellas llenan la fuente con 20 litros y 15 litros de agua, respectivamente, por cada 2 minutos, mientras que la tercera manguera deja salir 5 litros de agua por cada 2 minutos. ¿Cuánta agua habrá al cabo de 10 minutos?
2. Paula trabaja en una oficina en Santiago 6 horas al día, y por cada hora le pagan $ 10 530. Su empresa le ofrece un traslado a Estados Unidos, donde trabajaría la misma cantidad de horas diarias y ganaría 98 dólares al día. Si el dólar tiene un valor de $ 601,2, ¿en qué trabajo le pagan más?
3. Felipe y Andrés están de cumpleaños el mismo día. Si Felipe cumple 21 años y Andrés 14, ¿cuántos segundos tienen de diferencia? Expresa el resultado en notación científica.

Resolución de problemas

Actitud: Demostrar interés y perseverancia frente a la resolución de problemas.

Usar ensayo y error sistemático

Consiste en probar una alternativa y verificar si funciona. Si es así, se tiene una solución; de lo contrario, se prueba una alternativa diferente hasta encontrar una solución. Las alternativas deben escogerse con un criterio, por ejemplo en orden ascendente.

Estrategias

- Hacer un diagrama.
- Usar ensayo y error sistemático.
- Usar problemas más sencillos.
- Destacar información relevante.
- Hacer una tabla.
- Encontrar un patrón.
- Plantear una ecuación o una inecuación.
- Usar razonamiento lógico.
- Destacar información irrelevante.

Neptuno es el último planeta de nuestro sistema solar, es decir, el que está más alejado del Sol, y también uno de los llamados gigantes gaseosos. Su radio es aproximadamente $2{,}5 \cdot 10^7$ m.

Este planeta fue descubierto matemáticamente: los astrónomos, mucho antes de verlo, calcularon que debería haber un planeta en esa órbita por las perturbaciones que provocaba en sus planetas vecinos.

Si se sabe que, aproximadamente, el radio de la Tierra es de 6 400 000 m, ¿cuántas veces mayor es el radio de Neptuno?

¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema?

¿Qué datos tienes para resolver?

Crea un plan para resolver

Puedes utilizar la estrategia Usar ensayo y error sistemático. Para ello, elige algunos valores numéricos para multiplicarlos por el radio de la Tierra y expresarlos en notación científica, buscando así el valor más cercano a la medida del radio de Neptuno.

Aplica la estrategia

Valor	Operación	En notación científica
3,5	$6\,400\,000 \cdot 3{,}5 = 22\,400\,000$	$2{,}24 \cdot 10^7$ m
3,6	$6\,400\,000 \cdot 3{,}6 = 23\,040\,000$	$2{,}304 \cdot 10^7$ m
3,7		
3,8		
3,9		

Resuelve

Verifica la respuesta

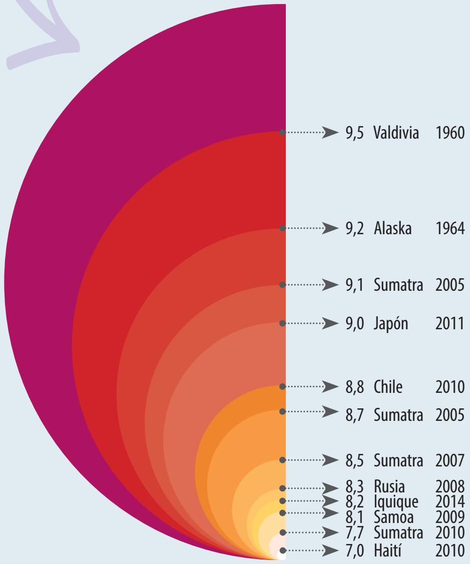
Comunica la respuesta

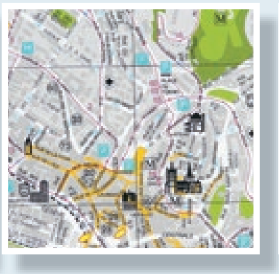
Vuelvo a mis procesos

Observa las imágenes centrales y completa.

¿Qué aprendizajes lograste trabajando en esta sección?

¿Qué partes de la sección te provocaron mayores dificultades? ¿Qué hiciste para superarlas?





¿Cómo fue tu interés en el desarrollo de las actividades de la sección?

Para cada una de las imágenes de la sección, inventa un problema.

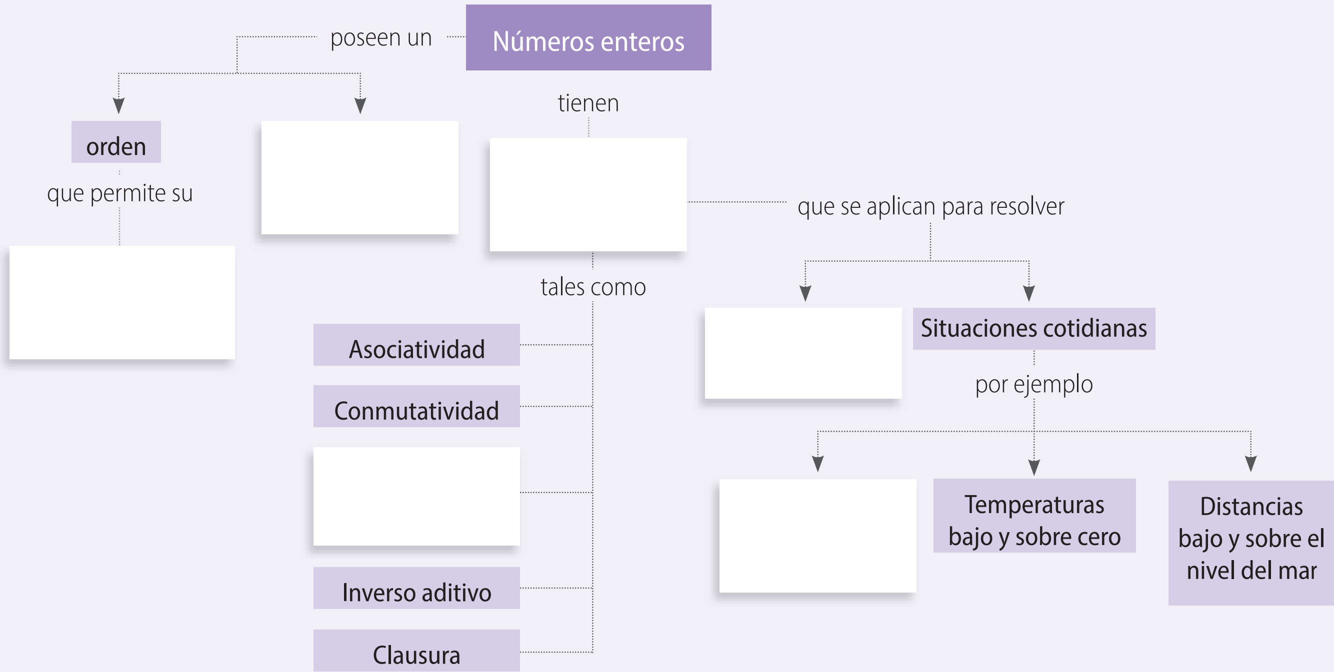
De las metas que te propusiste al inicio de esta lección, ¿cuáles cumpliste y cuáles te faltaron?

Sintetizo mis aprendizajes

¿Cómo se llama?

Completa el mapa conceptual correspondiente a la sección Números enteros, para ello ubica los conceptos donde corresponda.

Elemento neutro – Comparación – Operaciones combinadas – Propiedades – Valor absoluto – Ganancias y pérdidas de dinero



Organiza los aprendizajes trabajados en las secciones 2 y 3, construyendo un mapa conceptual para cada una en tu cuaderno.

¿Cómo se hace?

- **Pregunta 1**

¿Qué procedimientos se pueden utilizar para resolver operaciones combinadas con números enteros?

- **Pregunta 2**

¿Cómo se calcula la variación porcentual de un producto al cual se le aplicó un descuento?

- **Pregunta 3**

¿Cuáles son los pasos a seguir para escribir un número natural en notación científica?

Números enteros

1. **Interpreta cada situación y represéntala con un número entero.**

a. El submarino está a 100 m bajo el nivel del mar.

b. El águila vuela a 100 m sobre el nivel del mar.

c. La temperatura descendió a 3 °C bajo cero.

d. En la mañana la temperatura era de 3 °C.

2. **Ubica en la recta numérica los siguientes números:**

–2; 0; –1; 4; –3 y 2.

3. **Ordena de menor a mayor cada grupo de números enteros.**

a. 2; –3; 5; 12; –8; 0 y 4.

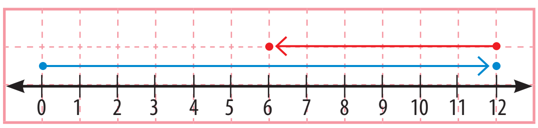
b. –15; 13; 12; –5; 4 y 20.

4. **Une cada número con su opuesto aditivo.**

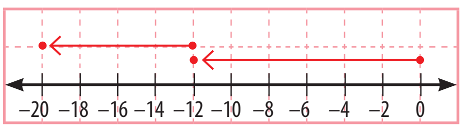
A	B
5	8
–7	7
10	–5
–8	10
–5	–7
7	–10
–10	–8
8	5

5. **Escribe la adición representada.**

a.



b.



6. **Calcula las adiciones.**

a. 2 + (–1) =

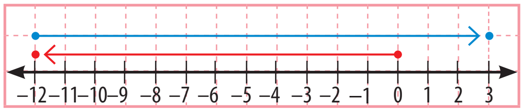
b. (–3) + (–5) =

c. 8 + 12 =

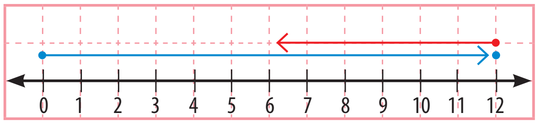
d. (–6) + (–4) =

7. **Escribe la sustracción representada.**

a.



b.



8. **Calcula las sustracciones.**

a. 2 – 5 =

b. 8 – (–3) =

c. (–6) – (–4) =

d. (–3) – (–10) =

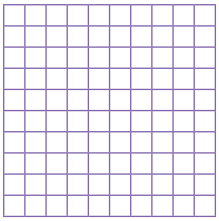
9. **Una bomba extrae el petróleo de un pozo ubicado a 1200 m de profundidad y lo eleva a través de una torre de 32 m de altura. Representa la situación utilizando números enteros y calcula la distancia recorrida por el petróleo.**

10. **En una cámara frigorífica la temperatura es de –18 °C y en el exterior hay 20 °C. ¿Qué cambio de temperatura sufre una persona que entra a la cámara?**

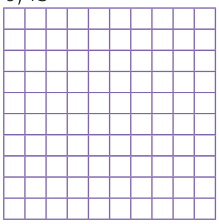
Fracciones, decimales y porcentajes

11. **Representa en la cuadrícula el decimal, la fracción o el porcentaje correspondiente.**

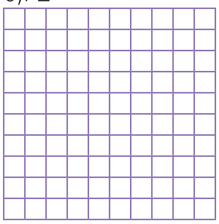
a. $\frac{4}{5}$



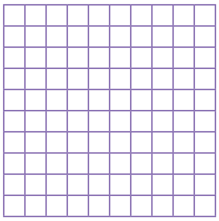
c. 0,45



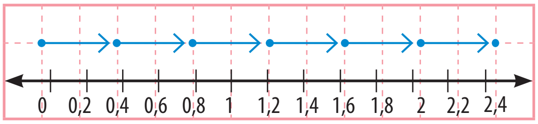
b. 0,72

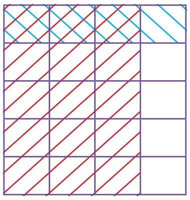


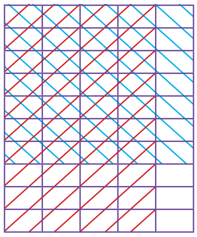
d. 48 %



12. Identifica la multiplicación representada y calcula el producto.

a. 

b. 

c. 

13. Calcula los productos.

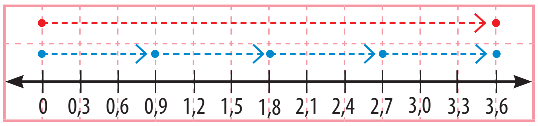
a. $\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{6} =$

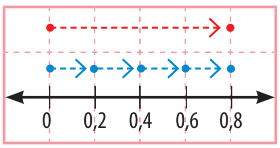
b. $\frac{15}{8} \cdot 2\frac{2}{5} =$

c. $0{,}8 \cdot 0{,}04 =$

d. $1{,}7 \cdot 12{,}9 =$

14. Identifica la división representada y calcula el cociente.

a. 

b. 

15. Calcula los cocientes.

a. $\frac{2}{3} : \frac{8}{6} =$

b. $\frac{15}{8} : 2\frac{2}{5} =$

c. $0{,}75 : 0{,}5 =$

d. $2{,}73 : 0{,}3 =$

16. Calcula el porcentaje pedido en cada caso.

a. El 10 % de 52.
b. El 25 % de 24.
c. El 20 % de 105.
d. El 90 % de 1200.

17. El parque del barrio de Ana es rectangular: su ancho es 0,8 km y su largo, 1,3 km. Si Ana trota tres veces alrededor del parque, ¿cuántos kilómetros recorre?

18. Un automóvil del tipo A consume 7,5 litros de bencina cada 100 km y un automóvil tipo B gasta 4,1 litros de bencina cada 50 km. ¿Cuál es el vehículo más económico?

19. Un colegio tiene 800 alumnos, de los cuales 600 son de Educación Básica. ¿Qué porcentaje de los estudiantes no cursa Educación Básica? ¿Qué porcentaje cursa Educación Básica?

20. El precio del pan subió un 10 %. Si antes costaba $ 990 por kilogramo, ¿cuánto cuesta ahora?

21. Debido a la sequía en una cierta región del país, los embalses están al 25 % de su capacidad. Si esta capacidad es de 500 km^3, ¿cuánta agua tienen?

Potencias

22. Escribe como potencia de base 10.

a. $10 \cdot 10 \cdot 10 =$
b. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$
c. $100 \cdot 100 \cdot 100 \cdot 100 =$
d. $10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 =$
e. $1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 =$

23. Escribe en notación científica.

a. 21,8 =
b. 601 000 000 =
c. 3 584 000 000 000 =
d. 189 000 000 000 000 000 000 =
e. 9 000 000 000 000 000 000 000 =

24. En un metro hay 1000 mm. ¿Cuántos milímetros hay en 10 000 m? Escribe tu respuesta en notación científica.

25. En la siguiente tabla, ¿qué valores están escritos en notación científica? Aquellos que no lo estén exprésalos de esa forma.

Tierra	
Masa (kg)	$5{,}9736 \cdot 10^{24}$
Volumen (km^3)	$108{,}321 \cdot 10^{10}$
Radio (km)	6378

¿Qué aprendí?

PARTE I Evaluación de contenidos

En los ejercicios del 1 al 10, selecciona la alternativa correcta. (10 puntos)

1 **¿Cuál de las siguiente oraciones no se relaciona con –30?**

A. Julio tiene una deuda de $ 30.
B. Augusto nació el año 30 d. C.
C. La temperatura llegó a 30 °C bajo 0.
D. El delfín se encuentra a 30 m bajo el nivel del mar.

2 **¿Cuántos grados hay entre –8 °C y 17 °C?**

A. 9 °C
B. 11 °C
C. 17 °C
D. 25 °C

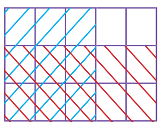
3 **¿Cuál es el resultado de (–7) + 2 – (–5)?**

A. –4
B. 0
C. 10
D. 14

4 **Una cuenta de banco tiene un saldo en contra de $ 50 000. ¿Cuánto se necesita depositar para registrar un saldo de $ 50 000?**

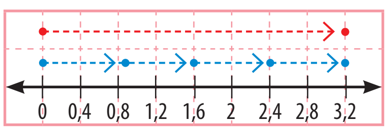
A. $ 0
B. $ 50 000
C. $ 100 000
D. $ 150 000

5 **¿Qué multiplicación de fracciones se está representando?**



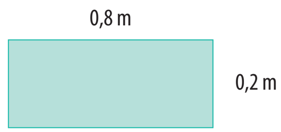
A. $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}$
B. $\frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}$
C. $\frac{3}{3} \cdot \frac{1}{5}$
D. $\frac{2}{3} \cdot \frac{3}{5}$

6 **¿Qué operación se está representando?**



A. 0,8 : 3,2
B. 3,2 : 0,8
C. 0,8 – 3,2
D. 3,2 – 0,8

7 **¿Cuál es el área del rectángulo?**



A. 0,016 m^2
B. 0,16 m^2
C. 1,6 m^2
D. 16 m^2

8 **Un producto cuesta $ 12 000 sin incluir el IVA, del 19 %. ¿Cuánto costará si se le agrega el impuesto?**

A. $ 2280
B. $ 12 019
C. $ 13 900
D. $ 14 280

9 **Al componer $3 \cdot 10^7 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^2$ resulta:**

A. 30 002 300
B. 30 020 030
C. 30 002 030
D. 30 020 300

10 **¿Cuál de las siguientes expresiones está escrita en notación científica?**

A. $1{,}2 \cdot 10^2$
B. $12 \cdot 10^2$
C. $12{,}2 \cdot 10^2$
D. $122{,}2 \cdot 10^2$

11 **La tabla muestra el registro de las temperaturas mínimas y máximas de 5 días en la base Bernardo O'Higgins en la Antártica.**

Fecha	Mín	Máx
Miércoles 12	–18	–11
Jueves 13	–11	0
Viernes 14	–2	–1
Sábado 15	–2	0
Domingo 16	–1	0

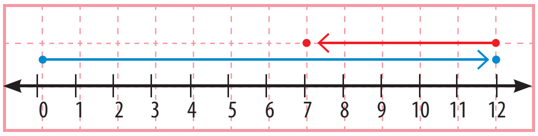
a. ¿Qué diferencia de temperatura hubo entre la mínima y la máxima el día viernes 14?
b. ¿Qué día hubo la mayor diferencia entre la máxima y la mínima? ¿Cuál fue esa diferencia? (4 puntos)

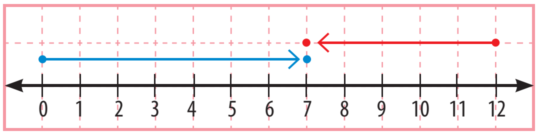
12 **En el envase de un detergente de 2 kilogramos dice que contiene un 20 % de suavizante. ¿Cuántos kilogramos de suavizante tiene?** (3 puntos)

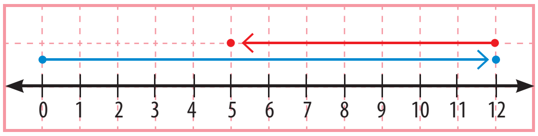
PARTE II Evaluación de habilidades

1 ¿Qué número entero está representado con una P en la recta numérica? (1 punto)

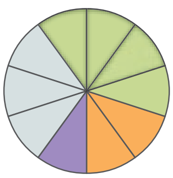
2 ¿Con cuál de las siguientes representaciones asocias la adición 12 + (–7)? (2 puntos)







3 Dada la representación, escribe en fracción y número decimal las partes destinadas a cada color. (2 puntos)



Gris __________ ; __________

Morado __________ ; __________

Verde __________ ; __________

Naranja __________ ; __________

4 Si la medida de todos los lados de un cuadrado disminuye a la mitad, ¿en qué porcentaje se reduce el área del cuadrado?

Haz un dibujo de la situación para resolver. (2 puntos)

5 Dos amigos deciden completar un álbum de 225 láminas. Si compran 20 sobres con 7 láminas cada uno, para llenar el álbum vacío, ¿cuántas láminas venían repetidas si todavía les faltan 100 para completarlo? (2 puntos)

6 Pedro necesita construir una cerca para un terreno rectangular de 2,4 m de ancho y 8 m de largo. En la barraca venden estacas de 2,5 m. ¿Cuántas de estas estacas necesita como mínimo? (1 punto)

7 Julieta tiene 10 arreglos florales. Cada uno tiene 10 flores y cada flor tiene 10 pétalos. ¿Cuántos pétalos hay en total en los 10 arreglos? (1 punto)

8 Si una persona tiene aproximadamente 5 litros de sangre y 4 500 000 glóbulos rojos en cada milímetro cúbico de esta (en un litro hay 1000 milímetros cúbicos), ¿cuántos glóbulos rojos hay en un litro de sangre? (2 puntos)

9 Cristian afirma que el número $12{,}3 \cdot 10^8$ no está escrito en notación científica. ¿Estás de acuerdo con él? Justifica tu respuesta. (1 punto)

10 Escoge un número de tres cifras y forma otro repitiendo el primero. Por ejemplo: 234 234. Divide este número por 7; después, el cociente por 11 y, por último, el nuevo cociente por 13. Obtienes divisiones parciales exactas y al final tu número inicial, ¿verdad? ¿Por qué crees que ocurre esto? (2 puntos)

11 Claudio analiza los precios de dos artículos, A y B, que varían en forma inversamente proporcional. Al revisar algunos informes, constata que en un mes el precio del artículo A ha aumentado en un 25 %.

Para determinar la variación de precio del artículo B, Claudio razona de la siguiente manera:

- Si el precio de A aumenta, el precio de B disminuye de manera inversa.
- Si el precio de A aumenta un 25 %, el precio de B disminuye un 25 %.

¿Son correctas las conclusiones de Claudio? Prueba con algunos valores y explica tu razonamiento. (3 puntos)

Registra tus aprendizajes

PARTE I Para repasar contenidos

Cuenta el puntaje que obtuviste en la parte I y II de la evaluación. Luego, repasa según tu nivel de logro.

Contenido	Logrado	Por lograr	Repasa en...
Representación de enteros (Actividades 1 y 2)	2 puntos	0 o 1 punto	Lecciones 1 y 2
Adición y sustracción de números enteros (Actividades 3, 4 y 11)	4 o más puntos	3 o menos puntos	Lecciones 3, 4 y 5
Multiplicación y división de fracciones y decimales (Actividades 5, 6 y 7)	2 o más puntos	0 o 1 punto	Lecciones 7 y 8
Cálculo de porcentajes (Actividades 8 y 12)	3 o más puntos	2 o menos puntos	Lecciones 9, 10 y 11
Concepto de notación científica (Actividades 9 y 10)	2 puntos	0 o 1 punto	Lecciones 13 y 14

PARTE II Para practicar habilidades

Habilidad	Logrado	Por lograr	Repasa en...
Representar (Actividades 1, 2 y 3)	3 o más puntos	2 o menos puntos	Cuaderno de ejercicios, página 47
Modelar (Actividades 4 y 5)	3 o más puntos	2 o menos puntos	Cuaderno de ejercicios, página 47
Resolver problemas (Actividades 6, 7 y 8)	3 o más puntos	2 o menos puntos	Cuaderno de ejercicios, página 47
Argumentar y comunicar (Actividades 9 10 y 11)	4 o más puntos	3 o menos puntos	Cuaderno de ejercicios, página 47

Actitud: Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros.

Desafío en equipo

Al terminar esta unidad, los invitamos a formar equipos de cuatro estudiantes para, de manera creativa y reflexiva, resolver el desafío.

Geometría fractal

Existen otras potencias además de las de base 10; por ejemplo, de base 2 o 3.

$$2^2 = 2 \cdot 2 \quad ; \quad 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

Las potencias están presentes en el estudio de la geometría. Un caso puntual es la geometría fractal, que estudia las figuras geométricas que siguen un patrón que se repite al cambiar de escala. Un ejemplo es el famoso triángulo de Sierpinski.

1. ¿Cuál es el patrón geométrico? Expliquen con sus palabras.
2. Dibujen las etapas 3 y 4.
3. Completen la tabla.

Etapa	0	1	2	3	4
Cantidad de triángulos pintados	1	3	9		
Factores	1	$3 \cdot 1$	$3 \cdot 3$		

4. ¿Cómo podrían escribir la cantidad de triángulos pintados en cada etapa utilizando potencias?, ¿cuál sería la base? y ¿cómo variaría el exponente?

UNIDAD 2

Álgebra y relaciones proporcionales

Sección 4
Álgebra

Sección 5
Relaciones proporcionales

¿Cómo surgió la balanza?

Hacia el año 3500 a. C. el comercio era una de las actividades más relevantes, especialmente el intercambio de productos. Debido a esto, el pueblo egipcio utilizaba la balanza para medir la masa de las mercancías destinadas a la venta. La balanza también aparece en su mitología: al morir un egipcio este enfrentaba un juicio, en el cual su corazón se colocaba en uno de los platillos y en el otro, una pluma que representaba la verdad y la justicia. Dependiendo de sus actos, el corazón se hacía más pesado o liviano, inclinando la balanza. Si su corazón era liviano, se hacía inmortal; de lo contrario, era devorado. Así, el surgimiento de la balanza era un elemento esencial tanto en su economía como en su religión.

La balanza es un elemento muy utilizado en álgebra para representar cantidades, ¿a qué crees que se debe esto?

Recurso digital complementario

¿Qué aprenderé?

- Utilizar lenguaje algebraico.
- Reducir términos semejantes.
- Modelar y resolver problemas de la vida diaria y de otras asignaturas, que involucran ecuaciones e inecuaciones lineales.
- Comprender la proporcionalidad directa e inversa, modelando problemas y resolviéndolos.

¿Cuál es su importancia?

- Permiten evaluar procedimientos y comprobar resultados de un problema.
- Facilitan la selección y ajuste de modelos para resolver problemas que se modelan con ecuaciones e inecuaciones.
- Permiten evaluar la pertinencia de un modelo considerando sus limitaciones y el contexto.

Actitudes

- Demostrar interés, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.
- Mostrar una actitud crítica al evaluar información matemática y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.
- Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de la información.

¿Para qué otra finalidad pueden servir estos aprendizajes?

En la antigüedad el comercio operaba básicamente a través del intercambio de productos de acuerdo a una **proporcionalidad**. ¿Cómo interpretarías el significado de este concepto?

Si fueras un comerciante de la época y tu cliente te intercambia 8 naranjas por un kilogramo de arroz, ¿cómo lo representarías utilizando la balanza?

¿Qué otras situaciones cotidianas podrías representar utilizando la balanza? Nombra al menos dos e intercámbialas con un compañero o compañera.

Sección 4

Álgebra

Actitud: Mostrar una actitud crítica al evaluar las evidencias e informaciones matemáticas en la comprensión de la realidad.

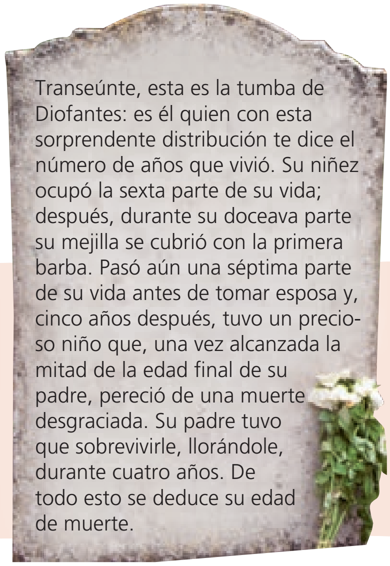
Activo ideas previas

Junto con un compañero o compañera lean el caso y reflexionen en torno a las preguntas propuestas.

¿Cuántos años tenía Diofanto?

Diofanto de Alejandría fue un célebre matemático griego que vivió en el siglo III d. C., conocido como "el padre del álgebra".

Dedicó gran parte de su trabajo a la resolución de distintos tipos de problemas y, pese a que se conocen muy pocos detalles de su vida, sí se sabe con certeza su edad de muerte, gracias al epitafio grabado en su tumba como homenaje a su labor.



- Según los datos contenidos en el epitafio, ¿qué estrategia utilizarían para calcular la edad de Diofanto al morir? Destaca la información necesaria para resolver el problema.

  ____

  ____

  ____

- Si tu compañero o compañera te dice que Diofanto murió a los 72 años, ¿de qué manera comprobarías si esta es la respuesta correcta? Explica paso a paso tu estrategia.

  ____

  ____

  ____

Activo conceptos clave

Los siguientes listados muestran las palabras clave de la sección. Con algunas de ellas, completa las actividades.

Lenguaje algebraico	Términos semejantes	Variable	Inecuación
Expresión algebraica	Propiedad asociativa	Ecuación	Desequilibrio
Término	Factor literal	Despejar	Conjunto solución
Propiedad conmutativa	Equilibrio	Desigualdad	Pertinencia
	Igualdad		

- Dos palabras que señalen estrategias para resolver ejercicios: ______________________________
- Dos conceptos que permitan escribir matemáticamente una situación: ______________________________
- Un concepto nuevo para ti: ______________________________
- Una posible definición del concepto nuevo: ______________________________

  ____

Pienso mis procesos

Observa la imagen central y completa.

Explica la relación que existe entre los elementos que se muestran en el afiche.

¿Qué otras situaciones que se relacionan de la misma forma que en la imagen, reconoces en tu entorno?

¿Qué función crees que cumplen la flechas en la imagen?

¿Qué metas te propones cumplir al finalizar esta sección?

¿Qué estrategias de estudio podrías usar para trabajar en esta sección?

¿Qué debo saber?

Activa tus conocimientos previos respondiendo la pregunta lateral, luego resuelve la actividad. Para terminar, registra tus logros.

¿Cómo puedes resolver operaciones combinadas?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
4 o más puntos	3 o menos puntos

Resolver operaciones

1 **Calcula las operaciones.** (7 puntos)

a. $-1 + (-1) - 1 - (-1) - 1 + (-1) =$

b. $-3 + 7 - 4 + 15 - 25 =$

c. $5 + 3 \cdot (4 - 1) - 10 : 2 =$

d. $(5 + 3) \cdot (4 - 1) - 10 : 2 =$

e. $5 + 3 \cdot 4 - 1 - 10 : 2 =$

f. $-5 + \frac{1}{5} - 3 + \frac{1}{3} =$

g. $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 =$

¿Cómo se forma un patrón?

Explica una estrategia que permita formar un patrón.

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
13 o más puntos	12 o menos puntos

¿Qué errores cometiste?

Reconocer patrones

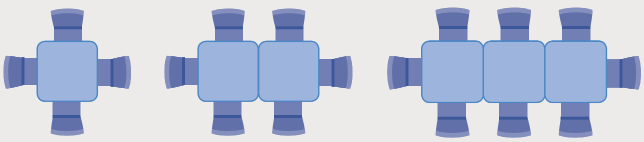
2 **Sigue la regla y continúa la secuencia.** (3 puntos)

a. Regla: sumar 7 → 5, ______, ______, ______, ______.

b. Regla: restar 12 → 85, ______, ______, ______, ______.

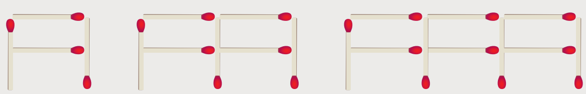
c. Regla: dividir por 2 → 128, ______, ______, ______, ______.

3 **Margarita ordenará las mesas y las sillas en grupos. Si la secuencia sigue el mismo patrón, ¿Cuántas sillas necesitará si hace un grupo con seis mesas?** (2 puntos)



Grupo 1 Grupo 2 Grupo 3

4 **Analiza la secuencia de figuras.** (6 puntos)



1 2 3

a. Calcula la cantidad de palitos necesarios para formar las figuras que están en las posiciones 4, 7 y 12, si se sigue el mismo patrón de formación.

b. Determina la cantidad de palitos necesarios para formar la figura que está en la posición 55. Explica cómo lo calculaste.

c. Determina la cantidad de palitos necesarios para formar la figura que está en la posición **n**.

¿Por qué se dice que una ecuación es una igualdad?

¿Qué diferencia hay entre una ecuación y una inecuación?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
13 o más puntos	12 o menos puntos

¿Qué errores cometiste?

Resolver ecuaciones e inecuaciones simples

5 Evalúa las expresiones según los valores dados. (2 puntos)

a. $2n$, para $n = 5$

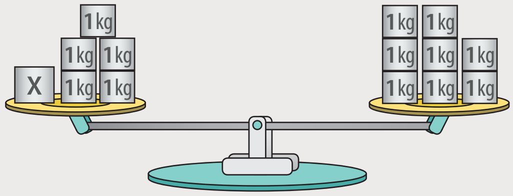
b. $5n$, para $n = 8$

c. $p + 4$, para $p = 8$

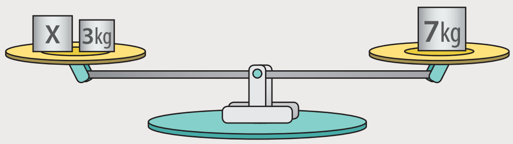
d. $q - 4$, para $q = 15$

6 Representa de manera algebraica y luego determina el valor de **x**. (4 puntos)

a.



b.



7 Determina el valor de **x** en cada ecuación. (6 puntos)

a. $x - 3 = 7$

b. $x + 9 = 16$

c. $5 + x = 30$

d. $21 = x + 7 + 2$

e. $x + 108 = 24$

f. $12 = x + 35$

8 Determina el conjunto solución en cada inecuación. (6 puntos)

a. $x + 4 < 12$

b. $x - 7 < 21$

c. $x - 2 > 18$

d. $x + 4 < 24$

e. $3 + x < 123$

f. $7 + x > 49$

9 Resuelve los problemas. (4 puntos)

a. ¿Cuál es la longitud de cada lado de un cuadrado si su perímetro es 30 cm?

b. ¿Cuál es la longitud de cada lado de un cuadrado si su área es 81 cm^2?

c. Mario es 27 años menor que su papá. Si se sabe que su papá tiene menos de 45 años, ¿qué edades puede tener Mario?

d. El triple del sucesor de un número natural es 36. ¿Cuál es el número?

Lección 15

¿Cómo representar cantidades con lenguaje algebraico?

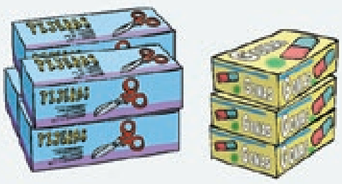
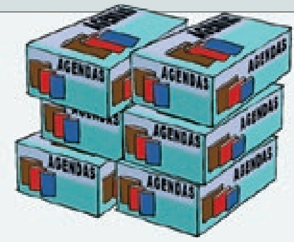
Situación 1 Representar situaciones matemáticamente

Don Antonio es dueño de un bazar. A fin de mes, pide a su proveedor 4 cajas de tijeras y 3 cajas de gomas, y devuelve 6 cajas de agendas que ya no venderá.

¿Cómo representar la cantidad total de artículos entre tijeras, gomas y agendas?

Paso 1 Dibuja los artículos.

Puedes dibujar la cantidad de cajas de cada artículo, pero no la cantidad que hay de cada uno, ya que no se conoce.

Pedido	Devuelto
	
4 tijeras + 3 gomas – 6 agendas	

Paso 2 Asocia la cantidad de artículos que tiene cada caja con una letra.

Cantidad de tijeras en una caja (t) ⟶ $4 \cdot t = 4t$

Como hay 4 cajas, multiplica por 4 la cantidad de tijeras que hay en cada caja.

Cantidad de gomas en una caja (g) ⟶ $3 \cdot g = 3g$

Cantidad de agendas en una caja (a) ⟶ $6 \cdot a = \boxed{}$

Así, la cantidad de artículos se puede representaren lenguaje algebraico:

$$4t + 3g - 6a$$

Situación 2 Representar una variable en función de otra

Para una convivencia, la cantidad de jugos que se compran es la mitad de la de bebidas. Además, se compra el triple de helados que de bebidas, y 12 paquetes menos de galletas que helados.

Si se compran 20 bebidas, ¿cuántos jugos, helados y paquetes de galletas hay?

Paso 1 Relaciona cada ítem con una variable.

Cantidad de jugos ⟶ j
Cantidad de bebidas ⟶ b
Cantidad de helados ⟶ h
Cantidad de paquetes de galletas ⟶ g

Propósito

Representar cantidades usando lenguaje algebraico.

¿Para qué?

El número de artículos en una tienda, la cantidad de personas que asisten a un evento y muchos otros hechos cotidianos no solo se pueden expresar numéricamente, sino que también se puede hacer utilizando un lenguaje más general, el algebraico. Su uso permite simbolizar, a través de variables, las cantidades y cómo estas se relacionan entre sí. Una de las ventajas que ofrece el lenguaje algebraico es que con él se pueden expresar de manera más sintética cifras y operaciones que utilizando números serían muy extensas; por ejemplo, escribir los múltiplos de 2.

Palabras clave

Lenguaje algebraico
Variable
Expresión algebraica

Ampliando

Un **término algebraico** es el producto de un valor numérico (coeficiente numérico) por una o más variables literales (factor literal) que representan valores desconocidos. Los exponentes del factor literal son números naturales. Ejemplo: $\frac{ab^4}{5}$, -5p, etc.

Un **monomio** es una expresión algebraica compuesta solamente por un término algebraico, es decir, no involucra adiciones y/o sustracciones entre términos.

Ejemplo: 5xy, – 4c, etc.

Paso 2 Identifica la variable que no está en función de otra.

La cantidad de bebidas compradas no depende de otra variable.

Paso 3 Representa cada cantidad utilizando expresiones algebraicas con la variable **b** (cantidad de bebidas) que es el dato que se tiene.

Para la cantidad de jugo	Para la cantidad de helados	Para la cantidad de paquetes de galletas
Considera que la mitad de un número se calcula dividiéndolo por 2. La cantidad de jugos (j) es igual a la mitad de la cantidad de bebidas.	Considera que el triple de un número se calcula multiplicándolo por 3. La cantidad de helados (h) es igual al triple de la cantidad de bebidas.	La cantidad de paquetes de galletas (g) es igual a la cantidad de helados menos 12.
$j = \frac{b}{2}$	$h = 3b$	$g = 3b - 12$

Entonces, se compraron **b** bebidas, $\frac{b}{2}$ jugos, **3b** helados y **3b – 12** paquetes de galletas.

Paso 4 Evalúa las expresiones. Como se conoce la cantidad de bebidas compradas, el valor de **b** es 20.

Cantidad de jugos: $\frac{20}{2} = \boxed{}$

Cantidad de helados: $3 \cdot 20 = \boxed{}$

Cantidad de paquetes de galletas: $3 \cdot 20 - 12 = \boxed{} - \boxed{} = \boxed{}$

Entonces, se compraron ______ jugos, ______ helados y ______ paquetes de galletas.

¿Qué debes hacer para evaluar una expresión algebraica?

Para concluir

- Para escribir un enunciado que está en lenguaje natural en lenguaje algebraico, se utiliza una **expresión algebraica**, que es un conjunto de números y letras relacionados entre sí por los signos de las operaciones básicas (adición y sustracción).
- Una expresión algebraica está compuesta por **términos algebraicos**, que pueden ser identificados por las adiciones o las sustracciones que los separan. Cada término algebraico consta de un **coeficiente numérico** (si es 1, no es necesario escribirlo) y un **factor literal**. Los exponentes del factor literal son números naturales.

Coeficiente numérico

$4l + 3g - 6a$

Factor literal

Expresión algebraica con tres términos.

- Al reemplazar las variables (factor literal) por números, es decir, **evaluarlas**, podemos conocer su valor en casos determinados.

Argumenta y comunica

- Considera la situación 2, ¿existe otra manera de expresar las cantidades?, es decir, ¿es posible expresarlas de tal manera que dependan de otra variable distinta a la variable cantidad de bebidas (b)? Explica cómo lo harías.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. **Escribe las expresiones algebraicas en lenguaje natural.**

a. $4n$

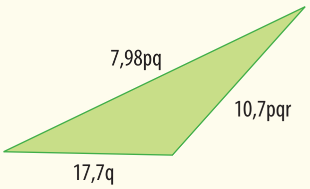
b. $0{,}75p$

c. $12 - 3a$

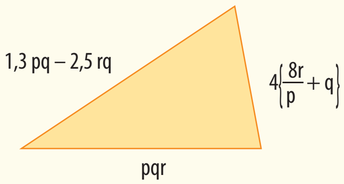
d. $a - 2b$

2. **Calcula el perímetro de cada figura, con $p = 4$ cm, $q = 3{,}5$ cm y $r = 0{,}75$ cm.**

a.



b.



Práctica guiada

3. **Identifica el número de términos de cada expresión algebraica. Luego, determina el coeficiente numérico y el factor literal de cada uno de ellos.**

> $5xy + 3xz$
> número de términos: 2
> coeficientes numéricos: 5 y 3
> factores literales: xy; xz

a. $2ab + 3b^2c$

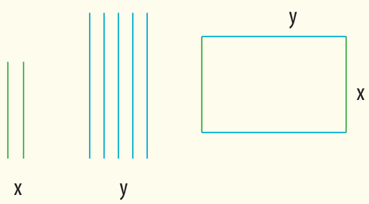
b. $-2def + eg - 4$

c. mno^3p

d. $\frac{stu}{8}$

4. **Representa pictóricamente, con bastones, las expresiones algebraicas.**

> $2x + 5y + xy$



a. $x + 3y + 2xy$

b. $6x + 4xy$

c. $x^2 + y^2$

d. $2x^2 + 4y^2$

5. **Representa con lenguaje algebraico.**

> La mitad de un número, disminuido en el triple del mismo número.

Paso 1 Identifica la variable.
Denominemos **x** a un número cualquiera.

Paso 2 Representa con lenguaje algebraico.
La mitad del número es $\frac{x}{2}$ y el triple del mismo es tres veces dicho número, o sea, $3x$.
Así, la expresión será $\frac{x}{2} - 3x$.

a. El doble de un número aumentado en diez unidades.

b. El triple de la suma entre un número y cuatro unidades.

c. El 25 % de un número.

d. El triple de la diferencia entre un número y tres unidades.

6. **Representa las situaciones mediante expresiones algebraicas y evalúalas.**

> Por la venta de un producto, Valentina recibió tres billetes, y dio de vuelto seis monedas. ¿Cuál era el precio de venta del producto si los billetes eran de \$ 2000 y las monedas de \$ 100?

Paso 1 Identifica las variables.
Valor de los billetes **b** y valor de las monedas **m**.
Recibió **3b** pesos en billetes y dio como vuelto **6m** pesos en monedas.

Paso 2 Representa el precio de venta, que es el dinero recibido, menos el vuelto:
$$p = 3b - 6m$$

Paso 3 Evalúa la expresión para $b = 2000$ y $m = 100$.
$$\begin{aligned} p &= 3 \cdot 2000 - 6 \cdot 100 \\ &= 6000 - 600 \\ &= 5400 \end{aligned}$$
Luego, el precio del producto es \$ 5400.

a. Karina contestó una prueba en la que cada respuesta correcta daba 5 puntos y cada respuesta incorrecta descontaba 3 puntos. Si respondió 21 correctas y 7 incorrectas, ¿cuál fue su puntaje?

b. Hugo es carpintero y tiene en su bolso dos bolsas de clavos de 2,5 pulgadas y tres bolsas de clavos de 4 pulgadas. Si cada bolsa de clavos más pequeños tiene una masa de 400 gramos y la otra, 750 gramos, ¿cuál es la masa total de las 5 bolsas?

c. Paulina compró un terreno rectangular cuyo largo mide 7 metros más que su ancho. Cercará todo su contorno con una reja y plantará pasto en toda su superficie. El metro de reja cuesta $ 2500 y el metro cuadrado de pasto, $ 1200. ¿Cuánto dinero gastará si el ancho del terreno es de 20 metros?

Aplica

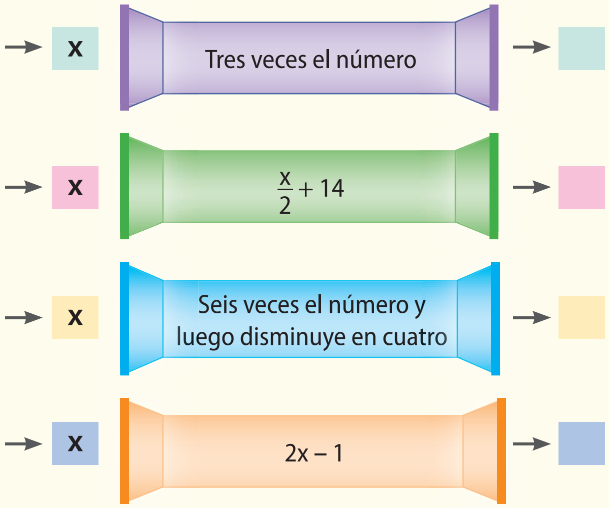
7. Determina la expresión algebraica que modela cada situación, especificando qué representa cada variable.

a. Javiera compró 5 pulseras y 3 collares. ¿Cuánto dinero gastó?

b. Una automotora compró cierto número de camionetas, algunas motos y 5 camiones. ¿Cuántos vehículos compró?

c. La edad de Bárbara es 13 años más que el doble de la edad de su hija.

8. Cada máquina realizó el proceso que se muestra.



a. Escribe una expresión algebraica para los procesos de las máquinas morada y celeste.

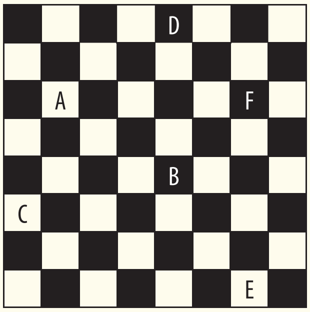
b. Escribe en palabras el proceso que realizan las máquinas verde y naranja.

c. Determina el resultado obtenido en cada máquina si ingresan los siguientes números:

12; 8; 2,8 y 8,6.

Juego

9. En el ajedrez, una torre se mueve en forma horizontal o vertical. Si se representa cada movimiento horizontal desde un casillero con la letra h (positivo hacia la derecha y negativo hacia la izquierda) y los verticales con la v (positivo hacia arriba y negativo hacia abajo), determina una expresión que describa los recorridos de la torre entre los siguientes casilleros del tablero:



a. Desde A hasta B.

b. Desde B hasta C.

c. Desde C hasta D.

d. Desde D hasta F.

e. Desde B hasta C, pasando por A.

f. Desde D hasta E, pasando por A y por C.

Reflexiono

1. Se afirma que si la expresión 3x – y – 18 se evalúa con x = 8 e y = –6, el resultado final es 0. ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Justifica tu respuesta.
2. Las siguientes oraciones: "el doble de un número cualquiera más cinco" y "el doble de un número aumentado en cinco" ¿representan lo mismo?, ¿por qué? Argumenta y da un ejemplo.

Refuerzo

1. Escribe la expresión "la diferencia entre un número cualquiera y el doble del mismo", en lenguaje algebraico.
2. Claudio tiene p estampillas. Su hermano le regala b y su mamá le regala el doble de las estampillas que tenía inicialmente y 100 más. ¿Qué expresión representa la cantidad de estampillas que tiene Claudio en total?

Lección 16

¿Cómo reducir términos semejantes?

Propósito

Reducir términos semejantes en expresiones algebraicas.

¿Para qué?

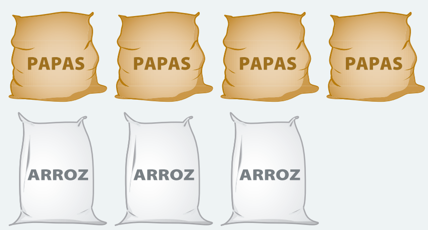
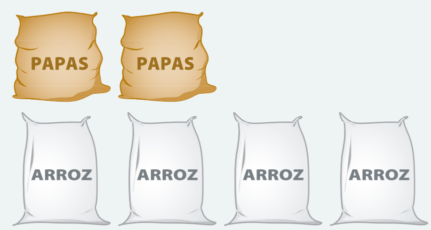
En matemática siempre es recomendable analizar las cantidades involucradas antes de desarrollar los ejercicios, porque existen estrategias que permiten simplificar los cálculos. Para sumar o restar expresiones algebraicas es conveniente comparar el factor literal de sus términos: si son iguales, se pueden agrupar facilitando el desarrollo del ejercicio.

Palabras clave

Propiedad conmutativa
Términos semejantes
Propiedad asociativa
Factor literal

Situación 1 Agrupar aplicando la conmutatividad y la asociatividad

Rodrigo y Carolina son agricultores, y decidieron unir sus cosechas para venderlas. A continuación se detalla cada cosecha:

Cosecha de Rodrigo	Cosecha de Carolina
	

Si todos los sacos de papas tienen la misma masa y los sacos de arroz también tienen la misma masa entre ellos, que no es necesariamente igual a la de los sacos de papas, **¿cuántos kilogramos de papas y arroz tienen para vender entre los dos?**

Paso 1 Expresa la situación en lenguaje algebraico.

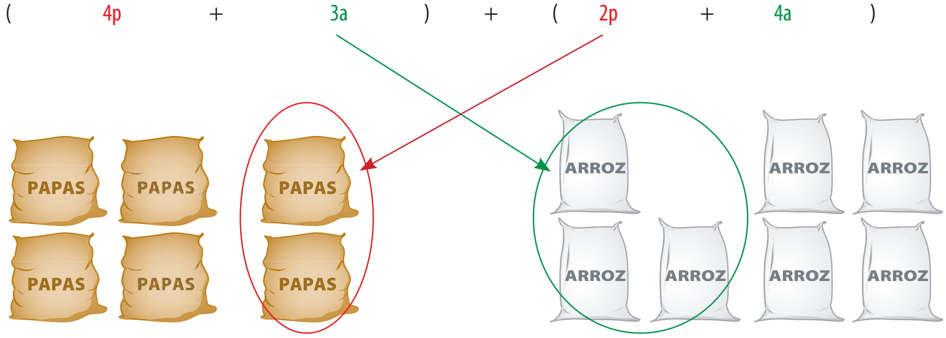
Asigna la variable **p** a la masa de un saco de papas (en kilogramos) y la **a** a la masa de un saco de arroz (en kilogramos).

Cosecha de Rodrigo	Cosecha de Carolina
$4p + 3a$	$2p + 4a$
Cantidad total de kilogramos: $(4p + 3a) + (2p + 4a)$	

Paso 2 Aplica la propiedad conmutativa de la adición.

Para sumar debes reunir los términos que representan los kilogramos de papas y los que representan los kilogramos de arroz. Esto corresponde a agrupar por términos semejantes, es decir, aquellos que tienen igual factor literal.

$($ $4p$ $+$ $3a$ $)$ $+$ $($ $2p$ $+$ $4a$ $)$



$4p + 2p + 3a + 4a$

Paso 3 Agrupa los términos semejantes utilizando la propiedad asociativa de la adición.

$$(4p + 3a) + (2p + 4a) = (4p + 2p) + (3a + 4a)$$

Masa de sacos de papas — Masa de sacos de arroz

Paso 4 Reduce los términos semejantes.
Suma o resta los términos que tengan igual factor literal.

$$(4p + 2p) + (3a + 4a)$$
$$= \quad 6p \quad + \quad 7a$$

Entonces, juntando los sacos de ambos, Rodrigo y Carolina tienen $6p + 7a$ kilogramos para vender.

Situación 2 Reducir términos algebraicos

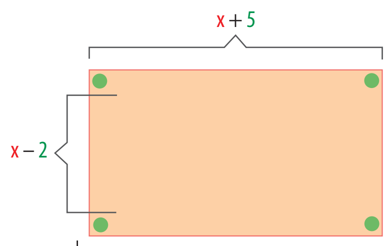
Un campo de forma rectangular tiene álamos en todo su contorno, de tal manera que dos álamos contiguos están ubicados a la misma distancia uno del otro. En cada esquina del campo hay un álamo, y a lo largo del campo hay 5 álamos más que a lo ancho. **¿Cuántos álamos hay en total alrededor del campo?**

Paso 1 Determina la o las variables.

Cantidad de álamos a lo ancho: x.

Cantidad de álamos a lo largo: 5 más que a lo ancho $\longrightarrow x + 5$.

Paso 2 Determina la cantidad de álamos a lo ancho, sin contar los de las esquinas.



Dado que los álamos de las esquinas están a lo ancho y a lo largo, no se deben considerar dos veces. Entonces, a la cantidad total de álamos que hay en el ancho se le deben restar 2 álamos.

Así, la cantidad de álamos a lo ancho (sin contar las esquinas) corresponde a:

$$x - 2$$

Paso 3 Suma la cantidad de álamos a lo largo y a lo ancho.

Aplica la propiedad conmutativa y la asociativa para reducir los términos semejantes.

$$(x + 5) + (x - 2) + (x + 5) + (x - 2) = x + 5 + x - 2 + x + 5 + x - 2$$
$$= (x + x + x + x) + (5 - 2 + 5 - 2)$$
$$= \boxed{} + \boxed{}$$

Luego, alrededor del campo hay ____________________ álamos en total.

Para concluir

- Los **términos semejantes** son aquellos que tienen el mismo factor literal.
- **Reducir términos semejantes** consiste en sumar o restar los coeficientes numéricos conservando el factor literal que tienen en común. Para ello, puedes seguir estos pasos:
  1.° Identifica aquellos términos que sean semejantes.
  2.° Agrúpalos según su factor literal y resuelve las operaciones correspondientes.

Argumenta y comunica

- En la situación 2, ¿se puede asignar la variable **x** a la cantidad de árboles que hay a lo largo?, ¿cómo quedaría planteado el problema? y ¿se obtiene la misma solución? Justifica.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Resuelve las operaciones.

a. 13 + (–2)
b. 6 + (–9)
c. 15 – (–4)
d. 11 – (–7)
e. 6 + (–9) + 8
f. 7 + [(–5) – (–9)]
g. [3 – (–7)] + [15 + (–11)]

2. Identifica la cantidad de términos, el coeficiente numérico y el factor de cada expresión.

a. 2a + 5b
b. 3ap – 5sp + p
c. 7p – 2s + 5f
d. 9nt + 5pt – 12

Práctica guiada

3. Identifica los términos que sean semejantes y píntalos del mismo color.

21zb, 2zb, 20a, –8bz, –4a, –9ab, –16zb, 7x, 8wz, 5x, 2ab, –17wz, 5a, 3a, –10x, –18ab

4. Reduce las expresiones algebraicas.

$\boxed{3p + 5q - p + 4q}$

Paso 1 Identifica los términos semejantes y agrúpalos.

Términos con p: 3p ; –p
Términos con q: 5q ; 4q

Paso 2 Reduce.

3p – p = 2p   5q + 4q = 9q

Paso 3 Escribe la expresión reducida.

= 2p + 9q

a. 7a + 5b – 3a + 2b
b. 5p – 7q + 4a +4q
c. 6r – 2t – 8r + 15t
d. 4y – 6p + 19y + p

5. Reduce los términos semejantes eliminando paréntesis.

$\boxed{5a - [3b - 2a + (3b - b)]}$

Paso 1 Resuelve los paréntesis desde el interior hacia afuera.

= 5a – [3b – 2a + 2b]
= 5a – [5b – 2a]

Paso 2 Reduce. Si el paréntesis está precedido de un signo –, quita los paréntesis y escribe el inverso aditivo de cada término.

= 5a – [5b – 2a]
= 5a – 5b + 2a
= 7a – 5b

a. (2x + 3y) + (8y + 10x)
b. (10x + 2y) – (4x – y)
c. –(7a + w) – (4w – 7b)
d. $-(5a^2b - 2ab + 5ab^2) + (2a^2b + 14ab^2 + 6ab)$

Aplica

6. Completa tabla escribiendo en los recuadros los coeficientes numéricos que correspondan.

Expresión algebraica	Expresión algebraica reducida
8g + 4h – 5g – h + 3g	$\square$ g + $\square$ h
3p + 6q – 2r – 4q + 5r	$\square$ p + $\square$ q + $\square$ r
3j – k + 5j +16k	$\square$ j + 11k
5v + $\square$ w – $\square$ v – 7w	2v + 4w
$\square$ x + $\square$ y + 2x + y	5x + 3y
2m + $\square$ n + $\square$ m – 5n	9m + n
7a + 4b – 3c + 2a + $\square$ c	$\square$ a + $\square$ b + 8c
$\square$ d + 8e + $\square$ f – 4d – $\square$ e	12d +5e + 7f

7. Calcula mentalmente.

a. $x + x$
b. $2x + x$
c. $3x + x$
d. $x + 2x + x$

8. Reduce las expresiones algebraicas.

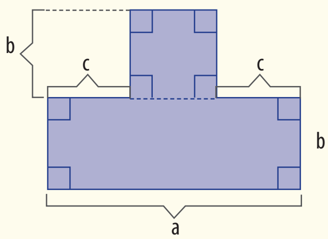
a. $6x + 4y - 2z + 5x - 18y + 9z$
b. $15f - 13g + 5 - 4f - 8g + 9$
c. $-4pq + 4rs - 5pq - 12rs$
d. $7bc + 15bd + 4bc - 12bd$
e. $9a + 3ab + 7b - 8a + 4ab$
f. $14uv - 7v - 12\,uv + 5v - 2uv$

9. Determina, en cada caso, los valores de **A** y **B** para que la reducción de términos sea correcta.

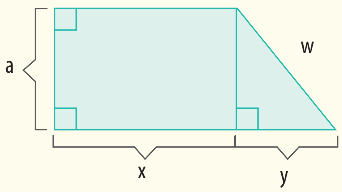
a. $3px - Aqy + Bpx + 7qy = 9px - 2qy$
b. $Axy + yz + 5xy - Byz = 12xy - 10yz$
c. $14st + Aqr + Bst - 5qr = 8st$
d. $-4xyz + Apxy + Bxyz = -2xyz - 3pxy$

10. Expresa en forma reducida el perímetro de cada figura.

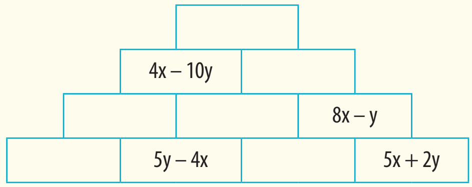
a.



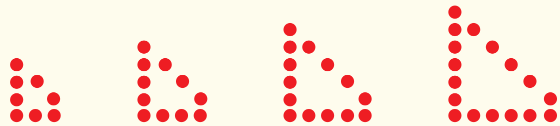
b.



11. **Desafío.** Completa la figura considerando que la suma de las expresiones de dos rectángulos contiguos de manera horizontal es igual a la expresión que se encuentra inmediatamente sobre ellos.



12. Considera la siguiente secuencia de figuras:



a. Si la secuencia sigue el mismo patrón de formación, ¿cuántos puntos podría tener la quinta figura?
b. ¿Cuál sería un posible patrón de formación para la secuencia?
c. Escribe una expresión reducida que represente la cantidad de puntos necesarios para formar la figura que está en la posición **n**.

13. **Argumenta.** En una prueba de álgebra, Raúl debe escribir una igualdad entre dos expresiones. Una de las respuestas que dio fue la siguiente:

$$3pq + 5pr - 2pz = (3q + 5r - 2z)p$$

a. Explica el razonamiento de Raúl. ¿Son iguales ambas expresiones?
b. Utiliza el procedimiento de Raúl para escribir una expresión equivalente a $5ab + 4ac - 7a$.

Reflexiono

1. ¿Qué característica deben tener los términos algebraicos para que se puedan reducir?
2. Se afirma que en una adición o una sustracción de expresiones algebraicas, la cantidad de sus variables siempre coincide con la cantidad de términos que quedan luego de reducirlos. ¿Es correcta esta afirmación? Argumenta y da un ejemplo.

Refuerzo

1. Aplica la propiedad asociativa y la conmutativa para reducir la expresión:

$$3x + 8y - 7x + 3y - 19x - y.$$

2. Un club de fútbol quiere rodear con cinta amarilla un terreno rectangular de lados **(3a + 11b)** metros y **(8a – 5b)** metros, para señalar que en ese lugar se construirá una cancha. Expresa en términos de “a” y “b” el largo de la cinta que se necesita para rodear el terreno.

Lección 17

¿Cómo resolver ecuaciones?

Propósito

Resolver ecuaciones utilizando métodos gráficos y algebraicos.

¿Para qué?

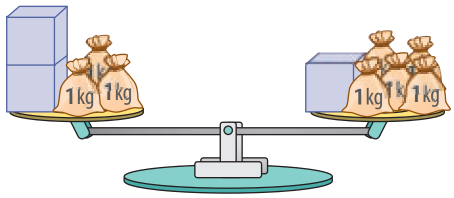
Muchos problemas, tanto de la matemática como de la vida diaria, se pueden solucionar planteando una ecuación que represente la situación y la relación entre sus variables. Para resolverla, es necesario aplicar estrategias y propiedades que permitan encontrar el valor de la incógnita, y luego verificar si el valor obtenido satisface la ecuación.

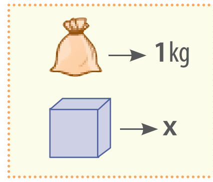
Palabras clave

Equilibrio
Igualdad
Variable
Ecuación

Situación 1 Representar ecuaciones en la balanza

Jessica es comerciante y tiene mercadería guardada en sacos y cajas. Al ponerlos en una balanza ocurre el siguiente equilibrio:





Si las cajas tienen igual masa, ¿cuál es la masa de una caja?

Paso 1 Analiza los platos de la balanza.

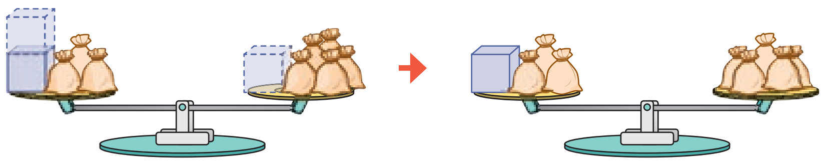
Dado que la balanza está equilibrada, se deduce que:
"La masa de 2 cajas y 3 sacos es igual a la de 1 caja y 5 sacos".

$$2x + 3 = x + 5$$

Esto se puede representar en esta ecuación, donde **x** es la masa de cada caja.

Paso 2 Reduce la cantidad de cajas y sacos manteniendo el equilibrio.

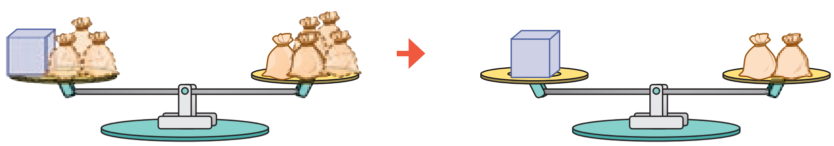
Quita una caja de cada platillo:



$2x + 3 = x + 5 \quad / -x$
$2x - x + 3 = x - x + 5$ → $x + 3 = 5$

¿Por qué se mantiene el equilibrio?

Ahora quita tres sacos de cada platillo:



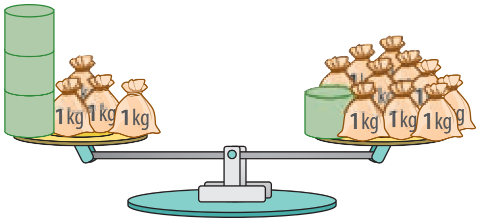
$x + 3 = 5 \quad / -3$
$x + 3 - 3 = 5 - 3$ → $x = 2$

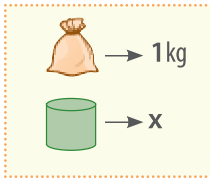
Como la balanza se mantiene en equilibrio, la masa de 1 caja es igual a la de ______ sacos, es decir, a ______ kg.

De manera general, podemos quitar siempre la misma cantidad de elementos del mismo tipo a ambos platillos de la balanza y el equilibrio se mantendrá.

Situación 2 Resolver ecuaciones de manera algebraica

Observa la balanza en equilibrio:





Si los tarros tienen igual masa, ¿cuál es esta?

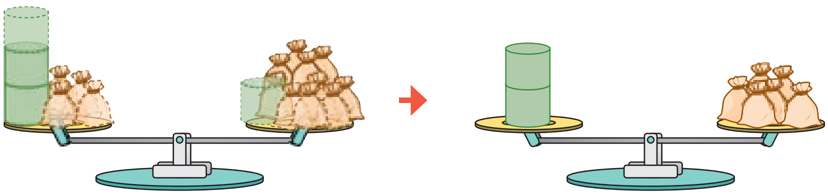
Paso 1 Asigna la variable y expresa como ecuación.

$$3x + 4 = x + 10$$

En la ecuación, **x** representa la masa de cada tarro.

Paso 2 Reduce la cantidad de sacos y tarros manteniendo el equilibrio.

Quita 1 tarro y 4 sacos de cada platillo.



Esto equivale a restar **x** y luego, 4 a cada lado de la ecuación.

$3x + 4 = x + 10 \quad / -x$

$3x - x + 4 = x - x + 10$

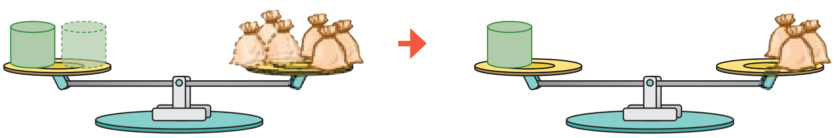
$2x + 4 = 10 \quad / -4$

Usando la propiedad de la igualdad número 2, resta **x** y luego 4 a ambos lados de la igualdad.

$2x + 4 - 4 = 10 - 4 \rightarrow 2x = 6$

Paso 3 Reparte la cantidad de sacos y tarros manteniendo el equilibrio.

Divide los sacos en 2 grupos iguales, de modo que cada grupo corresponda a un tarro, luego quita la mitad de cada platillo.



Esto equivale a dividir por 2 a cada lado de la ecuación.

$2x = 6 \quad / : 2$

Usando la propiedad de la igualdad número 4, divide por 2 a ambos lados de la igualdad.

$2x : 2 = 6 : 2 \rightarrow x = \boxed{}$

Luego, la masa de un tarro es igual a la de ______ sacos, es decir, a ______ kg.

Ampliando

Las siguientes propiedades de la igualdad que permiten resolver ecuaciones de manera algebraica:

Si $a, b, c \in \mathbb{N}_0$, entonces se cumple que:

1. Si $a = b$, entonces $a + c = b + c$.
2. Si $a = b$, entonces $a - c = b - c$.
3. Si $a = b$, entonces $a \cdot c = b \cdot c$.
4. Si $a = b$ y $c \neq 0$ entonces $a : c = b : c$.

Resolver una ecuación consiste en transformarla, usando las propiedades de la igualdad, en otra equivalente (es decir, en otra con la misma solución) pero más simple, con el fin de encontrar los valores de las incógnitas que hacen que la igualdad sea verdadera.

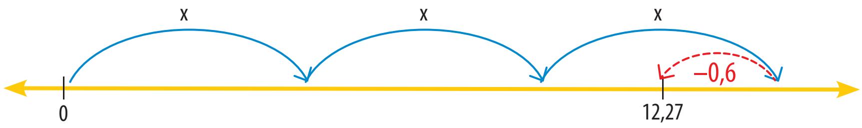
Situación 3 Resolver ecuaciones representando en la recta numérica

Graciela participó en el triple salto en una competencia de atletismo. Sus tres saltos fueron de la misma longitud, pero en el último, al caer, apoyó las manos atrás de su cuerpo, por lo que perdió 0,6 metros.

Si Graciela alcanzó 12,27 metros en total en esa prueba, **¿cuánto midió cada uno de sus tres saltos sin considerar el retroceso?**

Paso 1 Representa el triple salto de Graciela.

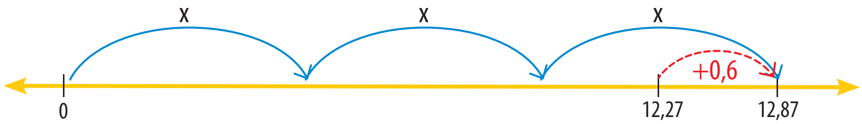
Cantidad de metros avanzados en cada salto: x.
Cantidad de saltos: 3.
Cantidad de metros retrocedidos en el último salto: 0,6.



En lenguaje algebraico: $3x - 0{,}6 = 12{,}27$

Paso 2 Calcula la distancia total del triple salto.

Si Graciela retrocedió 0,6 metros al caer, entonces, al sumarle 0,6 metros al punto donde cayó, se obtendrá la distancia total.

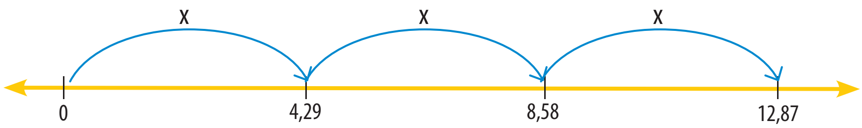


En lenguaje algebraico:

$$3x - 0{,}6 + 0{,}6 = 12{,}27 + 0{,}6$$
$$3x = 12{,}87$$

Ayuda
Para despejar **3x** aplica la propiedad 1, es decir, suma 0,6 a ambos lados de la igualdad.

Paso 3 Determina la longitud de cada salto.



En lenguaje algebraico:

$$3x : \square = 12{,}87 : \square$$
$$x = \square$$

Ayuda
Para despejar **x**, aplica la propiedad 4.

Luego, cada salto midió ________ metros.

Para concluir

- Una **ecuación** es una igualdad entre dos expresiones en las que intervienen una o más incógnitas.
- Resolver una ecuación consiste en transformarla, usando las propiedades de la igualdad, en otra equivalente pero más simple, con el fin de encontrar los valores de las incógnitas que hacen que la igualdad sea verdadera.

Argumenta y comunica

- Explica por qué en matemática, frecuentemente, se asocia el concepto de ecuación a una balanza.

Repaso

1. Reduce los términos semejantes.

a. $3x + 7x$

b. $12a - 8a$

c. $9p - 6q - 7p + 4q$

d. $-15s + 7j + 21s - 13j$

2. Resuelve las ecuaciones.

a. $x + 5 = 19$

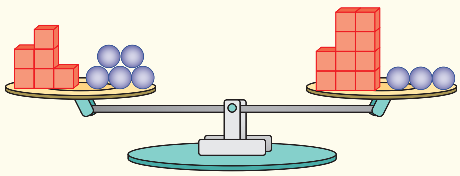
b. $9 + x = 25$

c. $x + \frac{1}{2} = 6$

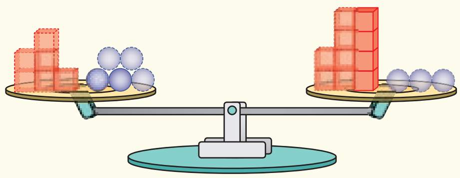
d. $x - 0{,}8 = 1{,}2$

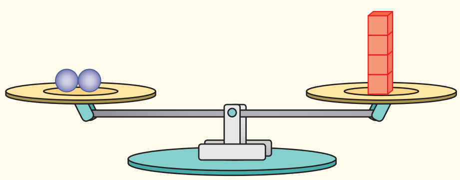
Práctica guiada

3. Determina en cada caso a cuántas esferas equivale un cubo.



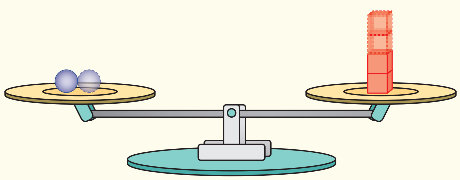
Paso 1 Quita 6 cubos y 3 esferas de cada platillo. Así dejarás solo cubos en un platillo y solo esferas en el otro.





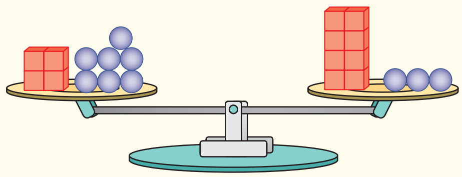
Paso 2 Reparte los elementos de los platillos.

Ya que hay 2 esferas en el plato izquierdo, separa los cubos en dos grupos iguales. Luego, quita un cubo del plato y un grupo de cubos del otro.



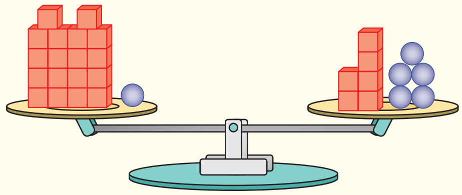
Luego, una esfera equivale a 2 cubos.

a.



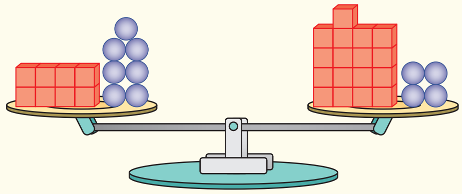
Una esfera equivale a ________ cubos.

b.



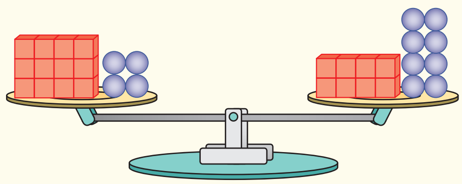
Una esfera equivale a ________ cubos.

c.



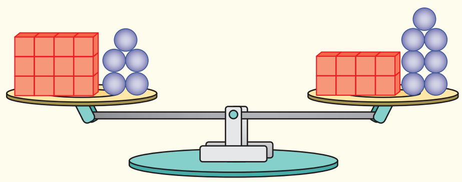
Una esfera equivale a ________ cubos.

d.



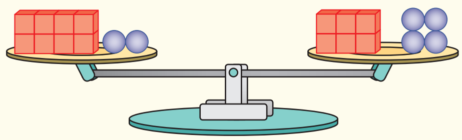
Una esfera equivale a ________ cubos.

e.



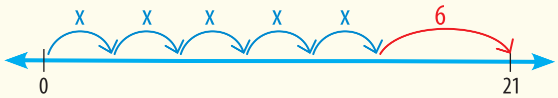
Una esfera equivale a ________ cubos.

f.



Una esfera equivale a ________ cubos.

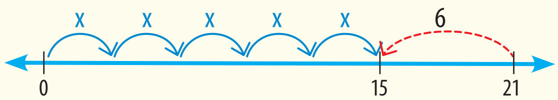
4. Plantea la ecuación y resuélvela en la recta numérica.



Paso 1 Interpreta que 5 saltos de longitud **x** más uno de longitud 6 llegan a 21.

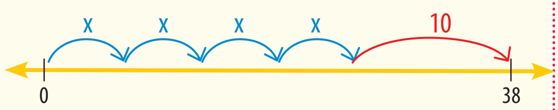
Paso 2 Plantea la ecuación: $5x + 6 = 21$.

Paso 3 Observa que si desde 21 se retroceden 6 unidades llega a 15, que es la longitud de los 5 saltos.

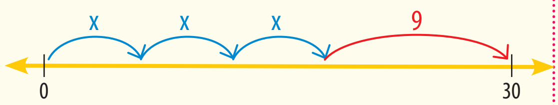


Si con 5 saltos llega a 15, cada salto tiene longitud 3, entonces $x = 3$.

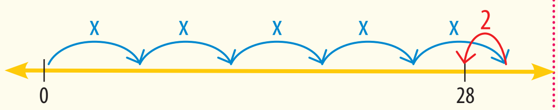
a.



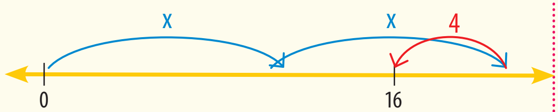
b.



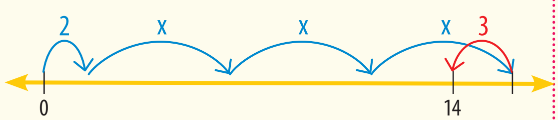
c.



d.



e.



5. Une cada ecuación de la columna A con su solución en la columna B.

A	B
$x + 120 = 254$	$x = 108$
a. $3x - 28 = 80$	$x = 136$
b. $7x - 116 = 500$	$x = 88$
c. $x + 8 = 144$	$x = 152$
d. $8x - 73 = 1143$	$x = 36$
e. $2x + 35 = 251$	$x = 134$

6. Resuelve las ecuaciones aplicando la operación inversa.

$$\boxed{\frac{3p}{5} + 1 = 7}$$

$$\frac{3p}{5} + 1 = 7 \qquad / -1$$

$$\frac{3p}{5} + 1 - 1 = 7 - 1$$

$$\frac{3p}{5} = 6 \qquad / \cdot 5$$

$$\frac{3p}{5} \cdot 5 = 6 \cdot 5$$

$$3p = 30 \qquad /:3$$

$$\frac{3p}{3} = \frac{30}{3}$$

$$p = 10$$

a. $5x = 10$

b. $\frac{y}{4} = 116$

c. $4w + 9 = 9$

d. $5p + 4 = 10$

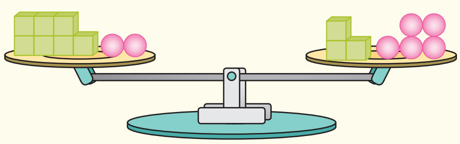
e. $8j + 10 = 25$

f. $\frac{1}{4} + 2y = 2$

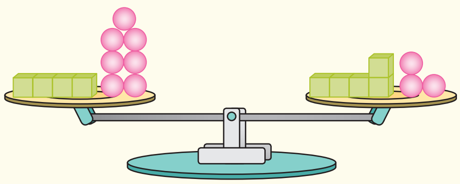
Aplica

7. Plantea la ecuación para determinar a cuántas esferas equivale cada cubo.

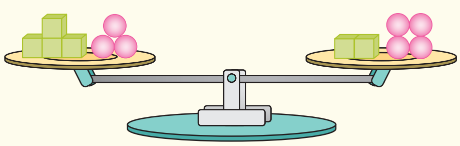
a.



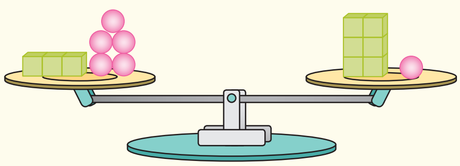
b.



c.

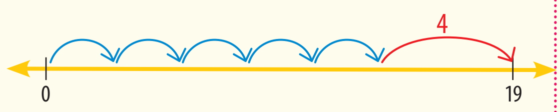


d.

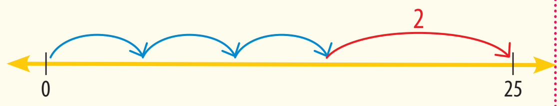


8. Plantea la ecuación representada en cada recta numérica.

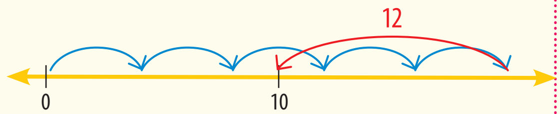
a.



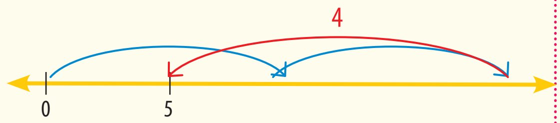
b.



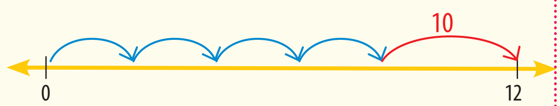
c.



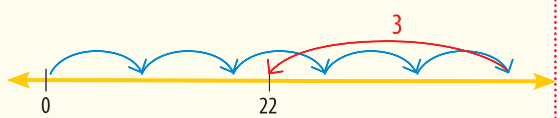
d.



e.



f.



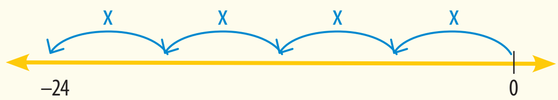
9. Resuelve las ecuaciones representándolas en una recta numérica.

a. $3x + 4 = 13$
b. $5x + 2 = 7$
c. $7x + 1 = 16$
d. $6x + 4 = 3x + 10$
e. $5x + 9 = 8x + 1$
f. $4x - 7 = 6$
g. $6x - 5 = 19$

10. Resuelve las ecuaciones aplicando las operaciones inversas.

a. $5x + 12 = 37$
b. $8x - 19 = 45$
c. $9x = 7x + 24$
d. $\frac{x}{4} + 7 = 32$

11. **Argumenta.** Observa la representación y determina el valor de **x**. Explica tu procedimiento.



12. **Encuentra el error.** Marca el error en la resolución de la ecuación. Explica por qué se puede haber producido y corrígelo.

$$3x - 6 = 21 \quad / -6$$
$$3x - 6 - 6 = 21 - 6$$
$$3x = 15 \quad / : 3$$
$$\frac{3x}{3} = \frac{15}{3}$$
$$x = 5$$

13. **Crea.** Para cada caso, crea una ecuación que cumpla con la condición solicitada. Luego, compara tu solución con las de tus compañeros y compañeras.

a. Que tenga el número 7 como solución.
b. Que tenga el número –2 como solución.
c. Que tenga la misma solución que $2x + 3 = 7$.

14. **Desafío.** Para comprar dos bufandas iguales el papá de Ana y Sofía aportó $ 1250. Si se sabe que las bufandas tienen el mismo valor y las hermanas aportaron la misma cantidad de dinero, ¿cuánto dinero aportó Sofía?

Reflexiono

1. Una balanza en equilibrio tiene en su platillo izquierdo 3 kg de harina más una bolsa de sal, y en su platillo derecho, 8 kg de arroz. Si en cada platillo se agregan 3 kg de arroz, ¿se mantiene el equilibrio de la balanza? Comprueba tu respuesta.
2. En la ecuación $ax = b$, con $b = 10$, ¿qué valores debería tomar **a** para que la solución de la ecuación sea un número natural? Fundamenta tu respuesta con ejemplos.

Refuerzo

1. Encuentra el valor que debe tener **x** para que se cumpla la igualdad $5x - 3 = 7$.
2. Un empresa de publicidad debe elaborar un afiche rectangular de lados $(x + 3)$ metros y $(2x - 1)$ metros. Si se sabe que el contorno metálico que lo sostendrá tiene 13 metros de perímetro, ¿cuánto mide el menor de sus lados?

Lección 18

¿Cómo resolver inecuaciones?

Propósito

Resolver inecuaciones y representar sus soluciones.

¿Para qué?

Cuando la solución de un problema implica la comparación de magnitudes, se puede hablar de una desigualdad. Cuando uno de los valores es desconocido, lo que hacemos es plantear una inecuación que permita encontrar los valores que mantienen la desigualdad.

Palabras clave

Desequilibrio
Desigualdad
Inecuación

Situación 1 Representar inecuaciones en la balanza

La pluma es un tipo de grúa utilizada en la construcción, que permite elevar materiales (cemento, fierros, etc.) a grandes alturas. A un lado de la pluma debe colocarse un contrapeso, es decir, un peso que permita mantener la fuerza que la pluma va a ejercer.

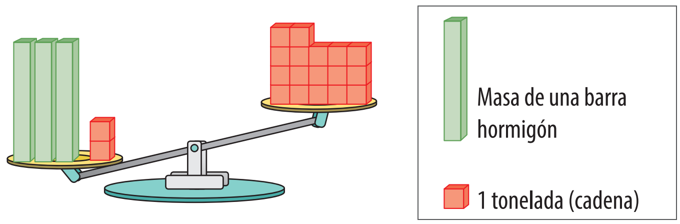
Jorge maneja una grúa pluma que solo puede elevar pesos menores al de su contrapeso. Para elevar 17 toneladas, puso en el contrapeso 3 barras de hormigón de igual masa, atadas con una cadena de 2 toneladas.

¿Cuál es la masa mínima de cada barra de hormigón?

Paso 1 Representa la situación usando una balanza.

Dado que el contrapeso debe ser mayor que (>) el peso a levantar, se puede representar esta situación con una balanza desequilibrada.

Entonces, la masa de 3 barras de hormigón más 2 toneladas de cadena debe ser mayor que 17 toneladas:



Paso 2 Escribe la situación usando lenguaje algebraico.

Si **x** representa la masa de cada barra de hormigón, la situación se puede modelar con la inecuación:

Masa de la cadena → $3x + 2 > 17$ ← Masa a levantar

¿Por qué se usa este símbolo matemático? ¿Qué significa?

Paso 3 Resuelve algebraicamente aplicando las propiedades de la desigualdad.

$3x + 2 > 17 \quad / -2$ ← Para despejar **x** aplica la propiedad 2.

$3x + 2 - 2 > 17 - 2$

$3x > 15 \quad / : \boxed{}$

¿Qué otras propiedades debes aplicar para despejar **x**?

$3x : \boxed{} > 15 : \boxed{}$

$\boxed{} > \boxed{}$

Ampliando

Las siguientes son propiedades de la desigualdad que permiten resolver inecuaciones de manera algebraica:

Si a, b, c ∈ $\mathbb{N}_0$, entonces se cumple que:

1. Si a < b, entonces a + c < b + c.
2. Si a < b, entonces a – c < b – c.
3. Si a < b y c > 0, entonces a • c < b • c.
4. Si a < b y c > 0, entonces a : c < b : c.

Resolver una inecuación consiste en determinar un conjunto de valores de la incógnita que satisfacen la desigualdad.

Luego, la masa de una barra de hormigón debe ser más de 5 toneladas, por ejemplo 6, 7, 10, 15, etc.

Nota que, a diferencia de las ecuaciones, las inecuaciones tienen como solución un conjunto de valores.

Situación 2 Representar el conjunto solución en la recta numérica

Si se tiene la inecuación:

$$4x \leq 8$$

Ayuda

Cuando aparece el signo $\leq$, la variable puede tomar valores menores o iguales al número. Cuando aparece el signo $\geq$, la variable puede tomar valores mayores o ser igual al número.

¿Qué números son solución de esta inecuación?

Paso 1 Resuelve algebraicamente.

$$4x \leq 8 \qquad / : 4$$

Para despejar **x**, aplica la propiedad 4.

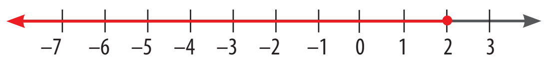
$$\frac{4}{4}x \leq \frac{8}{4}$$

$$x \leq \boxed{}$$

Paso 2 Representa en la recta numérica.

Ubica el número 2.

Marca con una línea sobre la recta numérica el rango deseado. Como los valores de la incógnita son todos aquellos menores o iguales a 2, marcamos desde el 2 incluido hacia la izquierda.



Ayuda

(●) indica que dicho número es parte del conjunto solución.

(○) indica que dicho número no es parte del conjunto solución.

Luego, la solución es un conjunto de números, en este caso todos aquellos números menores o iguales a 2.

Para concluir

- Una **inecuación** es una desigualdad que contiene una o más incógnitas.
- Resolver una inecuación consiste en encontrar el conjunto de valores de la incógnita que mantiene la desigualdad. El conjunto encontrado se denomina **conjunto solución de la inecuación**.
- El conjunto solución de una inecuación se puede representar en una **recta numérica**.

Argumenta y comunica

- Se tiene la inecuación $x + 2 < 4$. Si se consideran solo los valores de **x** que sean números naturales, ¿por qué **x** tiene un único valor? Comenta tu respuesta con tus compañeros y compañeras.

Repaso

1. **Relaciona cada situación con la inecuación que la represente.**

a. Marta tiene 37 o menos años.

b. Guillermo sabe más de 37 canciones.

c. José tiene menos de 37 fichas.

d. Pamela tiene 37 años o más.

( ) $t \leq 37$ ( ) $y < 37$

( ) $x > 37$ ( ) $37 \leq s$

2. **Pinta los valores de la variable que pertenece al conjunto solución de cada inecuación.**

a. $j : 3 \leq 15$ 70 30 45 60

b. $t \cdot 12 > 24$ 0,5 1,5 2,5 –2

c. $n + 7 < 34$ 32 26 56 $6\frac{3}{4}$

d. $x - 22 \geq 150$ $171\frac{1}{3}$ 150,8 210,56 172

3. **Resuelve las inecuaciones.**

a. $x + 5 < 23$

b. $x - 8 < 9$

c. $x + 14 > 31$

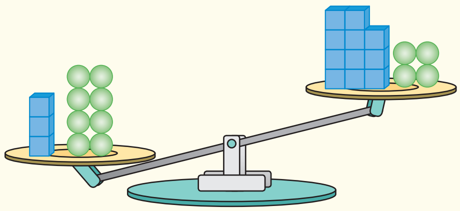
d. $7x > 56$

e. $3x < 42$

f. $\frac{x}{3} < 7$

Práctica guiada

4. **Plantea la inecuación representada. Para ello, considera que ● es la incógnita y ■ la unidad.**



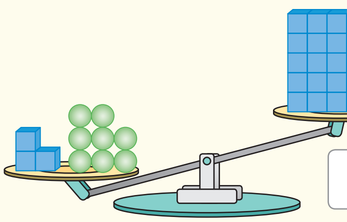
Paso 1 Cuenta la cantidad de esferas y de cubos que hay en cada platillo y represéntalos simbólicamente.

$3 + 8x$ y $11 + 4x$

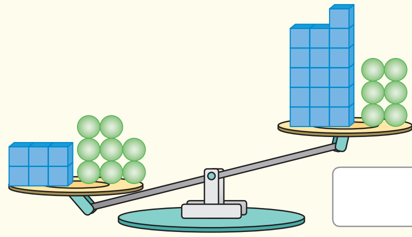
Paso 2 Identifica el símbolo de mayor o menor que, según la balanza.

$3 + 8x > 11 + 4x$

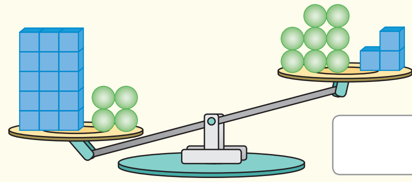
a.



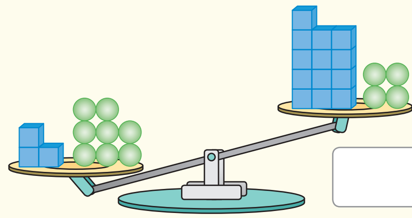
b.



c.



d.



5. **Resuelve de manera algebraica.**

$$\boxed{\frac{2p}{3} - 6 > 2}$$

$\frac{2p}{3} - 6 > 2$ $\quad / + 6$

$\frac{2p}{3} > 8$ $\quad / \cdot 3$

$2p > 24$ $\quad / : 2$

$p > 12$

a. $100 < 70 + 2w$

b. $6y + 6 > 6$

c. $5h - 10 < 10$

d. $x + \frac{2}{3} > \frac{5}{3}$

e. $5x + 1 > 26$

f. $4x + 4 > x + 16$

6. **Representa gráficamente el conjunto solución.**

$\boxed{x < 3}$

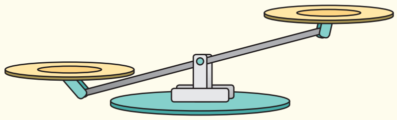
a. $x > 5$

b. $x < 0$

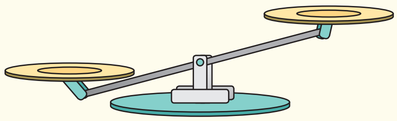
Aplica

7. Representa la inecuación en la balanza. Para ello, considera que ● es la incógnita y ■ la unidad.

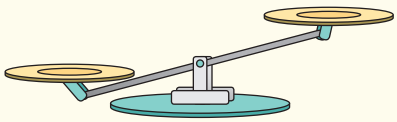
a. $3x + 8 > 11$



b. $1 < 7 + 2x$

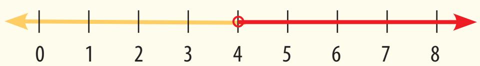


c. $5x + 5 < 10$

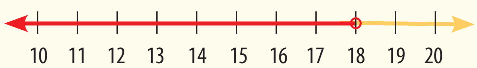


8. Escribe algebraicamente la solución representada.

a.



b.



9. Considera la inecuación:

$$3x < 21$$

Prueba con distintos valores de **x** para determinar los que la satisfacen.

10. Sin verificar valores, ¿cuál es el conjunto solución de la inecuación $8x > 40$? Justifica.

11. Comprueba si los valores dados pertenecen al conjunto solución de la respectiva inecuación.

a. $x = 3$; en $3x + 7 > 10$.

b. $x = 1$; en $2x - 7 < 0$.

c. $x = 0$; en $40 + 10x > 50$.

d. $x = 0{,}1$; en $0{,}1x + 0{,}1 > 0{,}01$.

12. Resuelve algebraicamente las siguientes inecuaciones. Explica paso a paso tu procedimiento.

a. $4x + 8 < 32$

b. $5x + 17 < 37$

c. $6x + 18 > 24$

d. $12x + 5 > 20$

e. $\frac{x}{3} + 5 < 6$

f. $\frac{x}{2} - 4 > 8$

13. La edad de Andrea es mayor que la diferencia entre la edad de su hermano y la de Javier. Si la edad de Javier es 12 años y su hermano tiene 73, ¿qué edad puede tener Andrea?

14. **Argumenta.** Un artesano pega una cuerda en el contorno de sus tallados rectangulares. La medida del largo de los rectángulos es 10 cm más que la del ancho. Si el artesano usa cuerdas de 1 m de longitud, ¿cuáles son las posibles dimensiones que pueden tener estos rectángulos para que no le falte cuerda en su contorno?

Reflexiono

1. ¿Por qué una desigualdad no siempre es una inecuación? Fundamenta tu respuesta con un ejemplo.
2. ¿Puede ocurrir que dos inecuaciones distintas tengan el mismo conjunto solución? Justifica con un ejemplo o contraejemplo y compara tu respuesta con la de un compañero o compañera.

Refuerzo

1. Determina el conjunto de los valores de x que hacen que se cumpla la desigualdad:

$$3x - 11 < 7$$

2. Señala dos valores que no pertenezcan al conjunto solución de la inecuación $6x + 7 > 2x + 23$.
3. Plantea la inecuación que representa la frase: "la cantidad de lápices que tiene Darío es menor que la diferencia entre la mitad de 16 y 4".

Lección 19

¿Cómo resolver problemas con ecuaciones e inecuaciones?

Propósito

Plantear y resolver problemas que se modelan con ecuaciones o inecuaciones..

¿Para qué?

Las ecuaciones y las inecuaciones son muy útiles en contextos cotidianos y en el mundo de los negocios. En las empresas, por ejemplo, su uso es muy frecuente para calcular costos y ganancias. Si bien existen estrategias para resolverlas, estas deben emplearse como una serie de procedimientos o pasos que permitan trabajar el problema de forma clara y ordenada, identificando los datos conocidos y lo que se busca responder, así como también se tiene que analizar el resultado obtenido e interpretarlo según el contexto del problema.

Palabras clave

Ecuación
Pertinencia
Inecuación

Situación 1 Modelar situaciones con ecuaciones

Margarita está encargada de organizar la fiesta de graduación de su curso. Le ofrecen un local cuyo arriendo es de $ 300 000 y además se cobra un monto por persona. En el curso de Margarita hay 25 alumnos y cada uno asistirá con una pareja que no es del curso.

¿Cuál es el monto a pagar por persona si el costo total es de $ 700 000?

Paso 1 Asigna la variable e identifica los datos.

La incógnita es el valor que se cobra por persona. La llamamos **x**.

Valor del arriendo ⟶ $ 300 000
Personas que asistirán ⟶ $2 \cdot 25 = 50$
Costo por persona ⟶ x
Costo total ⟶ $ 700 000

Paso 2 Traduce a lenguaje algebraico y modela con una ecuación.

El costo total es igual a la suma del valor del arriendo y el monto a pagar por persona multiplicado por la cantidad de asistentes.

Por lo tanto:

El valor por persona, **x**, se multiplica por el total de asistentes (considerando las parejas).

$$50x + 300\,000 = 700\,000 \qquad / -300\,000$$

Aplicando la propiedad 2, resta 300 000 a ambos lados de la igualdad.

$$50x + 300\,000 - 300\,000 = 700\,000 - 300\,000$$

$$50x = 400\,000 \qquad / \bigcirc \boxed{}$$

$$50x \bigcirc \boxed{} = 400\,000 \bigcirc \boxed{}$$

$$x = \boxed{}$$

¿Qué propiedad debes aplicar para despejar la incógnita?

Paso 3 Comprueba evaluando la ecuación.
Si la igualdad resulta verdadera, entonces el resultado es el correcto.

Como el valor de **x** es ________, la reemplazamos por este valor en la ecuación.

$$50 \cdot \boxed{} + 300\,000 = 700\,000$$

$$\boxed{} + 300\,000 = 700\,000$$

$$\boxed{} = 700\,000$$

Paso 4 Comunica el resultado.

El monto por persona es de $ ____________.

Situación 2 Modelar situaciones con inecuaciones

El curso de Héctor decidió realizar su fiesta en el mismo lugar del caso anterior. Cuando han reunido \$ 675 000, un estudiante advierte que ya han sobrepasado el monto que necesitan.

¿Cuántos estudiantes puede tener el curso de Héctor?

Paso 1 Asigna la variable e identifica los datos.

La incógnita es la cantidad de estudiantes. La llamamos **y.**

Valor del arriendo ⟶ \$ 300 000
Personas que asistirán ⟶ y
Costo por persona ⟶ \$ 8000
Costo total ⟶ \$ 675 000

¿Cómo se obtuvo este dato?

Paso 2 Traduce a lenguaje algebraico y modela con una inecuación.

El valor por persona, \$ 8000, se multiplica por la cantidad de personas que asistirán; en este caso, **y.**

$8000y + 300\,000 < 675\,000 \qquad / -300\,000$

$8000y + 300\,000 - 300\,000 < 675\,000 - 300\,000$

$8000y < 375\,000 \qquad / : 8000$

$8000y : 8000 < 375\,000 : 8000$

$y < 46{,}875$

y puede tener cualquier valor menor que 46,875.

Paso 3 Comprueba evaluando la inecuación.

Con cualquier número menor que 46,875 se verifica la desigualdad. Prueba con los siguientes números:

Para $y = 43$	Para $y = 46{,}3$
$8000 \cdot 43 + 300\,000 < 675\,000$	______ • ______ + ______ < 675 000
$344\,000 + 300\,000 < 675\,000$	______ + ______ < 675 000
______ < 675 000	______ + ______ < 675 000
Se cumple la desigualdad.	______ la desigualdad.

Paso 4 Comunica el resultado.

y representa la cantidad de personas que asistirán a la fiesta, pero la mitad de ellas son las parejas, que no son alumnos del curso, por lo que este valor se debe dividir por 2.

$46{,}875 : 2 = 23{,}4375$

Ayuda

La cantidad de personas debe ser un número natural. Por lo tanto, si la cantidad de personas debe ser menor que 23,4375, consideramos el mayor número natural que cumple esta condición.

Luego, el número de estudiantes del curso debe ser menor que 23,4375. Entonces, el curso de Héctor tiene a lo más 23 alumnos.

Situación 3 Analizar la pertinencia de la solución

Ahora, Margarita y Héctor decidieron organizar una sola fiesta para ambos cursos y comparar precios con otro local. En este les cobraban \$ 12 000 por persona incluyendo el arriendo, todo por un monto total de \$ 1 116 000.

¿Cuántos estudiantes tiene el curso de Héctor?

Paso 1 Asigna la variable e identifica los datos.
La variable es la cantidad de estudiantes del curso de Héctor. La llamamos **a.**

Costo por persona → \$ 12 000
Valor a pagar por el curso de Margarita → $50 \cdot 12\,000 = 600\,000$
Personas que asistirán del curso de Héctor → 2a
Valor a pagar por el curso de Héctor → $2a \cdot 12\,000 = 24\,000a$
Valor total a pagar → \$ 1 116 000

La cantidad de personas que asistirán del curso de Héctor, **a**, se multiplica por 2, ya que cada estudiante irá con una pareja.

Paso 2 Traduce a lenguaje algebraico y plantea la ecuación.
El costo total es igual a la suma de los valores a pagar por cada curso.

Por lo tanto:

$24\,000a + 600\,000 = 1\,116\,000 \quad / - 600\,000$

$24\,000a + 600\,000 - 600\,000 = 1\,116\,000 - 600\,000$

$24\,000a = 516\,000 \quad / : 24\,000$

$24\,000a : 24\,000 = 516\,000 : 24\,000$

$a = 21{,}5$

Paso 3 Comprueba evaluando la ecuación. La variable **a** tiene un valor de 21,5, reemplázala por este valor en la ecuación.

$21{,}5 \cdot 24\,000 + 600\,000 = 1\,116\,000$

__________ $+ 600\,000 = 1\,116\,000$

__________ $= 1\,116\,000$

Paso 4 Comunica el resultado.

La variable **a** representa la cantidad de estudiantes del curso de Héctor, por lo que necesariamente debe ser un número natural.

Así, la solución obtenida no es pertinente al contexto del problema, por lo tanto, este no tiene solución.

Para concluir

- Para resolver **problemas que involucran ecuaciones o inecuaciones**, puedes seguir estos pasos:
  1.° Asignar la variable e identificar los datos.
  2.° Modelar con una ecuación o una inecuación, y resolver.
  3.° Comprobar el valor encontrado evaluando la ecuación o la inecuación.
  4.° Responde el problema, contextualizando la solución encontrada. Para esto se debe verificar si la solución obtenida es **pertinente**, es decir, si es coherente con el contexto del problema.

Argumenta y comunica

- ¿Qué les conviene más, hacer la fiesta por separado o juntos? Compara los datos y discute con tus compañeros y compañeras cuál es la alternativa más económica.

Repaso

1. Escribe una expresión algebraica para representar cada enunciado.

a. Doce veces un número.

b. La novena parte de un número.

c. Los tres octavos de un número.

d. El costo de comprar cierta cantidad de cuadernos a $ 450 cada uno.

e. La cantidad de kilómetros recorridos en 7 horas a una velocidad constante.

f. La edad de Gloria es el doble que la de Ana, y juntas suman 35 años.

2. Reduce los términos semejantes.

a. $5a + 4b + 8a + 11b$

b. $9x + 4z - 5x + 2z$

c. $5p - 9z - 7p + 5z$

d. $5t + 9s + 3 - 2s - 20t - 12$

e. $5mn - 11mj + 9m - 3mn + mj$

f. $0{,}5p + 3q + 8p$

3. Resuelve las ecuaciones.

a. $5x + 4 = 19$

b. $8x + 7 = 79$

c. $4x - 19 = 9$

d. $6x + 11 = 4x + 25$

e. $13x - 9 = 5x - 1$

f. $\frac{x}{7} - 4 = 51$

4. Resuelve las inecuaciones.

a. $8x + 11 < 39$

b. $3x + 15 > 21$

c. $5x - 3 < 37$

d. $11x - 10 > 45$

e. $4x - 17 < 3$

f. $\frac{x}{4} + 8 < 17$

5. Verifica, en cada caso, si el valor dado es solución de la ecuación o inecuación.

a. $x + 5 = 8 \longrightarrow x = 3$

b. $x - 9 = 2 \longrightarrow x = 11$

c. $x - 8 < 12 \longrightarrow x = 10$

d. $\frac{x}{5} + 10 < 19 \longrightarrow x = 9$

6. Relaciona cada situación con la ecuación que la representa, para ello píntalas del mismo color.

a. Si se paga una cuenta de $ 8000 con un billete de $ 10 000, ¿cuánto es el vuelto que se debe recibir?

b. El triple de la edad de mi papá es 96 años. ¿Cuántos años tiene mi papá?

c. Martina tiene 40 láminas y las repartió equitativamente entre sus amigos. Si cada amigo recibió 10 láminas, ¿cuántos amigos tiene Martina?

d. Loreto vive a 350 m de su colegio. Si ya recorrió 98 m, ¿cuántos metros le faltan para llegar?

- $3 \cdot x = 96$
- $40 : r = 10$
- $a = 10\,000 + 8000$
- $10\,000 = 8000 + z$
- $350 = y + 98$
- $x - 96 = 250$

Práctica guiada

7. Modela con una inecuación y resuelve.

¿Cuál puede ser la medida del largo de una cerámica rectangular de ancho 5 cm si su área debe ser menor que 80 cm²?

Paso 1 La incógnita será el largo de una cerámica. La llamamos **z**.

Paso 2 Como la superficie no puede superar los 80 cm², entonces debemos plantear una inecuación, y la medida de la superficie será el largo por el ancho.

$$\begin{aligned} 5 \cdot z &< 80 \quad /:5 \\ 5:5 \cdot z &< 80:5 \\ z &< 16 \end{aligned}$$

Luego, el largo de una cerámica debe ser menor que 16 cm.

a. Alberto compró una camisa de $ 15 000 y una corbata. Si gastó menos de $ 34 000, ¿cuánto pudo costar la corbata?

b. Diego tiene más bolitas que su hermana. Si su hermana tiene 5 bolitas verdes y 7 azules, ¿cuántas bolitas puede tener Diego?

c. Sin considerar ninguna promoción, al comprar 6 regalos idénticos con $ 21 000, sobra dinero; pero al comprar 7, también con $ 21 000, falta dinero. ¿Cuánto podría costar cada regalo?

Aplica

8. Modela con una ecuación y resuelve.

a. Natalia leyó un libro de 173 páginas en una semana. El domingo leyó 23 páginas y los otros días leyó siempre la misma cantidad. ¿Cuántas páginas leyó cada día?

R: ______________________________

b. David compró una bolsa de 163 huevitos de Pascua para regalar a Antonia, Felipe, Camilo, Sara, Martín, Amparo y Francisca. A cada uno le regaló la misma cantidad y le quedaron 16 huevitos. ¿Cuántos huevitos le regaló a cada uno?

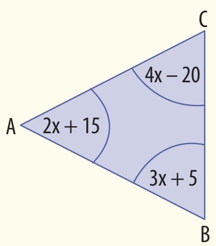
R: ______________________________

c. La edad actual de Jaime es el triple de la edad de Esteban. En 5 años más, Jaime tendrá el doble de la edad de Esteban. ¿Qué edad tenía Esteban hace 2 años?

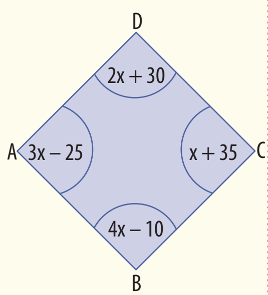
R: ______________________________

9. Analiza las figuras y encuentra el valor de x. Luego, calcula la medida de cada ángulo.

a.



b.



10. Modela con una ecuación o una inecuación y luego resuelve. Verifica, en cada caso, si la solución obtenida es pertinente al contexto del problema.

a. Si en un jarro se vacían 5 vasos, faltan 120 cc para que se llene. Si se vacían 6 vasos, se rebalsan 100 cc. ¿Cuál es la capacidad de cada vaso?, ¿y la del jarro?

R: ______________________________

b. La suma de tres números naturales consecutivos es 51. ¿Cuáles son los números?

R: ______________________________

c. En una feria de música, Renato y Sandra están aprovechando una oferta en la que todos los discos se venden al mismo precio. Analizando los precios y la cantidad de dinero que tiene, Renato constata que le alcanza para comprar 4 discos y le quedarían $ 3000; o bien puede pedir prestados $ 500 a Sandra y comprar 5 discos. ¿Cuál es el precio de cada disco? ¿Cuánto dinero tiene Renato?

R: ______________________________

d. En 56 años más, la edad de Rosario será cinco veces su edad actual. ¿Qué edad tiene Rosario actualmente?

R: ______________________________

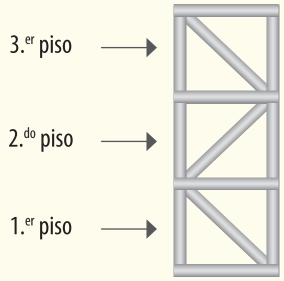
e. Un automóvil debe recorrer 1000 m en línea recta. Cuando haya recorrido 600 m seguirá avanzando 25 m por cada segundo. Desde ese instante, ¿cuánto tiempo necesitará para terminar su recorrido?

R: ______________________________

f. Carmen tiene dos alternativas para contratar a un maestro que instale la cerámica en el living de su casa. Uno le cobra $ 15 000 de base más $ 6000 por cada metro cuadrado instalado. El otro cobra $ 9000 de base más $ 8500 por metro cuadrado instalado. Si Carmen consideró que era más conveniente contratar al segundo maestro, ¿cuál es la superficie máxima que podría tener el living?

R: ______________________________

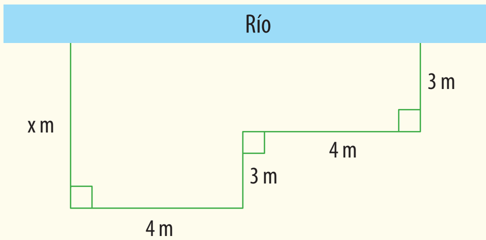
g. Jorge debe montar una estructura metálica con barras de acero, como se muestra en el dibujo.



¿Cuántos pisos puede tener como máximo la estructura si no debe utilizar más de 100 barras de acero?

R: ________________________________

h. Constanza compró una casa a la orilla de un río. La cercó completamente, excepto el lado que da al río.



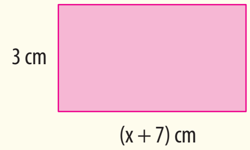
¿Cuál es el valor de **x** si cada metro de cerca costó \$ 1200 y Constanza gastó \$ 21 600?

R: ________________________________

i. En las alianzas de fin de año, el curso de Camila debe realizar 3 pruebas con un puntaje máximo de 100 puntos en cada una. Si para ganar, el promedio del puntaje de las 3 pruebas debe ser mayor a 60 puntos, y en las pruebas 1 y 2 obtuvieron 35 y 40 puntos respectivamente, ¿qué puntaje deben obtener en la prueba 3?

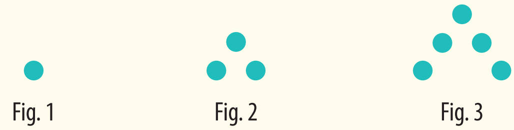
R: ________________________________

j. En el rectángulo de la figura, ¿cuáles son los posibles valores de **x** si el área tiene un valor menor que el del perímetro?



R: ________________________________

k. Observa la secuencia.



Si hay 57 círculos y se disponen según el patrón, ¿qué número de figura podría ser la formada?

R: ________________________________

¿Cuántos círculos podría tener la figura 100?

R: ________________________________

l. Tres números impares consecutivos suman 105. ¿Cuáles son los números?

R: ________________________________

m. Julián tiene el doble de la edad de Marta y Sebastián tiene el triple de la edad de Marta menos 4 años. ¿Cuál es la edad de Marta Julián y Sebastián si entre los tres suman 74 años.

R: ________________________________

11. Crea. Plantea dos situaciones con los modelos siguientes. Luego, resuélvelas.

a. $120x - 45 = 315$

____

b. $5x > 700 + 3x$

____

Reflexiono

Juan quiere saber el precio de una entrada al teatro. Sabe que comprar tres entradas más \$ 1000 equivale a pagar el doble del precio que tiene una entrada, aumentado en \$ 5000. Él plantea la ecuación $3x + 1000 = 2(x + 5000)$. ¿Cuál fue su error? Fundamenta tu respuesta, plantea la ecuación correcta y luego resuélvela.

Refuerzo

1. En una canasta hay el triple de naranjas que de manzanas, y el doble de kiwis que de manzanas. Si en total hay 42 frutas, ¿cuántas naranjas hay en la canasta?
2. Javiera estima que debe gastar menos de \$ 15 000 en el supermercado. Si ya ha gastado \$ 1380 en jamón y quiere llevar cereal, que cuesta \$ 1950 por caja, ¿para cuántas cajas le alcanza el dinero que le queda?

Actitud: Demostrar interés y perseverancia en la búsqueda de nuevas soluciones.

¿Quién hace la mejor toma?

Dos turistas se encuentran al amanecer en las famosas pirámides aztecas. Desde la cúspide de la pirámide se pueden hacer las mejores tomas fotográficas. Ellos saben que mientras antes la suban obtendrán la mejor toma, ya que tendrán todo el espacio para sí. En parejas, resuelvan las ecuaciones para ver quién llega primero a la cúspide.

Materiales:
9 tarjetas de cartón
10 cartas con signo "+"
10 cartas con signo "–"

4
$150 + 26x = 11x + 420$

3
$18x + 49 = 140 + 5x$

2
Baja un escalón

1
$7x + 2 = 3x + 6$

0
$90x + 115 = 25x + 635$

–1
Sube un escalón

–2
$12x + 25 = 7x + 85$

–3
$11x + 55 = 4x + 195$

–4
$18x + 56 = 4x + 140$

Reglas del juego

La partida del juego es desde el escalón 0.

No pueden estar los dos jugadores en el mismo escalón a excepción del cero. Si esto ocurre, el jugador que estaba primero en ese escalón debe volver al escalón 0.

¿Cómo jugar?

- Reúnanse en parejas y elijan un turista. Mezclen las cartas de signos "+" y " – " y déjenlas sobre la mesa hacia abajo.
- Enumeren las 9 tarjetas con los números 0, 0, 1, 1, 2, 2, 3, 3, y 4. Mézclenlas y déjenlas sobre la mesa hacia abajo. Cada jugador debe sacar una tarjeta y el que obtenga el número mayor, comienza.
- El primer jugador deberá sacar una tarjeta y una carta, la que indicará a qué escalón debe ir y resolver la ecuación. Por ejemplo, si saca 2 en la tarjeta y una carta negativa, entonces debe ir al escalón –2 y resolver la ecuación $12x + 25 = 7x + 85$. Si la resuelve correctamente, se queda en ese escalón, en cambio si el resultado es incorrecto debe bajar un escalón. La carta y la tarjeta deben ser devueltas al final del mazo. Luego es el turno del segundo jugador.
- Si el jugador se encuentra en el escalón – 4 y contesta incorrectamente, pierde.
- Gana el jugador que estando en el escalón 4 contesta correctamente o si el otro jugador pierde.

ACTIVIDAD EN GRUPO

Luego de terminado el juego, respondan en sus cuadernos:

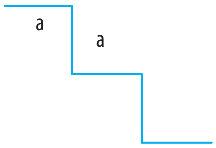
1. Describan sus estrategias para resolver las ecuaciones y explíquenlas a su compañero o compañera. ¿Te resulta fácil la estrategia del otro?
2. Un jugador que se encuentra en el escalón 0 afirma que le conviene siempre responder incorrectamente a la ecuación, ya que así subirá un escalón, por lo que obtendrá una ventaja. ¿Estás de acuerdo? Fundamenta tu respuesta.
3. ¿Qué harías antes de dar el resultado de la ecuación para evitar que bajes 1 escalón? Comenta tu respuesta con tus compañeros y compañeras.

¿Cómo voy?

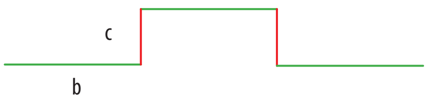
Lección 15: Representar cantidades usando lenguaje algebraico

1. A partir de las medidas de cada tramo, expresadas en variables, representa la longitud total de cada línea de manera simbólica. Considera que cada color indica una medida.

a.

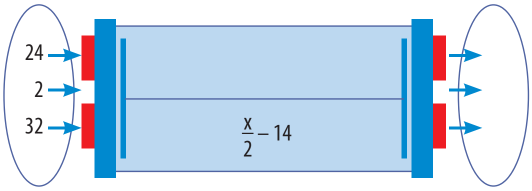


b.

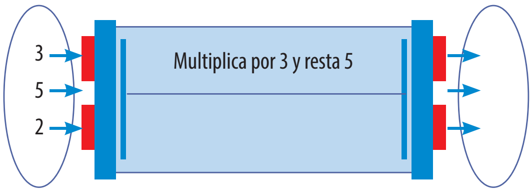


2. Completa las máquinas usando lenguaje natural o algebraico, según corresponda. Luego, escribe lo que sale de cada máquina.

a.



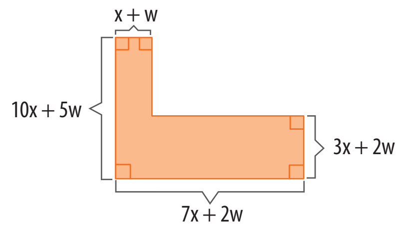
b.



3. Escribe la expresión algebraica que representa lo solicitado en cada situación.
   a. Las edades actuales de Belén y Sofía, si cuando Sofía nació, Belén tenía 7 años.
   b. El costo de un lápiz y un cuaderno, si el cuaderno cuesta $ 300 más que el lápiz.
   c. La cantidad de mujeres y hombres presentes en un concierto, si hay 150 mujeres más que el doble de hombres.
   d. La cantidad de páginas de un libro que ha leído Marcia en tres días, si el primer día leyó 10 páginas menos que el segundo, y el tercer día, 15 páginas más que el triple de lo que leyó el segundo día.

Lección 16: Reducir términos semejantes en expresiones algebraicas

4. Calcula el perímetro de la figura y reduce los términos semejantes.

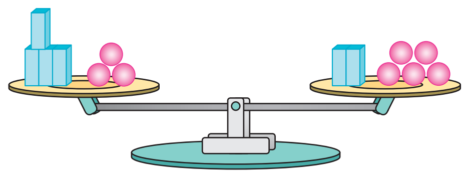


5. Reduce los términos semejantes.
   a. $f + 5g - 7f + 4$
   b. $9a + 4g - 7a - 5b + g - 4a$
   c. $13pq + 5rq - 24rs - 3pr + 8rs - 5$
   d. $-5w + 17x - 8w + 4x - 1 + 3w$

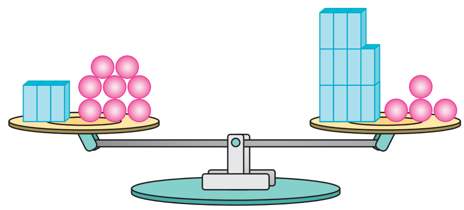
Lección 17: Resolver ecuaciones utilizando métodos gráficos y algebraicos

6. Determina, en cada caso, a cuántas equivale un rectángulo. Luego, explica paso a paso tu procedimiento.

a.

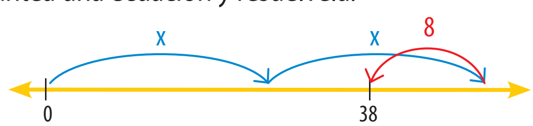


b.

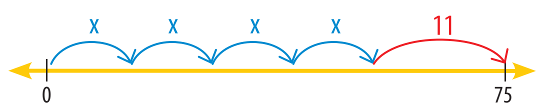


7. Determina el valor de **x** en cada caso. Para ello, plantea una ecuación y resuélvela.

a.



b.



8 Resuelve las ecuaciones.

a. $9x - 17 = 73$

b. $11x + 31 = 86$

c. $21 = \frac{x}{4} + 16$

d. $\frac{x}{12} + 1 = 6$

e. $13x - 41 = 5x - 7$

f. $19x - 21 = 11x - 3$

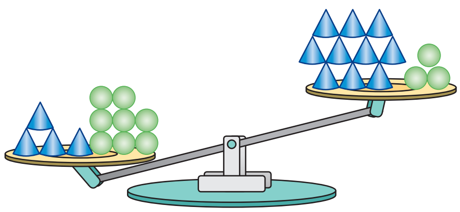
9 Identifica el error y resuelve correctamente la ecuación

$$\begin{aligned} 5x + 7 &= 25 && / : 5 \\ 5x : 5 + 7 &= 25 : 5 && \\ x + 7 &= 5 && / - 7 \\ x + 7 - 7 &= 5 - 7 && \\ x &= -2 && \end{aligned}$$

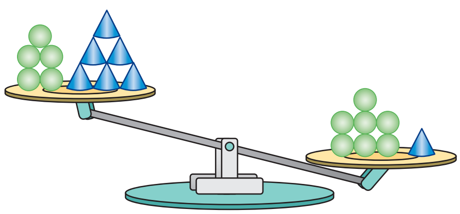
Lección 18: Resolver inecuaciones y representar sus soluciones

10 Escribe la inecuación que se ha representado con cada balanza. Para ello, considera que (esfera) es la incógnita y (cono) la unidad.

a.



b.



11 Resuelve cada inecuación y representa en la recta numérica el conjunto solución.

a. $17x - 6 < 4x + 98$

b. $5x + 22 > 57$

Lección 19: Plantear y resolver problemas que se modelan con ecuaciones o inecuaciones

12 Reconoce la ecuación que modela cada situación y píntala.

a. Una persona que paga una cuenta de $ 5500 se queda con $ 25 700. ¿Cuánto dinero tenía?

$d - 5500 = 25\,700$ | $5500 - d = 25\,500$

b. La edad de Pablo en 5 años más será 19 años. ¿Cuál es su edad actual?

$p + 5 = 19$ | $5 - p = 19$ | $p + 5 = 19 - 5$ | $19 + p = 5 - 5$

c. Lorena tiene 20 años menos que Andrea. Si las edades de ambas suman menos de 86 años, ¿cuál es la máxima edad que podría tener Lorena?

$2e - 20 < 86$ | $2e + 20 < 86$ | $2e + 20 > 86$ | $2e - 20 > 86$

Desafío de integración

Escribe en lenguaje algebraico y resuelve los problemas. Verifica si la solución obtenida es pertinente.

1. Gustavo participó en una carrera de 280 kilómetros en moto. Durante los siete días de participación, cada día recorrió 12 kilómetros más que el anterior. Si no alcanzó a terminar la carrera, ¿cuántos kilómetros, a lo más, pudo haber recorrido el cuarto día?
2. En un corral hay patos, conejos y cerdos. La cantidad de conejos y de patos es la misma, y hay 3 cerdos. Si en total hay 222 patas, ¿cuántos conejos hay?
3. Irene publicó en una red social una noticia que vieron 12 personas. Por cada hora que pasaba se enteraban 35 personas más. ¿Al cabo de cuántas horas la noticia era conocida por más de 400 personas?

Resolución de problemas

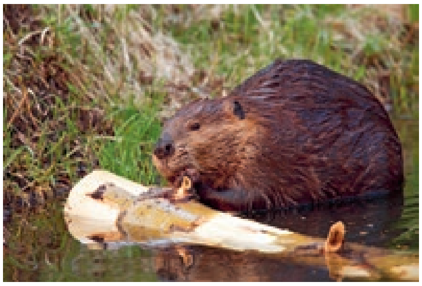
Actitud: Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas.

Encontrar un patrón

Para encontrar una regla de formación de una secuencia en un problema, puedes relacionar un término con la posición que ocupa. Así obtienes el término general o patrón que da origen a cada término de la secuencia.

Estrategias

- Hacer un diagrama.
- Usar ensayo y error sistemático.
- Usar problemas más sencillos.
- Hacer una tabla.
- Encontrar un patrón.
- Plantear una ecuación o una inecuación.
- Usar razonamiento lógico.



Los castores son una de las especies de roedores más grandes del planeta. Se caracterizan por tener una gran habilidad para construir estructuras. Cuando un castor elige donde vivir, mezcla ramas, troncos y barro para impedir el paso de las corrientes de agua, transformando así el lugar en su nuevo hogar. Un científico observa cómo un castor americano recolecta troncos para construir su madriguera y lleva el siguiente registro:

¿Cuántos troncos logra juntar el castor el día **n**?

¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema?

¿Qué datos tienes para resolver?

Crea un plan para resolver

Para resolver el problema puedes utilizar la estrategia Encontrar un patrón. Para ello, relaciona a través de una tabla el número de días con la cantidad de troncos.

Aplica la estrategia

Día	1	2	3	4	n
N.° de troncos	3	5	7	9	…
Relación	3	3 + 2	3+2+2	3+2+2+2	…
Relación	3	3 + 2 • 1	3+2 • 2	…	…
Relación	3	3+2(2–1)	3+2(3–1)	…	…

Resuelve

Verifica la respuesta

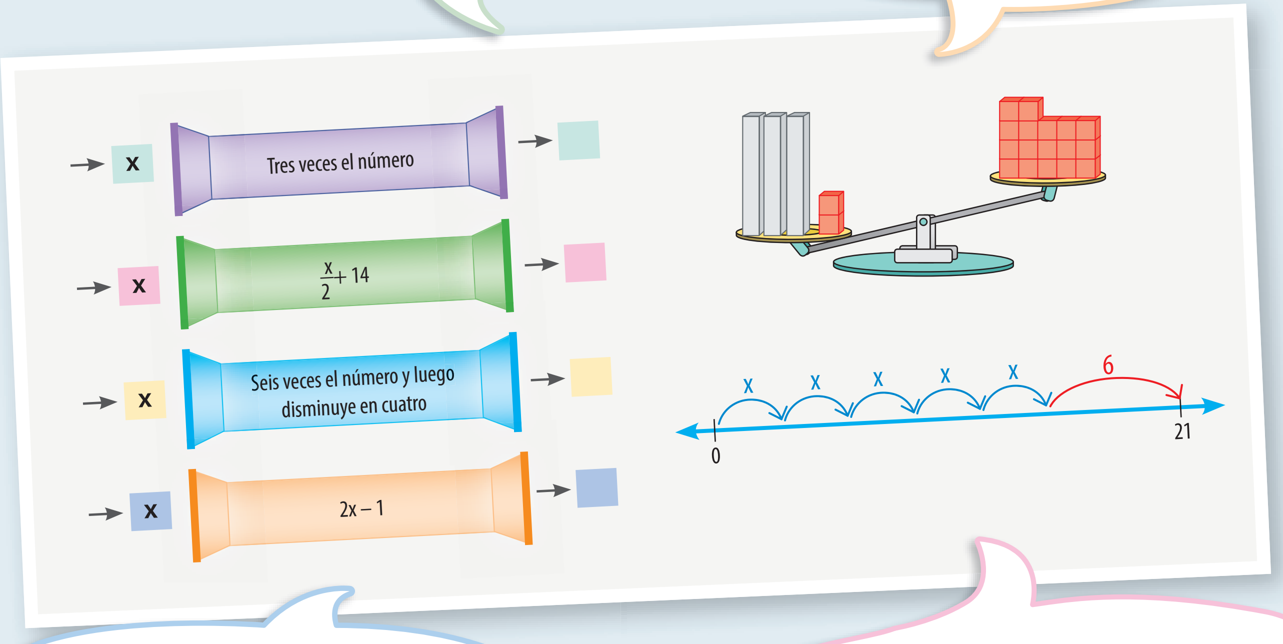
Comunica la respuesta

Vuelvo a mis procesos

Observa las imágenes centrales y responde.

¿Qué aprendiste acerca del álgebra y sus aplicaciones en la vida cotidiana?

¿Qué partes de la sección llamaron más tu atención? ¿Te motivaron?



¿Tuviste inconvenientes en las actividades de la sección? ¿Cómo las superaste?

¿Cómo fue la organización con tus compañeros en las actividades grupales? ¿Por qué crees que es importante este aspecto?

De las metas que te propusiste al inicio, ¿cuáles cumpliste y cuáles te faltaron?

Sección 5

Actitud: Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información.

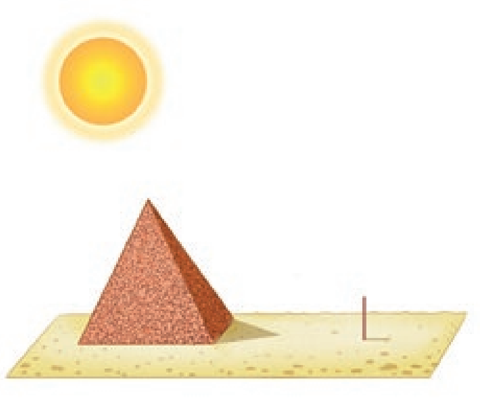
Relaciones proporcionales

Activo ideas previas

Junto con un compañero o una compañera lean el caso y reflexionen en torno a las preguntas propuestas.

Tales de Mileto fue un matemático griego que asumió el desafío de calcular la altura de las pirámides de Egipto.

Un sacerdote egipcio le preguntó cuál era la altura de la pirámide de Keops. Tales contestó que no se conformaría con estimarla, así que la calcularía pero sin ayuda de ningún instrumento. Dicho esto, se acostó sobre la arena, midió la longitud de su propio cuerpo y explicó: "Me pondré simplemente en un extremo de esta línea, que mide la longitud de mi cuerpo, y esperaré hasta que mi sombra sea igual de larga. En ese instante, la sombra de la pirámide también ha de medir tantos pasos como la altura de la pirámide". Ante el desconcierto del sacerdote, Tales continuó: "Pero si desea que mida esa altura a cualquier hora, clavaré en la arena mi bastón. ¿Ve?, ahora su sombra es aproximadamente la mitad de su longitud; por consiguiente, en este momento también la sombra de la pirámide mide más o menos la mitad de su altura".



En otras palabras, la relación entre la longitud de la sombra de la pirámide y su altura equivale a la que hay entre la longitud de la sombra del bastón y su longitud.

- ¿En qué consiste el método utilizado por Tales para determinar la altura de la pirámide? Expliquen y den un ejemplo numérico.
- Apliquen el método utilizado por Tales u otro similar para medir la altura de un árbol sin necesidad de subir a él. Comparen los resultados obtenidos y el método utilizado con su curso.

Activo conceptos clave

Los siguiente listados muestran los conceptos clave de la sección. Con algunos de ellos, completa las actividades.

Modelar	Razón	Proporción
Variable	Gráfica	Hipérbola
Variable independiente	Directamente proporcionales	Escala
Variable dependiente	Constante de proporcionalidad	Inversa

- Dos conceptos asociados a las fracciones: ______________________
- Dos conceptos que representan una relación matemática: ______________________
- Un concepto nuevo para ti: ______________________
- Una posible definición del concepto nuevo: ______________________

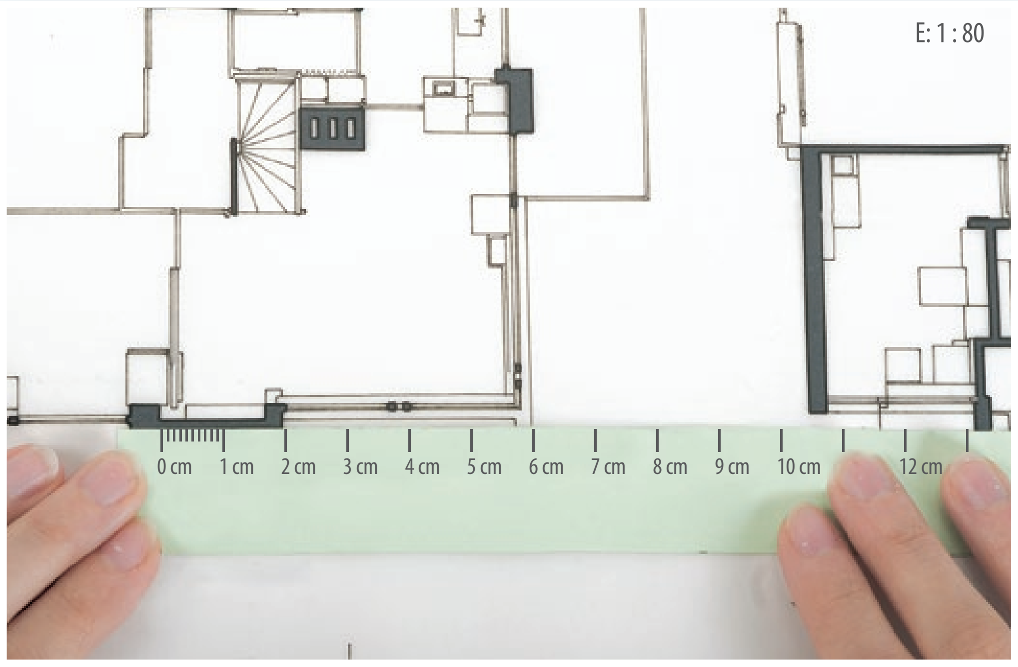
Pienso mis procesos

Observa la imagen central y responde.

¿Qué situación representa la imagen? Explica con tus palabras.

¿En qué áreas del conocimiento es común este tipo de dibujos? ¿Para qué se usan?

¿Cuál será la relación entre las medidas de la imagen y las de la realidad?



Cuando se usan estas representaciones, ¿qué condiciones deben cumplir?

¿Qué estrategias de estudio te propones para trabajar esta sección?

¿Qué metas te propones cumplir al finalizar esta sección?

¿Qué debo saber?

Activa tus conocimientos previos respondiendo la pregunta lateral, luego resuelve la actividad. Para terminar, registra tus logros.

¿Qué se debe realizar para efectuar una división si el divisor es un decimal?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
7 o más puntos	6 o menos puntos

Multiplicar y dividir números decimales

1 Resuelve las multiplicaciones. (6 puntos)

a. 4,21 • 9
b. 0,067 • 3
c. 1,083 • 2
d. 0,7 • 0,5
e. 1,9 • 0,4
f. 0,122 • 1,3

2 Resuelve las divisiones. (6 puntos)

a. 6,2 : 2
b. 49,7 : 7
c. 0,35 : 5
d. 100,10 : 10
e. 15,63 : 0,3
f. 0,0036 : 0,04

¿Qué es una razón?

Si se tienen dos o más razones, ¿cómo se puede saber si son equivalentes?

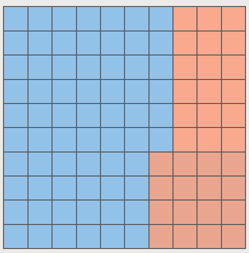
Marca con una ✗ tu nivel de logro:

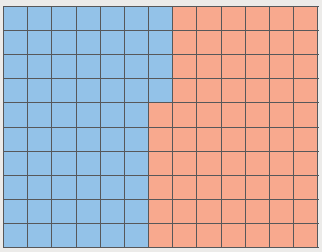
Logrado	Por lograr
5 o más puntos	4 o menos puntos

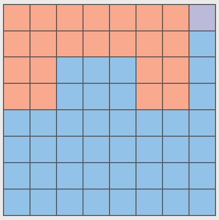
¿Qué errores cometiste?

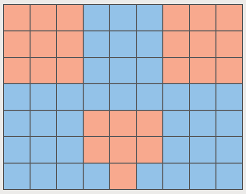
Identificar y relacionar razones

3 En cada caso, identifica la razón entre la cantidad de cuadrados naranjos y la de cuadrados azules. (4 puntos)

a.


c.


b.


d.


4 Calcula lo pedido en cada caso. (4 puntos)

a. El valor de la constante en la razón 7 : 10.
b. El valor de la constante en la razón $\frac{5}{8}$.
c. El valor de **x** en la razón **x : 8**, si el valor de la constante es 0,75.
d. El valor de **x** en la razón **12 : x**, si el valor de la constante es 2.

Describe el procedimiento para localizar un punto en el plano cartesiano.

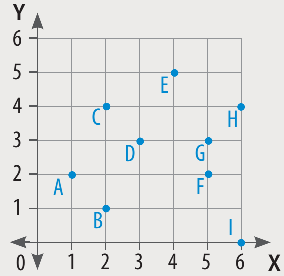
¿Qué utilidades tiene el plano cartesiano?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
10 o más puntos	9 o menos puntos

Identificar puntos en el plano cartesiano

5 Escribe las coordenadas de los siguientes puntos. (9 puntos)



A(______, ______) D(______, ______) G(______, ______)

B(______, ______) E(______, ______) H(______, ______)

C(______, ______) F(______, ______) I(______, ______)

6 Ubica los puntos en el plano cartesiano. (6 puntos)

a. R(1, 1)

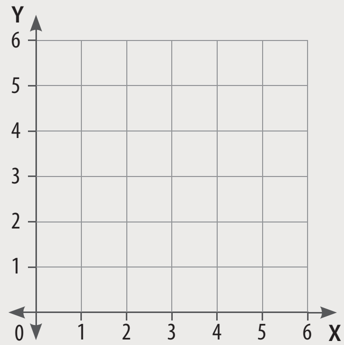
b. S(1, 5)

c. T(3, 4)

d. U(5, 2)

e. V(5, 5)

f. W(6, 3)



¿Qué es el lenguaje algebraico?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
7 o más puntos	6 o menos puntos

Utilizar expresiones algebraicas

7 Evalúa las expresiones. (4 puntos)

a. $a + b - c$, considerando $a = 2$, $b = -7$ y $c = 5$.

b. $x - y + 2z$, considerando $x = 9$, $y = -12$ y $z = 18$.

c. $\frac{c}{n}$, considerando $c = 4$ y $n = 8$.

d. $\frac{e}{f}$, considerando $e = 18$ y $f = 0{,}2$.

8 Escribe cada enunciado utilizando lenguaje algebraico. (4 puntos)

a. Un número aumentado en dieciocho unidades.

b. La adición entre un número cualquiera y su sucesor.

c. La quinta parte del doble de un número.

d. La mitad de un número disminuido en ocho unidades.

Lección 20

¿Cómo se relacionan dos variables?

» Propósito

Relacionar variables dependientes e independientes.

¿Para qué?

Es común observar en nuestro entorno cómo una variable se relaciona con otra. Por ejemplo, los kilómetros recorridos y los litros de gasolina consumidos por un automóvil, el tiempo de demora de una construcción y el número de maquinarias que participan en ella, etc.

Palabras clave

Modelar
Variable
Variable independiente
Variable dependiente

Situación 1 Modelar situaciones

Gabriela es la encargada del personal de un gimnasio y analiza la carga horaria de tres nuevos entrenadores: Martínez, Herrera y López, a fin de calcular sus sueldos.

El valor por hora del gimnasio es de $ 16 000.

Sueldos

Martínez (19 h) ⟶ $

Herrera (26 h) ⟶ $

López (16 h) ⟶ $

¿Qué expresión modela el sueldo de los entrenadores?

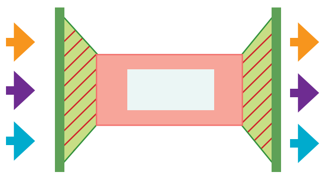
¿Por qué se llaman variables?

Paso 1 Representa en una máquina la variable que entra y la variable que sale.

Variable que entra: cantidad de horas (**h**)

Variable que sale: sueldo (**y**)

h = 19 (Martínez)
h = 26 (Herrera)
h = 16 (López)



y (Martínez)
y (Herrera)
y (López)

Paso 2 Modela la situación.

El sueldo de cada entrenador está dado por la cantidad de horas multiplicada por el valor por hora del gimnasio, $ 16 000. Así:

Martínez: $y = 16\,000 \cdot 19 = 304\,000$

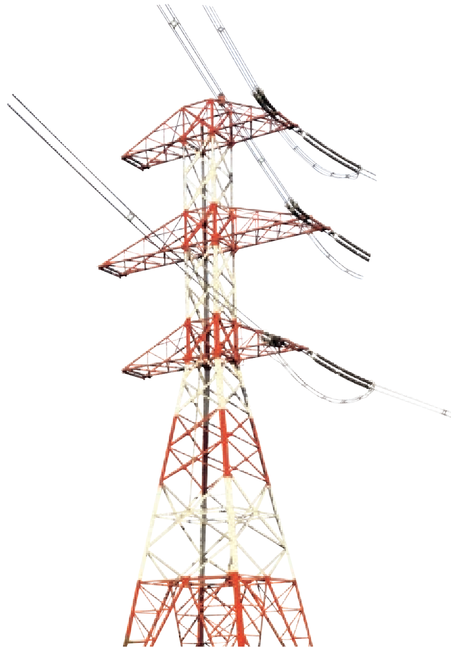
Herrera: $y = 16\,000 \cdot 26 = \boxed{}$

López: $y = 16\,000 \cdot 16 = \boxed{}$

Luego, para cualquier número de horas podemos determinar el sueldo con la expresión general:

$$y = 16\,000 \cdot h$$

Situación 2 Modelar mediante expresiones algebraicas



El costo de la energía eléctrica depende del gasto en kilowatts hora (kWh) consumidos.

Si el costo de un kilowatt hora consumido es aproximadamente de $ 88,1, **¿cómo se pueden relacionar estos datos para calcular el costo de cualquier gasto de kWh?**

Paso 1 Identifica las variables.

- El gasto en kWh es una variable independiente, es decir, su valor no depende de otra variable, y la llamamos **x**.
- El costo eléctrico depende del gasto en kWh, por lo tanto, es una variable dependiente, es decir, su valor depende del valor de otra variable y la llamamos **y**.

Paso 2 Modela en una expresión algebraica.

El costo eléctrico estará dado por el gasto en kWh multiplicado por $ 88,1.

$$\underbrace{y}_{\text{Variable dependiente}} = 88,1 \cdot \underbrace{x}_{\text{Variable independiente}}$$

Entonces, los datos se relacionan a través de una expresión que permite calcular el costo para cualquier gasto. Por ejemplo, para un gasto de 150 kWh, $x = 150$:

$$y = 88,1 \cdot 150$$

$$y = \boxed{}$$

El costo será $__________________.

Ampliando

La primera central hidroeléctrica chilena se construyó para las minas de carbón de Lota en 1897, en Chivilingo, una localidad con abundante agua. Con la electricidad de Chivilingo se iluminaron las minas de Lota y se hicieron funcionar los elevadores y las bombas de agua.

Para concluir

- Una **variable independiente** es aquella cuyo valor no depende del valor de otra variable.
- Una **variable dependiente** es aquella cuyo valor depende del valor de otra variable.
- Las variables dependientes e independientes se relacionan entre sí permitiendo modelar fenómenos y plantear generalidades.

Argumenta y comunica

- "En una situación en contexto se puede elegir el papel de cada variable, es decir, cuál es la variable dependiente y cuál es la independiente". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Discute con tus compañeros y compañeras, y den ejemplos para justificar su postura.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. **Expresa cada enunciado en lenguaje algebraico.**
   a. Cinco veces un número.
   b. Un número al que se le restan 5 unidades.
   c. Un número que se divide por 7.
   d. Un número que se multiplica por 0,3 y se le suma 2.
   e. A un número se le resta 8, y el resultado se divide por 19.

2. **Evalúa cada expresión según el valor dado.**
   a. $2a + 5$, para $a = 2$.
   b. $22 - 3x$, para $x = 4$.
   c. $9p + 59$, para $p = 3$.
   d. $2s + s - 4$, para $s = 6$.

Práctica guiada

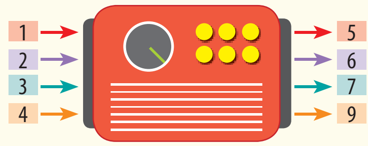
3. **En cada situación, identifica las variables y clasifícalas.**

Situación	Variable independiente	Variable dependiente
Consumo de tabaco y daño corporal.	Consumo de tabaco	Daño corporal
Número de trabajadores y el tiempo empleado en una construcción.		
Cantidad de páginas de un libro y de papel utilizado.		

4. **Identifica el tipo de relación que hay entre las variables de cada situación.**

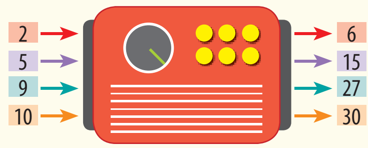
Situación	Relación entre las variables
Consumo de energía eléctrica y potencia de los electrodomésticos.	A mayor potencia de los electrodomésticos, mayor es el consumo de energía.
El área de una baldosa y la cantidad de estas que se necesita para cubrir una superficie.	
La cantidad de hojas que se imprimen y el consumo de tinta.	

5. **Un número entra a la máquina, esta lo transforma y sale otro número. Encuentra la expresión general que permite a la máquina transformar de la misma forma todos los números que entran a ella**

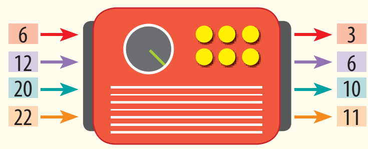


Cada número que entra sale aumentado en 4 unidades. Por lo tanto, la máquina suma 4. La expresión es **$y = x + 4$**, donde **x** es el número que entra e **y** el que sale.

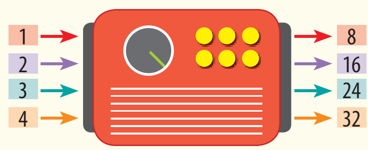
a.



b.



c.



Aplica

6. **Relaciona cada enunciado con la expresión que lo modela, pintándolos del mismo color.**

El perímetro (P) de un triángulo equilátero de lado **x**.

El área (A) de un triángulo de base 3 unidades y su altura respectiva **x**.

El área (A) de un rectángulo de largo **x** y de ancho 9 unidades menor que el largo.

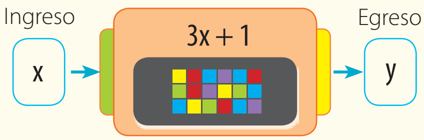
$P = 3x$

$A = x(x - 9)$

$A = \frac{3x}{2}$

$P = 4x$

7. Analiza la máquina.



a. Identifica la variable dependiente e independiente de la situación

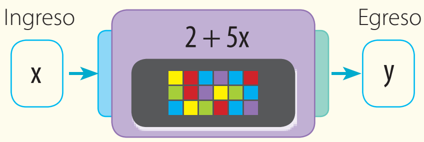
b. Completa la tabla.

Ingreso	5			7
Egreso		13	19	

c. ¿Qué transformación hace la máquina?

d. ¿Se puede ingresar cualquier número?

8. Analiza la máquina.



a. Identifica la variable dependiente e independiente de la situación

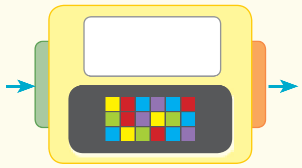
b. Completa la tabla.

Ingreso	4			6
Egreso		12	30	

c. ¿Qué transformación hace la máquina?

d. ¿Se puede ingresar cualquier número?

9. Represente el siguiente enunciado en la máquina: "La expresión relaciona un número con su doble aumentado en siete unidades". Luego, haz una tabla con 4 ingresos y sus respectivos egresos.



10. Verifica si la regla de formación dada corresponde o no a la tabla. Escribe Sí o No en la casilla.

a.

a	5	10	15	50
b	10	20	30	100

$b = 2a$ ☐

b.

m	2	5	8	10
n	5	8	11	13

$n = m + 3$ ☐

c.

x	3	6	9	12
y	5	2	1	3

$y = 8 - x$ ☐

11. Modela cada situación con una expresión.

a. Una persona en bicicleta recorre 20 km en 2 horas, con una rapidez constante de 10 km/h. ¿Cómo modelarías los kilómetros que recorre en p tiempo?

b. Un chofer de autobús gana $ 5000 diarios, además de $ 100 por cada pasajero que lleva. ¿Cómo modelarías su ganancia diaria en según la cantidad de pasajeros?

c. Un vendedor de televisores recibe un sueldo base de $ 230 000 más $ 20 000 por cada unidad vendida. ¿Cómo modelarías el sueldo que obtendrá a fin de mes vendiendo k productos?

d. Un electricista utiliza 48 metros de cable en una instalación de una casa. Si cada metro de cable cuesta $ 450, ¿cómo modelarías el costo de realizar la misma instalación en varias casas?

e. Una mamá compra una bolsa de 120 nueces y cada día le da 3 a su hijo. ¿Cómo modelarías la cantidad de nueces que quedan en la bolsa cualquier día?

12. Crea. Inventa una situación que se modele a partir de la expresión $y = 2500x + 250$.

Reflexiono

1. ¿Cuál es la similitud entre las expresiones generales planteadas y las máquinas?
2. En una relación entre variables, ¿puede haber dos dependientes, o dos independientes? Fundamenta tu respuesta con ejemplos.

Refuerzo

1. ¿Cuál es la variable independiente y la dependiente en la situación: "Las horas trabajadas y el trabajo realizado durante una semana"? Justifica.
2. José corre 4 metros por cada segundo. Si mantiene su rapidez, ¿qué expresión modela la distancia que recorre José en cualquier tiempo **t**?

Lección 21

¿Cómo modelar la proporcionalidad directa?

Propósito

Modelar situaciones que involucran proporcionalidad directa.

¿Para qué?

Existen situaciones cotidianas, como averiguar el precio que se paga a medida que el número de artículos aumenta o conocer el peso de un objeto a medida que su masa disminuye, que se pueden modelar mediante una proporción directa.

Palabras clave

Directamente proporcionales

Constante de proporcionalidad

Ampliando

Cuando dos cantidades aumentan en un mismo factor, sus valores son proporcionales. En este caso, se dice que la cantidad de dinero es proporcional al número de asistentes.

Entonces, puedes calcular el valor de las entradas para 11 amigos utilizando una igualdad de razones, es decir, una proporción:

$$\frac{15\,000}{1} = \frac{C}{11}$$

Para obtener el valor desconocido, puedes multiplicar los términos en forma cruzada:

$15\,000 \cdot 11 = C \cdot 1$

$165\,000 = C$

Luego, para 11 amigos las entradas tendrán un valor de $ 165 000.

Situación Modelar la proporcionalidad directa

Cuatro amigos calculan que gastarán $ 60 000 en las entradas para un partido de fútbol.

Si la cantidad de amigos que asistirá al partido aumenta al doble, ¿cuánto deberán gastar ahora?, ¿y si asisten 11 amigos?

¿Cómo se puede modelar la relación entre el precio del total de las entradas y la cantidad de asistentes?

www.chilenosenbuenosaires.com

Paso 1 Organiza los datos.

Para esto se puede construir una tabla:

La mitad de dinero

El doble de dinero

Gasto por ir a un partido de fútbol					
Costo total en $	15 000	30 000	60 000	120 000	C
Número de amigos	1	2	4	8	11

La mitad de amigos

El doble de amigos

Al aumentar al doble la cantidad de amigos, el dinero que deben pagar será el doble. Ocurre algo similar si el número de amigos se reduce a la mitad.

A medida que el número de asistentes **aumenta** en cierto factor, el costo **aumenta** proporcionalmente.

A medida que el número de asistentes **disminuye** en cierto factor, el costo **disminuye** proporcionalmente.

Paso 2 Compara las variables por medio de un cociente.

$$\frac{15\,000}{1} = \frac{30\,000}{2} = \frac{60\,000}{4} = \frac{120\,000}{8} = \boxed{}$$

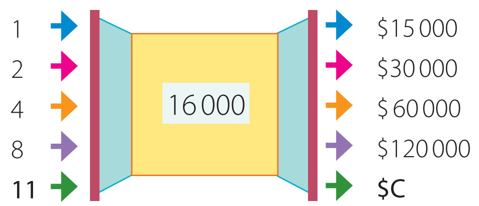
Al calcular cada cociente, siempre se obtuvo ____________. Esto sucede cuando las variables son directamente proporcionales. A este valor se le conoce como constante de proporcionalidad y se denota con la letra **k**.

Paso 3 Identifica las variables y relaciónalas.

- Variable independiente: número de amigos, la llamamos **x**.
- Variable dependiente: costo total en $, la llamamos **y**.

Variable que entra:
n.º de amigos (**x**)

Variable que sale:
costo de las entradas (**y**)



Paso 4 Modela la situación.

El valor a pagar está dado por la cantidad de amigos que asisten multiplicado por 15 000.

$$y = 15\,000 \cdot x$$

Constante de proporcionalidad: en este caso, corresponde al valor de la entrada para un amigo

Entonces, esta es la expresión que modela la relación entre el precio de las entradas y la cantidad de estas.

Así, por ejemplo, para calcular el costo para 11 amigos, reemplazamos en la expresión:

$$y = 15\,000 \cdot 11$$

Esta es la forma de la expresión general que relaciona variables directamente proporcionales, en término generales:

$$y = k \cdot x$$

Donde k es la constante de proporcionalidad

$$y = \boxed{}$$

Entonces, para 11 amigos el costo es de $ ____________.

Para concluir

- Dos variables (**x** e **y**) son **directamente proporcionales** o están en **proporción directa** si al aumentar (o disminuir) una en cierto factor, la otra aumenta (o disminuye) en el mismo factor. Es decir, el cociente entre sus valores relacionados es constante, y este valor es denominado **constante de proporcionalidad**. Lo anterior se puede representar con:

$$\frac{y}{x} = k \longleftarrow \text{Constante de proporcionalidad}$$

- La expresión que modela la proporcionalidad directa es:

$$y = k \cdot x \text{ , con } k > 0.$$

Argumenta y comunica

- ¿Que utilidad tiene el conocimiento de la proporcionalidad directa en la realidad?
- ¿En qué situaciones dentro de la sala de clases utilizas la proporcionalidad directa? Comparte tus respuestas con un compañero o compañera.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Calcula el valor de x en cada caso.

a. $\frac{8}{40} = x$

b. $\frac{15}{x} = 7{,}5$

c. $\frac{x}{9} = 8$

d. $\frac{50}{20} = x$

e. $\frac{6}{x} = 1$

f. $\frac{x}{18} = 0{,}25$

2. Identifica la variable dependiente y la independiente. Justifica tu elección.

a. Alejandra tiene 4 tarjetas de memoria que en total le permiten almacenar 120 horas de música.

b. Para construir un radier de 5 m^2, un obrero utiliza 3 sacos de cemento.

c. La masa de 15 sacos de fruta es de 465 kg.

d. Con $ 20 000 se pueden comprar 50 cajitas de jugo.

3. Calcula el valor de la constante de cada razón.

a. $\frac{60}{12}$

b. $\frac{32}{10}$

c. 225 : 150

d. 8 : 40

Práctica guiada

4. Determina si los valores relacionados están en proporcionalidad directa. Justifica cuando lo estén y da un ejemplo en caso contrario.

La cantidad de muebles iguales que arma un carpintero y la cantidad de tornillos que necesita.

Paso 1 Verifica que a mayor cantidad de muebles iguales armados, es mayor la cantidad de tornillos que necesita.

Paso 2 Dado que los muebles son iguales, los tornillos aumentan de la misma forma que la cantidad de muebles. Esto se obtiene multiplicando la cantidad de muebles por un número fijo. Así, las variables se relacionan en proporcionalidad directa.

a. La cantidad de personas que pagan su entrada a un evento y la ganancia obtenida.

b. La cantidad de libros del mismo tipo que contiene una caja y la masa de esta.

c. La edad del hermano mayor de Jorge, que tiene 5 años más que él.

d. La cantidad de personas que realizan un trabajo y el tiempo que tardarán en terminarlo.

e. La cantidad de minutos de una llamada y el valor que se paga.

5. Analiza las tablas y determina si las variables son directamente proporcionales. Para ello, calcula la constante de proporcionalidad.

x	y
1	3
2	6
3	9

Calcula el cociente entre las variables.

$$\frac{3}{1} = 3, \frac{6}{2} = 3, \frac{9}{3} = 3$$

Dado que el valor es constante, las variables están en proporción directa y la constante de proporcionalidad es 3.

a.

a	b
6	8
12	4
18	2

b.

c	d
6	1,5
4	1
10	2,5

c.

e	f
6	8
24	4
22	2

d.

g	h
7	49
5	35
3	21

6. Las siguientes razones forman una proporción directa. Calcula el valor de cada incógnita.

$$\boxed{\frac{4}{9} = \frac{x}{27}}$$

$$4 \cdot 27 = 9 \cdot x \qquad / : 9$$

$$\frac{4 \cdot \cancel{27}}{\cancel{9}} = \frac{\cancel{9} \cdot x}{\cancel{9}}$$

$$12 = x$$

a. $\frac{x}{3} = \frac{32}{24}$

b. $\frac{30}{x} = \frac{5}{42}$

c. $\frac{1}{8} = \frac{3}{x}$

d. $\frac{2}{9} = \frac{x}{54}$

Aplica

7. Calcula los valores de las incógnitas en cada una de las tablas para que las variables estén en proporción directa.

a.

x	y
3	5
12	m
n	30

b.

x	y
p	1,5
4	f
10	30

8. En un estacionamiento se cobra por hora.

Horas en un estacionamiento	
Cantidad de horas	Total a pagar ($)
1	630
2	1260
3	1890
4	2520

a. ¿Cuál es la variable independiente y la dependiente?

b. Calcula la constante de proporcionalidad.

c. Modela la situación con una expresión que la generalice.

9. Si 3 kg de manzanas cuestan $ 1200, ¿cuánto cuestan 7,5 kg?

10. Si un automóvil rinde 16 km por cada litro de bencina y el precio de 1 litro de bencina es $ 800, ¿cuánto se debe pagar por el combustible que se consume al recorrer 80 km?

11. Si un atleta recorre 700 metros en 5 minutos, ¿cuántos metros recorre en 7 minutos, manteniendo el mismo ritmo?

12. Si un niño lee 80 palabras en un minuto, ¿cuántas palabras lee en dos minutos y medio, manteniendo el mismo ritmo de lectura?

13. Si a una determinada rapidez constante un automóvil recorre 1500 m en 40 s, ¿cuánto tardará en recorrer 1800 m, manteniendo la misma rapidez?

14. Un obrero de una construcción prepara una mezcla de hormigón con 4 sacos de cemento y 3 de arena. Una mezcla de 84 sacos que contiene 45 sacos de cemento, ¿es del mismo tipo que la anterior? Justifica.

15. Daniel trabaja en un laboratorio preparando medicamentos. Cierto antibiótico se elabora con dos compuestos, **A** y **B**, que deben estar en la razón 6 : 11. Si tiene 54 gramos del compuesto **A**, ¿cuántos gramos del antibiótico podrá preparar?

16. **Desafío.** Ana María está escogiendo un plan de teléfono celular y compara dos opciones. La compañía **A** le ofrece pagar un cargo fijo mensual más un cobro por minutos hablados, mientras que la compañía **B** le ofrece pagar solo por los minutos hablados, pero a un precio mayor que la compañía **A**.

¿En cuál de las compañías el monto a pagar es proporcional a los minutos hablados?

17. **Argumenta.**

a. ¿Son directamente proporcionales el perímetro de un cuadrado y la medida de cada lado?

b. ¿Son directamente proporcionales el área de un cuadrado y la medida de cada lado?

18. **Crea** una relación de proporcionalidad directa a partir de la imagen y la información dada.

Tren rápido subterráneo.

Reflexiono

"El valor de la constante en una proporcionalidad directa siempre será mayor que cero". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación? Fundamenta tu respuesta usando un ejemplo o un contraejemplo.

Refuerzo

1. Calcula el valor de la constante de proporcionalidad entre las variables "precio" y "número de lápices" si se sabe que 3 lápices tienen un valor de $ 690.
2. Para un evento al que asisten 40 personas, se necesitan 10 cocineros. ¿Cuántos cocineros se deben contratar si al evento asistirán 480 personas?

Lección 22

¿Cómo representar la proporcionalidad directa?

Propósito

Interpretar y graficar la relación de proporcionalidad directa.

¿Para qué?

Cuando se busca representar dos variables directamente proporcionales, esta representación no solo es algebraica, sino que además puede ser gráfica. Construir una tabla de valores es muy útil porque permite obtener los puntos del plano cartesiano que representan la relación de proporcionalidad directa de las variables estudiadas. De esta manera, se pueden obtener los valores de las demás variables sin necesidad de realizar más cálculos.

Palabras clave

Constante de proporcionalidad

Relación de proporcionalidad directa

Ampliando

Si en una proporción o igualdad de razones existen términos desconocidos, puedes igualar los productos cruzados de los términos y resolver. Por ejemplo, en la proporción

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

se cumple:

$$ad = bc$$

con a, b, c y d $\in \mathbb{Z}$ y b, d $\neq 0$.

Situación 1 Graficar la relación de proporcionalidad directa

Un kilogramo de manzanas tiene un precio de $ 2000.

¿Cómo se representa gráficamente la relación entre las variables cantidad de kilogramos y precio de las manzanas?

Paso 1 Identifica las variables.

Variable dependiente: precio de los kilogramos de manzanas, la llamamos y.

Variable independiente: cantidad de kilogramos de manzanas, la llamamos x.

Paso 2 Compara las variables y calcula el valor de la constante de proporcionalidad.

Precio de un kilogramo

$$\frac{2000}{1} = 2000$$

Cantidad de kilogramos

Paso 3 Modela una expresión general para la situación.

Como el valor de la constante de proporcionalidad es 2000, entonces la expresión es:

Precio de un kilogramo

$$y = 2000 \cdot x$$

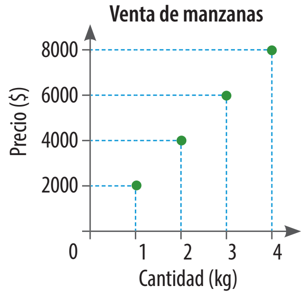
Cantidad de kilogramos

Paso 4 Construye una tabla de valores.

Para ello, da distintos valores a x, correspondiente a la abscisa, y evalúalas en la expresión general. Luego, el resultado arroja el valor de la ordenada y.

x (cantidad de kg)	Expresión general: $y = 2000 \cdot x$	y (precio de las manzanas)	Par ordenado (x, y)
0	$2000 \cdot 0$	0	(0, 0)
1	$2000 \cdot 1$	2000	(1, 2000)
2	$2000 \cdot 2$	____	(2, ____)
3	$2000 \cdot$ ____	____	(3, ____)
4	____ $\cdot$ ____	____	(____, ____)

Paso 5 Representa la relación de proporcionalidad directa en el plano cartesiano. Para ello, ubica cada par ordenado.

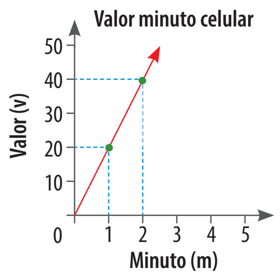


Luego, se ha modelado la relación de proporcionalidad directa de manera algebraica y gráfica para encontrar el precio de las manzanas dada cualquier cantidad de kilogramos.

Situación 2 Modelar la relación a partir de su gráfico

El gráfico representa el valor de los minutos en cierto plan de celular.

¿Cómo podemos encontrar la relación a partir del gráfico?



Paso 1 Identifica al menos 1 punto.

En este caso, utilizaremos los puntos (1, 20) y (2, 40).

Paso 2 Calcula el valor de la constante de proporcionalidad.

Para ello, encuentra el cociente entre las variables **v** y **m**:

$$\frac{20}{1} = \frac{40}{2} = \boxed{}$$

Paso 3 Modela la relación de proporcionalidad.

$$v = 20 \cdot m$$

Entonces, para encontrar el valor de una cierta cantidad de minutos, se multiplica dicha cantidad por $ ____________.

Ampliando

Se llama interpolar en una gráfica, a determinar los puntos que pertenecen a ella siguiendo su forma, sin haberlos calculado en una tabla ni utilizando la fórmula.

María Gaetana
(Italia 1716 -1799)

Fue matemática italiana. Desde pequeña destacó por su interés en la ciencia y la filosofía. Uno de sus aportes fue en geometría cartesiana.

Para concluir

- Cuando dos variables (**x** e **y**) están en **proporción directa,** su representación en el plano cartesiano es una semirrecta que parte en el origen.
- Su inclinación respecto del eje X depende de la constante por la que se multiplica la variable dependiente: mientras mayor sea, mayor será el ángulo que la recta forma con el eje X.

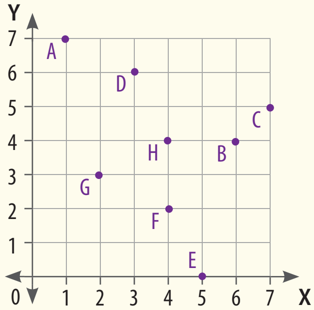
Argumenta y comunica

- "La variable independiente siempre va en el eje de las abscisas X y la variable dependiente, en el eje de las ordenadas Y". ¿Estás de acuerdo con esta afirmación?
  Discute con tus compañeros y compañeras.

Practiquemos lo aprendido

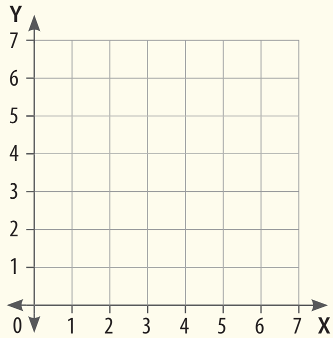
Repaso

1. Identifica las coordenadas de los puntos representados en el plano cartesiano.



A(______, ______)
B(______, ______)
C(______, ______)
D(______, ______)
E(______, ______)
F(______, ______)
G(______, ______)
H(______, ______)

2. Representa los puntos en el plano cartesiano.



a. H(1, 4)
b. I(5, 5)
c. J(6, 3)
d. K(0, 6)
e. L(2, 7)
f. M(0, 0)

Práctica guiada

3. Completa la tabla si se sabe que un automóvil gasta 5 litros de bencina cada 100 km.

x (bencina en litros)	y = ____ • x	y (distancia recorrida en km)	Par ordenado (x, y)
1			
4	20 • 4	80	(4, 80)
			(5,100)
		140	
9			
			(12, 240)

Aplica

4. Representa gráficamente la información de cada tabla. Luego, indica si las magnitudes son directamente proporcionales justificando tu respuesta.

a.

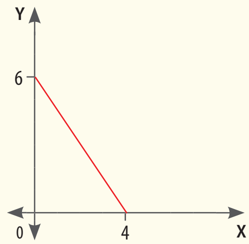
Perímetro de un cuadrado	
Medida del lado (cm)	Perímetro (cm)
0	0
2	8
3	12
4	16

b.

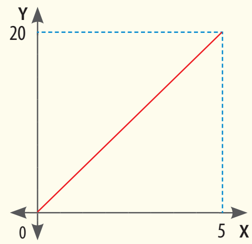
Archivos de igual tamaño en un disco duro	
Capacidad (GB)	Cantidad de archivos
0	0
80	16
160	32
240	48

5. Observa los gráficos y determina cuál(es) representa(n) una relación de proporcionalidad directa. Justifica tus elecciones.

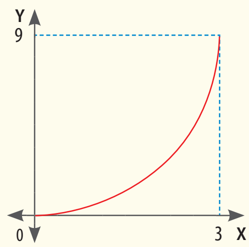
a.



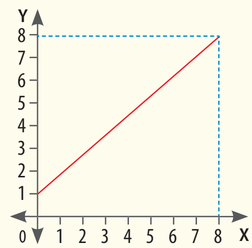
c.



b.



d.



6. Completa las tablas y representa cada situación en el plano cartesiano.

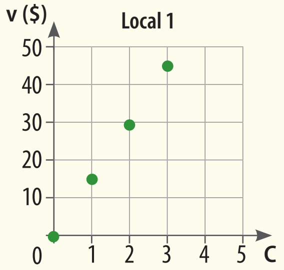
a. 120 g de maní cuestan $ 450.

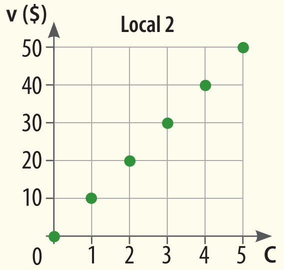
Variable independiente: Cantidad (g)	60		120	240
Variable dependiente: Precio ($)		375	450	

b. El cobro y el tiempo hablado por celular.

Variable independiente: Tiempo (min)	4		30		50	
Variable dependiente: Cobro ($)		1600	2400	2800		4800

7. **Analiza los gráficos. En ellos se modela la relación entre la cantidad de fotocopias (C) y su valor (v) en dos locales distintos. Luego, contesta.**





a. ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad para cada caso?

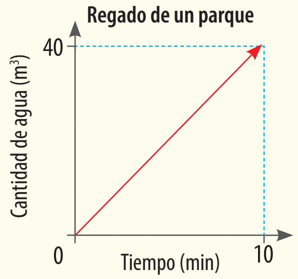
b. ¿Cuál es el precio de una fotocopia en el local 1?

c. ¿Cuál es el precio de una fotocopia en el local 2?

d. Modela con una expresión el precio en cada local.

e. ¿En qué local es más conveniente fotocopiar?

8. **Argumenta.** **Con los datos del gráfico, responde con un compañero o una compañera.**

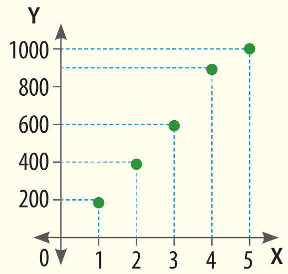


a. ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad?

b. ¿Cuál es el significado de esta constante de proporcionalidad?

c. ¿Cuántos metros cúbicos se consumen en 7 minutos de riego?

9. **Encuentra el error.** **Observa el siguiente gráfico:**



a. Si se sabe que las variables están en proporción directa, ¿qué error hay en el gráfico?

b. Corrige el error.

10. **Desafío.** **Determina un valor para a y otro para b, de manera que los pares (a, 4) y (b, 5) estén en una relación de proporcionalidad directa. Explica tu procedimiento utilizando un gráfico. ¿Existe una única respuesta? Discute con tus compañeros y compañeras.**

Reflexiono

1. Se afirma que mientras mayor sea el valor de la constante **k**, la semirrecta en el gráfico será menos inclinada. ¿Estás de acuerdo? Fundamenta tu respuesta dando un ejemplo o un contraejemplo.
2. Al graficar dos variables que disminuyen proporcionalmente, ¿también se obtiene una semirrecta ascendente en el gráfico? Justifica tu respuesta con un ejemplo.

Refuerzo

1. Explica el procedimiento para graficar una proporcionalidad directa teniendo la tabla de valores.
2. En un supermercado, la oferta de la semana consiste en comprar 2 kilogramos de papas por $ 1500. ¿Cómo queda representada en el plano cartesiano la relación que modela la situación?

Lección 23

¿Cómo modelar la proporcionalidad inversa?

Propósito

Modelar situaciones que involucran proporcionalidad inversa.

¿Para qué?

En otros contextos ocurre lo contrario a una proporción directa. Por ejemplo, mientras más maquinarias trabajando hay, menos tiempo se demoran en terminar una obra, o mientras más rápido te mueves, menos tiempo te demoras en llegar. Estas situaciones se dice que son inversamente proporcionales.

Palabras clave

Inversamente proporcionales

Constante de proporcionalidad

Web

Para reforzar y ejercitar la proporcionalidad directa e inversa, ingresa el código TM7P152 en el sitio web del texto.

Recuerda que Las páginas webs o su contenido pueden variar.

Situación 1 Modelar la proporcionalidad inversa

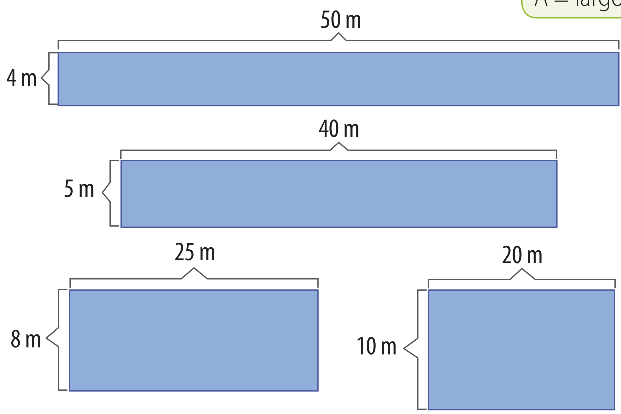
Gerardo quiere comprar una parcela. Los terrenos que le ofrecen tienen distintas medidas, pero siempre la misma superficie.

El presupuesto de Gerardo le alcanza para comprar un terreno rectangular de $200\,m^2$.

¿Qué medidas pueden tener el largo y el ancho de su parcela? ¿Cómo se relacionan estas medidas?

Paso 1 Dibuja algunos de los posibles terrenos de $200\,m^2$.

Ayuda
Área de un rectángulo:
A = largo • ancho



Paso 2 Organiza en una tabla valores posibles para el ancho y el largo.

Ancho	1	2	4	5	8	10	20	25	50	100	200
Largo	200	100	50	40	25	20	10	8	4	2	1

A medida que el ancho **aumenta**, el largo **disminuye**.
A medida que el ancho **disminuye**, el largo **aumenta**.

Paso 3 Analiza la relación entre las variables ancho y largo.

A medida que aumenta el ancho del terreno, el largo disminuye de manera inversa; es decir, si el ancho se duplica o se triplica, el largo disminuirá a la mitad o a la tercera parte, respectivamente.

Aumenta al doble | Aumenta al cuádruple | Disminuye a la quinta parte

$$1 \cdot 200 = 2 \cdot 100 = 2 \cdot 100 = 8 \cdot 25 = 20 \cdot 10 = 4 \cdot 50 = 200$$

Disminuye a la mitad | Disminuye a la cuarta parte | Aumenta al quíntuple

Cuando dos variables se relacionan de esta manera, se dice que son inversamente proporcionales.

Paso 4 Modela la relación entre el largo y el ancho.

Dado que al multiplicar el largo (**L**) y el ancho (**a**) se obtiene el área del terreno, es decir 200 m², las longitudes se relacionan de la siguiente manera:

$$L \cdot a = 200 \ / : a$$
$$\frac{L \cdot a}{a} = \frac{200}{a}$$
$$L = \frac{200}{a}$$

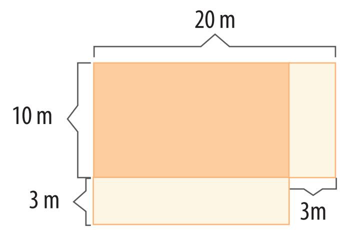
Entonces, la relación entre la variable longitud y la variable ancho consiste en que la primera depende la segunda. Así:

$$L = \frac{200}{a},\ a > 0.$$

Luego, para cualquier medida del largo y del ancho, se debe cumplir que el producto de ambas sea la constante de proporcionalidad, en este caso, 200.

Situación 2 Analizar la presencia de proporcionalidad inversa

Finalmente, Gerardo decidió comprar un terreno de 10 metros de ancho y 20 de largo. Al hacer la delimitación debió dejar 3 metros del largo para el camino público, por lo que le ofrecieron aumentar el ancho en 3 metros para compensarlo. **¿Obtendrá Gerardo un terreno equivalente al que quería, de 200 m²?**



Paso 1 Analiza la disminución y el aumento.

Si el largo de su terreno disminuye, el ancho debe aumentar para que la superficie se mantenga. En este caso, el ancho aumenta la misma cantidad de metros que disminuye el largo:

Nuevo largo: $20 - 3 = \boxed{}$ Nuevo ancho: $10 + 3 = \boxed{}$

Paso 2 Verifica si con estas medidas se mantiene el área de su terreno.

El área del terreno corresponde al producto entre el largo y el ancho.

$$17 \cdot 13 = 221 \text{ y } 221 \neq 200$$

Luego, el área del terreno ha aumentado 21 metros cuadrados, ya que, pese a que una de sus medidas ha aumentado y la otra ha disminuido, no lo han hecho en forma inversamente proporcional. Cuando esto sucede, la variación no ha sido proporcional.

Para concluir

- Dos variables (**x** e **y**) son **inversamente proporcionales** o están en **proporción inversa** si al aumentar (o disminuir) una en cierto factor, la otra disminuye (o aumenta) en el inverso multiplicativo de dicho factor; en consecuencia, el **producto** entre los valores relacionados es constante. Este valor es denominado **constante de proporcionalidad.**

$x \cdot y = k$ ◄ Constante de proporcionalidad

Argumenta y comunica

- ¿Será posible que la parcela tenga otras medidas distintas a las mostradas, manteniendo igual superficie? Argumenta con un ejemplo o un contraejemplo.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. **Evalúa las expresiones para x = 1, 2, 3, 4 y 5.**

a. $6x$

b. $3{,}2x$

c. $0{,}5x$

d. $\frac{x}{4}$

e. $\frac{3x}{8}$

f. $\frac{9x}{5}$

g. $\frac{12}{x}$

h. $\frac{1}{2x}$

2. **Resuelve las ecuaciones.**

a. $5x = 15$

b. $8x = 120$

c. $14x = 35$

d. $6x = 2$

e. $5p + 4 = 10$

f. $17 - 5k = 2 + 5k$

g. $7x - 10 + 2x = 5 - x$

h. $2 \cdot (k + 3) = 10 - 3k$

Práctica guiada

3. **Determina si las siguientes relaciones son de proporcionalidad inversa.**

x	1	2	4	5
y	60	30	15	12

Calcula el producto de cada par de valores.

$1 \cdot 60 = 60$

$2 \cdot 30 = 60$

$4 \cdot 15 = 60$

$5 \cdot 12 = 60$

Dado que el producto de todos los pares de valores es igual, la relación entre las variables es inversamente proporcional.

a.

x	2	3	4	5	6
y	18	12	9	7,2	6

b.

t	90	92	94	96
u	4	6	8	10

c.

p	22,5	20	15	10
q	2	2,5	3	4,5

d.

m	10	25	20	12,5
n	12	4	5	9,6

4. **Determina si los valores relacionados están en proporcionalidad inversa. Justifica tu respuesta cuando lo estén y da un ejemplo en caso contrario.**

Los kilómetros recorridos en un viaje y los que faltan para llegar a destino.

Paso 1 Verifica que a mayor cantidad de kilómetros recorridos, menos kilómetros faltan para llegar a destino.

Paso 2 Ejemplifica. Si el recorrido es de 10 kilómetros y se han recorrido 2, faltan 8; pero si se han recorrido 4, faltan 6. La cantidad de kilómetros recorridos se duplicó, pero los que faltan no se redujeron a la mitad. Entonces, la relación no es de proporcionalidad inversa.

a. La cantidad de cursos de un mismo nivel y la cantidad de alumnos de cada curso.

b. La capacidad de un disco duro y las horas de música que se pueden guardar en él.

c. La distancia entre cada estudiante de un curso en una fila y el largo de la fila.

d. La nota obtenida en una prueba y el promedio final.

5. **Relaciona cada cambio con el efecto que se produce si la relación es inversa. Para ello, píntalos del mismo color.**

Cambio
Al triple de maquinarias.
Al doble del tiempo para realizar el trabajo.
Al cuarto del largo del rectángulo.
A la mitad del contenido de los vasos.
Al cuádruple de bombas.
Al tercio de la presión del gas.
El quíntuple de personas.

Efecto / resultado
La mitad de máquinas..
El doble de los vasos necesarios.
El triple del tiempo necesario.
La tercera parte del tiempo necesario para el trabajo.
El doble de los trabajadores necesarios.
El cuádruple del ancho del rectángulo para la misma área.
El quíntuple del precio para cada persona.
Un cuarto del tiempo para vaciar la piscina.
La mitad de los vasos necesarios.
El triple del volumen que ocupa el gas.

Aplica

6. **Interpreta la información de las tablas y determina si las magnitudes son inversamente proporcionales. Verifica si el producto de sus valores es constante.**

a.

Tiempo para realizar una obra	
Cantidad de maquinarias	Número de días
1	120
2	60
3	40
4	30
5	24

b.

Tiempo para realizar una obra	
Cantidad de maquinarias	Número de días
150	750
300	600
450	450
600	300
1200	1800

7. **Las variables x e y son inversamente proporcionales. Determina el cambio que se produce en cada caso con el valor de y, si el valor de x:**

a. disminuye a la mitad.
b. se triplica.
c. disminuye una octava parte.
d. aumenta en un 20 %.
e. disminuye a un 25 %.

8. **Calcula los valores desconocidos de cada tabla. Considera que las variables son inversamente proporcionales.**

a.

A	B
p	5
20	**q**
2	25

b.

X	Y
9	**n**
6	12
m	3

9. **Resuelve los problemas.**

a. 12 retroexcavadoras pueden realizar un trabajo en 7 días. ¿Cuánto tiempo tardan en realizar el mismo trabajo 14 retroexcavadoras, en iguales condiciones?

b. Francisco cría ovejas y tiene alimento suficiente para alimentar a su rebaño de 50 ovejas, durante 8 días. Si le piden que con la misma comida alimente a su rebaño y a otro rebaño de 30 ovejas, ¿cuántos días podrá hacerlo manteniendo la porción?

c. Un motociclista conduce a 75 km/h durante 2 horas y media, para llegar a su destino. ¿A qué velocidad debería hacer su recorrido de vuelta si necesita demorarse solo dos horas?

10. **Identifica el tipo de proporcionalidad, directa o inversa, que hay entre las variables indicadas.**

a. La longitud de una vara de madera y su masa en kilogramos.

b. La cantidad de litros de agua por segundo que salen por una manguera y el tiempo que tarda en llenarse una piscina.

c. La cantidad de peldaños de una escalera de una altura fija y la altura de los peldaños.

d. La cantidad de ventanillas de atención al público en una oficina de servicios y el tiempo de espera de los clientes.

11. **Desafío. 120 máquinas embotelladoras demoran 30 días en embotellar lo necesario para 4 embarques de bebida de igual tamaño. ¿Cuántas máquinas se necesitarán para embotellar 6 embarques iguales a los anteriores en 60 días? Discute tu procedimiento para resolver el problema con tus compañeros y compañeras.**

Reflexiono

1. ¿De qué manera es posible determinar si una situación se modela con una proporcionalidad inversa o una directa? Comenta tu respuesta con tus compañeros y compañeras.
2. La relación entre el porcentaje de descuento de un artículo y su precio final, ¿a qué tipo de proporcionalidad corresponde? Justifica tu respuesta.

Refuerzo

1. Describe dos situaciones cotidianas que se modelen con una proporcionalidad inversa y plantea una expresión general que la represente.
2. En una empresa saben que 2 personas demoran 16 días en traspasar la información de sus facturas al computador. ¿Cuántos días tardarán 4 personas en traspasar la misma cantidad de información al computador?

Lección 24

¿Cómo representar la proporcionalidad inversa?

Situación 1 Graficar la relación de proporcionalidad inversa

Propósito

Interpretar y graficar la proporcionalidad inversa.

¿Para qué?

Al igual que la proporcionalidad directa, la proporcionalidad inversa también se puede representar de manera algebraica y gráfica.

La representación gráfica permite visualizar de manera rápida y clara la relación entre las variables, como también encontrar los valores para cualquier dato.

Palabras clave

Constante de proporcionalidad

Hipérbola

Rolando es el encargado de una empresa de controlar el recorrido de los buses interurbanos que conectan dos ciudades. Entonces, analiza la rapidez a la que deben desplazarse para cumplir con los horarios determinados. Entre las ciudades hay 120 kilómetros de distancia.

¿Cuál debe ser la rapidez promedio de los buses, dependiendo del tiempo que tienen para realizar el recorrido?

¿Cómo se representa esta situación?

Paso 1 Organiza en una tabla los posibles valores de la rapidez y del tiempo para recorrer 120 kilómetros.

Aumenta al triple

Aumenta al doble

Tiempo (horas)	2	3	4	6	8	10
Rapidez (km/h)	60	40	30	20	15	12

Disminuye a la tercera parte

Disminuye a la mitad

Estas variables están en proporción inversa: a medida que aumenta el tiempo, disminuye la rapidez para recorrer los 120 km. Por lo tanto, al multiplicarlas debemos obtener siempre 120, que corresponde al valor de la constante de proporcionalidad.

Paso 2 Modela la relación entre la rapidez y el tiempo.

- Variable dependiente: rapidez en kilómetros por hora, la llamamos v.
- Variable independiente: tiempo en horas que demora un bus en recorrer los 120 kilómetros, la llamamos t.

$$120 = v \cdot t \longrightarrow v = \frac{120}{t}$$

¿Puede la variable **t** tomar el valor 0? Justifica.

Paso 3 Construye una tabla de valores.

Da distintos valores a t, correspondiente a la abscisa, y evalúa en la expresión. Luego, el resultado arroja el valor de la ordenada v.

t (tiempo en horas)	2	3	4	6	8	12
$v = \frac{120}{t}$	$\frac{120}{2}$	$\frac{120}{3}$	___	___	___	___
v (rapidez en km/h)	60	40	30	20	___	___
Par ordenado (t, v)	(2, 60)	(3, 40)	___	___	___	___

Web

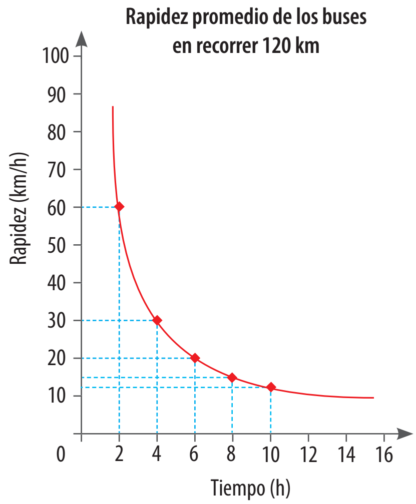
Para repasar la representación gráfica de la proporcionalidad inversa, ingresa el código TM7P156 en el sitio web del texto.

Recuerda que Las páginas webs o su contenido pueden variar.

Paso 4 Representa la proporcionalidad en el plano cartesiano.

Observa que los puntos forman una hipérbola que se aproxima cada vez más a los ejes a medida que los valores de las variables aumentan o disminuyen.
Mientras mayor sea el tiempo que se demora el bus en hacer el recorrido, menor deberá ser la rapidez, pero nunca la rapidez necesaria será igual a cero. De la misma manera, si el tiempo disminuye, mayor será la rapidez.

Luego, hemos representado de manera algebraica y gráfica la proporcionalidad inversa.

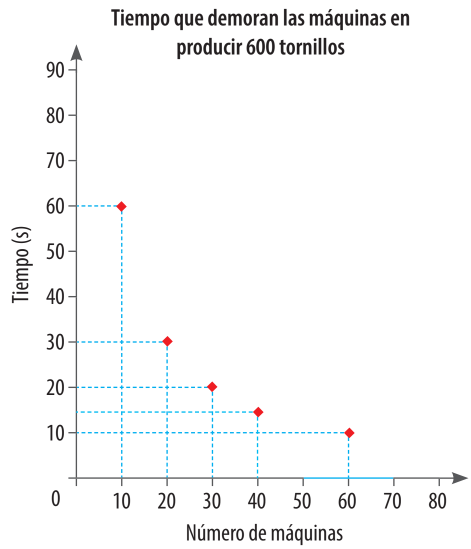


Recurso digital complementario

Situación 2 Modelar la relación a partir de su gráfico

El gráfico representa el tiempo de producción de máquinas al producir 600 tornillos.

¿Cómo se puede definir la relación a partir del gráfico?



Paso 1 Identifica al menos un punto.

(30, 20)

Paso 2 Calcula la constante de proporcionalidad.

Para ello, encuentra el producto entre las variables número de máquinas (**m**) y tiempo (**t**).

Número de máquinas

$\square \cdot \square = \square$ ← Constante de proporcionalidad

Segundos

Paso 3 Expresa de manera algebraica.

$t = \frac{\square}{m}$

Número de máquinas

Tiempo de producción en segundos

Para concluir

- Una **relación de proporcionalidad inversa** se representa en el plano cartesiano como una **hipérbola**, que es una curva que se acerca a los ejes coordenados, pero sin intersecarlos.
- Una variable de una relación de proporcionalidad inversa nunca es igual a cero, pero sí puede tomar valores muy cercanos a él. Por esto, su gráfica no se interseca con los ejes.

Argumenta y comunica

- Si el par ordenado (10, 60) pertenece al gráfico, ¿pertenecerá también el par ordenado (60, 10)? Comenta tu respuesta y procedimiento con un compañero o una compañera.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. **Completa cada tabla con los valores de x e y correspondientes, considerando que las variables están en proporcionalidad inversa.**

a.

A	B
5	14
2	x
y	7

c.

E	F
8	9
10	y
12	x

b.

C	D
x	10
2	25
5	y

d.

G	H
1,5	10
4	x
y	20

2. **Identifica en cada situación si las magnitudes son inversamente proporcionales. Justifica.**

a. Número de estudiantes en un campamento y la cantidad de carpas que usarán.

b. Tiempo que tarda un automóvil en recorrer cierta distancia y su rapidez.

c. Cantidad de pintura que se debe utilizar para pintar un muro y la superficie de este.

Práctica guiada

3. **Analiza las relaciones y determina si son de proporcionalidad inversa. En caso de que lo sean, represéntalas en el plano cartesiano.**

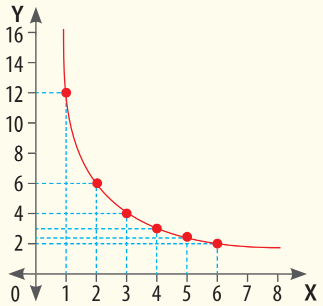
$$\boxed{y = \frac{12}{x}}$$

Paso 1 Observamos que si multiplicas la variable dependiente (y) por la variable independiente (x), obtienes la constante que, en este caso, es 12. Luego, las variables están en proporcionalidad inversa.

Paso 2 Construye una tabla para distintos valores de **x** e **y**.

x	1	2	3	4	5	6
y	12	6	4	3	2,4	2

Paso 3 Ubica los puntos en el plano cartesiano y traza la curva.



a. $y = 20x$

b. $y = \frac{48}{x}$

c. $y = \frac{40}{x}$

d. $y = \frac{3}{4x}$

e. $y = 2 + \frac{1}{x}$

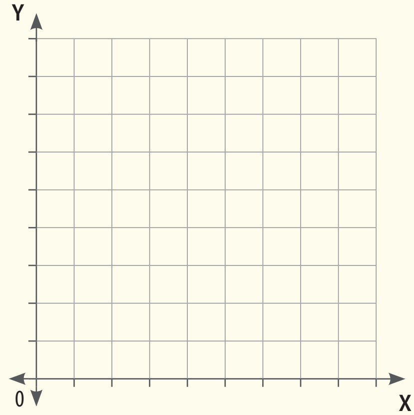
f. $y = \frac{2x}{7}$

Aplica

4. **Representa gráficamente la información de cada tabla. Luego, indica si las magnitudes son inversamente proporcionales.**

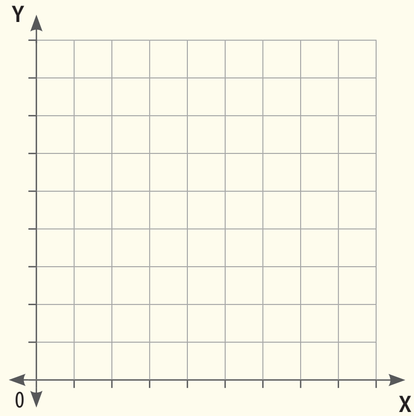
a.

Dinero recaudado en la venta de entradas de una obra de teatro	
Cantidad de ampolletas	**Dinero ($)**
1	2000
2	4000
3	6000
4	8000
5	10 000
6	12 000
7	14 000



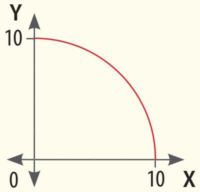
b.

Dimensiones de un rectángulo cuya área es 12 cm^2							
Ancho (cm)	1	2	4	6	8	10	12
Largo (cm)	12	6	3	2	1,5	1,2	1

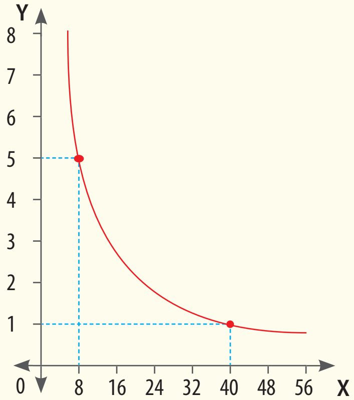


5. Señala si cada gráfico representa una relación de proporcionalidad inversa. Justifica.

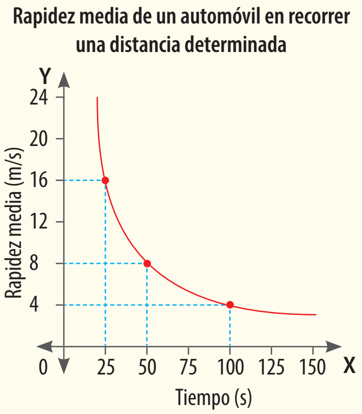
a.



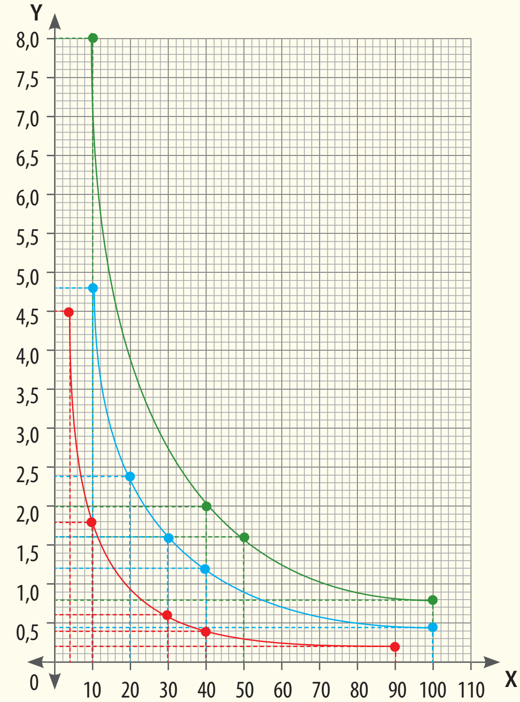
b.



6. A partir del gráfico, define la relación.



7. **Desafío.** Analiza el gráfico.



Las hipérbolas representan las siguientes expresiones:

$xy = 18$ | $xy = 48$ | $xy = 80$

a. ¿Qué hipérbola corresponde a cada una de las expresiones? Explica tu procedimiento para determinarlo y pinta el recuadro del color correspondiente.

b. Si quieres esbozar un gráfico de $xy = 65$, ¿cómo sería este en comparación con los que se muestran? Explica.

Reflexiono

1. ¿Influye el valor de la constante **k** en la forma de la hipérbola? ¿Cómo? Comparte tu respuesta con tus compañeros y compañeras.
2. Explica las diferencias que existen entre la representación gráfica de la proporcionalidad directa y la de proporcionalidad inversa.

Refuerzo

Seis maestros reparan un muro en 10 días. ¿Cuántos días se demorarán 15 trabajadores en reparar el mismo muro bajo las mismas condiciones? Compara tu respuesta con la de tus compañeros y compañeras.

Lección 25

¿Qué es una escala?

» **Propósito**

Aplicar la proporcionalidad directa en figuras a escala.

¿Para qué?

La proporcionalidad directa se puede aplicar en diversas situaciones cotidianas. Una de ellas es la escala de medida, una herramienta muy utilizada en los planos de construcciones y mapas, que permite representar en un dibujo las distancias y los tamaños de objetos del mundo real. Así, se puede dibujar un plano del interior de una casa considerando las proporciones que esta tiene en la realidad.

Palabras clave

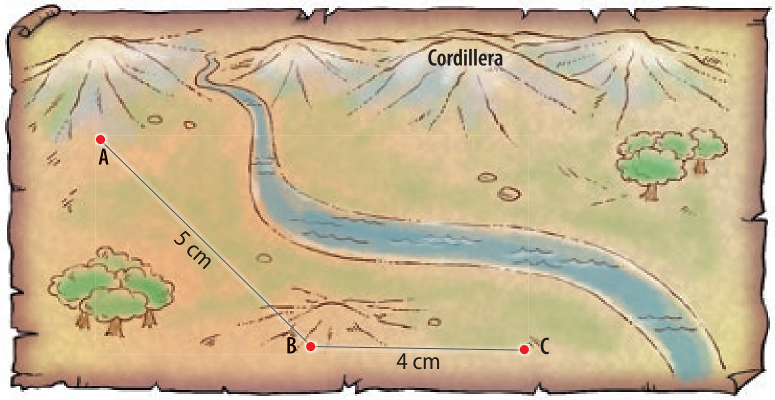
Escala
Razón
Proporción

Situación 1 Encontrar la escala

Matilde se irá de excursión con sus amigas. Para preparar el viaje, hicieron un esquema que les permite estimar las distancias que recorrerán. El dibujo está hecho a escala, lo que significa que un centímetro en este se relaciona directamente con una determinada distancia de la realidad.

El año pasado, Matilde y sus amigas recorrieron 25 kilómetros desde el pueblo A hasta el B.

¿A qué escala está dibujado el esquema?



Paso 1 Identifica las distancias en el mapa y en la realidad entre A y B.

- Distancia en el mapa: 5 cm.
- Distancia en la realidad: 25 km.

Paso 2 Expresa las distancias en la misma unidad de medida.

Para encontrar la escala a la que está confeccionado el mapa, es necesario que ambas distancias estén expresadas en la misma unidad de medida.

Entonces, se escoge la unidad en la que está la distancia en el mapa, en este caso, centímetros.

25 kilómetros equivalen a ____________ centímetros.

¿Cómo se transforman kilómetros en centímetros?

Paso 3 Determina la escala del mapa, la que permitirá conocer a cuántos centímetros reales equivale un centímetro en el mapa.

Distancia en el mapa → 5

Distancia en la realidad → $\frac{5}{\boxed{}}$

Simplifica por 5.

$$\frac{5 : 5}{2\,500\,000 : 5} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}}$$

Luego, la escala a la que está dibujado el esquema es ____________; esto quiere decir que 1 cm en el mapa equivale a 500 000 cm en la realidad.

Situación 2 Calcular distancias reales utilizando la escala

Este año Matilde y sus amigas quieren ir desde B hasta C.

¿Cuántos kilómetros deberán recorrer?

Paso 1 Identifica las distancias en el esquema y en la realidad entre B y C.

- Distancia en el esquema: 4 cm.
- Distancia en la realidad: **x** cm.

Paso 2 Plantea una proporción para encontrar el valor de **x**.

En la situación anterior se determinó la escala del esquema, 1 : 500 000. Ahora se sabe que 4 cm del esquema equivalen a **x** cm de la realidad. Con estas dos razones se plantea la proporción:

$$\frac{1}{500\,000} = \frac{4}{x}$$

$$1 \cdot x = 500\,000 \cdot 4$$

$$x = \boxed{}$$

Paso 3 Expresa la distancia en kilómetros.

_____________ centímetros equivalen a _____________ kilómetros.

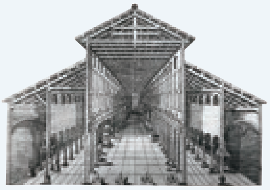
¿Cómo se transforman centímetros en kilómetros?

Luego, Matilde y sus amigas deberán recorrer ____________________ kilómetros entre B y C.

Ampliando

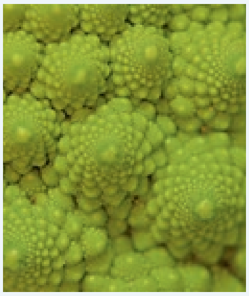
Las escalas tienen aplicaciones en distintas áreas:

Arte: la perspectiva de un dibujo o una escultura.



Ciencias sociales: mapas y planos geográficos.

Ciencias naturales: la macro y micro naturaleza.



Autor: Rlunaro

Para concluir

- Una importante aplicación de la **proporcionalidad directa** son las **escalas**, que relacionan una distancia de la representación con una distancia de la realidad. Así se pueden determinar las longitudes de objetos o distancias representados en un mapa, un plano o una fotografía. Por ejemplo, en una escala un centímetro de un mapa es equivalente a una determinada cantidad de centímetros en la realidad.

Argumenta y comunica

- Es muy frecuente que en el proceso de compra y venta de propiedades los ingenieros apliquen escalas en sus planos. ¿A qué crees que se deba esta importancia? ¿Cómo crees que afectaría en una compra de una propiedad si no se utilizara escalas en los planos? Comenta tu respuesta con un compañero o compañera.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Calcula el valor de la constante dada por cada razón.

a. 8 : 5

b. 27 : 12

c. $\frac{18}{30}$

d. $\frac{14}{56}$

e. 7,5 : 2

f. 6 : 0,5

2. Indica si las siguientes series de números son directamente proporcionales. En caso de que no lo sean, justifica tu respuesta.

a.

x	6	8	10	12	16
y	9	12	15	18	20

b.

p	8	9	10	11	12
q	16	18	20	25	30

c.

m	0,2	0,4	0,6	0,8	2,4
n	0,1	0,2	0,3	0,4	1,2

3. Resuelve los problemas.

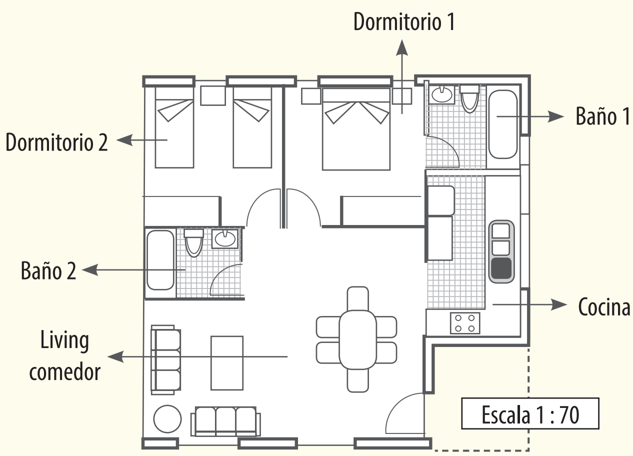
a. Para un desayuno se preparan 4 sándwiches con 9 huevos. ¿Cuántos huevos son necesarios para preparar 32 sándwiches?

b. Con 18 monedas se compran 15 dulces. ¿Cuántas monedas del mismo valor se necesitan para comprar 25 dulces?

Práctica guiada

4. Analiza la situación y luego responde.

Un arquitecto confecciona el plano de una casa con una escala de 1 : 70. Este tiene un largo de 14 cm y un ancho de 12,5 cm.



¿Cuáles son las dimensiones de la construcción en la realidad?

Paso 1 Interpreta la escala. 1 : 70 significa que 1 cm del plano equivale a 70 cm de la realidad.

Paso 2 Reemplaza el largo y el ancho del plano en la proporción que relaciona las magnitudes del plano y de la realidad.

Largo:

$\frac{1}{70} = \frac{14}{x}$

$x = 980$

Ancho:

$\frac{1}{70} = \frac{12,5}{x}$

$x = 875$

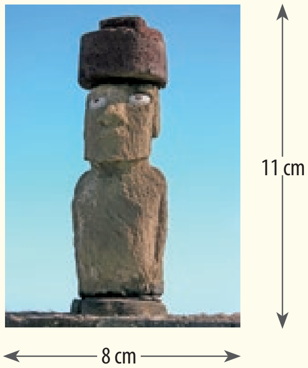
Paso 3 Interpreta el resultado. La casa tiene 980 cm de largo y 875 cm de ancho, lo que equivale a 9,8 m y 8,75 m, respectivamente.

a. Si en el plano las dimensiones de la cocina son 6,4 cm por 4,1 cm, ¿cuáles son estas dimensiones en la realidad?

b. ¿Qué ancho tiene el comedor en el plano si se sabe que en la realidad es 6,79 m?

Aplica

5. Los moái son uno de los grandes atractivos turísticos de la Isla de Pascua. Son considerados un símbolo de la cultura pascuense, no solo por el significado que tienen sino que además por los misterios que los rodean. Para sus vacaciones, Manuel visita la isla y compra para su amigo Cristian una postal del moái "Ahu Ko Te Riku" con las siguientes dimensiones:



a. Si la postal está en escala 1 : 43. ¿Qué altura tiene el moái en la realidad?

b. Antes de volver a Santiago, Manuel se tomó una fotografía en la playa Anakena para regalársela a sus padres. En ella, la altura de Manuel es de 3 cm. Si en la realidad, su altura es de 177 cm. ¿Cuál es la escala que se aplicó en la fotografía?

6. Una tienda decide mostrar sus productos en una revista, donde utilizan una escala de 1 : 40 en sus fotografías.

a. ¿Cuáles serán las dimensiones del refrigerador en la revista?
b. Si en el afiche que está en la entrada de la tienda las dimensiones del refrigerador son 21,25 cm de alto, 8,5 cm de ancho y 7,625 cm de profundidad, ¿qué escala se aplicó?

7. Para su proyecto de fin de año, Camilo quiere construir una maqueta de un puente con una escala de 1 : 500. Si el puente en la realidad tiene 90 m de largo, 12 m de alto y 8,4 m de ancho, ¿cuáles serán las medidas de la maqueta?

8. Fabián y Javiera dibujan el patio de su casa con una escala de 1 : 40. El patio tiene 6 m de largo y 3,5 m de ancho. ¿Qué dimensiones, en centímetros, tendrá su dibujo?

9. La oficina de una municipalidad tiene un mapa que muestra la distancia entre las ciudades de la zona central de Chile con una escala de 1 : 1 000 000. Si en la realidad la distancia entre Santiago y Rancagua es aproximadamente 84 km, ¿a qué distancia se encuentran en el mapa?

10. **Crea.** Construye un mapa de tu sala de clases a una escala de 1 : 150. Compara tu trabajo con el de tus compañeros y compañeras.

11. **Investiga.** El modelismo ferroviario es la reproducción a escala de distintos trenes y su entorno. A pesar de que en su mayoría son miniaturas, estos modelos funcionan y son muy famosos entre los coleccionistas. Investiga en qué consisten las escalas H0, N, Z y T y cuáles son los modelos de locomotoras a escala más pequeños fabricados en el mundo.

12. **Conecta con el arte.** Una réplica de un objeto es una reproducción del mismo que tiene exactamente la misma forma, aunque no necesariamente el mismo tamaño.
    a. Si la réplica de un automóvil está hecha a una escala de 1 : 17, y su largo es 24,5 cm; su ancho, 9,6 cm y su alto, 8,1 cm, ¿cuáles son sus dimensiones reales?
    b. ¿Cómo interpretarías que la escala utilizada en una réplica fuese de 1 : 1? Investiga sobre algunos ejemplos de réplicas de obras famosas en el mundo que tengan esta escala, e intercámbialos con tus compañeros y compañeras.

Reflexiono

1. Si un mapa que tiene una determinada escala se reduce, ¿qué pasará con su escala de medida? Fundamenta tu respuesta con un ejemplo.
2. ¿Se puede aplicar escalas de medidas a los dos tipos de proporcionalidad? Comenta tu respuesta con un compañero o una compañera.

Refuerzo

1. Identifica la escala que se aplicó en un mapa donde 2 cm equivalen a 40 m.
2. Un arquitecto elabora el plano del centro de una ciudad, en el cual 2 cm equivalen a 10 m de la realidad. ¿Qué dimensión real tiene un terreno rectangular cuyos lados en el plano miden 10 cm y 15 cm?

Actitud: Valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad.

Leonardo Da Vinci:
la proporcionalidad en su arte

Leonardo da Vinci (1452 -1519) fue un artista italiano que dedicó gran parte de su tiempo a estudiar las proporciones humanas. En su obra "Tratado de pintura" hay varias notas sobre técnicas de dibujo y de la percepción que tiene de la pintura. Con respecto a la anatomía, dio a conocer las proporciones más armoniosas entre todas las partes del cuerpo.

Las proporciones del cuerpo humano según Da Vinci

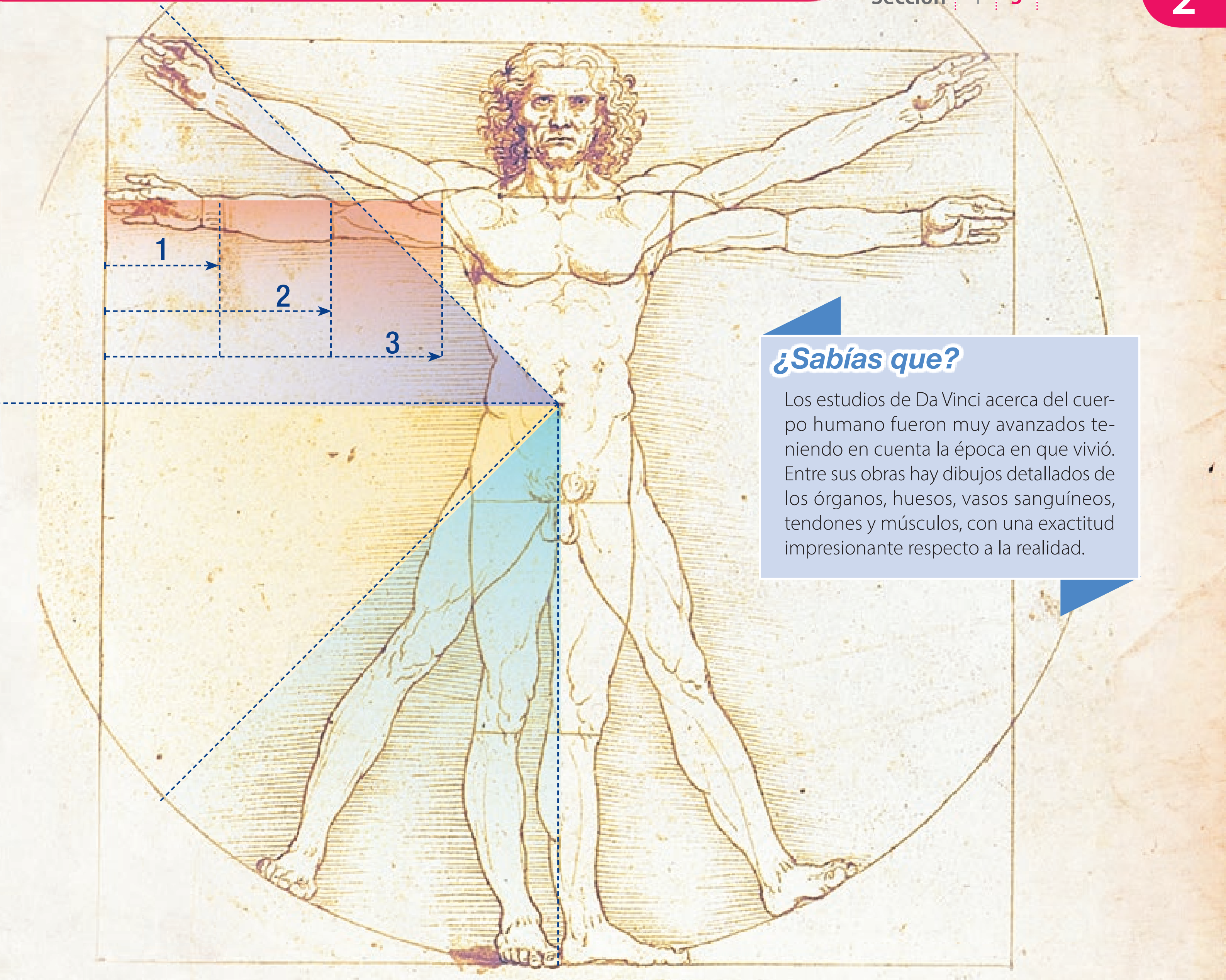
El hombre de Vitruvio es un dibujo realizado por Leonardo da Vinci, donde representa las proporciones del cuerpo humano.

Así, dijo que la longitud de la mano debe ser un tercio de la del brazo; la distancia entre el corte de la boca y la base de la nariz, un séptimo del rostro; el dedo gordo del pie, la sexta parte de la planta del pie; la medida de la nariz, la tercera parte del rostro; la palma de la mano sin dedos, la mitad del pie sin dedos; la altura del hombre arrodillado, tres cuartos de su altura total; la longitud de la oreja, un tercio de la longitud del rostro.

La "Mona Lisa", *más que una pintura*

La Gioconda, más conocida como Mona Lisa, es una de las obras pictóricas más famosas de la historia del arte, no solo por la técnica empleada, sino también por todos los enigmas que la rodean, incluso en la actualidad. Esto ha llevado incluso a hacer estudios de última generación para identificar datos de la mujer y de su cuerpo. Se dice que Da Vinci habría utilizado en esta pintura la "divina proporción" o número áureo, un valor numérico de la proporción entre dos segmentos de rectas equivalente a 1,62 aproximadamente.

Muchos artistas del Renacimiento usaron esta proporción en construcciones y pinturas, ya que se le atribuye un efecto estético a la hora de apreciar la obra. Para algunas personas, el rostro de la mujer del cuadro estaría dibujado según las proporciones de un rectángulo áureo.



¿Sabías que?

Los estudios de Da Vinci acerca del cuerpo humano fueron muy avanzados teniendo en cuenta la época en que vivió. Entre sus obras hay dibujos detallados de los órganos, huesos, vasos sanguíneos, tendones y músculos, con una exactitud impresionante respecto a la realidad.

ACTIVIDAD EN GRUPO

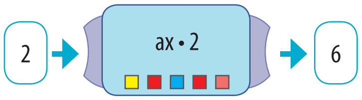
Reúnanse en grupos de 4 integrantes y realicen las actividades propuestas. Luego, comuniquen sus respuestas a los demás equipos.

1. Considerando las proporciones de Da Vinci:
   - Si una persona mide 1,72 m, ¿cuál es su altura estando arrodillada?
   - ¿Qué relación habría entre la medida de la nariz y la de una oreja? Elijan a uno de los integrantes de su equipo y midan su brazo. Con ese dato, calculen la relación que hay entre la longitud de su brazo y la de su mano. ¿Coincide con la proporción que establece Da Vinci?
2. Se menciona que el número áureo ha sido utilizado en grandes pinturas y construcciones. Investiguen qué otras obras del mundo y qué ejemplos en la naturaleza tienen esta proporción, y muéstrenlos al resto del curso indicando cuáles son los segmentos que forman el número áureo.
3. Investiguen otras proporciones del cuerpo humano según Da Vinci y dibujen en una cartulina su propio Hombre de Vitruvio de 50 cm de altura. ¿Qué método utilizaron para calcular la medida de cada parte del cuerpo según las proporciones establecidas? Aproximen sus cálculos y compartan su respuesta con los demás compañeros y compañeras.

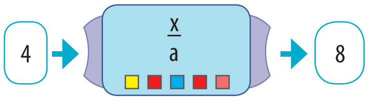
¿Cómo voy?

Lección 20: Relacionar variables dependientes e independientes

1. **Determina el valor de a. Considera que x representa el número que ingresa.**

a. 

a = ________

b. 

a = ________

Lección 21: Modelar situaciones que involucran proporcionalidad directa

2. **Calcula el valor de x.**

a. $\frac{x}{5} = \frac{30}{35}$

b. $\frac{2}{x} = \frac{5}{20}$

c. $\frac{9}{8} = \frac{x}{6}$

d. $\frac{x+2}{2} = \frac{8}{5}$

3. **Indica si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Escribe V o F, según corresponda.**

a. ______ Dos variables se relacionan de manera directamente proporcional si su diferencia es constante.

b. ______ Para determinar la expresión que representa la relación de proporcionalidad directa, basta con conocer un par de valores de ella.

c. ______ El perímetro de un triángulo equilátero es directamente proporcional a la longitud de sus lados.

d. ______ El precio de un almuerzo en un restaurante es directamente proporcional a su masa total en gramos.

4. **Determina una expresión general para cada situación.**

a. Cada planta de un invernadero necesita 2 litros diarios de agua.

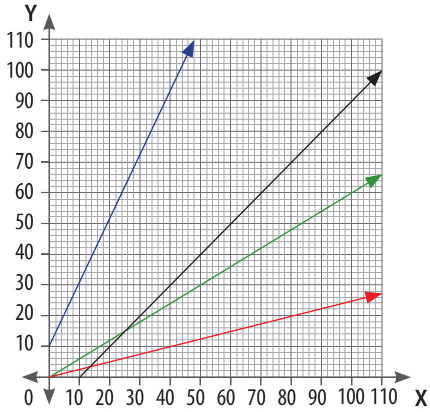
b. Rodrigo compra las entradas para una función de teatro a la que asistirá todo su curso. Cada entrada cuesta $ 2500.

Lección 22: Interpretar y graficar la relación de proporcionalidad directa

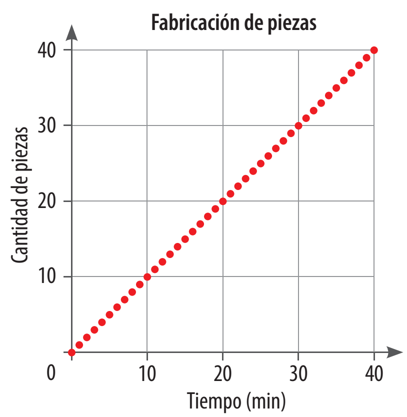
5. **Completa la tabla.**

x (cantidad de empanadas)	y = ________ • x	y (precio)	Par ordenado (x, y)
1		1200	
		3600	
6			
			(7, 8400)

6. **Analiza el gráfico e identifica las relaciones de proporcionalidad directa.**



7. **El siguiente gráfico representa el tiempo necesario (y) para fabricar una determinada cantidad (x) de piezas de un computador.**



a. ¿Cuál es la expresión que relaciona la cantidad de piezas con el tiempo necesario para fabricarlas?

b. ¿Cuánto tiempo se necesita para fabricar 30 piezas?

8 **Modela y grafica la expresión para cada situación.**

a. Marcela gana $ 45 000 de comisión por vender 9 suscripciones a una revista.

b. Una llave puede llenar un estanque de agua de 1000 litros de capacidad en 8 horas. Si se saca el tapón, el estanque completamente lleno se vacía en 12 horas. Estando el estanque vacío y con el tapón, se abre la llave. ¿Cuánta agua hay en el estanque a medida que pasan las horas?

Lección 23: Modelar situaciones que involucran proporcionalidad inversa

9 **Indica si las siguientes afirmaciones son características de la proporcionalidad inversa. Para ello, escribe ✗ o ✓ según corresponda.**

a. ______ Si el valor de una de las variables aumenta, el de la otra disminuye.

b. ______ El valor de una de sus variables se puede obtener dividiendo la otra por un número fijo.

c. ______ El producto entre las variables es constante.

10 **Identifica las variables involucradas en cada situación y determina una expresión general que modele cada situación.**

a. Pilar dispone de un camión cisterna para el riego de sus sembrados. Si destina 20 litros de agua a cada metro cuadrado de terreno, le alcanza para regar 250 metros cuadrados.

b. Joaquín es artesano y fabrica pulseras con piedras. Si cada pulsera la confecciona con 5 piedras, el material le alcanza para 35 pulseras.

Lección 23: Interpretar y graficar la proporcionalidad inversa

11 **Calcula los valores desconocidos de las tablas si estas representan proporciones inversas.**

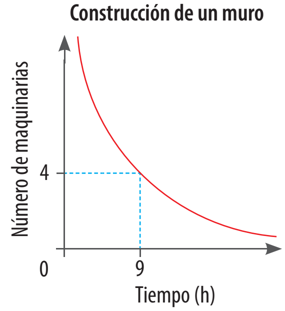
a.

M	N
10	6
12	b
a	0,1

b.

P	Q
8	b
40	2
a	16

12 **El gráfico representa la cantidad de maquinarias que se necesitan para construir un muro en un tiempo determinado.**



a. ¿Qué tipo de proporcionalidad está representada en el gráfico?

b. ¿Cuál es la constante de proporcionalidad?

c. Si demoraran 12 horas en terminar el trabajo, ¿cuántas maquinarias deberían participar en la construcción?

Lección 25: Aplicar la proporcionalidad directa en figuras a escala

13 **Completa la tabla.**

	Escala	Distancia real	Distancia en el mapa
a.	1 : 620 000	12 km	
b.	1 : 350 000		3,4 cm
c.		5,1 km	1,7 cm
d.	1 : 300		8,5 cm

Desafíos de integración

1. Mariana prepara un asado para 20 personas, por lo que compró 4,5 kg de carne y 5 bebidas.
   a. Si a última hora llegan 4 personas más, ¿cuánta carne y cuántas bebidas debería comprar para mantener las porciones?
   b. Considerando a estas 4 personas más, el costo del asado fue de $ 91 200. ¿Cuánto había gastado Mariana inicialmente?
2. Luis trabaja llamando a clientes de un banco y alcanza a llamar a 60 personas por día, hablando 5 minutos con cada uno.
   a. ¿A cuántos clientes alcanzaría a llamar si dedicara solo 2 minutos a cada uno?
   b. Un día, Luis debe llamar a 260 clientes. ¿Cuánto tiempo podría hablar con cada uno?

Resolución de problemas

Actitud: Demostrar interés, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones.

Hacer una tabla

Cuando en un problema intervienen distintas variables, es posible organizar los datos en una tabla con el fin de establecer la relación que hay entre ellos y así encontrar los demás valores.

Estrategias

- Hacer un diagrama.
- Usar ensayo y error sistemático.
- Usar problemas más sencillos.
- Hacer una tabla.
- Encontrar un patrón.
- Plantear una ecuación o una inecuación.
- Usar razonamiento lógico.

Cuando en una superficie determinada se aplica una fuerza sobre un cuerpo, se produce una presión. Esta es directamente proporcional a la fuerza que se aplica e inversamente proporcional a la superficie en la que actúa. Si en una construcción, una máquina que efectúa una fuerza sobre una superficie genera una presión de 120 N/cm^2, donde N es Newton, una unidad de fuerza. ¿Qué presión ejerce la máquina aplicando la misma fuerza sobre una superficie de 5 cm^2?

¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema?

¿Qué datos tienes para resolver?

Crea un plan para resolver

Para encontrar la presión que se ejerce sobre la superficie aplicando la misma fuerza, podemos Hacer una tabla. Para ello, identifica la relación entre las variables y determina si esta es inversa o directa. Luego, elabora una tabla de valores que cumplan con la constante de proporcionalidad.

Aplica la estrategia

El área en que se aplica la fuerza es inversamente proporcional a la presión ejercida, por lo que el producto entre las variables siempre será constante. En este caso: $k = 1 \cdot 120 = 120$

Elabora una tabla de valores para calcular la presión que se ejerce en distintas superficies.

Área (cm^2)	Presión (N/cm^2)
1	120
	...
4	...
5	...

Resuelve

Verifica la respuesta

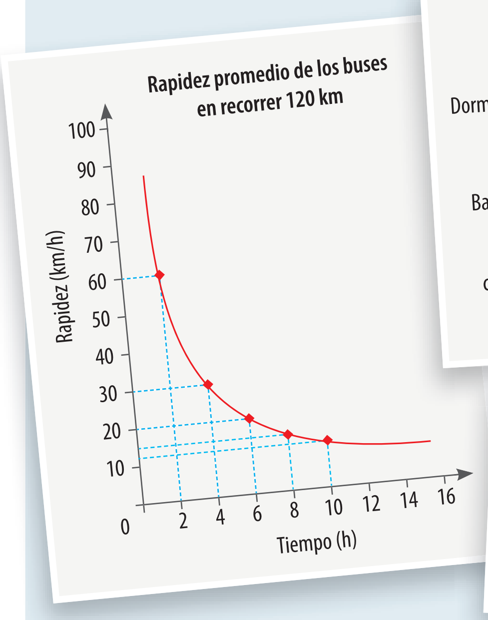
Comunica la respuesta

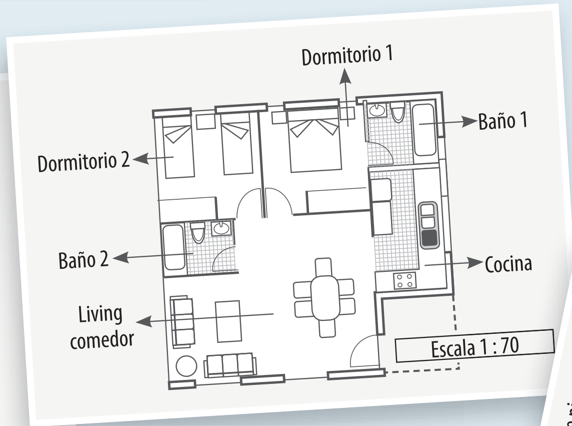
Vuelvo a mis procesos

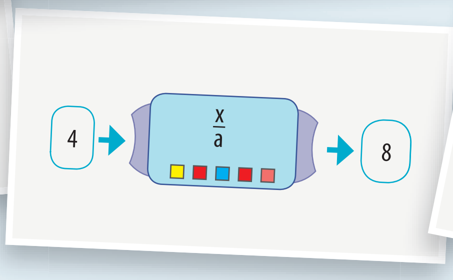
Observa las imágenes centrales y completa.

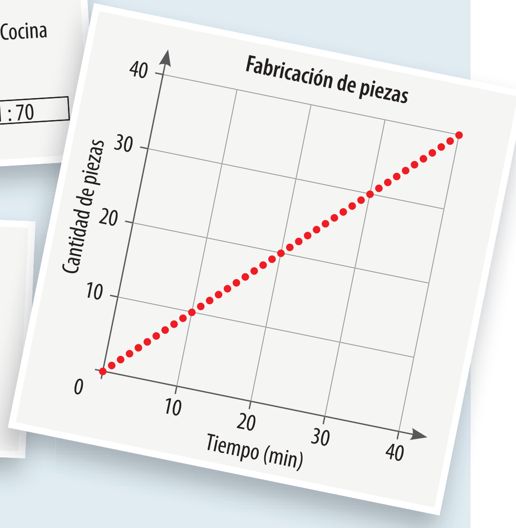
¿Cuánto aprendiste sobre las relaciones proporcionales y sus variables?

Para cada una de las imágenes crea un nuevo problema y luego intercámbialo con un compañero o compañera.









¿Qué rol cumpliste en las actividades grupales? ¿Cómo influyó el trabajo en equipo en tus aprendizajes?

De las metas que te propusiste al inicio de esta sección, ¿cuáles cumpliste y cuáles te faltaron?

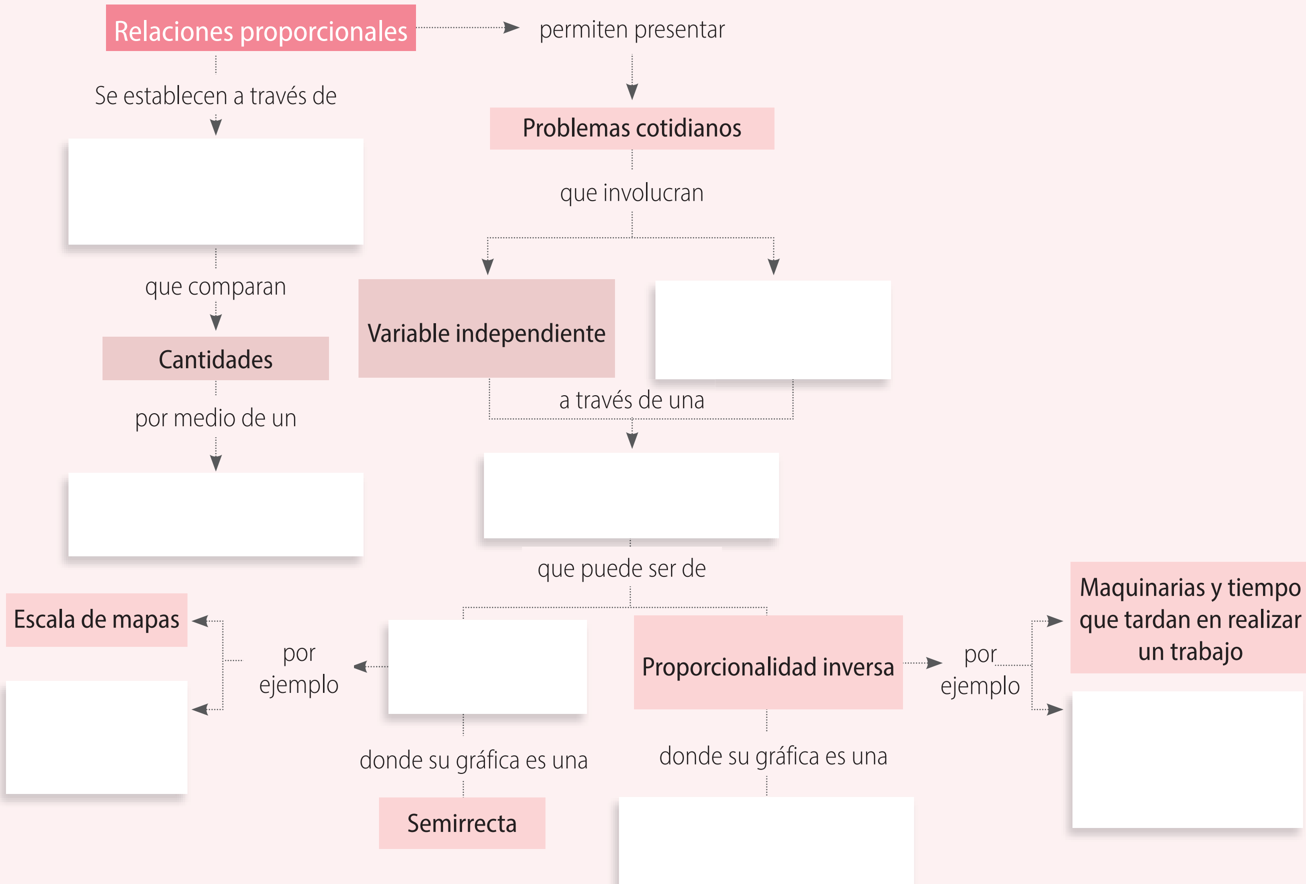
¿Cuáles fueron las actividades o temas que más llamaron tu atención?, ¿por qué?

Sintetizo mis aprendizajes

¿Cómo se llama?

Completa el mapa conceptual correspondiente a la sección de Relaciones proporcionales. Para ello, ubica los conceptos donde corresponda.

Razones - Cociente - Hipérbola - Variable dependiente - Relación - Proporcionalidad directa - Rapidez de un automóvil y tiempo que demora - Cantidad de kilómetros recorridos y gasto de gasolina



Organiza los aprendizajes trabajados en la sección 4, construyendo un mapa conceptual.

¿Cómo se hace?

- **Pregunta 1**

  ¿Por qué en una inecuación, a diferencia de una ecuación, se pueden obtener infinitos valores como solución?

- **Pregunta 2**

  ¿De qué manera se puede determinar si dos variables de un problema se encuentran en proporcionalidad directa o inversa?

Refuerzo mis aprendizajes

Lenguaje algebraico

1. **Representa cada situación con una expresión algebraica.**

a. En un día, una persona vendió 15 sándwiches y 12 cafés, y se perdieron 3 queques que nadie quiso comprar. ¿Cuál será el balance del día?

b. Una cuerda de 3 metros de largo se corta en varias partes iguales. Se toma uno de los pedazos y se le recortan 8 centímetros. ¿Cuál es el largo del pedazo obtenido?

c. Al final de un juego, Emilia tiene 12 puntos más que Luis y José tiene el cuádruple de puntos que Emilia. Si Emilia obtuvo 9 puntos, ¿cuál fue el puntaje total del grupo?

Reducción de términos semejantes

2. **Pinta de un mismo color los términos semejantes.**

6p, ap, 7p, 4pq, 18, 34aq, 9ap, 1, 12aq, 13p, 2p, 100apq, 12, 19pq, 0,1ap, 3p, 2p, 8aq, 130a

3. **Reduce las expresiones algebraicas.**

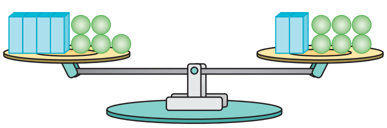
a. $9h - 14h$

b. $5z + 2s + 15z$

c. $8pr - 15st + 4t - 8pr + 2st$

Ecuaciones e inecuaciones

4. **Considera la siguiente representación y realiza las actividades.**



a. Determina a cuántos círculos equivale un rectángulo.

b. Determina a cuántos rectángulos equivale un círculo.

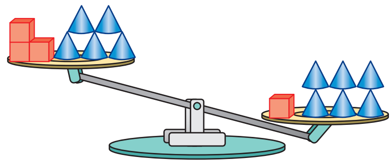
5. **Resuelve las ecuaciones.**

a. $4x + 5 = 49$

b. $32 = 17 + 3x$

c. $14x + 21 = 8x + 96$

6. **Identifica la inecuación representada. Para ello, considera que ▣ es la incógnita y ▲ la unidad.**



7. **Resuelve las inecuaciones.**

a. $8x + 13 > 61$

b. $10 > 1 + 3x$

c. $x - 16 < 5x - 64$

d. $\frac{x}{9} - 1 < 10$

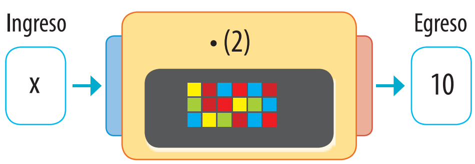
8. **Resuelve y analiza si la solución obtenida en cada caso es pertinente al contexto del problema.**

a. Con el dinero que tiene, Vicente puede comprar 3 brochas en una ferretería y le quedarían \$ 1300; o bien, 5 y le quedarían \$ 200. ¿Cuánto cuesta cada brocha?

b. Vanesa prepara quesos cuadrados y los deja madurar en una repisa de un metro de largo. Entre cada queso deben quedar al menos 10 centímetros de separación, y no puede haber más de 4 quesos en la repisa. ¿Cuál es el largo de cada queso?

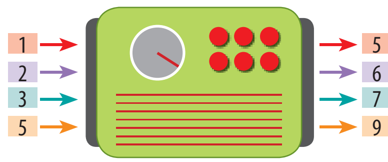
Relación de dos variables

9. **En la máquina, ¿cuál es el valor de x?**



x = ______________

10. **Encuentra la expresión que usa la máquina para transformar los números que entran.**



Proporcionalidad directa

11. **Determina, en cada caso, la expresión que relaciona el conjunto de números que ingresan con el de los que egresan.**

	Ingresan		Egresan
a.	1, 3, 6, 8	→	5, 15, 30, 40
b.	24, 16, 13, 6	→	72, 48, 39, 18
c.	2, 4, 8, 10	→	16, 32, 64, 80

12. **Las variables x e y son directamente proporcionales, siendo x la variable independiente. Calcula el valor pedido en cada caso.**

a. Si x = 5 e y = 40, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

b. La constante de proporcionalidad es 3. Si x = 9, ¿cuál es el valor de **y**?

c. Si x = 20 e y = 8, ¿cuál es el valor de **x** si y = 1?

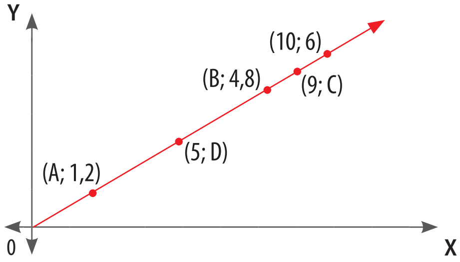
13. **Determina si las siguientes situaciones corresponden a una relación de proporcionalidad directa. En caso de que sea así, responde la pregunta planteada.**

a. Cuatro cajas de cerámicas permiten cubrir 16 metros cuadrados. ¿Cuántas cajas se necesitan para cubrir 40 metros cuadrados?

b. Un anillo se fabrica con 8 gramos de oro y 12 gramos de plata. ¿Cuántos gramos de cada metal se necesitan para hacer un anillo igual, pero de 30 gramos?

c. Un taxi cobra un monto fijo por los primeros 800 metros que avanza y $ 200 adicionales por cada 300 metros recorridos. Si un viaje de 2300 metros cuesta $ 1840, ¿cuánto cuesta recorrer 5000 metros?

14. **Determina, según el gráfico, los valores de A, B, C y D.**



Proporcionalidad directa

15. **Las variables x e y son inversamente proporcionales, siendo x la variable independiente. Calcula el valor pedido en cada caso.**

a. Si x = 30 e y = 20, ¿cuál es la constante de proporcionalidad?

b. La constante de proporcionalidad es 420. Si x = 10, ¿cuál es el valor de **y**?

c. Si x = 18 e y = 25, ¿cuál es el valor de **x** si y = 10?

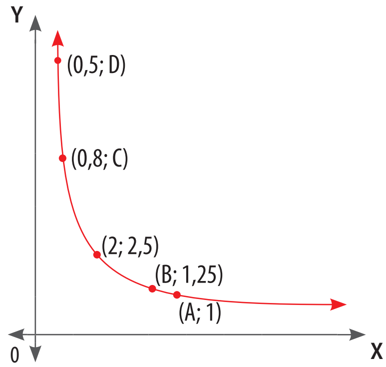
d. Si x = 60 e y = 40, ¿cuál es el valor de **y** si x = 120?

16. **Resuelve los problemas.**

a. Si cada página de un libro tiene 20 líneas, el libro tendrá 160 páginas. ¿Cuántas líneas debe tener cada página si se necesita que el libro tenga solo 128 páginas?

b. Un agricultor tiene agua para regar por 5 días, 8 hectáreas de terreno. ¿Cuántas hectáreas podría regar en 4 días con los mismos litros de agua?

17. **Determina, según el gráfico, los valores de A, B, C y D.**



Aplicaciones de proporcionalidad

18. **¿Qué distancia real, medida en kilómetros, hay entre dos ciudades que están separadas por 30 cm en un mapa ilustrado a un escala de 1 : 200 000?**

19. **¿A qué escala está construido un mapa en que 2 cm representan 60 km de la realidad?**

20. **Paulina se tomó una foto junto a un edificio de 6 metros de altura. En la imagen, ella aparece de 2,5 cm de altura. Si en realidad Paulina mide 1,6 metros, ¿de qué tamaño se ve el edificio en la foto?**

¿Qué aprendí?

PARTE I Evaluación de contenidos

En los ejercicios del 1 al 8, selecciona la alternativa correcta. (8 puntos)

1. Diego vende helados de agua (a) y de leche (l), a \$ 200 y \$ 350 respectivamente. Para poder participar en una feria, debe pagar \$ 1500 por día. ¿Cómo se representa el dinero que obtendría luego de un día de trabajo?
   - A. $200a + 350l + 1500$
   - B. $1500 - 200a - 350l$
   - C. $200a + 350l - 1500$
   - D. $1500 - 200a + 350l$

2. Consuelo observa una hoja con la siguiente expresión algebraica:

   $$7ab + 4bn + \boxed{} - 2ab = 6ab - 8bn + 5$$

   ¿Cuál de las alternativas mantiene la igualdad?
   - A. $ab - 4bn + 5$
   - B. $ab - 12bn + 5$
   - C. $ab + 12bn - 5$
   - D. $-ab + 12bn + 5$

3. Para resolver una ecuación, se siguen estos pasos a ambos lados de la igualdad.
   - Se resta 3x.
   - Se suma 5.
   - Se divide por 2.

   Con ello se obtiene la solución.

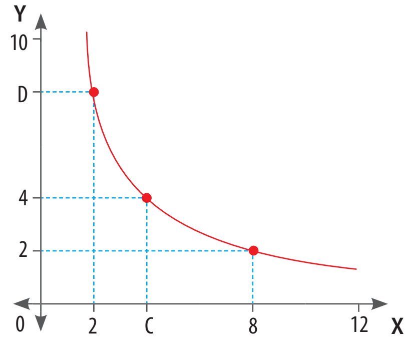
   ¿Cuál de estas ecuaciones se resuelve con este procedimiento?
   - A. $7x - 5 = 3x + 8$
   - B. $8x + 5 = 3x + 1$
   - C. $3x - 5 = 5x + 9$
   - D. $3x + 13 = 5x - 5$

4. ¿Cuál de las siguientes desigualdades es equivalente a $2x + 5 < 7x + 1$?
   - A. $4x > 9$
   - B. $5x > 4$
   - C. $4 > 5x$
   - D. $6 < 5x$

5. Se define la operación $x \nabla y = x - 2y$. Entonces, ¿cuál es el valor de $-3 \nabla 4$?
   - A. -11
   - B. -5
   - C. 1
   - D. 11

6. ¿En cuál de las siguientes alternativas NO hay dependencia entre las variables?
   - A. El área de un círculo y el diámetro de la circunferencia.
   - B. El monto a pagar por pan y la cantidad de pan comprado.
   - C. kWh consumidos y la cantidad de ampolletas encendidas.
   - D. La edad de una persona y su estatura.

7. En el gráfico se representa una relación de proporcionalidad inversa. ¿Cuál es el valor de C y de D respectivamente?



   - A. 4 y 8.
   - B. 8 y 4.
   - C. -8 y -4.
   - D. 0 y 4.

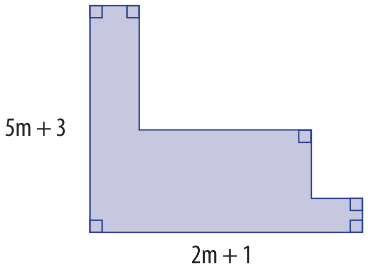
8. Óscar camina junto a su hijo, que le llega a la cintura. Si la sombra de Óscar mide 2,5 metros, ¿cuánto puede medir aproximadamente la de su hijo?
   - A. 2 metros.
   - B. 1,3 metros.
   - C. 0,9 metros.
   - D. 0,5 metros.

9. Escribe una expresión algebraica lo más reducida posible para cada enunciado. (3 puntos)
   - a. La suma de dos números consecutivos.
   - b. El perímetro de un rectángulo cuyo largo mide el triple de su ancho.
   - c. La diferencia de edad entre dos personas si la mayor tiene 15 años menos que el cuádruple de la edad de la menor.

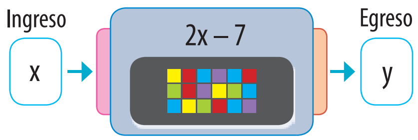
10. Si un plano está diseñado en escala 1 : 50 y la distancia entre los dos puntos en el plano es de 3 cm, ¿cuál es la distancia real entre ellos? (2 puntos)

PARTE II Evaluación de habilidades

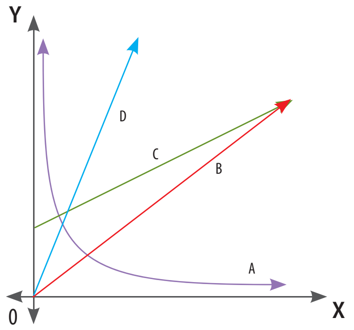
1. Escribe el perímetro de la figura en forma reducida. (2 puntos)



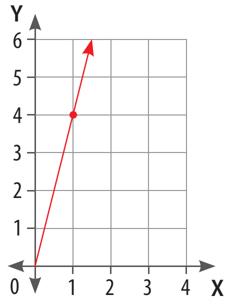
2. En la máquina, ¿cuál es el valor de **y** si x = 4? (2 puntos)



3. ¿Qué expresiones representadas en el gráfico son de proporcionalidad directa? (2 puntos)



4. El gráfico tiene asociada una proporcionalidad directa entre X e Y. ¿Cuál es el valor de la constante de proporcionalidad? (2 puntos)



5. Alberto tiene 10 años menos que Susana. Si las edades de ambos suman menos de 74 años, ¿cuál puede ser la edad máxima de Alberto? (2 puntos)

6. Si el precio de 3 kg de azúcar es $ 1650, ¿cuál es la expresión que modela el precio de x kg de azúcar? (2 puntos)

7. ¿Cuál es la expresión que modela la situación que asigna a todo número entero su doble disminuido en la mitad de 12? (2 puntos)

8. Eugenia tiene el doble de las estampillas que tiene Alejandra, e Irma tiene el triple de estampillas que tiene Alejandra. Si en total suman 78 estampillas, ¿cuántas estampillas más tiene Irma que Alejandra? (1 punto)

9. Para realizar un trabajo en 20 días son necesarios 8 técnicos. ¿Cuántos más se necesitarían para que el trabajo se termine en 5 días? (1 punto)

10. En una fábrica de ropa se alcanzan a confeccionar 1600 chaquetas si se trabajan 8 horas diarias durante 10 días. Determina la cantidad de horas diarias de trabajo necesarias si se deben confeccionar 2000 chaquetas en 5 días. (2 puntos)

11. Escoge las parejas de valores que NO pertenecen a una proporcionalidad inversa. Justifica tu elección. (2 puntos)

   a. (1, 8) y (2, 4).
   b. (7, 8) y (4, 14).
   c. (1, 5) y (4; 1,25).
   d. (9, 4) y (7, 6)

12. Se quiere dibujar un rectángulo en el que la longitud de uno de sus lados aumentado en 3 cm sea igual a la longitud del otro lado, y que dichas longitudes correspondan a números naturales. El contorno del rectángulo debe cubrirse con hilo y se dispone de 20 cm de este material. ¿Cuáles son las dimensiones de los rectángulos que cumplen las condiciones anteriormente descritas? Justifica. (2 puntos)

Registra tus aprendizajes

PARTE I Para repasar contenidos

Cuenta el puntaje que obtuviste en la parte I y la parte II de la evaluación. Luego, repasa según tu nivel de logro.

Contenido	Logrado	Por lograr	Repasa en...
Lenguaje algebraico (Actividades 1, 2 y 9)	3 o más puntos	2 o menos puntos	Lecciones 15 y 16
Ecuaciones (Actividades 3 y 5)	2 puntos	0 o 1 punto	Lecciones 17 y 19
Inecuaciones (Actividad 4)	1 punto	0 puntos	Lecciones 18 y 19
Proporcionalidad directa (Actividades 6, 8 y 10)	2 o más puntos	0 o 1 punto	Lecciones 20, 21, 22 y 25
Proporcionalidad inversa (Actividad 7)	1 punto	0 puntos	Lecciones 23 y 24

Parte II Para practicar habilidades

Habilidad	Logrado	Por lograr	Repasa en...
Representar (Actividades 1, 2, 3 y 4)	5 o más puntos	4 o menos puntos	Cuaderno de ejercicios, página 79
Modelar (Actividades 5, 6, y 7)	4 o más puntos	3 o menos puntos	Cuaderno de ejercicios, página 79
Resolver problemas (Actividades 8, 9, y 10)	3 o más puntos	2 o menos puntos	Cuaderno de ejercicios, página 79
Argumentar y comunicar (Actividades 11 y 12)	3 o más puntos	2 o menos puntos	Cuaderno de ejercicios, página 79

Actitud: Demostrar interés, esfuerzo y perseverancia en la búsqueda de soluciones para problemas reales.

Desafío en equipo

Al terminar esta unidad los invitamos a formar equipos de cuatro estudiantes para, de manera creativa y reflexiva, resolver el desafío.

Las piedras preciosas

Un orfebre tiene 12 piedras preciosas, iguales en forma y tamaño.

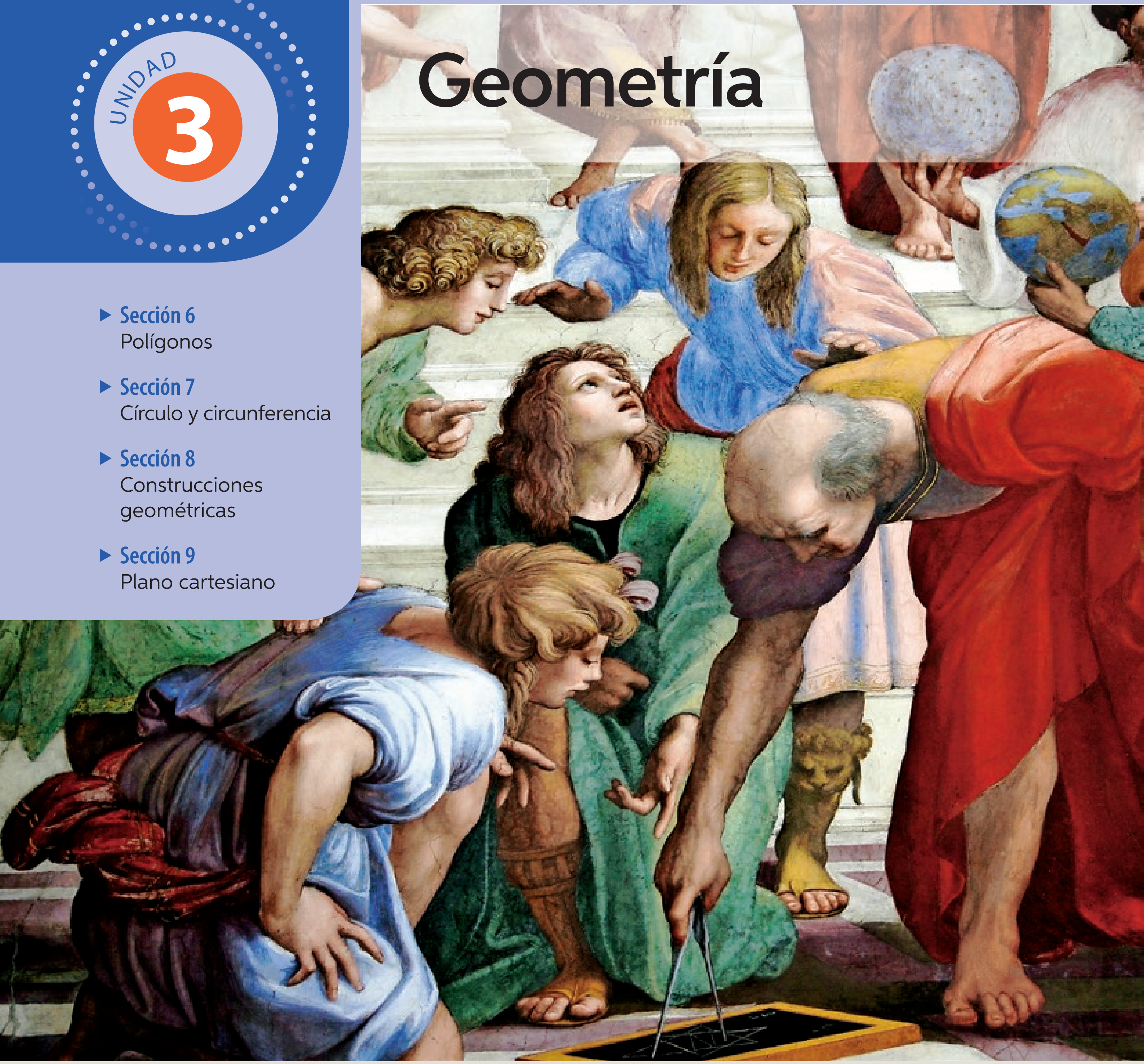
11 de ellas tienen la misma masa y una tiene mayor masa que las demás.

Para compararlas, tiene una balanza con dos platillos.

1. ¿Cómo puede determinar el comerciante, utilizando solo tres veces la balanza, cuál es la piedra más pesada? Expliquen el procedimiento y preséntenlo al curso.
2. Tomando en consideración los contenidos, las habilidades y las actitudes desarrollados en esta unidad, ¿qué nivel de dificultad representó este desafío para ustedes?, ¿por qué? ¿En qué fallaron? Respondan individualmente escribiendo en el recuadro.

UNIDAD 3

Geometría



- **Sección 6** Polígonos
- **Sección 7** Círculo y circunferencia
- **Sección 8** Construcciones geométricas
- **Sección 9** Plano cartesiano

Un símbolo de perfección

El compás ha cumplido un rol fundamental en la historia de la humanidad. Incluso para algunas culturas este instrumento era un símbolo de perfección. Por ejemplo, en la Edad Media algunas personas asociaban el compás con la acción divina, ya que según sus tradiciones, la circunferencia representaba el perfeccionismo y lo sagrado, lo que fue plasmado en diversas pinturas e ilustraciones de la época.

La imagen muestra un fragmento de la obra La escuela de Atenas, de Rafael Sanzio.

¿Por qué se dice que el círculo era un símbolo de perfección y divinidad?

¿Qué aprenderé?

Recurso digital complementario

- Descubrir relaciones de ángulos exteriores o interiores en polígonos.
- Aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios.
- Identificar el círculo como lugar geométrico y relacionar sus elementos.
- Aplicar las aproximaciones del perímetro y del área del círculo en la resolución de problemas.
- Construir objetos geométricos de manera manual o con software.

¿Cuál es su importancia?

- Desarrolla el pensamiento espacial.
- Permite manipular y comprender objetos y estructuras del entorno.

Actitudes

- Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas y la búsqueda de nuevas soluciones para problemas reales.
- Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, considerando y respetando los aportes de todos, y manifestando disposición a entender sus argumentos.
- Demostrar curiosidad, interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades.

¿Para qué otra finalidad pueden servir estos aprendizajes?

¿Conoces otros instrumentos utilizados para la construcción de figuras geométricas? ¿Cómo se utilizan? Comenta tu respuesta con tus compañeros y compañeras.

¿Qué objetos utilizados a diario tienen forma circular? ¿Por qué crees que fueron diseñados con esa forma?

Aparte de la circunferencia, ¿qué otras figuras geométricas se podrían dibujar utilizando el compás? Explica tu procedimiento para construirlas.

Sección 6

Polígonos

Actitud: Confianza en las propias capacidades.

Activo ideas previas

En parejas lean el siguiente texto y luego contesten las preguntas.

La cultura islámica no permite que se realicen dibujos de animales ni de personas, por lo que los musulmanes debieron recurrir a arabescos, diseños con flores y, sobre todo, a diseños geométricos los que llaman la atención por su aspecto simétrico y gran complejidad.

Lo particular de los diseños utilizados por los musulmanes es el uso de diversos tipos de teselaciones en la arquitectura. Un ejemplo de esto es la Mezquita Nacional de Malasia, Masjid Negara, ubicada en Kuala Lumpur. Cuenta con una capacidad para 15 000 personas y está ubicada en un terreno de 53 000 m^2 aproximadamente.

En sus muros se puede apreciar un teselado a partir de hexágonos regulares de igual tamaño y de triángulos equiláteros que se encuentran entre los hexágonos, lo que hace de este lugar de culto uno de los grandes puntos de interés para los turistas.

- ¿Qué otras figuras geométricas componen la estructura de la mezquita? Describan sus características

  ____

  ____

- ¿Qué características deben tener las figuras geométricas de una superficie para que pueda considerarse un teselado? Compartan sus respuestas con otros compañeros y compañeras.

  ____

  ____

Activo conceptos clave

Los siguientes listados muestran los conceptos clave de la sección. Con algunos de ellos, completa las propuestas que aparecen.

Ángulo interior Polígono Diagonal Vértice	Ángulo exterior Área Base Altura	Área de triángulos Área de paralelogramos Área de trapecios

- Dos palabras asociadas a longitudes en figuras geométricas: ______________________________
- Dos conceptos relacionados con los elementos de un polígono: ______________________________
- Un concepto nuevo para ti: ______________________________
- Una posible definición del concepto nuevo: ______________________________

Pienso mis procesos

Observa la imagen central y completa.

¿Qué relación hay entre la imagen y el título de la sección?

¿Qué temas crees que se abordarán en la sección?

¿En qué otras estructuras has visto regularidades como las de la imagen?

¿Qué elementos geométricos reconoces en la imagen?

¿Qué estrategias de estudio podrías usar para trabajar en esta sección?

¿Qué metas te propones cumplir al finalizar esta sección?

¿Qué debo saber?

Activa tus conocimientos previos, respondiendo la pregunta lateral, luego resuelve la actividad. Para terminar, registra tus logros.

¿Qué es un polígono?

¿Según qué criterios se clasifican los polígonos?

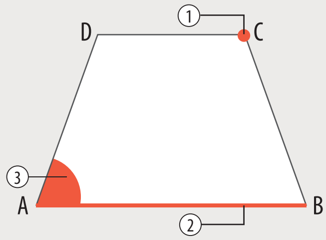
Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado ◯	Por lograr ◯
7 o más puntos	6 o menos puntos

¿Qué errores cometiste?

Identificar polígonos y sus elementos.

1 Identifica los elementos destacados en el polígono. (3 puntos)

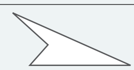
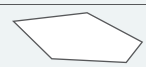
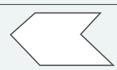


① ______________________

② ______________________

③ ______________________

2 La siguiente tabla muestra algunos polígonos. Completa y responde. (8 puntos)

Nombre	Polígono	N.° de lados	N.° de ángulos interiores	N.° de vértices
Triángulo		3		
Cuadrilátero				
Pentágono			5	
Hexágono		6		
Heptágono		7		
Octágono			8	

¿Qué relación existe entre el número de lados, de vértices y de ángulos interiores?

____

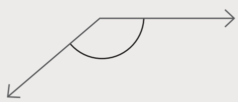
¿En qué tienes que fijarte al utilizar un transportador?

Medir y estimar ángulos

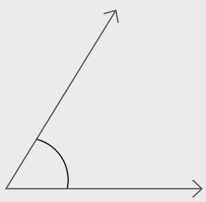
3 Mide los ángulos utilizando el transportador. (4 puntos)

a.

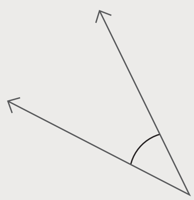
c.



b.



d.



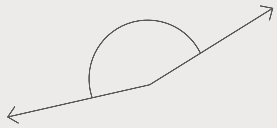
Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
5 o más puntos	4 o menos puntos

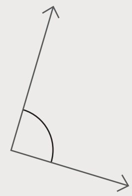
¿Qué errores cometiste?

4 Estima la medida de los ángulos. (4 puntos)

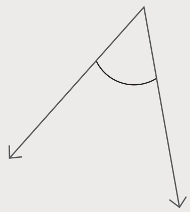
a.



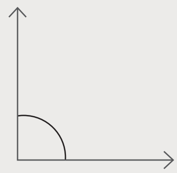
c.



b.



d.



¿Qué elementos hay que tener en consideración para clasificar los cuadriláteros?

¿Qué es el área de una figura?

Clasificar cuadriláteros y triángulos y calcular sus áreas en cuadrículas

5 **Juzga si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica en ambos casos.** (5 puntos)

a. ______ Todos los cuadriláteros tienen sus 4 ángulos interiores rectos.

b. ______ Según la medida de sus lados, los triángulos se pueden clasificar en equiláteros, isósceles y escalenos.

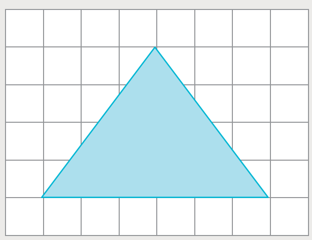
c. ______ Un rectángulo tiene dos pares de lados opuestos paralelos.

d. ______ Los rombos y romboides son paralelogramos.

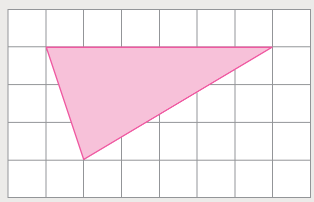
e. ______ Los trapecios tienen dos pares de lados opuestos paralelos.

6 **Calcula el área de cada una de las siguientes figuras. Considera que cada cuadrado representa 1 cm^2.** (4 puntos)

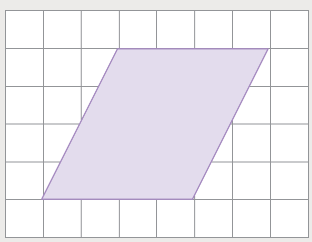
a.



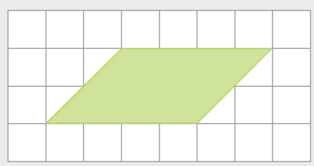
c.



b.



d.



Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
7 o más puntos	6 o menos puntos

¿Qué errores cometiste?

Lección 26

¿Cuánto suman los ángulos interiores y exteriores de un polígono?

Propósito

Analizar y descubrir relaciones de ángulos interiores y exteriores de un polígono.

¿Para qué?

Al observar nuestro entorno es posible identificar estructuras naturales como el panal de abejas, y arquitectónicas como los mosaicos, que están formadas por un conjunto de polígonos. Para que los artistas puedan construir hermosos teselados donde todas sus piezas calcen, es necesario que conozcan la relación que existe entre los lados de la figura, la medida de sus ángulos y la suma de las medidas de ellos.

Palabras clave

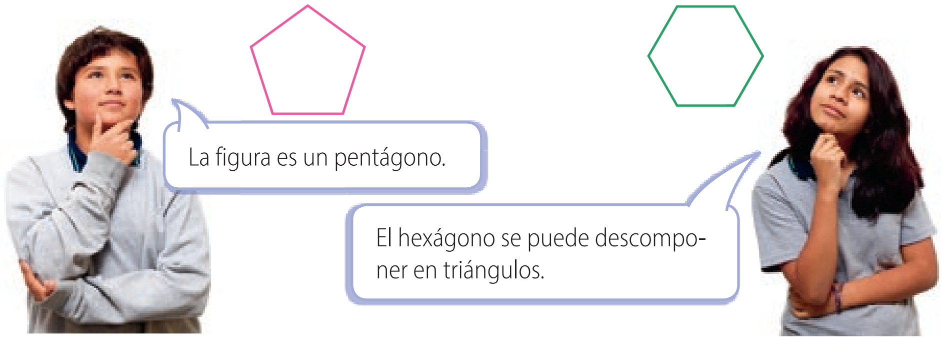
- Polígono
- Diagonal
- Vértice
- Ángulos interiores
- Ángulos exteriores

Ayuda

Un polígono es **regular** si todos sus lados y ángulos tienen la misma medida. Un polígono es **irregular** si alguno de sus lados y/o ángulos es distinto.

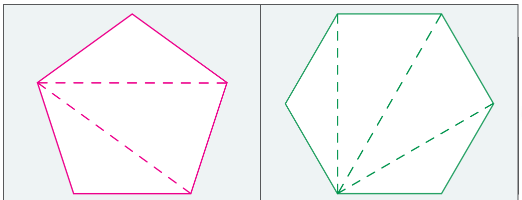
Situación 1 Suma de ángulos interiores

Carlos y Paulina tienen estos polígonos.



¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos interiores de cada polígono?

Paso 1 Dividen cada polígono en regiones triangulares. Para ello, trazan las diagonales desde un vértice de la figura.

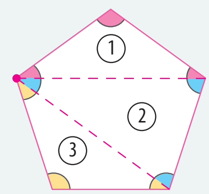
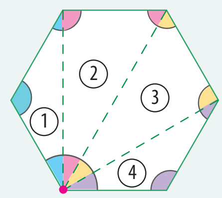


Pentágono regular	Hexágono regular

Si se escoge otro vértice, ¿varía el número de triángulos en que se descompone? ¿por qué?

Paso 2 Cuentan la cantidad de triángulos en los que ha sido descompuesto cada polígono: el pentágono en tres y el hexágono en cuatro.

Paso 3 Calculan la suma de las medidas de los ángulos interiores.

En el pentágono equivale a la suma de los ángulos interiores de tres triángulos.	En el hexágono equivale a la suma de los ángulos interiores de cuatro triángulos.
	
$\square \cdot 3 = \square$	$\square \cdot 4 = \square$

¿Cuánto suman las medidas de los ángulos interiores de un triángulo?

Observa que la cantidad de triángulos en los que se puede descomponer una figura, corresponde al número de lados del polígono menos dos unidades.

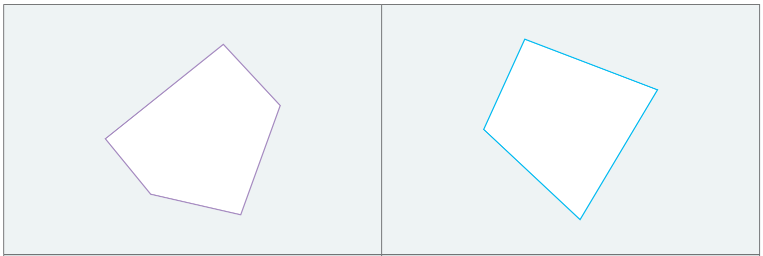
En general, la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono de **n** lados la podemos obtener mediante la expresión:

$$\boxed{S = 180° \cdot (n - 2)}$$

Situación 2 Suma de ángulos exteriores

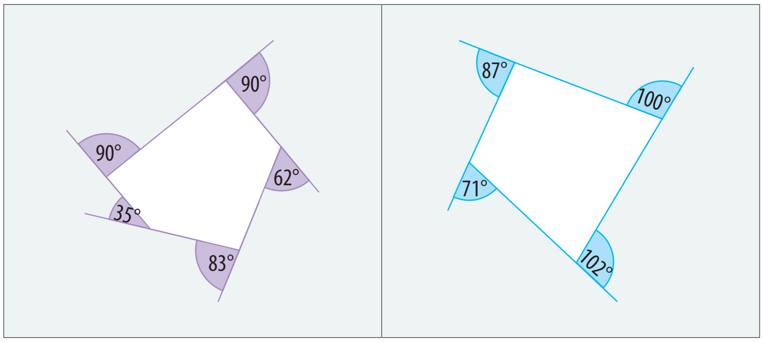
Carlos y Paulina quieren determinar cuál es la suma de las medidas de los ángulos exteriores de un polígono convexo. Para ello siguen los siguientes pasos:

Paso 1 Dibujan dos polígonos diferentes.



Pentágono irregular convexo	Cuadrilátero irregular convexo

Paso 2 Marcan los ángulos exteriores de cada polígono y los miden con el transportador.



Paso 3 Suman las medidas de los ángulos exteriores de cada polígono.

$90 + 62 + 83 + 35 + 90 = \boxed{}$

$100 + 102 + 71 + 87 = \boxed{}$

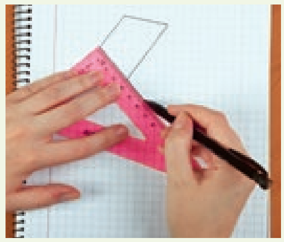
Así, en ambos casos, la suma de las medidas de los ángulos exteriores de cada polígono es ______°.

Ayuda

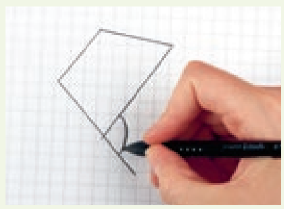
Un polígono es convexo si todos sus ángulos interiores miden menos de 180° y todas sus diagonales son interiores. Un polígono es cóncavo si al menos uno de sus ángulos interiores mide más de 180° y al menos una de sus diagonales es exterior al polígono.

Ayuda

Para marcar el ángulo exterior de una figura haz coincidir la regla en uno de los lados del polígono y prolóngalo en una sola dirección.



Marca el ángulo comprendido entre la prolongación del lado y el lado consecutivo.



Para concluir

Para calcular la suma de los ángulos de un polígono:

- La **suma de las medidas de los ángulos interiores** de un polígono se obtiene mediante la expresión:

  $S = 180° \cdot (n - 2)$

  S: suma de los ángulos interiores.
  n: número de lados del polígono.

- En todo polígono convexo la **suma de las medidas de los ángulos exteriores** es 360°.

Argumenta y comunica

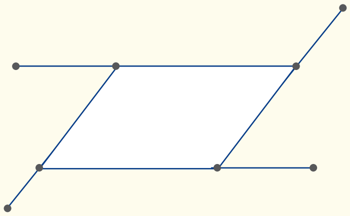
- Si conoces la suma de las medidas de los ángulos interiores de un polígono, ¿puedes determinar el número de lados de este? ¿Cómo? Discute con tus compañeros o compañeras.

Practiquemos lo aprendido

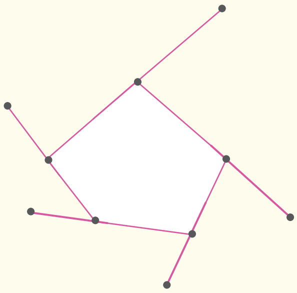
Repaso

1. **Pinta de color rojo los ángulos interiores y de color azul los exteriores.**

a.

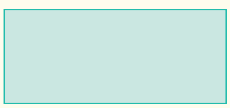


b.

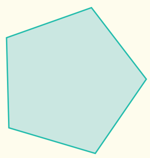


2. **Clasifica los siguientes polígonos en regulares e irregulares, luego traza las diagonales desde un vértice e indica en cuántos triángulos se descompuso cada figura.**

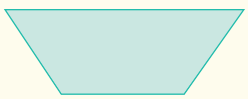
a.



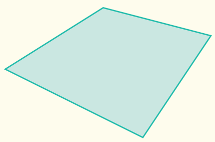
c.



b.



d.



Práctica guiada

3. **Calcula el número de lados del polígono conocida la suma de sus ángulos interiores.**

La suma de los ángulos interiores del polígono es 1080°.

Paso 1 Divide la suma de los ángulos interiores en 180°.

$$\frac{1080°}{180°} = 6$$

Paso 2 Como los triángulos son 6, el número de lados del polígono son 2 unidades más, es decir se debe sumar 2.

Luego, el polígono tiene 8 lados, es decir es un octógono.

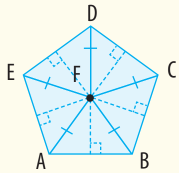
a. La suma de los ángulos interiores del polígono es 900°.

b. La suma de los ángulos interiores del polígono es 1620°.

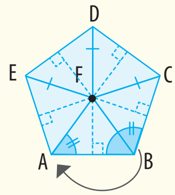
c. La suma de los ángulos interiores del polígono es 1440°.

4. **Calcula la medida del ángulo interior de cada polígono regular.**

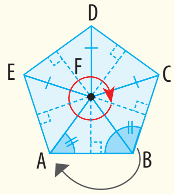
Paso 1 Marca el punto que divide a cada lado en dos partes iguales. Traza una recta perpendicular al lado en cada uno de estos puntos. Utiliza el punto de intersección de las rectas trazadas para descomponer la figura en triángulos trazando segmentos de recta desde cada vértice de la figura hasta el punto de intersección F.



Paso 2 Los segmentos trazados al punto F son de igual medida, por lo que todos los triángulos formados serán isósceles. Al ser un polígono regular, las bases de cada triángulo tienen la misma longitud, es así como $\measuredangle CBF$ es congruente a $\measuredangle BAF$. y $m\measuredangle CBA = 2\, m\measuredangle BAF$.



Paso 3 El $\measuredangle AFB$ representa la quinta parte del ángulo marcado en rojo (360°). Es así como:

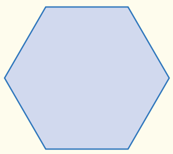


$$m\,\measuredangle AFB = \frac{360°}{5} = 72°$$

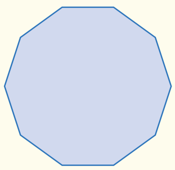
Paso 4 Luego, como la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo es 180°, 180° – 72° = 108°

Es así como la medida de $\measuredangle CBA$ y de todos los ángulos interiores de este polígono es 108°.

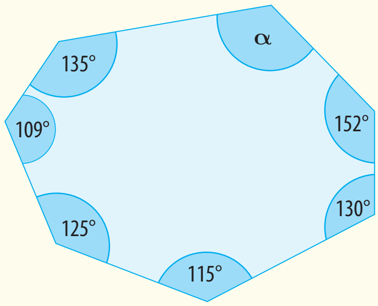
a.



b.



5. Calcula la medida del ángulo α.



Paso 1 Calcula la suma de los ángulos interiores.
Al ser un heptágono:

$S = 180° \cdot (7 - 2) = 900°$

Paso 2 Suma los valores de los ángulos conocidos.

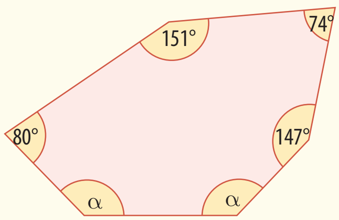
$152° + 130° + 115° + 125° + 109° + 135° = 766°$

Paso 3 Resta el resultado del paso 2 al resultado del paso 1:

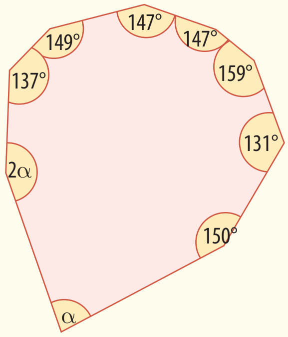
$900° - 766° = 134°$

Luego, la medida del ángulo es $\alpha = 134°$.

a.



b.



Aplica

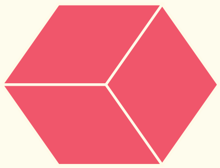
6. Completa la siguiente tabla.

Polígono regular	Medida de cada ángulo interior	Medida de cada ángulo exterior
Triángulo		
Cuadrilátero		
Pentágono		
Hexágono		
Dodecágono		

7. Resuelve los problemas.

a. Natalia se ha comprado un escritorio cuya cubierta tiene forma pentagonal. El vendedor le dijo que dos de los ángulos interiores de la cubierta son rectos y la suma de otros dos es 300°. ¿Cuánto mide el quinto ángulo?

b. Antonio está diseñando un puzle con piezas de madera. Una de las piezas tiene forma de un hexágono regular y quiere separarla en 3 rombos, tal como se muestra en la figura. ¿En qué ángulos debe hacer los cortes desde el centro para que las piezas calcen?



8. **Evalúa.** ¿Es posible que el ángulo exterior de un pentágono regular mida 70°?

9. **Desafío.** Ariel dibuja una figura en la pizarra. Comienza desde un punto A, avanza 10 cm y luego gira en un ángulo de 144°, luego avanza la misma distancia y gira en el mismo ángulo y repite el proceso hasta obtener una figura cerrada. ¿Qué figura obtuvo Ariel? Justifica tu respuesta.

Reflexiono

¿Por qué piensas que se utilizan preferentemente triángulos para calcular la suma de los ángulos interiores de un polígono? Comenta tu respuesta con un compañero o compañera.

Refuerzo

1. Calcula la medida que debe tener un ángulo interior de un polígono regular de 15 lados.
2. Se dibuja un polígono regular en el cual cada ángulo exterior mide la mitad que cada ángulo interior. ¿Cuántos lados tiene el polígono?

Lección 27

¿Cómo calcular el área de algunos polígonos?

Propósito

Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios.

¿Para qué?

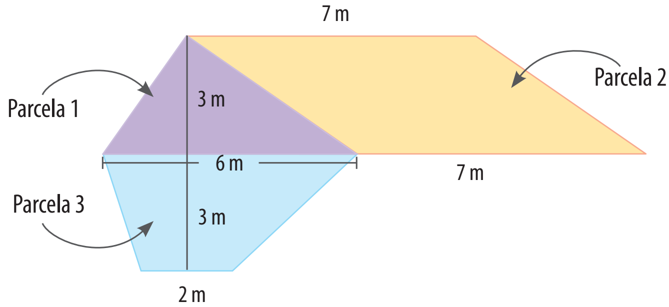
Cuando un maestro necesita cubrir el patio de una casa con cerámica o baldosas necesita calcular cuál será el área total en la cual trabajará. Como los patios poseen diferentes formas, puede dividir el área total en polígonos con el fin de saber cuánta cerámica y pegamento es necesario comprar para poder terminar el trabajo.

Palabras clave

- Área
- Base
- Altura
- Área de triángulo
- Área de paralelogramo
- Área de trapecio

Josefa necesita organizar el cultivo de un nuevo terreno, para ello debe calcular el área total de este.

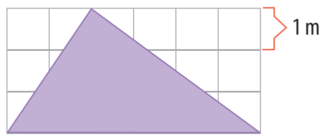
Ha dibujado el siguiente esquema del terreno y realizado las mediciones necesarias.



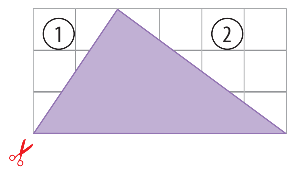
Situación 1 Calcular el área de un triángulo

Josefa calcula primero el área de la parcela 1.

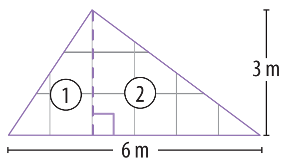
Paso 1 Inscribe el triángulo en un rectángulo con la medida que muestra la imagen de la parcela, teniendo en cuenta que la base del triángulo coincide con la base del rectángulo y la altura del triángulo es igual al ancho del rectángulo.



Paso 2 Recorta el triángulo central. El papel sobrante tendrá la forma de dos triángulos rectángulos.



Paso 3 Superpón los triángulos rectángulos 1 y 2 en el central (morado).



Observa que al unir los dos triángulos se forma otro con la misma altura y la misma base, por lo tanto tiene la misma superficie que el triángulo inicial.

Así, el rectángulo se puede descomponer en dos triángulos que tienen la misma superficie; entonces la superficie del rectángulo es el doble de la superficie del triángulo.

Paso 4 Calcula el área de un triángulo (A) que equivale a calcular el área de un rectángulo y dividir por 2 este resultado.

$$A = \frac{6 \cdot 3}{2} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

Luego, el área de la parcela 1 es ____________ m^2.

En general, para calcular el área de un triángulo (A), se multiplica la longitud de un lado (b) por la altura correspondiente (h) y el resultado se divide en 2.

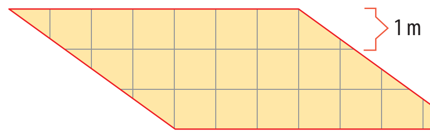
$$A = \frac{b \cdot h}{2}$$

Situación 2 Calcular el área de un paralelogramo

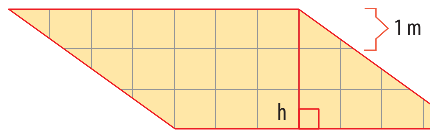
Luego, Josefa calcula el área de la parcela 2, que tiene forma de paralelogramo.

¿Qué características tiene un paralelogramo? ¿Cómo se llama el de la imagen?

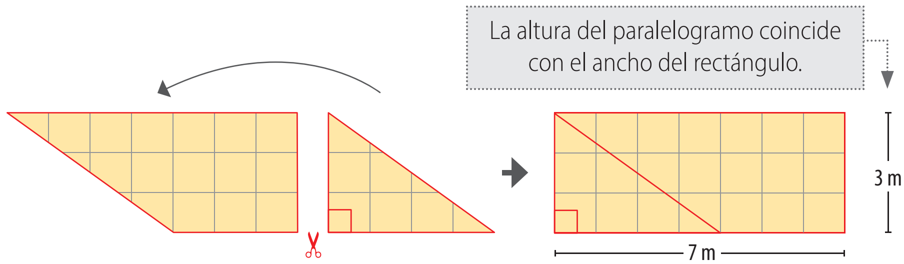
Paso 1 Dibuja un paralelogramo sobre un papel cuadriculado, con las medidas que muestra la imagen de la parcela.



Paso 2 Traza desde un vértice la altura del paralelogramo.



Paso 3 Recorta el triángulo formado y lo traslada como indica la imagen.



Observa que al recortar las figuras y unirlas se ha formado un rectángulo.

Paso 4 Calcula el área del paralelogramo (A), que equivale a calcular el área de este rectángulo.

$$A = 7 \cdot 3 = \boxed{}$$

Luego, el área de la parcela 2 es ______________ m^2

En general, para calcular el área de un paralelogramo (A) se multiplica la medida de un lado (b) por la altura correspondiente (h).

$$A = b \cdot h$$

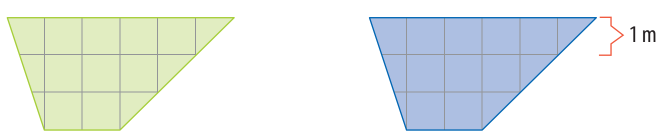
¿Servirá esta fórmula para calcular el área de un rombo?, ¿por qué? Justifica con un ejemplo o contraejemplo.

Situación 3 Área de un trapecio

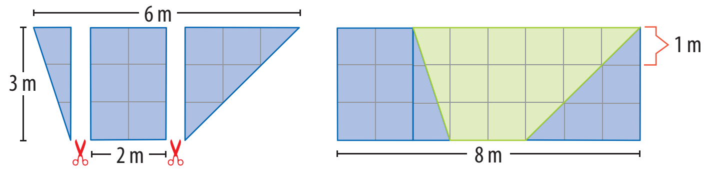
Finalmente calculará el área de la parcela 3, la que tiene forma de trapecio.

¿Qué diferencia a los trapecios de los paralelogramos?

Paso 1 Dibuja dos trapecios congruentes de distinto color, teniendo presente que cada cuadrado representa 1 m^2.



Paso 2 Recorta en uno de los trapecios, dos triángulos rectángulos y un rectángulo. Luego, con estas partes y el otro trapecio forma un rectángulo.



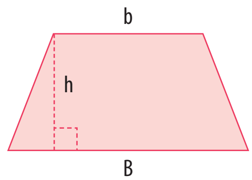
Observa que se ha formado un rectángulo, cuyo ancho coincide con la altura del trapecio (3 m) y el largo corresponde a la suma de sus bases, en este caso 6 cm + 2 cm = 8 cm.

Paso 3 Para calcular el área de un trapecio (A), calcula el área del rectángulo que se ha formado y este resultado lo divide en dos, ya que la superficie del rectángulo equivale al doble de la superficie del trapecio.

$$A = \frac{6+2}{2} \cdot 3 = \boxed{}$$

Luego, el área de la parcela 3 es ______________ m^2.

En general, para calcular el área de un trapecio (A), se suman las medidas de sus bases (B y b) y este resultado se multiplica por la altura del trapecio (h), luego se divide por 2.



$$A = \frac{B+b}{2} \cdot h$$

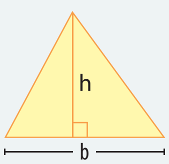
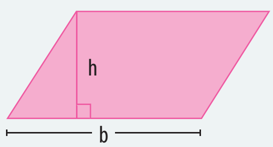
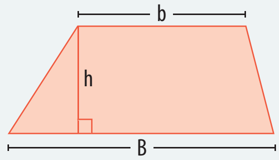
Finalmente, Josefa suma las áreas de las tres parcelas:

$$\boxed{}\ m^2 + \boxed{}\ m^2 + \boxed{}\ m^2 = \boxed{}\ m^2$$

La superficie total del terreno para el cultivo es de ______________ m^2.

Para concluir

- Para calcular el **área (A) de un polígono** este se puede descomponer en otras figuras, o bien utilizar la fórmula respectiva.

Fórmula para calcular el área		
Triángulo	Paralelogramo	Trapecio
		
$A = \frac{b \cdot h}{2}$	$A = b \cdot h$	$A = \frac{(B+b)}{2} \cdot h$

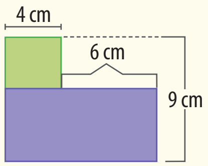
Argumenta y comunica

- Observa el terreno de Josefa. ¿En qué otras figuras se podría haber descompuesto? Propón una descomposición y decide si es más conveniente que la usada por ella y justifica tu respuesta.

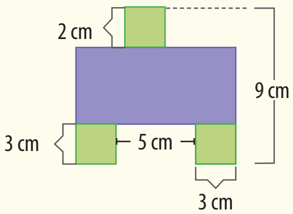
Repaso

1. **Calcula el área (A) de las siguientes figuras compuestas por cuadrados verdes y rectángulos morados.**

a.



b.



2. **Calcula las operaciones.**

a. 0,2 + 5,23 – 4

b. (0,5 + 3,2) : 4

c. (4,62 + 7,3) • (4,3 + 9,2)

d. 6,2 : 2 + (46,7 – 3,2)

3. **Evalúa si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.**

a. ______ En un trapecio, sus cuatro lados son paralelos.

b. ______ El rombo y el romboide son paralelogramos.

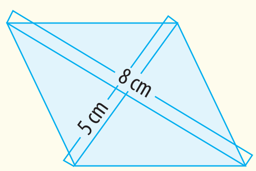
c. ______ Las diagonales de un rombo se intersecan en 90°.

d. ______ Los 4 lados de cualquier romboide son congruentes.

e. ______ El triángulo es el único polígono que no tiene diagonales.

Práctica guiada

4. **Calcula el área (A) de los siguientes rombos.**



Paso 1 Observa que las diagonales del rombo forman 4 triángulos rectángulos congruentes.

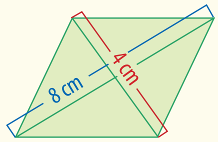
Paso 2 Calcula el área de uno de los triángulos.

$$A = \frac{2{,}5 \cdot 4}{2} = \frac{10}{2} = 5$$

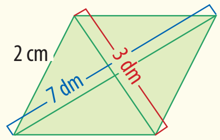
Paso 3 Al ser los triángulos congruentes, el área del rombo corresponde a cuatro veces el área de uno de los triángulos.

Luego, el área del rombo es 20 cm^2.

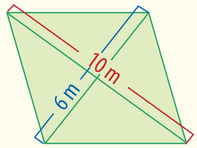
a.



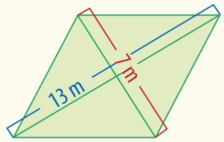
c.



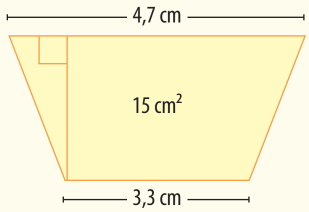
b.



d.



5. **Calcula la medida de la altura de cada trapecio.**



Paso 1 Observa que las medidas que se conocen son la bases del trapecio y su área.

Paso 2 Reemplaza los valores en la fórmula del área del trapecio.

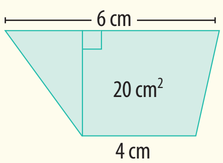
$$15 = \frac{3{,}3 + 4{,}7}{2} \cdot h$$

$$15 = 4h \;/ :4$$

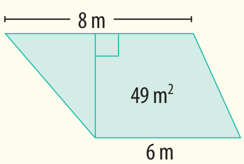
$$3{,}75 = h$$

Luego, la medida de la altura del trapecio es 3,75 cm.

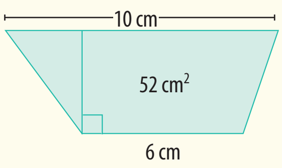
a.



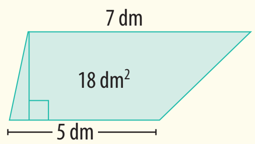
c.



b.



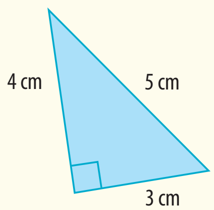
d.



Aplica

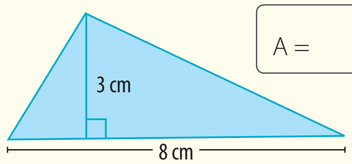
6. Calcula el área (A) de cada triángulo.

a.



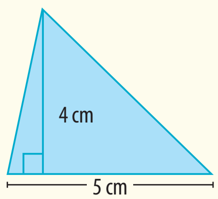
A =

b.



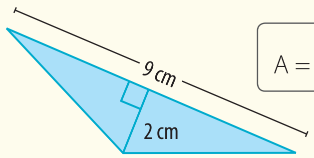
A =

c.



A =

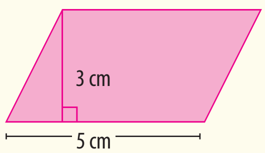
d.



A =

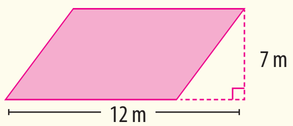
7. Calcula el área (A) de cada paralelogramo.

a.



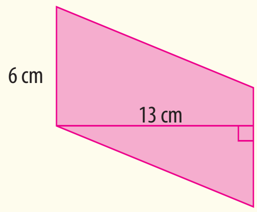
A =

b.



A =

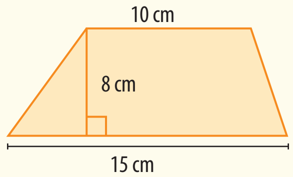
c.



A =

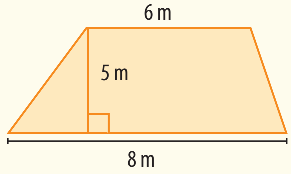
8. Calcula el área (A) de cada trapecio.

a.



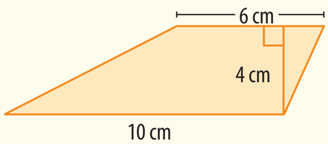
A =

b.



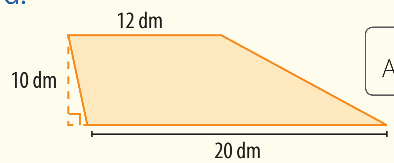
A =

c.



A =

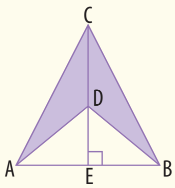
d.



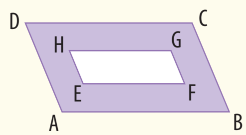
A =

9. Calcula el área (A) pintada.

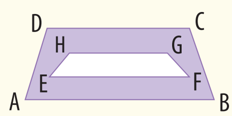
a. AB = 9 cm, CE = 10 cm y CD = 6 cm.



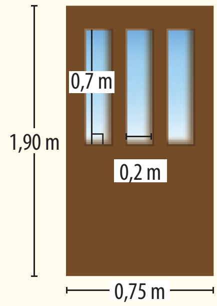
b. ABCD y EFGH son paralelogramos de alturas 10 cm y 3 cm, y bases 12 cm y 8 cm, respectivamente.



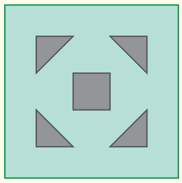
c. ABCD es un trapecio de bases AB = 12 cm, CD = 8 cm y altura de 6 cm. Además, EFGH es un trapecio de bases EF = 8 cm, GH = 5 cm y altura h = 2 cm.



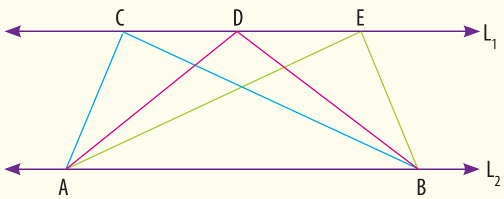
10. Un tarro de barniz alcanza para pintar aproximadamente 11 m^2. Un carpintero debe barnizar un lado de las puertas de un condominio. Si cada una de ellas es como se muestra en la imagen, es decir, tiene tres ventanas rectangulares iguales, ¿cuántas puertas puede barnizar con un tarro?



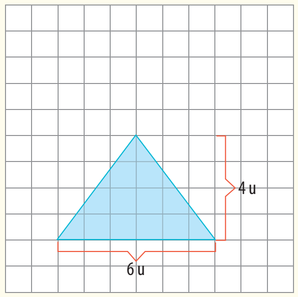
11. La plaza de un pueblo tendrá la forma de un cuadrado de lado 50 m. En su interior, tal como se aprecia en la figura, se colocará pasto en cinco lugares: cuatro de ellos tendrán la forma de un triángulo rectángulo isósceles de catetos de 10 m y el otro será un cuadrado de lado 10 m, el resto será baldosas. Si el m^2 de pasto cuesta $ 2000 y el m^2 de baldosas cuesta $ 6500, ¿cuánto dinero se gastará en pasto y en baldosas?



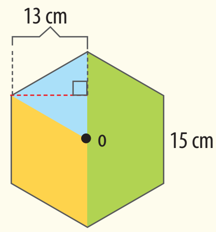
12. Compara el área de los triángulos ABC, ABD y ABE sabiendo que L1 // L2.



13. En la siguiente cuadrícula se dibujó un triángulo. Se desea dibujar otro triángulo de igual base, pero con la condición de que su área sea el doble de la original. ¿En cuánto se debe aumentar la medida de la altura para cumplir con la condición?



14. **Desafío.** Ignacia diseñó una figura para cubrir una pared rectangular de 3,9 metros de largo y 3 m de alto. Ella repetirá la figura sin superponerla y sin dejar espacios en blanco en la superficie de la pared.

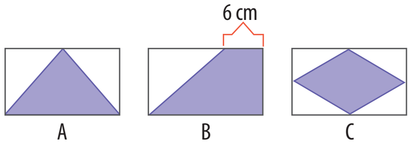


Si la figura está compuesta por un hexágono regular dividido en un triángulo equilátero, un paralelogramo y un trapecio, ¿cuántos metros cuadrados quedaron pintados de color verde, de amarillo y de celeste?

* Nota: Observa que el vértice del triángulo está justo en el centro (O). Además, puedes completar los espacios blancos con partes del diseño base.

Reflexiono

Se desea cubrir un área rectangular de lados 30 cm y 40 cm con cuatro baldosas rectangulares de largo 20 cm y alto 15 cm, de forma que el área total cubierta tenga la menor región blanca posible. Para ello hay tres tipos de baldosas:



¿Qué método utilizarías para saber cuál de los tres modelos se debe elegir? Compara tu respuesta con la de tus compañeros y compañeras.

Refuerzo

1. Se afirma que en un rombo de diagonales de 3 cm y de 4 cm, si se duplica la longitud de sus diagonales su área también se duplicará. ¿Estás de acuerdo? Justifica tu respuesta.
2. Un soldador debe construir una placa de metal siguiendo el diseño de un trapecio de bases de 60 cm y de 20 cm. Si el cliente le indica que el diseño debe tener 560 cm^2 de material, ¿cuánto debe medir la altura de la placa?

Actitud: Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, considerando y respetando los aportes de todos.

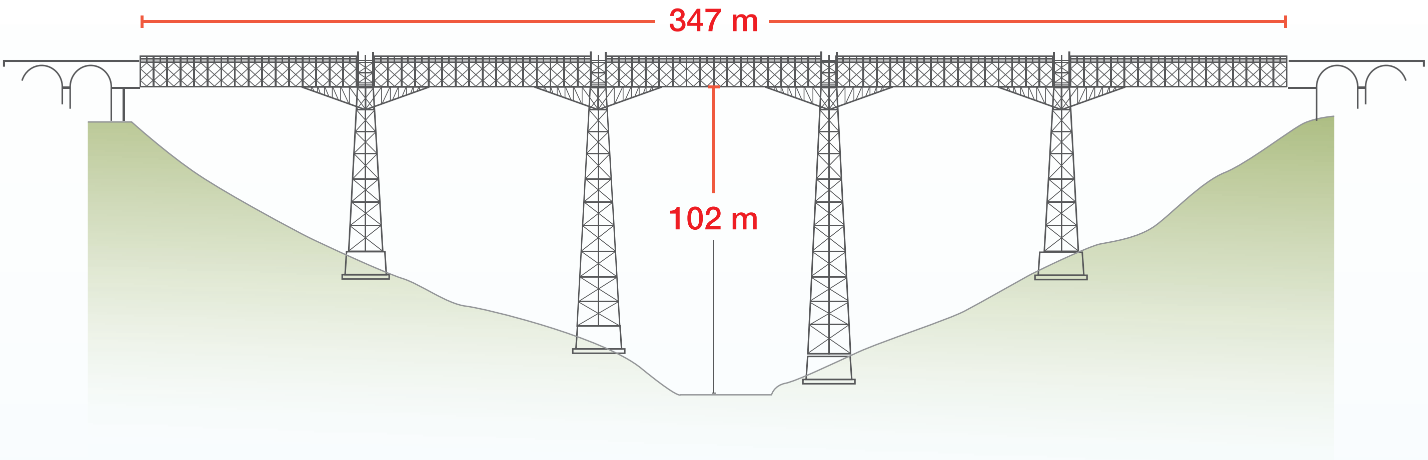
Viaducto del *Malleco*

El viaducto de Malleco es un puente ferroviario ubicado en la localidad de Collipulli, Región de la Araucanía. Fue inaugurado en el año 1890 y es una de las obras de ingeniería más importantes de nuestro país y desde 1990 es considerado monumento nacional.

El puente se encuentra sobre el río Malleco y su construcción hizo que la zona central de Chile y el sur se conectaran, jugando un rol fundamental en el crecimiento de la actividad económica.

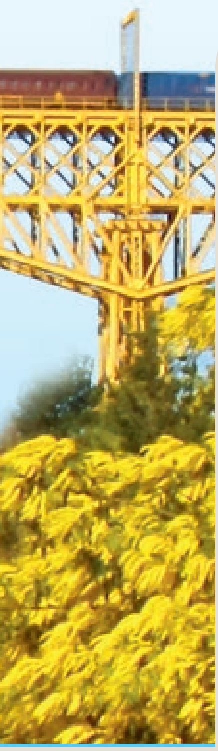
El puente fue diseñado siguiendo los planos del ingeniero chileno Victoriano Aurelio Lastarria y sus piezas fueron construidas en Europa por una empresa francesa.

El transporte de la estructura debió ser en grandes embarcaciones, una de las cuales naufragó, lo que hizo construir nuevamente las piezas perdidas.



Su estructura

El puente tiene una longitud de 347 m y su altura es de 102 m. Está compuesto por acero y sus cuatro pilares principales fueron reforzados de estructuras diagonales para darle una mayor resistencia. El pilar más alto tiene una altura de 75 m aproximadamente.



ACTIVIDAD EN GRUPO

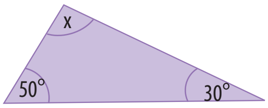
Reúnanse en grupos de 4 integrantes y realicen las actividades propuestas:

1. Observen la estructura del puente. ¿Por qué creen que el triángulo es una de las estructuras más utilizadas en obras de la ingeniería? Fundamenten sus respuestas y compárenlas con la de los demás grupos.
2. Investiguen obras famosas del mundo construidas a base de polígonos.
   a. ¿Qué polígonos se utilizan en su estructura? Muestren imágenes de ellas e identifiquen sus polígonos marcándolos con lápices de distinto color.
   b. ¿Qué tipo de mantenimiento deben tener para que estén en óptimas condiciones?
3. Si en otra ciudad se construyera un puente como el de Malleco, con cinco pilares triangulares de altura de 35 m y base de 7 m, ¿cuál sería el área de las cuatro caras de un pilar?
4. Dibujen en una cartulina blanca la estructura de uno de los pilares del puente con una altura de 50 cm. Identifiquen en ella un trapecio, un triángulo y un paralelogramo y midan sus lados, la altura y sus ángulos utilizando regla y transportador.
   a. ¿Cuál es el área de cada polígono?
   b. ¿Cuánto suman los ángulos interiores del paralelogramo?¿Y del triángulo?
   c. Intercambien sus trabajos con el de los demás grupos y comenten las propiedades y estrategias que utilizaron para desarrollar la actividad.

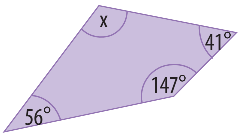
¿Cómo voy?

Lección 26. Analizar y descubrir relaciones de ángulos interiores y exteriores de un polígono

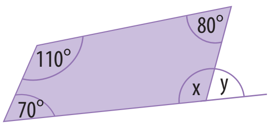
1. Calcula la medida del o los ángulo(s) que falta(n).

a.


x =

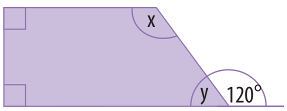
b.


x =

c.


x =

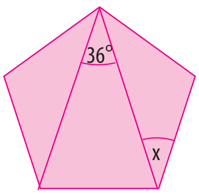
y =

d.


x =

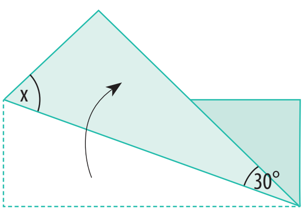
y =

2. Claudia dibuja en un trozo de cartón un pentágono regular. A su vez, dibuja en su interior un triángulo en donde uno de sus ángulos coincide con un vértice del pentágono, como el de la figura. ¿Cuál es la medida del ángulo x?

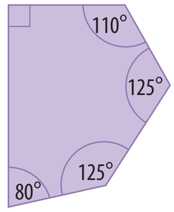


3. Una empresa automotriz diseña una pieza de auto la cual tiene una forma de polígono regular de 11 lados. ¿Cuál es la razón entre la suma de sus ángulos interiores y la suma de sus ángulos exteriores?

4. Juan ha doblado una cartulina con forma rectangular tal como se muestra en la figura. ¿Cuál es la medida del ángulo **x**?

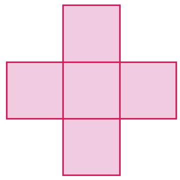


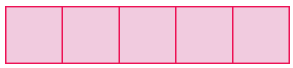
5. Para un proyecto de la clase de tecnología, Javier ha dibujado un esquema del parque que está cerca de su casa. Sin embargo Verónica, su compañera de grupo, dice que el esquema no es correcto, ya que la información es contradictoria. ¿Quién tiene la razón? Justifica.

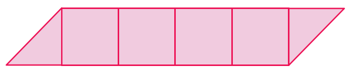


Lección 27. Desarrollar y aplicar la fórmula del área de triángulos, paralelogramos y trapecios

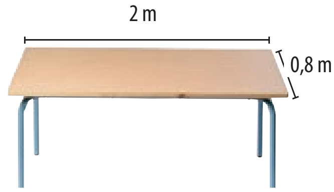
6. ¿Cuáles de los siguientes polígonos tienen la misma área?

Polígono A


Polígono B


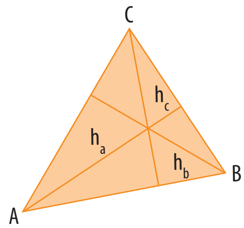
Polígono C


7. Se quiere barnizar la cubierta rectangular de una mesa como la de la imagen. Si las dimensiones son las que se indican, ¿cuántos metros cuadrados se quieren barnizar?



8. Las dimensiones de una pantalla led de 32 pulgadas son 88,5 cm de ancho y 49,81 cm de alto, mientras que las de una pantalla de 42 pulgadas son de 92,98 cm de ancho y 52,3 cm de alto. ¿Cuál es la diferencia entre las superficies de ambas pantallas?

9 Calcula lo pedido para el triángulo ABC. Considera que en cada ejercicio los datos van cambiando.

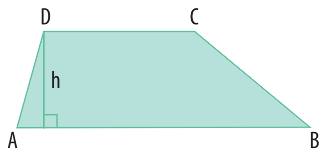


a. AC = 7 cm h_b = 6 cm Área: _____ cm²

b. AB = 8 cm h_c = 5 cm Área: _____ cm²

c. BC = _____ cm h_a = 4 cm Área: 10 cm²

10 Calcula lo pedido para el polígono ABCD. Considera que en cada ejercicio los datos van cambiando.

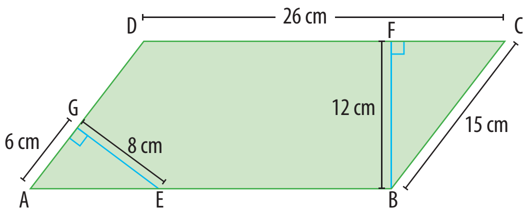


a. AB = 14 cm CD = 10 cm
h = 7 cm Área: _____

b. AB = 15 cm CD = 9 cm
h = _____ Área: 120 cm²

c. AB = 13 cm CD = _____
h = 6 cm Área: 60 cm²

11 Los lados del paralelogramo ABCD son 26 cm y 15 cm. En él se dibujan dos triángulos rectángulos, como se muestra en la figura.



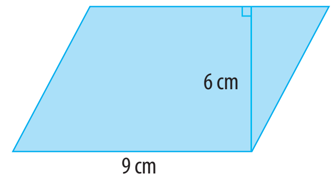
a. ¿Cuál es el área del paralelogramo ABCD?

b. Si el área del triángulo BCF es 54 cm², ¿cuánto mide su base?

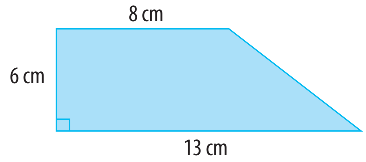
c. ¿Cuál es el área del polígono EBFDG?

12 Calcula el área de cada polígono.

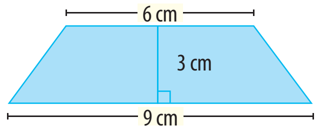
a.



b.

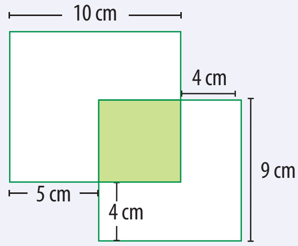


c.



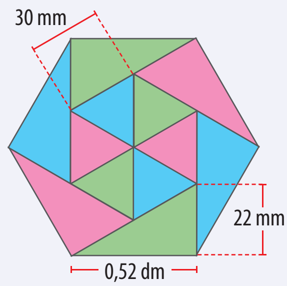
Desafío de integración

1. Para hacer un trabajo de artes visuales, Marcelo ha recortado dos papeles de cartulina con forma cuadrada y los ha superpuesto tal como se muestra en la figura.



¿Cuál es el área de la parte sombreada?

2. El diseño para decorar un mural se compone de una pieza que tiene como base un hexágono regular compuesta a su vez por 6 triángulos rectángulos y 6 triángulos equiláteros.



a. ¿Cuál es el área de cada color?

b. ¿Cuál es el área total del diseño?

Resolución de problemas

Actitud: Demostrar esfuerzo, y rigor frente a la resolución de problemas

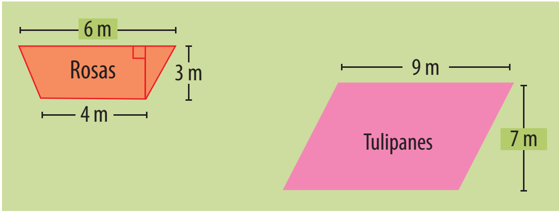
Plantear una ecuación o una inecuación

Cuando en un problema hay un dato desconocido, puedes plantear una expresión en lenguaje algebraico, en la cual se relacionan los datos que se entregan y la incógnita a través de una ecuación o una inecuación.

Estrategias

- Hacer un diagrama.
- Usar ensayo y error sistemático.
- Usar problemas más sencillos.
- Hacer una tabla.
- Encontrar un patrón.
- **Plantear una ecuación o una inecuación.**
- Usar razonamiento lógico.

El área total del jardín de la familia González es de 510 m^2. La familia decide plantar dos tipos de flores en espacios definidos como muestra el esquema y en lo restante plantarán pasto y tréboles. ¿Cuál es el área disponible para plantar pasto y tréboles?



¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema?

¿Qué datos tienes para resolver?

Crea un plan para resolver

Para resolver el problema, puedes aplicar la estrategia **Plantear una ecuación o una inecuación**. Para ello, calcula el área que cubrirán las rosas y los tulipanes y relaciónalas con la superficie total a través de una expresión algebraica que te permita resolver el problema.

Aplica la estrategia

A_1 = Área de tulipanes $\longrightarrow A_1 = b \cdot h$

A_2 = Área de rosas $\longrightarrow A_2 = \frac{(b + B)}{2} \cdot h$

x = Área de pasto y tréboles.

El área total del jardín es la suma del área de pasto y tréboles más el área de rosas y la de tulipanes. Entonces, es posible obtener el área de pasto y tréboles a través de la expresión:

$$A_1 + A_2 + x = 510$$

Resuelve

Verifica la respuesta

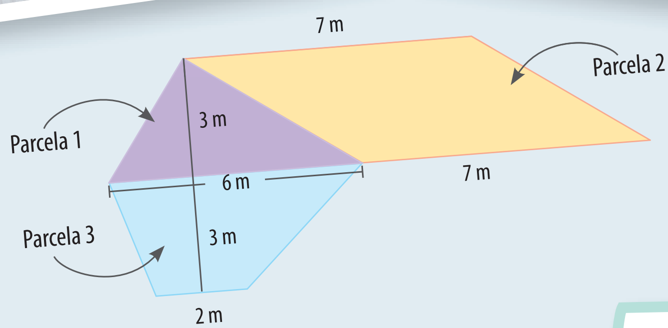
Comunica la respuesta

Vuelvo a mis procesos

Observa las imágenes centrales y completa.

¿Qué aprendizajes nuevos adquiriste en la sección de polígonos?

¿Tuviste alguna dificultad durante el desarrollo de la sección? ¿Cómo la resolviste?



¿Qué elementos de la sección de polígonos te motivaron? ¿Por qué?

De las metas que te propusiste al inicio, ¿cuáles cumpliste y cuáles te faltaron?

¿De qué manera te organizaste para desarrollar las actividades en equipo? ¿Por qué piensas que es necesario este aspecto?

Sección 7

Actitud: Demostrar curiosidad, interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades.

Círculo y circunferencia

Activo ideas previas

Junto con un compañero o una compañera lean el texto y reflexionen en torno a las preguntas propuestas.

El sistema de riego por pivote central es una herramienta fundamental para la agricultura, ya que logra abarcar extensas áreas y además optimizar la cantidad de agua utilizada.

Su mecanismo consiste en un aspersor que divide en gotas muy finas el flujo de agua y que gira sobre su eje, llevando el agua para riego al área determinada. Tal proceso forma patrones circulares en el lugar.

Chile también ha implementado esta tecnología. En Coquimbo, por ejemplo, se utiliza básicamente para el cultivo de hortalizas, permitiendo que el riego y la producción de los terrenos sea más eficaz.

Los diámetros de dichos patrones varían según las condiciones del terreno y de la producción. Incluso existen círculos que alcanzan a tener un kilómetro de diámetro.

- Si se establece un terreno rectangular para instalar un sistema de riego de pivote central, ¿cómo estimarían el área que queda sin regar? Presenten sus ideas frente al curso.

____

____

- ¿Es posible que utilizando este mecanismo el área de riego sea una figura geométrica distinta a la que se muestra en la imagen? Fundamenten su respuesta.

____

____

Activo conceptos clave

Los siguientes listados muestran los conceptos clave de la sección. Con algunos de ellos, completa las actividades que aparecen.

Circunferencia Lugar geométrico Centro Círculo	Diámetro Radio Contorno	Perímetro del círculo Área del círculo Cuadrado inscrito Cuadrado circunscrito

- Dos conceptos que compartan características similares: _______________________________________
- Dos conceptos que se relacionen con la longitud: _______________________________________
- Un concepto nuevo para ti: _______________________________________
- Una posible definición del concepto nuevo: _______________________________________

Pienso mis procesos

Observa la imagen central y completa.

Cuando la rueda de la bicicleta gira, ¿qué forma describe la válvula del aire?

¿Qué sucedería si los rayos de las bicicletas de la imagen fuesen más pequeños?

¿Qué otros objetos usados a diario tienen esta forma?

¿Cuáles piensas que serán los temas que abordará esta lección?

¿Qué estrategias de estudio podrías usar para trabajar en esta sección?

¿Qué metas te propones cumplir al finalizar esta sección?

¿Qué debo saber?

Activa tus conocimientos previos respondiendo la pregunta lateral, luego resuelve la actividad. Para terminar, registra tus logros.

¿Cuántos números decimales puede haber entre un par de números dados? Justifica.

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
8 o más puntos	7 o menos puntos

¿Qué dificultades tuviste?

Identificar números decimales

1. Aproxima los números decimales según como se indica en cada caso. (6 puntos)
   a. Aproxima a la unidad 3,45. ____________
   b. Aproxima a la décima 134,09. ____________
   c. Aproxima a la centésima 349,894. ____________
   d. Aproxima a la décima 45,96. ____________
   e. Aproxima a la unidad 3,999. ____________
   f. Aproxima a la decena 178,987. ____________

2. Escribe un número decimal cuyo valor esté entre los dos números dados en cada situación. (6 puntos)
   a. 9,78 y 10,23. ____________
   b. 0,25 y 1,2. ____________
   c. 6,78 y 6,93. ____________
   d. 17,24 y 17,252. ____________
   e. 0,2 y 0,21. ____________
   f. 8,967 y 8,968. ____________

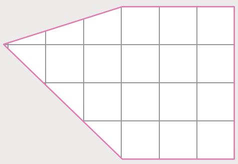
3. Identifica el número decimal que conserva la igualdad en cada caso. (4 puntos)
   a. $3 \cdot \boxed{} = 5,1$
   b. $5 \cdot \boxed{} = 7$
   c. $9 \cdot \boxed{} = 3,6$
   d. $8 \cdot \boxed{} = 5,6$
   e. $4 \cdot \boxed{} = 9,2$
   f. $2 \cdot \boxed{} = 7,2$
   g. $6 \cdot \boxed{} = 16,8$
   h. $11 \cdot \boxed{} = 45,1$

¿Qué es el área de una figura?

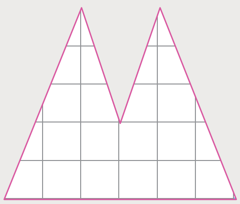
Calcular áreas y perímetros de figuras geométricas

4. Estima el área de las siguientes figuras. Para ello, considera que cada cuadrado tiene 1 cm de lado. (2 puntos)

a.



b.



¿Qué es el perímetro de una figura?

¿Con qué unidades se representa el área y el perímetro?

¿Podemos usar las mismas unidades para área y perímetro?

Si aumenta o disminuye el área de una figura, ¿el perímetro también lo hace? ¿Por qué?

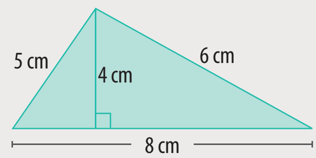
Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
10 o más puntos	7 o menos puntos

¿Qué errores cometiste?

5 Calcula el área y el perímetro de cada figura. (4 puntos)

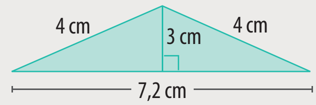
a.



A =

P =

b.



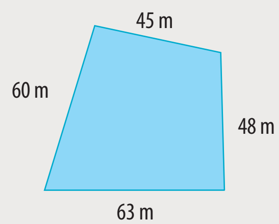
A =

P =

6 Completa la tabla. (7 puntos)

mm	cm	dm	m	dam	hm	km
			9,25	0,925		
		2,31				
47						
	36 601					

7 Don Jorge necesita cercar un terreno sembrado. ¿Cuántos metros de alambre necesitará para rodearlo con cuatro corridas de alambre? (2 puntos)



8 Valeria y Santiago están tejiendo frazadas. (2 puntos)

a. ¿Cuál de los dos niños ha tejido más?

b. Explica qué hiciste para responder la pregunta anterior.

Lección 28

¿Qué son una circunferencia y un círculo?

Taller El juego más justo

Reúnanse en grupos de tres personas y discutan la siguiente situación.

Para celebrar el aniversario del colegio, los alumnos de 7.° básico han diseñado distintos juegos. Uno de ellos consiste en que algunos estudiantes intentarán acertar al tarro y solo aquellos que lo logren pasarán a la siguiente etapa. Algunos compañeros discuten sobre la organización de los jugadores para hacer el juego más justo.

Propuesta de Felipe

Propuesta de Ricardo

Propuesta de Valeria

Propuesta de Daniela

1. Dibujen una representación geométrica de cada propuesta.
2. Observen las propuestas, ¿en cuál de ellas todos los jugadores tienen las mismas posibilidades de ganar? ¿Por qué?
3. ¿Qué característica presenta la propuesta que escogieron en el punto anterior que no poseen las demás?

Propósito

Caracterizar la circunferencia y el círculo como lugares geométricos.

¿Para qué?

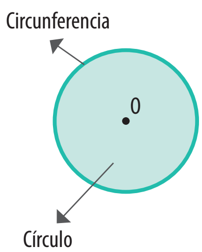
Si observas en tu entorno, podrás darte cuenta de que la forma de muchos objetos que utilizas a diario se asemejan a un círculo, por ejemplo, las tapas de botellas o los cd de música. Estudiar las características del círculo y la circunferencia permite que puedas identificarlos y diferenciarlos cuando quieras describir objetos circulares.

Palabras clave

Circunferencia
Lugar geométrico
Centro
Círculo

Para concluir

- La **circunferencia** es el **lugar geométrico** (conjunto de puntos que cumplen una determinada condición) formado por todos los puntos del plano que equidistan de un punto llamado **centro** y simbolizado con una O.
- El **círculo** es el lugar geométrico formado por todos los puntos del plano que están a menor o igual distancia del centro que la circunferencia.



Argumenta y comunica

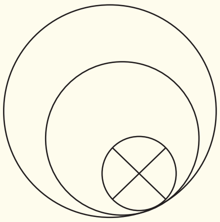
- Según la propuesta de Felipe, ¿cuáles niños tendrían menos posibilidades de ganar?
- ¿Por qué se produce esto? Comenta con tus compañeros o compañeras.

Practiquemos lo aprendido

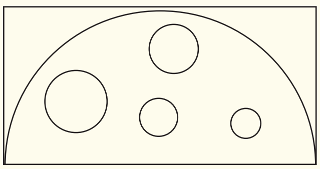
Repaso

1. Identifica en cada figura una circunferencia y un círculo. Márcalos con azul y rojo respectivamente.

a.



b.



Práctica guiada

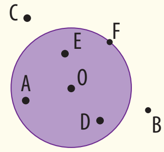
2. Escoge 4 objetos de forma circular y encuentra el centro de la circunferencia usando material concreto.

Paso 1 Marca en una hoja de papel el contorno de un objeto que tenga al menos una cara circular y luego recorta el círculo.

Paso 2 Dobla el círculo en dos partes iguales y luego vuelve a doblarlo en dos partes iguales más.

Aplica

3. Completa las oraciones con pertenece o no pertenece.



a. Los puntos A y E _______________ al círculo.

b. El punto B _______________ a la circunferencia.

c. El punto F _______________ a la circunferencia.

d. El punto F _______________ al círculo.

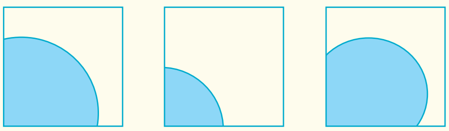
4. **Conecto con la física.** El movimiento ondulatorio es un fenómeno presente en diversas situaciones, por ejemplo, en las ondas circulares que se producen al arrojar una piedra en un estanque.

a. Javiera toma un recipiente cuadrado de lado 40 cm y lo llena con agua. Luego, inserta un lápiz (punta) en distintos lugares del recipiente. Realiza un esquema o dibujo de lo que sucede con el agua del recipiente.

b. ¿Cuál será la menor distancia que hay entre el punto en que se inserta el lápiz y los lados del recipiente al generar una onda circular que toque solo una vez en cada uno de los lados?

c. Comenta tu respuesta con un compañero o compañera.

5. **Argumenta.** Sabiendo que los cuadrados son iguales, ¿cuál de ellos debes repetir, sin superponer, para que sus figuras interiores formen un círculo? Apóyate con material concreto y justifica tu respuesta.



Reflexiono

Si tuvieras que explicar la diferencia entre un círculo y una circunferencia a una persona no vidente, ¿qué material concreto y estrategia utilizarías? Comenta con tus compañeros la importancia y beneficios que tiene este tipo de estrategias.

Refuerzo

Nombra dos ejemplos de objetos que utilices a diario: uno que se asemeje a una circunferencia y otro, a un círculo.

Lección 29

¿Cuáles son los elementos del círculo?

Propósito

Identificar los elementos del círculo.

¿Para qué?

En la agricultura el uso del sistema de riego por pivote, requiere que los especialistas deban conocer las características y elementos del círculo y la circunferencia para un correcto uso del sistema.

Palabras clave

Diámetro
Radio

Materiales

- Pelota de plumavit de 15 cm.
- Chinche o alfiler.
- Cinta delgada de tela o cartón.

Taller La pelota de plumavit

Reúnanse en pareja y realicen la actividad.

1. Corten la pelota de plumavit por la mitad. Si lo necesitas, solicita la ayuda de un adulto.
   - ¿Con qué figura geométrica se asocia la superficie de corte?

   ____

2. Tomen una cinta y determinen la parte máxima de ella que puede caber en el círculo, luego corten la cinta con esta medida. Este trozo de cinta se asocia al diámetro de un círculo.
   - Si cambian la cinta de dirección, ¿cabe en el círculo? ¿Por qué?

   ____
   - Escriban su propia definición de diámetro y discútanla con sus compañeras y compañeros.

   ____

   ____

3. Determinen el centro del círculo cruzando dos cintas con el largo del diámetro del punto anterior.
4. Con un chinche o alfiler, fijen una cinta en el centro del círculo y córtenla como se muestra en la imagen. Este trozo de cinta se asocia al radio de un círculo.
5. Realicen un giro con la cinta, ¿cabe siempre en el círculo? ¿Por qué?

   ____

   ____
   - Escriban su propia definición de radio y discútanla con sus compañeras y compañeros.

   ____

Para concluir

- Un segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella, corresponde a un **radio**.
- Un segmento que une dos puntos de la circunferencia pasando por el centro de la misma, corresponde a un **diámetro**.
  Un diámetro mide el doble de un radio.

Argumenta y comunica

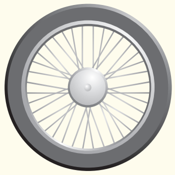
- ¿Cómo escribir algebraicamente el diámetro de una circunferencia en función de su radio y viceversa?

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Marca con rojo al menos una circunferencia en cada dibujo.

a. 

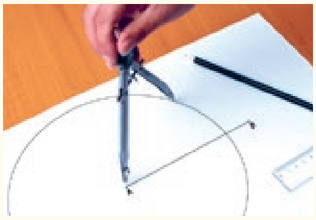
b. 

Práctica guiada

2. Construye las circunferencias, dada la longitud de su radio.

Paso 1 Abre el compás a 7 cm, tal como se muestra en la figura.

Paso 2 Apoya la punta del compás en el centro de la hoja y hazlo girar.



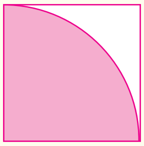
a. Circunferencia cuyo radio mide 9 cm.
b. Circunferencia cuyo radio mide 6 cm.
c. Circunferencia cuyo radio mide 10 cm.
d. Circunferencia cuyo radio mide 2 cm.
e. Circunferencia cuyo radio mide 6,5 cm.

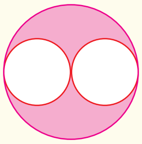
Aplica

3. Mide con tu regla un radio (r) y un diámetro (d) en la figura.

d =
r =

4. Identifica al menos dos radios en cada diseño y márcalos con lápiz azul.

a. 

b. 

5. Construye una circunferencia de radio 4,5 cm, y dibuja en ella 3 radios y 2 diámetros.
   a. ¿Cómo son los radios entre sí?
   b. ¿Cómo son los diámetros entre sí?
   c. ¿Cuál es la relación entre los radios y los diámetros? Discute con tus compañeros y compañeras si esta relación siempre se da en un círculo cualquiera.

6. **Argumenta.** Se recortan cuatro círculos cuyos radios miden 8 cm y se pegan dos arriba y dos abajo, de manera que cada círculo se interseca solo en un punto con el otro.
   a. Al unir sus centros, ¿qué figura se forma?
   b. ¿Cuál será el perímetro de la figura formada?

7. **Desafío**. Dos circunferencias tienen diámetro 9 cm y 4 cm, y sus centros están a 16 cm. Representa gráficamente la situación e indica cuánto mide un diámetro de la circunferencia que se puede trazar en medio de ambas, si los centros de las tres circunferencias pertenecen a la misma recta.

Reflexiono

1. ¿Cuántos radios se pueden dibujar en un círculo?, ¿cuántos diámetros? Justifica.
2. Si al interior de un círculo se marca un punto en el centro, el cual se une a un punto de la circunferencia a través de un segmento, ¿qué método utilizarías para comprobar que este corresponde a un radio? Explica.

Refuerzo

1. Explica con tus palabras el método para construir un círculo utilizando regla y compás, sabiendo que este tiene un radio de 6 cm.
2. Javier recorta un círculo de cartón y en él, dibuja varios segmentos que unen dos puntos de su contorno. ¿Qué nombre recibe el segmento de mayor longitud que puede dibujar dentro del círculo?

Lección 30

¿Cómo estimar el perímetro de un círculo?

Taller Medidas de objetos circulares

Propósito

Estimar el perímetro de un círculo.

¿Para qué?

Los oficios que se dedican a la confección y arreglo de vestuarios aplican conocimientos geométricos a su trabajo. Por ejemplo, para hacer un vestido con corte circular, se necesita conocer la longitud de su contorno, o bien, el largo de la cinta que lo rodeará. Así, al relacionar los elementos del círculo se puede estimar el perímetro y calcular la cantidad de material.

Palabras clave

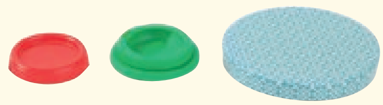
Contorno
Diámetro
Perímetro

Materiales

- Tapas de distintos tamaños
- Lana
- Tijeras
- Regla

Reúnanse en grupos de tres personas y realicen la siguiente actividad.

1. Busquen 3 tapas de diferentes tamaños como se muestra en las imágenes.



2. Utilicen una lana para medir el contorno y el diámetro de cada tapa.

3. Completen la tabla y luego respondan.

Tapa	Medida del diámetro	Medida del contorno (lana)	Cociente entre el contorno y el diámetro (aproximado a la unidad)	Cociente entre el contorno y el diámetro (aproximado a la centésima)
Ejemplo	10,2 cm	32 cm	32 : 10,2 ≈ 3	32 : 10,2 ≈ 3,14
Tapa 2				
Tapa 3				
Tapa 4				

Ayuda

Para calcular el promedio debes sumar los cuatro valores de la tabla y luego dividir este resultado por 4 ya que corresponde al número de datos sumados.

a. ¿Cuál es el promedio de los cocientes entre el contorno y el diámetro aproximados a la unidad?
b. ¿Cuál es el promedio de los cocientes entre el contorno y el diámetro aproximado a la centésima?
c. Escriban una expresión matemática que permita calcular el contorno de un círculo si se conoce el diámetro de este.
d. Compartan las expresiones matemáticas que obtuvieron con sus compañeros.

Al calcular el promedio de los cocientes entre el contorno (perímetro) y el diámetro, siempre se obtendrá un número cercano a 3 (si aproximamos a la unidad). Si se desea ser más exacto, se utiliza el valor 3,14 (aproximación a la centésima). Esta razón se conoce como **pi** y se representa con la letra griega π.

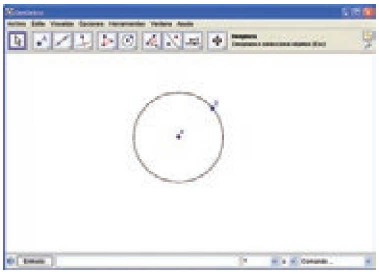
e. Ocupen la expresión que escribieron y estimen el valor de la longitud del contorno o perímetro de tres círculos de 3 cm, de 5 cm y de 6 cm de diámetro. Usen la aproximación a la centésima.

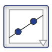
Situación Estimar el perímetro con GeoGebra

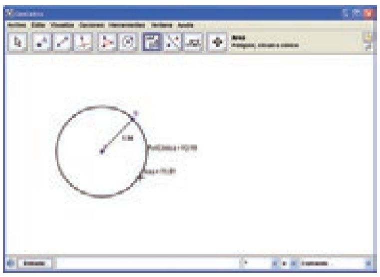
GeoGebra es un programa gratuito que da la posibilidad de construir figuras geométricas, experimentar, analizar, comprobar resultados, etc.

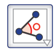
Construiremos una circunferencia y calcularemos las medidas de su radio y su perímetro.

Paso 1 Construye la circunferencia. Presiona el botón  y selecciona la opción Circunferencia dados su centro y uno de sus puntos. Presiona sobre la hoja de dibujo para asignar el centro de la circunferencia, desplaza el mouse y presiona nuevamente sobre la hoja.

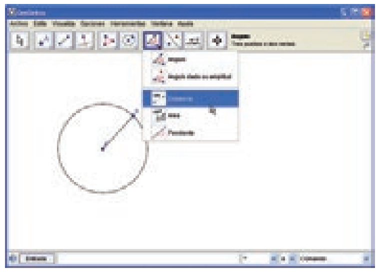


Paso 2 Dibuja el radio. Para ello, presiona el botón  y selecciona la opción Segmento entre dos puntos; luego haz clic sobre los puntos A y B.



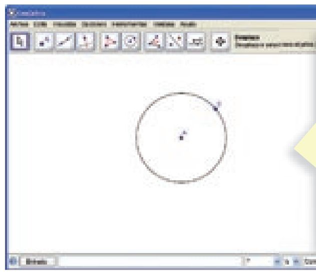
Paso 3 Calcula la medida del radio. Para ello presiona el botón  y selecciona la opción Distancia o Longitud. Luego, haz clic sobre el radio.

Calcula el perímetro con la misma herramienta. Para ello, has clic sobre la circunferencia.



Paso 4 Con calculadora encuentra el cociente entre el perímetro y 2 veces el radio.

Modifica el tamaño. Presiona el botón  y luego pincha el punto B de la circunferencia. Con los nuevos valores vuelve a calcular el cociente anterior.



¿Qué sucede con el cociente entre el perímetro y dos veces el radio al modificar el tamaño de la circunferencia? ¿Qué puedes concluir?

Para concluir

- El valor del cociente **entre el perímetro y el diámetro** de un círculo, es un número que llamaremos **pi** y se denota con la letra griega **π** . Este número se puede aproximar de diferentes formas:

  Aproximado a la unidad $\pi \approx 3$

  Aproximado a la centésima $\pi \approx 3{,}14$

- El número pi permite modelar una expresión para calcular el **perímetro (P) de un círculo**:

  $P = d \cdot \pi$ Donde **d** representa el diámetro del círculo.

Argumenta y comunica

- La fórmula del perímetro se encuentra expresada en términos del diámetro. ¿Cómo la expresarías en términos del radio?

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. **Calcula las multiplicaciones y las divisiones.**

a. $1{,}2 \cdot 4$

b. $3{,}4 \cdot 6{,}7$

c. $5{,}54 \cdot 12{,}56$

d. $34{,}2 : 2$

e. $45{,}67 : 5$

f. $34{,}12 : 0{,}4$

2. **Dibuja con regla y compás, las figuras solicitadas.**

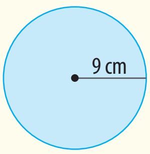
a. Circunferencia de radio 2 cm.

b. Circunferencia de diámetro 7 cm tangente a otra de 4 cm de radio.

c. Tres circunferencias concéntricas con radio en la razón 1 : 2 : 3. La primera de radio 2,5 cm.

Práctica guiada

3. **Sigue el ejemplo y calcula el perímetro de cada círculo. (Considera $\pi \approx 3{,}14$)**



Paso 1 Identifica si el dato dado corresponde al radio o al diámetro. En este caso corresponde al radio.

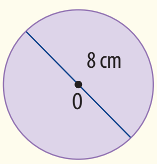
Paso 2 Si el dato es la medida del radio, multiplica este valor por 2, así conocerás la medida del diámetro.

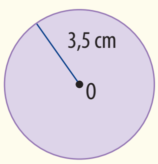
$$9 \cdot 2 = 18$$

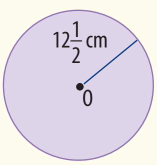
Paso 3 Multiplica este valor por una aproximación de π, en este caso 3,14.

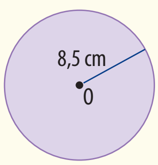
$$P \approx 18 \cdot 3{,}14 \approx 56{,}52$$

Luego, el perímetro del círculo es aproximadamente 56,52 cm.

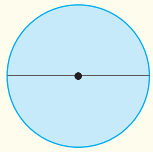
a.


c.


b.


d.


4. **Calcula la medida aproximada del radio, conocido el perímetro. Sigue el ejemplo. (Considera $\pi \approx 3{,}14$)**



$P \approx 43{,}96$ cm

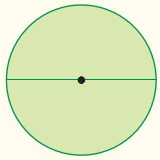
Paso 1 Divide el valor del perímetro por 3,14.

$$43{,}96 : 3{,}14 = 14$$

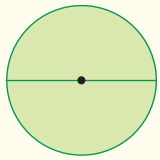
Paso 2 El valor obtenido corresponde al diámetro. Para conocer la medida del radio divide este resultado por 2.

$$14 : 2 = 7$$

Luego, la medida del radio es aproximadamente 7 cm.

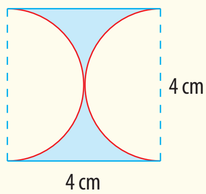
a.


$P \approx 31{,}4$ cm

b.


$P \approx 15{,}7$ m

5. **Calcula el perímetro de las figuras sombreadas. (Considera $\pi \approx 3{,}14$)**



Paso 1 Identifica las figuras que componen el diseño. En este caso, las dos líneas rojas forman una circunferencia y dos líneas azules forman dos lados de un cuadrado.

Paso 2 Identifica las medidas de las figuras que componen el diseño. En este caso, el radio del círculo mide 2 cm y el lado del cuadrado mide 4 cm.

Paso 3 Calcula el perímetro del círculo.

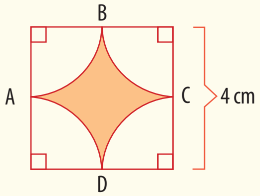
$$2 \cdot 3{,}14 \cdot 2 = 12{,}56$$

Paso 4 Al valor anterior se suma el valor de la medida de los dos lados del cuadrado.

$$P \approx 12{,}56 + 4 + 4 = 20{,}56$$

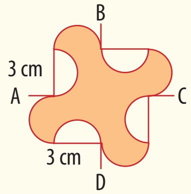
Luego, el perímetro de la figura es 20,56 cm.

a.



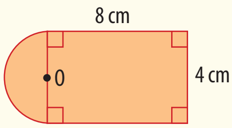
A,B,C y D son puntos medios del cuadrado.

c.



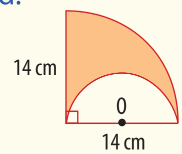
A,B,C y D son puntos medios del cuadrado.

b.



O centro del círculo.

d.



O centro del círculo.

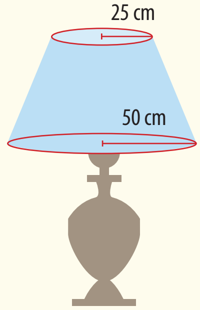
e. Elige uno de los ejercicios y explica el procedimiento que seguiste para calcular el perímetro.

Aplica

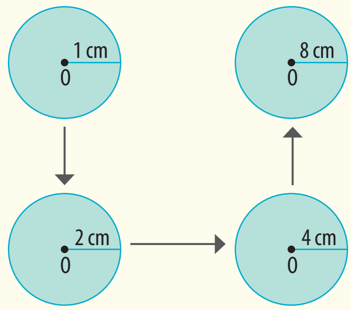
6. Estima el perímetro de la línea del Ecuador. (Considera $\pi \approx 3{,}14$)

7. En un parque de diversiones, el carrusel da quince vueltas en cada periodo de funcionamiento. Si el diámetro del carrusel mide 5 m, ¿qué distancia recorre un niño que está sobre él, en el borde, durante un periodo?

8. Para la clase de Tecnología, Marcos ha diseñado una lámpara como la de la imagen. En los bordes superior e inferior de la pantalla pondrá una cinta de color rojo. Aproximadamente, ¿cuántos centímetros de cinta utilizará?



9. **Desafío.** Observa la secuencia de figuras. Considera O el centro del círculo.

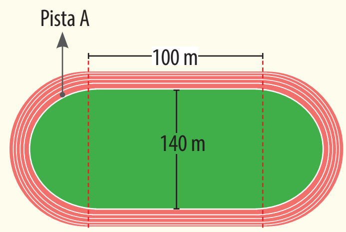


a. Calcula el perímetro de cada circunferencia.

b. ¿En qué razón varía el perímetro a medida que el radio del círculo se duplica?

10. **Desafío.** Danitza entrena en su bicicleta en la cancha municipal, de acuerdo al siguiente calendario:

Lu	3720 m
Ma	12 400 m
Mi	4960 m
Ju	7440 m
Vi	8680 m



Si la cancha está compuesta por una zona rectangular y dos semicírculos, y Danitza entrena en la pista A, ¿cuántas vueltas deberá dar cada día a la pista para cumplir con el calendario propuesto?

Reflexiono

Camilo afirma que el perímetro de un círculo y su radio siempre son magnitudes directamente proporcionales, mientras que Lorena dice que esto solo ocurre en ciertos casos. ¿Quién tiene la razón? Fundamenta tu respuesta.

Refuerzo

Las argollas de metal se construyen cortando a partir de una vara, trozos de longitud igual al perímetro de cada argolla circular. Si se cuenta con 10 varas de 3 m cada una, y se fabricarán argollas de 10 cm de diámetro, ¿cuántas argollas se elaborarán en total? Considera $\pi \approx 3{,}14$.

Lección 31

¿Cómo estimar el área de un círculo?

Propósito

Estimar el área de un círculo.

¿Para qué?

Estimar el área de un círculo resuelve problemas cotidianos, como por ejemplo, conocer la cantidad de papel necesaria para cubrir una tapa circular o la cantidad de tela para hacer una prenda de vestir.

Palabras clave

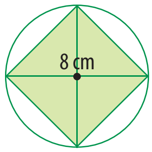
Área
Cuadrado inscrito
Cuadrado circunscrito

Situación 1 Calcular el área a partir de un cuadrado inscrito y uno circunscrito

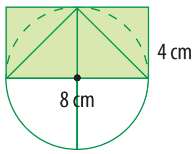
Francisca y Manuel buscan una estrategia para estimar el área de un círculo. Cada uno genera una propuesta.

Francisca

Paso 1 Dibuja un círculo cuyo diámetro mida 8 cm y dentro de él, dibuja un cuadrado (cuadrado inscrito).



Paso 2 Calcula el área del cuadrado. Para ello, reorganiza los triángulos.



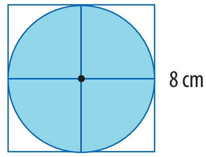
El área del cuadrado equivale a calcular el área de un rectángulo de altura 4 cm y base 8 cm.

$A = 8 \cdot 4 = \square$

Paso 3 Luego, concluye que el área del círculo es mayor que ________ cm².

Manuel

Paso 1 Dibuja un círculo cuyo diámetro mida 8 cm dentro de un cuadrado de lado 8 cm (cuadrado circunscrito).



Paso 2 Calcula el área del cuadrado. Para ello, identifica que el lado del cuadrado es 8 cm.

$A = 8 \cdot 8 = \square$

Paso 3 Luego, concluye que el área del círculo es menor que ________ cm².

Observa que ambos han obtenido distintas aproximaciones del área del círculo cuyo diámetro mide 8 cm: en un caso calculando el área del cuadrado inscrito y en otro del circunscrito.

¿Cómo se pueden factorizar los números 32 y 64?

Área cuadrado inscrito	<	Área círculo	<	Área cuadrado circunscrito
32	<	Área círculo	<	64
2 • 16	<	Área círculo	<	4 • 16
2 • 4 • 4	<	Área círculo	<	4 • 4 • 4

Medida del radio

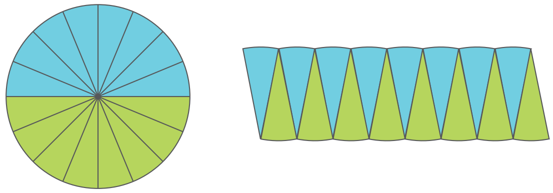
En general, es posible aproximar el área de un círculo de radio **r**, entre los siguientes valores:

$2 \cdot r^2$	<	Área círculo	<	$4 \cdot r^2$

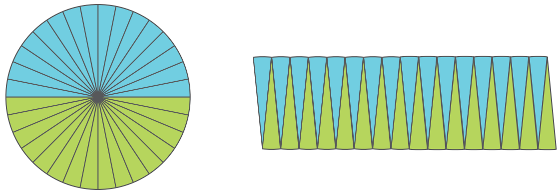
Situación 2 Calcular el área a partir de un círculo fraccionado

Manuel y Francisca buscan otra forma de estimar el área de un círculo.

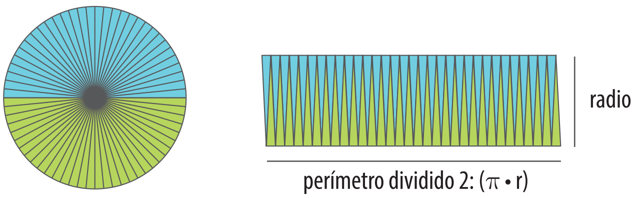
Paso 1 Dividen el círculo en 16 secciones iguales y las ubican una al lado de la otra.



Paso 2 Dividen ahora el círculo en 32 partes iguales y nuevamente colocan las secciones una a lado de la otra.



Paso 3 Observan que mientras ____________ divisiones hacen, más ____________ resultan éstas y, al unirlas cada vez la figura se parece más a un ____________, cuya base corresponde a la mitad del perímetro y su altura es igual al ____________ del círculo.



La mitad del perímetro del círculo (pintado de verde) equivale a la base de la figura parecida a un rectángulo.

Paso 4 Deducen entonces que como la figura se parece a un rectángulo, se puede obtener el área del círculo calculando el área del ____________, es decir:

$$A \approx \text{base} \cdot \text{altura}$$

Como la base del ____________ es igual a la mitad del perímetro, es decir, es igual al radio por π y la altura es igual al radio, tenemos:

$$A = \underbrace{\text{radio} \cdot \pi}_{\text{base del rectángulo}} \cdot \text{radio}$$

altura del rectángulo

Para concluir

Para calcular el **área de un círculo de radio r**, podemos:

- Estimar a partir de un cuadrado inscrito o uno circunscrito.
- Utilizar la fórmula:

$$A = r \cdot r \cdot \pi$$
$$A = r^2 \cdot \pi$$

Argumenta y comunica

- Crea otra estrategia para estimar el área de un círculo. Discútela con tus compañeros y compañeras.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

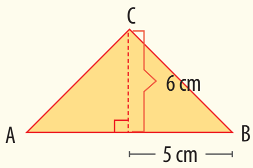
1. Completa con el número que falta para mantener la igualdad.

a. $10^{\square} = 1000$ c. $= 10^{\square} = 1$

b. $10^{\square} = 100\,000$ d. $10^{\square} = 100\,000\,000$

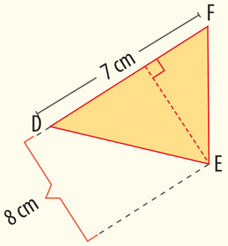
2. Calcula el área de los siguientes triángulos.

a.



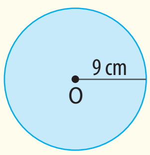
△ ABC isósceles de base $\overline{AB}$

b.



Práctica guiada

3. Calcula el área de los siguientes círculos de centro O. (Considera $\pi \approx 3{,}14$)



Paso 1 Calcula la medida del radio elevado al cuadrado.

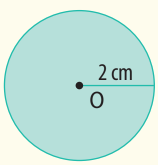
$r^2 = 9^2 = 9 \cdot 9 = 81$

Paso 2 Multiplica ese valor por 3,14 (π)

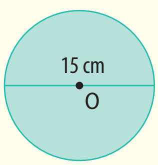
$81 \cdot 3{,}14 = 254{,}34$

Así, el área es 254,34 cm^2.

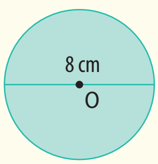
a.



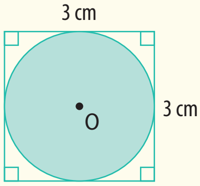
c.



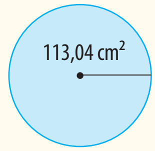
b.



d.



4. Conocido el área de cada círculo, estima la medida de su radio. (Considera $\pi \approx 3{,}14$)



Paso 1 Divide el valor del área por 3,14 (π), así obtendrás la medida del radio al cuadrado.

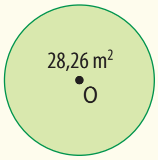
$113{,}04 : 3{,}14 = 36$

Paso 2 Busca un número que elevado al cuadrado (elevado a 2) dé como resultado 36.

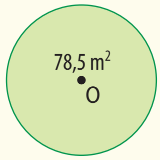
$36 = 6 \cdot 6 = 6^2$

Así, la medida del radio es 6 cm.

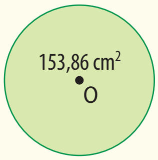
a.



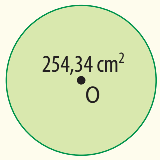
c.



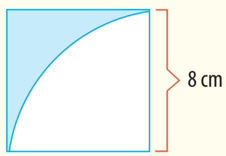
b.



d.



5. Calcula el área sombreada.



Cuadrado de lado 8 cm

Paso 1 El área sombreada corresponde al área de un cuadrado menos la cuarta parte del área de un círculo.

Paso 2 Calcula el área del círculo y divide este resultado por 4.

$$\frac{8^2 \cdot 3{,}14}{4} = \frac{200{,}96}{4} = 50{,}24$$

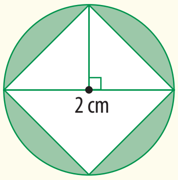
Paso 3 Calcula el área del cuadrado.

$8 \cdot 8 = 64$

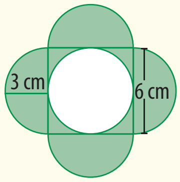
Paso 4 Resta el área de la cuarta parte del círculo al área del cuadrado

$64 - 50{,}24 = 13{,}76$

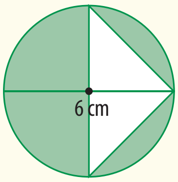
Así, el área sombreada es 13,76 cm^2

a. 

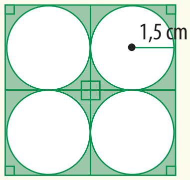
Cuadrado inscrito en un círculo.

c. 

Cuadrado circunscrito a un círculo.

b. 

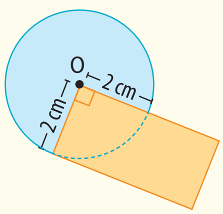
Triángulo inscrito en un círculo.

d. 

Cuatro círculos inscritos en cuatro cuadrados.

Aplica

6. **Romina recortó dos piezas de cartulina: una con forma circular y la otra con forma de rectángulo. Luego, colocó el rectángulo sobre el círculo. Según el dibujo, ¿cuánto mide la superficie que quedó bajo el rectángulo?**



7. **Argumenta.** **A un círculo, cuyo radio mide 6 cm, se le recorta un círculo cuyo radio mide 4 cm. De las dos partes que quedaron, debes elegir la que tiene mayor área, ¿qué método utilizarías para asegurar que esta condición se cumpla en tu elección? Intercambia tu respuesta con los demás compañeros.**

8. **Una mesa de cubierta redonda tiene una superficie aproximada de 3,14 m².**

a. Si al medio de ella se pone un florero, ¿cuál es la distancia desde el centro del florero al borde de la mesa?

b. ¿Cuál es la distancia máxima a la que se pueden encontrar dos vasos apoyados sobre la mesa?

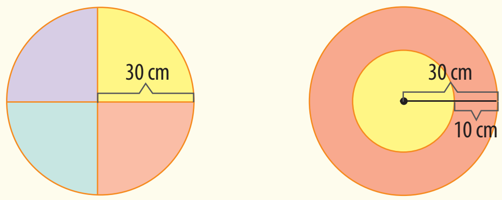
c. Si se quiere elaborar un mantel de la misma forma que la mesa pero que tenga cuatro veces su área, ¿cuánto medirá el contorno del mantel?

9. **Argumenta.** **Camila dice que si el radio de un círculo aumenta al doble, entonces el área del círculo también aumenta al doble.**

a. ¿Es correcta esta afirmación?

b. Justifica utilizando una representación gráfica.

10. **Desafío.** **Richard y Lucía diseñaron dos ruletas diferentes para un evento de caridad. El premio mayor se lo llevará aquella persona que lance un dardo en el color amarillo.**



Richard Lucía

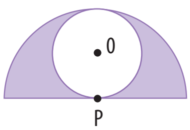
a. ¿En cuál de las dos ruletas hay más posibilidades de ganar el juego?

b. Justifica la respuesta anterior utilizando cálculos.

c. ¿Que forma debería tener una ruleta donde la probabilidad de ganar fuera del 75 %? Dibújala.

Reflexiono

Describe un procedimiento para calcular el área pintada de color morado de la siguiente figura formada por un semicírculo y un círculo.



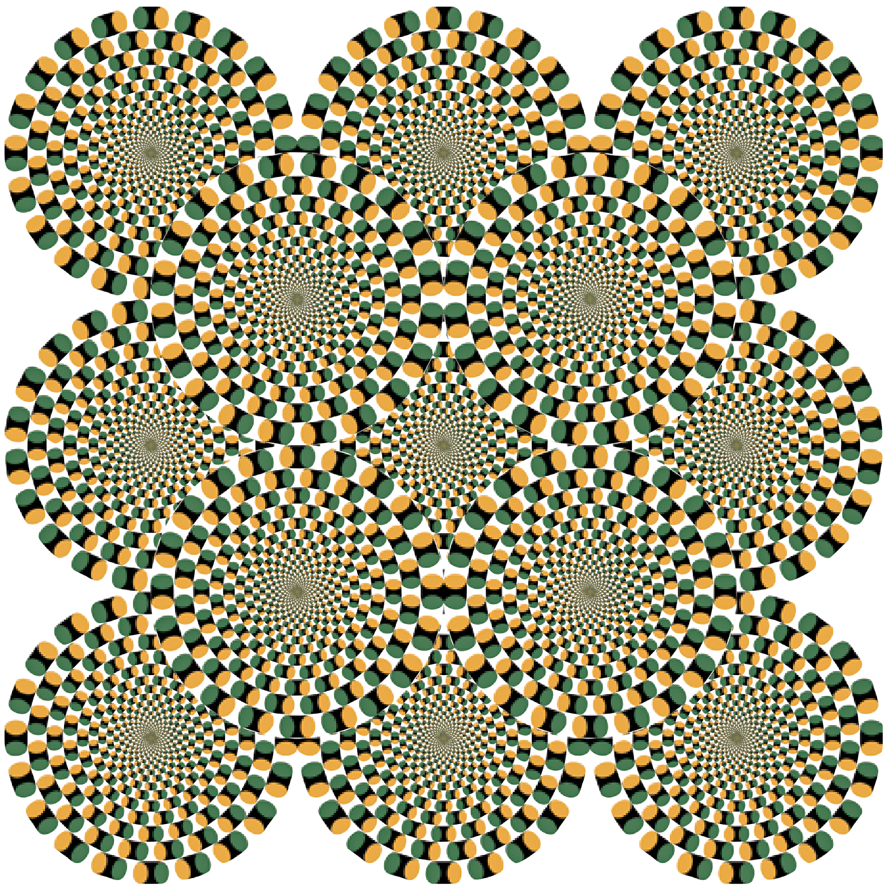
Refuerzo

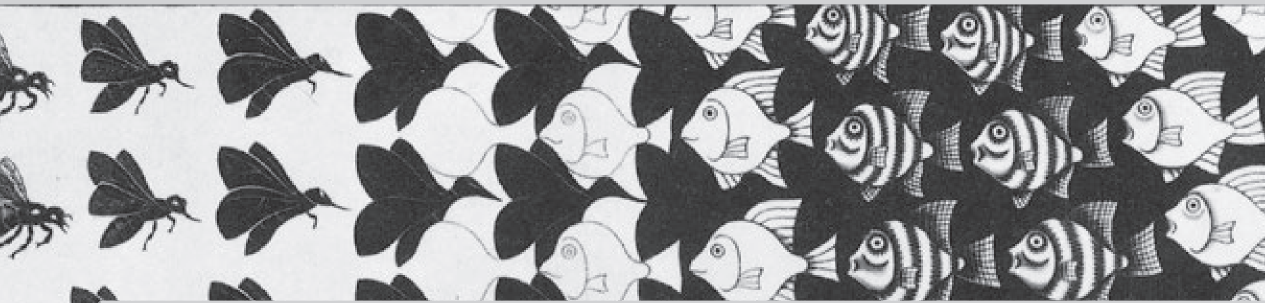
1. Calcula la mitad del área de un círculo cuyo perímetro es 50,24 cm. Considera $\pi = 3,14$.
2. Amanda quiere pegar su espejo circular sobre un trozo de cartón que tiene la misma forma. Si el círculo que recortó tiene 9 cm de radio y el radio del espejo es 7 cm, ¿qué área queda entre el espejo y el cartón? Considera $\pi = 3,14$.

Actitud: Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros. .

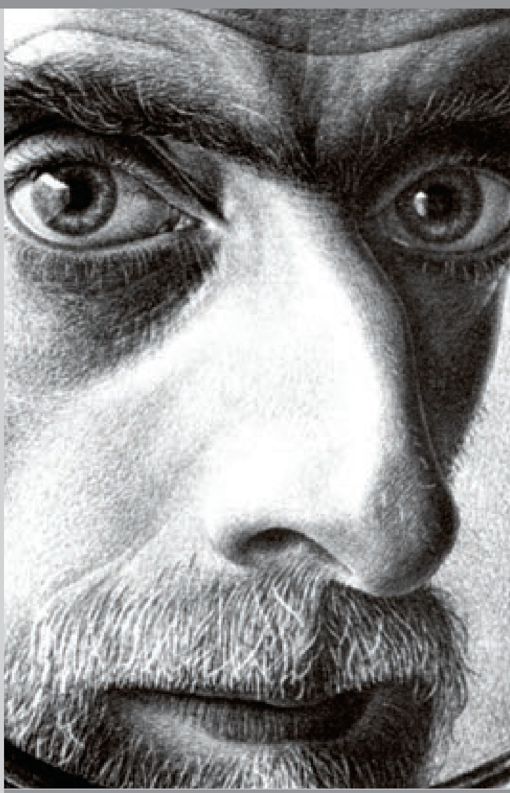
Ilusiones ÓPTICAS

Cuando observamos una imagen, esta es interpretada por nuestro cerebro dependiendo de cómo miramos sus elementos. Sin embargo, algunas imágenes presentan un “efecto visual” que va más allá de la realidad, lo que hace que cuestionemos lo que estamos observando. La percepción visual confunde al cerebro ocurriendo así lo que llamamos ilusión óptica.





Fragmento de Metamorphosis II, de M. C. Escher



ESCHER

El límite entre lo real y lo imposible

Este artista utilizaba la percepción visual en sus obras para realizar ilusiones espaciales que eran irrealizables. Así, en sus obras era frecuente que aparecieran edificios con escaleras de dimensiones imposibles en donde confundía al observador.

ACTIVIDAD EN GRUPO

Reúnanse en parejas y realicen las actividades propuestas. Luego, comuniquen su respuesta a los demás equipos.

1. Observen la imagen de la página 214 y respondan:
   - **a.** ¿Existe algún patrón en la imagen de la página 214? Expliquen.
   - **b.** ¿Cuáles son los elementos que hacen que la imagen tenga el efecto de movimiento? Elaboren una lista y compártanla con el resto del curso.
   - **c.** ¿Realmente se compone de círculos? Justifica.
   - **d.** Si en vez de formas circulares se utilizara otra figura geométrica ¿La imagen tendría el mismo efecto? Fundamenten su respuesta.
   - **e.** ¿En qué punto fijarían la mirada para que la imagen se quede estática? ¿Por qué?
2. Investiguen otras ilusiones ópticas en donde se utilicen formas circulares e intercámbienlas con los demás grupos.

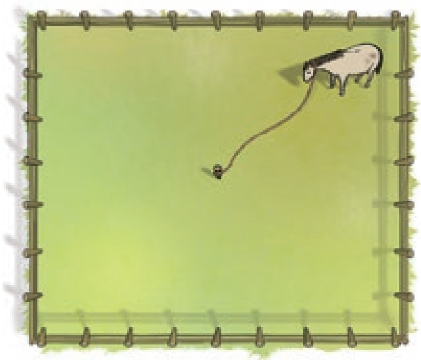
¿Cómo voy?

Lección 28: Caracterizar la circunferencia y el círculo como lugar geométrico

1 Un caballo está amarrado en el centro de un establo que mide 7 m de ancho y 8 m de largo. La cuerda que lo ata, se puede estirar a lo más 3 m.

a. ¿Qué medida tiene la superficie por donde puede moverse el caballo? ($\pi \approx 3,14$)

b. Si se cambia la cuerda por una de 3,5 m, ¿cuál será la superficie del establo en la que el caballo no podrá moverse? ($\pi \approx 3,14$)



2 En un campamento scout la última noche se realiza un fogón. La idea de los dirigentes del grupo es que todos los niños queden sentados en círculo a 5 m del centro del fogón, y el fogón tenga la misma forma con un diámetro de 2 metros.

a. Usa una escala 1 : 100 para realizar un esquema de la situación.

b. ¿Cuál es la máxima distancia entre un niño y otro?

c. ¿Con qué superficie se debe contar para realizar esta actividad? ($\pi \approx 3,14$)

d. Si todos los niños deciden acercarse 50 cm más al fogón manteniendo la forma en que ubicaron, ¿cuántos metros cuadrados menos ocuparán?

3 En un terreno de dimensiones 8 m y 20 m se instalan 2 focos en el punto medio de sus lados menores. Cada foco tiene la capacidad de iluminar como máximo 4 metros a su alrededor.

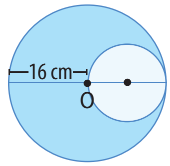
a. Realiza un esquema de la situación.

b. ¿Qué superficie del terreno se puede iluminar como máximo con los focos? ($\pi \approx 3,14$)

c. ¿Qué sector del terreno queda sin iluminar? ($\pi \approx 3,14$)

Lección 29: Identificar los elementos del círculo

4 Calcula la medida del radio de la circunferencia pequeña.



r = ________

5 Evalúa si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas.

a. _____ Un radio es un segmento que va desde el centro hasta cualquier punto de la circunferencia.

b. _____ El diámetro es dos veces el radio.

c. _____ Un diámetro divide al círculo en dos partes congruentes.

d. _____ Si el diámetro de un círculo mide 12 cm, entonces el radio mide 24 cm.

6 Construye la circunferencia, dada la longitud de su radio o diámetro.

a. Circunferencia cuyo radio mide 3 cm.

b. Circunferencia cuyo radio mide 4 cm.

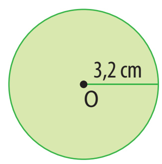
c. Circunferencia cuyo diámetro mide 10 cm.

d. Circunferencia cuyo diámetro mide 9 cm.

Lección 30: Estimar el perímetro de un círculo

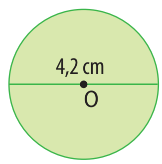
7 Estima el perímetro (P) de cada círculo. Considera ($\pi \approx 3,14$).

a.



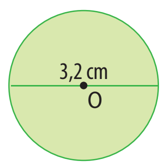
P = ________

c.



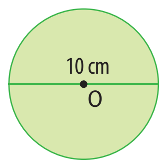
P = ________

b.



P = ________

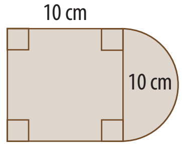
d.



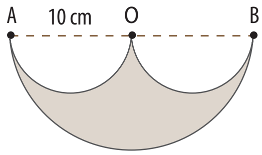
P = ________

8 Calcula el perímetro de cada figura compuesta, considerando que las figuras curvas son cuartos de círculo y semicírculos ($\pi \approx 3,14$).

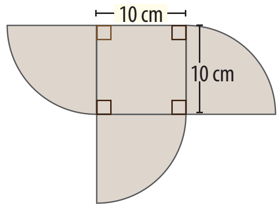
a.



b.



c.



9 Calcula la medida del diámetro y del radio de cada círculo ($\pi \approx 3,14$).

a. Un círculo cuyo perímetro es de 3,14 cm.

b. Un círculo cuyo perímetro es de 25,12 m.

c. Un círculo cuyo perímetro es de 18,84 m.

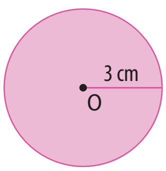
10 Si el diámetro de una rueda de bicicleta es de 650 mm, ¿cuántos metros recorrerá al dar 250 vueltas completas? Considera $\pi \approx 3,14$.

11 Si una rueda gira 20 veces y avanza un total de 376,8 metros, ¿cuánto mide su diámetro? ($\pi \approx 3,14$)

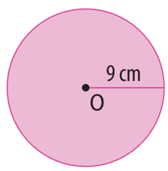
Lección 31: Estimar el área de un círculo

12 Calcula el área de cada círculo. (Considera $\pi \approx 3,14$)

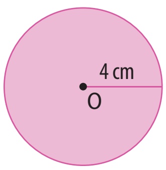
a.



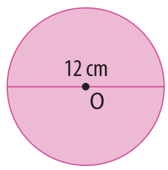
c.



b.

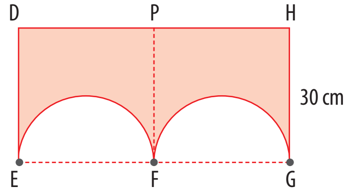


d.



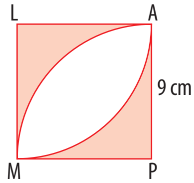
13 Calcula el área sombreada de cada figura considerando las líneas curvas como parte de una circunferencia. Considera $\pi \approx 3$ y aproxima al entero.

a. FPDE y GHPF cuadrados.



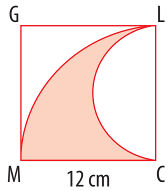
A = ____________

b. PALM cuadrado.



A = ____________

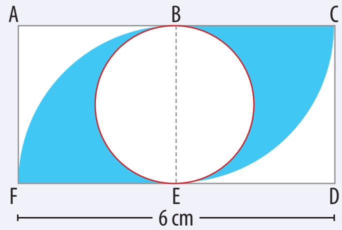
c. CLGM cuadrado.



A = ____________

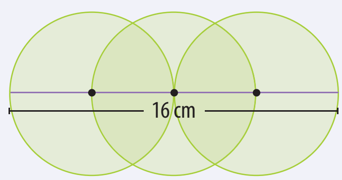
Desafío de integración

1. ¿Cuál es el perímetro de la figura sombreada?



FEBA y EDCB son cuadrados congruentes.

2. Los tres círculos de la figura tienen el mismo diámetro.



¿Cuánto mide el radio?

Resolución de problemas

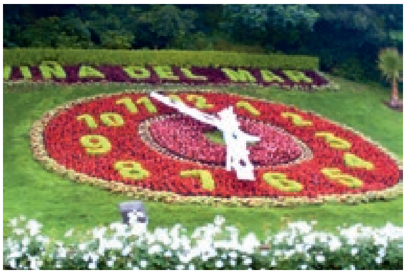
Actitud: Demostrar interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades.

Usar razonamiento lógico

Para resolver problemas, se pueden buscar relaciones entre sus variables.

Estrategias

- Hacer un diagrama.
- Usar ensayo y error sistemático.
- Usar problemas más sencillos.
- Hacer una tabla.
- Encontrar un patrón.
- Plantear una ecuación o una inecuación.
- Usar razonamiento lógico.



El reloj de flores de Viña del Mar es uno de los atractivos turísticos de la ciudad. En la imagen, se aprecia que el reloj se compone de dos círculos con flores de tonalidades rojas (una menor y otra mayor) y cada uno con un contorno de flores amarillas.

Una ciudad quiere instalar un reloj de flores similar al de Viña del Mar, donde la longitud del contorno del círculo menor sea de 4,71 m. Si el radio del círculo mayor debe ser el doble que el radio del círculo menor, ¿cuál será la longitud del contorno de flores del círculo mayor?

¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema?

¿Qué datos tienes para resolver?

Crea un plan para resolver

Para encontrar la longitud del contorno del círculo mayor puedes utilizar la estrategia Usar razonamiento lógico. Para ello, completa las afirmaciones referentes a las relaciones que hay entre las variables de los círculos del reloj.

Aplica la estrategia y resuelve

- Si el radio del círculo mayor es __________ veces el radio del círculo menor, entonces el diámetro del círculo mayor es __________ veces el diámetro del círculo menor.
- La fórmula para calcular el perímetro de un círculo es __________.
- Con respecto a la fórmula anterior, si el diámetro del círculo mayor es __________ veces el diámetro del círculo menor, entonces, el perímetro del círculo mayor es __________ veces el perímetro del círculo menor.
- Entonces, si el perímetro del círculo menor es __________ metros, entonces el perímetro del círculo mayor es __________ metros.

Verifica la respuesta

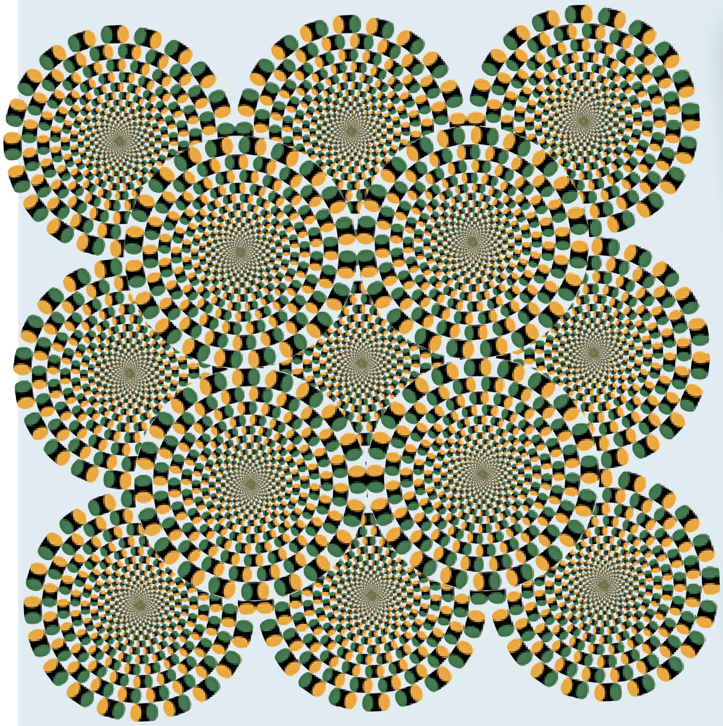
Comunica la respuesta

Vuelo a mis procesos

Observa las imágenes centrales y completa.

Nombra al menos tres aprendizajes que hayas adquirido en esta sección.

¿Qué actividades de la sección te generaron mayor dificultad? ¿Qué hiciste al respecto?



¿Qué importancia podrías atribuirle al conocimiento del círculo?

De las metas que te propusiste al inicio, ¿cuáles cumpliste y cuáles te faltaron?

¿Cómo contribuiste al trabajo en equipo? ¿Cómo distribuiste tu tiempo para cumplir con las tareas encomendadas?

Sección 8

Actitud: Demostrar curiosidad, interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades.

Construcciones geométricas

Activo ideas previas

En parejas, lean el texto y reflexionen en torno a las preguntas propuestas.

El origami es una actividad tradicional y milenaria de origen japonés, cuyo significado proviene de los vocablos "ori" que significa doblar, y "gami" que significa papel. Esta técnica es considerada como el arte de plegar y construir esculturas de papel sin utilizar cortes ni pegamento.

Para hacer un origami se necesita un papel cuadrado o rectangular, el que será doblado hasta obtener figuras de variadas formas y tamaños. Al desarmar dichas figuras, el papel inicial presenta patrones lineales que se obtuvieron a partir de los dobleces reiterados. Incluso estos patrones han sido inspiración en diversas culturas, por ejemplo, en la arquitectura morisca utilizaron estos mismos patrones para sus diseños.

- Tomen un trozo de papel cuadrado o rectangular y dóblenlo las veces necesarias para crear una figura. ¿Cuántos dobleces debieron realizar para formar su figura? ¿Qué polígonos pueden identificar en el papel? Intercambien sus construcciones de papel con el resto del curso.

  ____

  ____

- ¿Cuál creen que es la relación entre la posición del doblez respecto a la hoja, y la posterior construcción de la figura que elaboraron en la actividad anterior? Fundamenten su respuesta.

  ____

  ____

  ____

Activo conceptos clave

Los siguientes listados muestran los conceptos clave de la sección. Con algunos de ellos, completa las propuestas que aparecen.

Altura
Ortocentro
Transversales de gravedad
Baricentro
Perpendicular

Paralela
Bisectriz
Incentro
Triángulo
Congruente

Cuadrilátero
Simetral
Circuncentro
Circunferencia circunscrita
Circunferencia inscrita

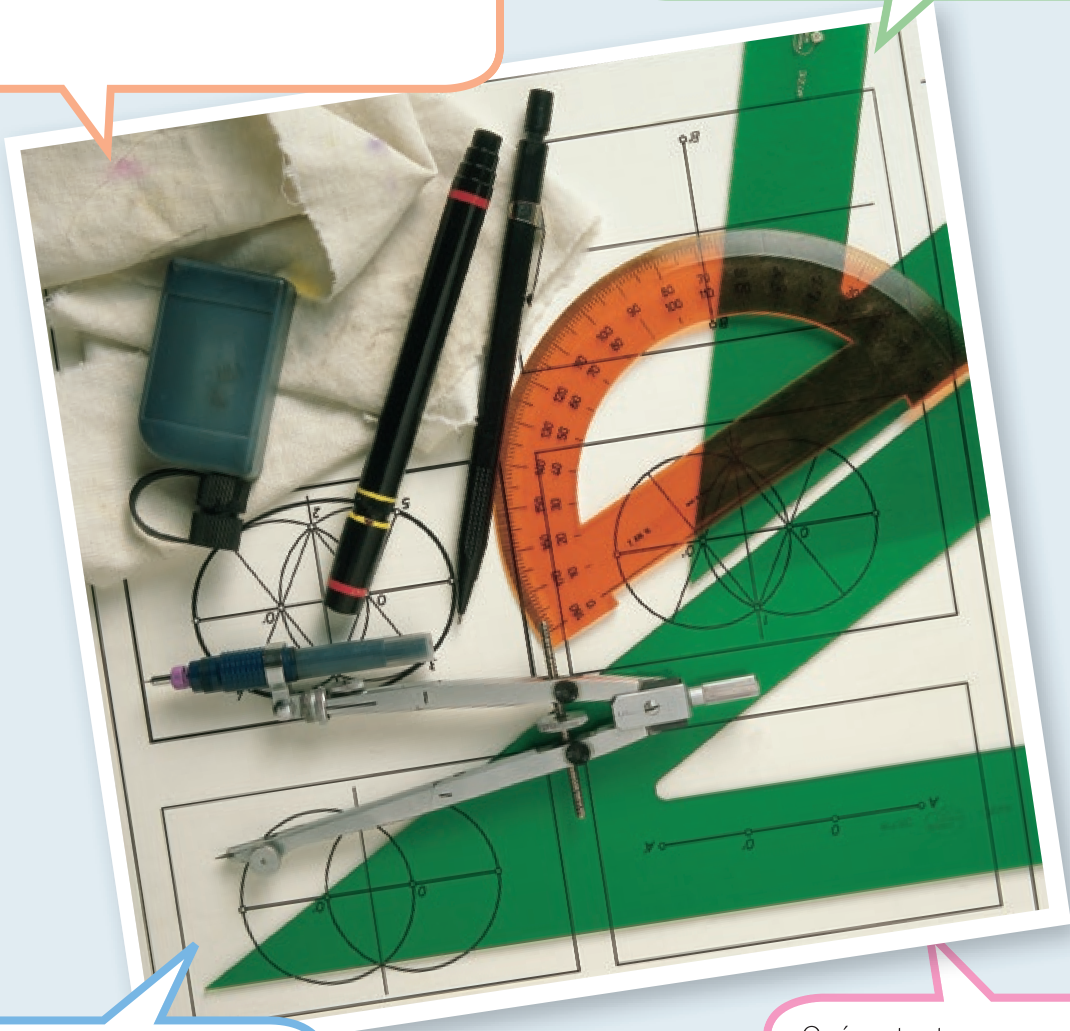
- Dos conceptos asociados a la circunferencia: ______________________________.
- Dos conceptos que tengan relación con los elementos de un triángulo: ______________________________.
- Un concepto nuevo para ti: ______________________________.
- Una posible definición del concepto nuevo: ______________________________.

Pienso mis procesos

Observa la imagen central y completa.

¿En qué contextos has utilizado este tipo de instrumentos?

¿Qué utilidad tienen los instrumentos de la imagen en la geometría?



¿Qué estrategias de estudio te propones trabajar en esta sección?

¿Qué metas te propones cumplir al finalizar esta sección?

¿Qué debo saber?

Activa tus conocimientos previos respondiendo la pregunta lateral. Luego, resuelve la actividad. Para terminar, registra tus logros.

Describe las características de los ángulos agudos, obtusos, rectos y extendidos.

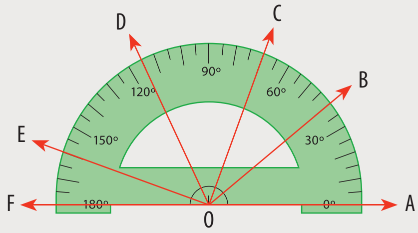
Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
4 o más puntos	3 o menos puntos

¿Tuviste dificultades al usar el transportador? Descríbelas y explica cómo las superarías.

Medir y clasificar ángulos

1 **Utilizando el transportador, escribe la medida de los ángulos. Luego, clasifícalos en agudo, obtuso, recto o extendido.** (4 puntos)



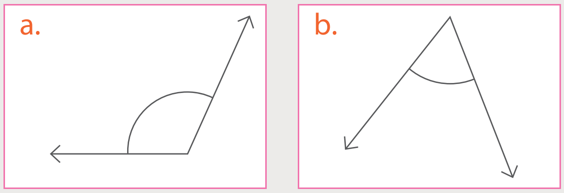
a. m ∡(AOB) = ________ ________________

b. m ∡(BOE) = ________ ________________

c. m ∡(COE) = ________ ________________

d. m ∡(AOF) = ________ ________________

2 **Mide con un transportador y clasifica cada ángulo en agudo, obtuso, recto y extendido.** (2 puntos)



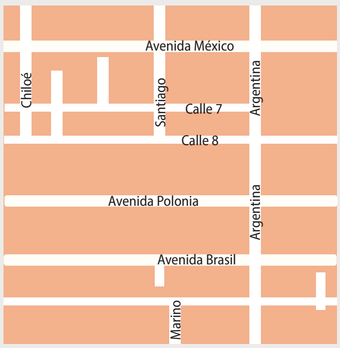
¿Qué características tienen las rectas paralelas y las rectas perpendiculares?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
2 o 3 puntos	1 o 0 puntos

Identificar rectas paralelas y perpendiculares

3 **Observa el plano y completa.** (3 puntos)



a. Una calle paralela a Avenida Brasil ________________

b. Una calle perpendicular a Argentina ________________

c. Una calle perpendicular a Chiloé ________________

¿Por qué los triángulos se pueden clasificar según dos criterios diferentes?

¿Cuál es la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo?, ¿y de un cuadrilátero?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

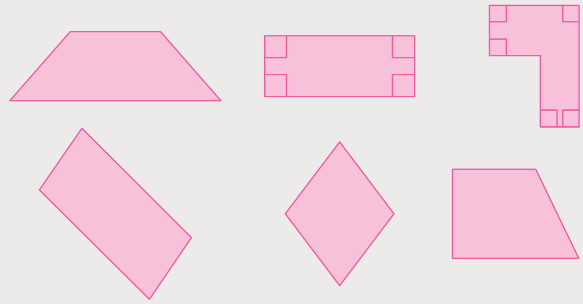
Logrado	Por lograr
5 o más puntos	4 o menos puntos

¿Qué dificultades tuviste?

Clasificar triángulos y cuadriláteros

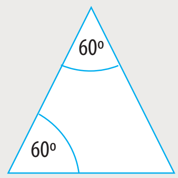
4 **Reconoce la figura que cumpla con las tres características pedidas y márcala con un ✓.** (3 puntos)

- Tiene 4 lados.
- Tiene dos pares de lados paralelos.
- Tiene cuatro ángulos rectos.

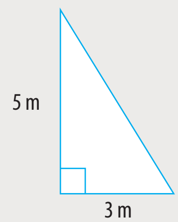


5 **Clasifica los triángulos según la longitud de sus lados y según la medida de sus ángulos interiores.** (6 puntos)

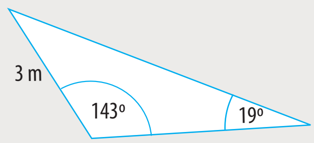
a.



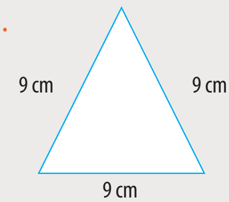
c.



b.



d.



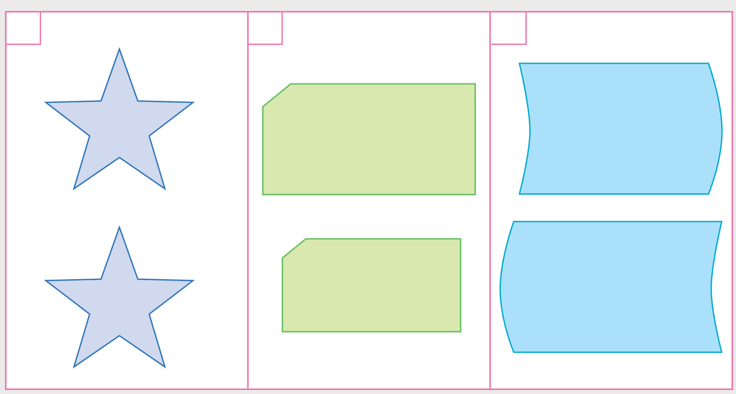
¿En qué te fijas para identificar la congruencia?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
2 o más puntos	0 o 1 puntos

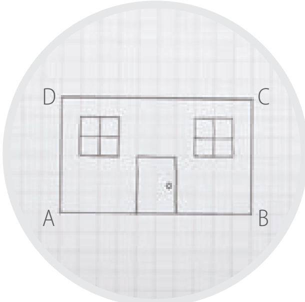
Identificar figuras congruentes

6 **Marca con un ✓ el o los recuadros que contienen figuras congruentes. Para saberlo, calca las figuras.** (3 puntos)



Lección 32

¿Cómo construir rectas perpendiculares y paralelas?



Carolina y Erik están trabajando en un proyecto de tecnología que consiste en diseñar una casa.

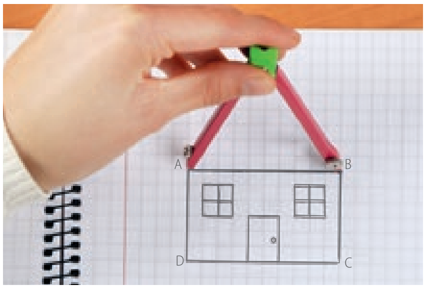
Situación 1 Construir una recta perpendicular

Para diseñar el techo de la casa deben dibujar una recta perpendicular en el punto medio de la base del techo.

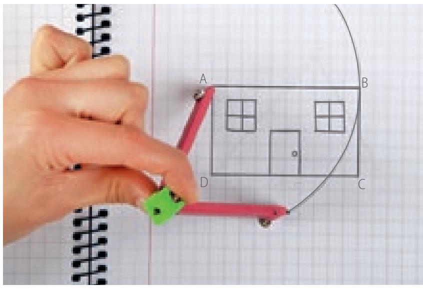
¿Qué significa que una recta sea perpendicular a otra?

Carolina utilizará el siguiente procedimiento para construirla.

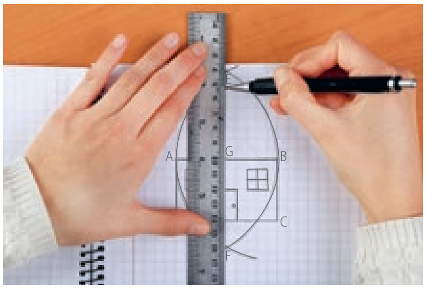
Paso 1 Abre el compás con la medida del segmento AB.



Paso 2 Ubica la punta del compás en el punto A y traza un arco con radio AB. Repite este paso para el punto B utilizando el mismo radio.



Paso 3 Los dos arcos se intersecan en dos puntos, nómbralos E y F y únelos con una recta. Obtendremos el punto G como intersección, donde se forman cuatro ángulos rectos.



Paso 4 Comprueba que la construcción está bien realizada utilizando la escuadra para chequear que los ángulos sean rectos.

Luego, la recta EF es ________________ al segmento AB.

Propósito

Construir rectas perpendiculares y paralelas.

¿Para qué?

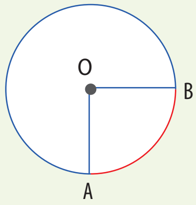
Al indicar cómo llegar a una dirección, recurrimos a elementos geométricos como las rectas paralelas y perpendiculares, que nos ayudan a describir el trayecto a seguir. Por otro lado, estos elementos también son utilizados en la arquitectura e ingeniería para realizar los planos de sus obras.

Palabras clave

Perpendicular
Paralela

Ayuda

Un arco es una porción de una circunferencia delimitada por dos puntos de la misma. Se nombran con los puntos que lo delimitan en sentido antihorario.



Arco AB → $\overset{\frown}{AB}$

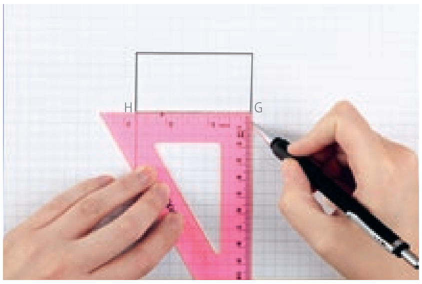
Situación 2 Construir una recta paralela a otra

A continuación, necesitan dibujar un plano del terreno para diseñar una cerca paralela al frontis de la casa a una distancia de 3 metros de esta.

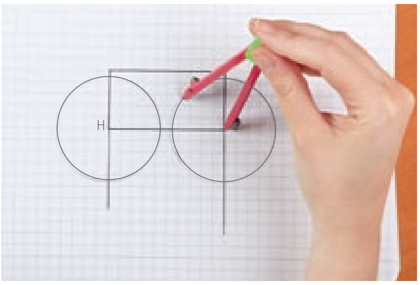
¿Qué significa que una recta sea paralela a otra?

Como la escala del plano es 1 : 100, para ubicar la cerca, esta debe ser dibujada a 3 cm del frontis o fachada de la casa.
Erik propone el siguiente procedimiento:

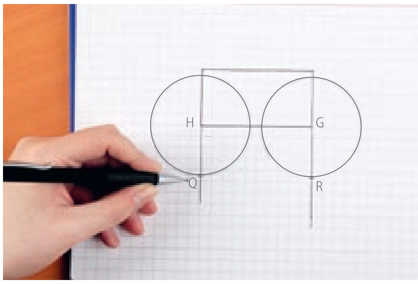
Paso 1 Con la escuadra, traza dos rectas perpendiculares a HG en los extremos de este segmento.



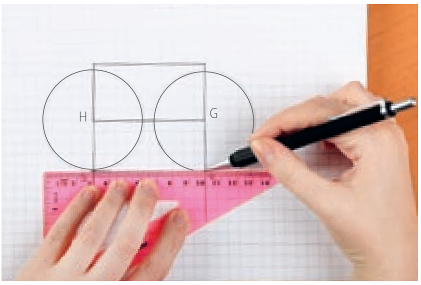
Paso 2 Ajusta la abertura del compás a 3 cm. Ubica la punta del compás sobre el punto G y traza una circunferencia. Repite este paso sobre el punto H.



Paso 3 Marca los puntos Q y R que se forman en las intersecciones de las circunferencias con las rectas perpendiculares a HG.



Paso 4 Une con la regla los puntos Q y R. De esta forma se ha construido una recta paralela a HG a una distancia de 3 cm.



Luego, la recta QR es ____________________ a la recta GH, y se encuentran a 3 cm de distancia.

Para concluir

- Para **construir rectas perpendiculares y paralelas**, puedes hacerlo manualmente utilizando regla, compás y/o escuadra.

Argumenta y comunica

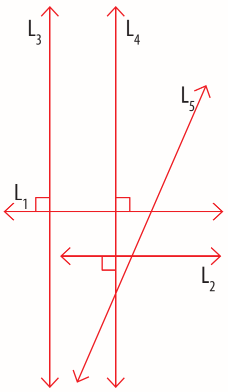
- Se afirma que si se dibujan cuatro rectas y cada una es perpendicular a la anterior, la intersección de estas dará origen a un rombo. ¿Estás de acuerdo con la afirmación anterior? Discute con tus compañeros y compañeras.

Lección 32

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. **Evalúa si las siguientes afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica tu elección.**



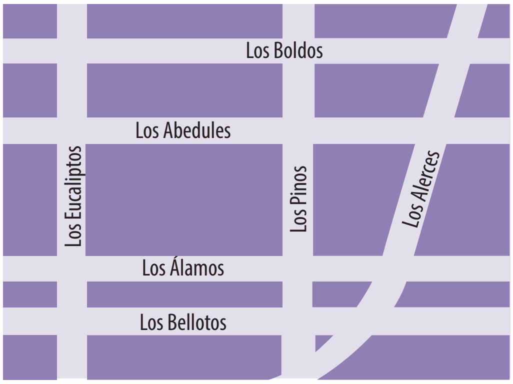
a. ________ La recta L_1 es paralela a la recta L_2.

b. ________ Las rectas L_3 y L_4 son paralelas.

c. ________ La recta L_2 es perpendicular a L_5.

d. ________ Las rectas L_1 y L_3 son perpendiculares.

2. **Observa el mapa e identifica:**



a. Una calle paralela a Los Abedules.
b. Una calle perpendicular a Los Pinos.
c. Una calle que no interseque a Los Eucaliptos.
d. Una calle que interseque a Los Bellotos y no sea perpendicular a la misma.

Práctica guiada

3. **Construye con GeoGebra una recta perpendicular a otra.**

Paso 1 Dibuja una recta cualquiera seleccionando el botón y marcando 2 puntos. Luego, haz clic en el botón y selecciona los dos puntos anteriores.

Paso 2 Selecciona la opción y marca un punto fuera de la recta.

Paso 3 Selecciona la opción y haz clic en el punto y la recta.

Dibuja tres rectas en diferente posición y construye una recta perpendicular a cada una.

4. **Construye con GeoGebra una recta paralela a otra con un punto dado.**

Paso 1 Construye una recta cualquiera y un punto fuera de ella.

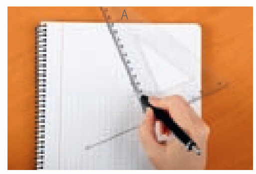
Paso 2 Selecciona la opción y haz clic en la recta y en el punto.

Dibuja 3 rectas diferentes y construye rectas paralelas a cada una de ellas.

5. **Dibuja con escuadra una recta perpendicular a otra y que pase por un punto dado.**

Paso 1 Dibuja una recta y un punto que esté fuera de ella. Ubica el ángulo recto de la escuadra sobre la recta.

Paso 2 Desliza la escuadra hasta hacer coincidir el lado con el punto. Luego, traza la recta perpendicular.



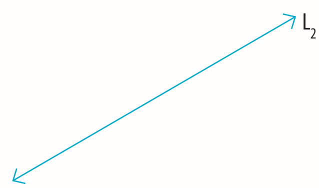
Dibuja cinco rectas en tu cuaderno y construye una recta perpendicular a cada una de ellas.

Aplica

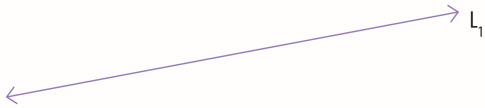
6. **Construye con regla y compás una recta perpendicular a cada recta dada.**

a.

b.



7. **Utiliza la escuadra para dibujar una recta perpendicular.**

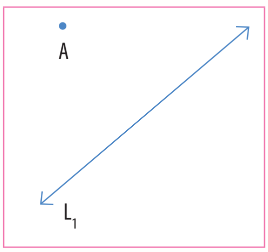


8. **Construye con regla y compás una recta paralela a cada recta dada.**

a.

b.

9. **A partir de la figura responde las siguientes preguntas.**



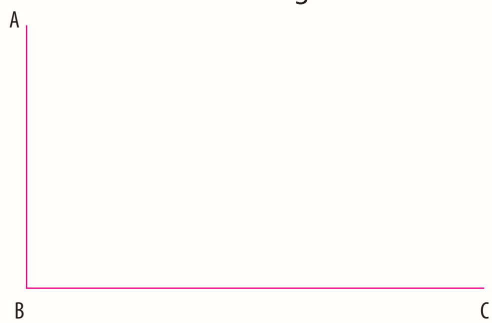
a. ¿Cuántas rectas paralelas a L_1 que pasen por el punto A se pueden dibujar? Justifica.

b. ¿Es posible trazar dos rectas perpendiculares a L_1 que pasen por el punto A? Justifica.

10. **Bárbara dibuja un rectángulo y traza rectas perpendiculares a cada uno de sus lados. ¿Qué característica deben tener las rectas para que se intersequen todas en un solo punto? Compara tu respuesta con tus compañeros y compañeras.**

11. **Describe paso a paso, un procedimiento para completar la construcción de la figura.**

Un rectángulo



12. **Experimenta.** **Toma una hoja rectangular de papel blanco. Luego, realizando solo dobleces:**

a. Genera un segmento perpendicular a uno de los lados del rectángulo. Explica cómo lo hiciste.

b. ¿Qué sucede cuando doblas el papel en 4 partes iguales? ¿Cuántas líneas paralelas se forman? ¿Cuántas líneas perpendiculares se forman?

Reflexiono

1. Nombra 3 situaciones cotidianas en las cuales se utilicen rectas paralelas y perpendiculares.
2. Se sabe que la recta A es perpendicular a la recta B, y la recta A es perpendicular a la recta C. ¿Es cierto que la recta B es perpendicular a la recta C? Discute tu respuesta con los demás compañeros y compañeras.

Refuerzo

Clara construye en una hoja blanca la recta 1 que es perpendicular a la recta 2. Luego une con un segmento las rectas 1 y 2 formando un triángulo. ¿Qué tipo de triángulo formó? Considera la clasificación de los triángulos según la medida de sus ángulos.

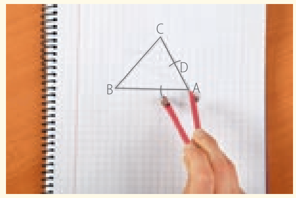
Lección 33

¿Cómo construir bisectrices y alturas?

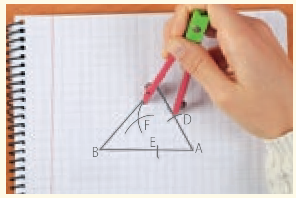
Taller Construcción de bisectrices de un triángulo

En parejas realicen la siguiente actividad.

1. En sus cuadernos dibujen un triángulo acutángulo de lados AB = 7 cm, BC = 6 cm y AC = 5 cm. Luego, realicen los siguientes pasos:



Paso 1 Abran el compás con una longitud menor a la de los lados del triángulos, y coloquen la punta del compás en el vértice A, con esa longitud, marquen los puntos D y E en los segmentos AC y AB, respectivamente.



Paso 2 Ubiquen el compás en el punto E y tracen un arco de circunferencia. Con la misma apertura, ubiquen ahora el compás en el punto D y tracen un arco de circunferencia.

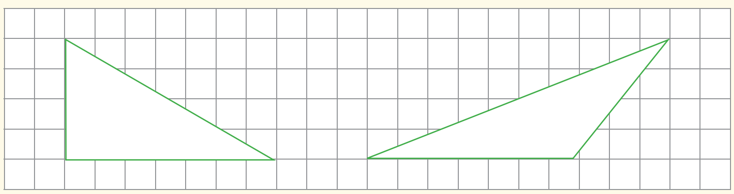
Paso 3 En la intersección de los dos arcos, marquen el punto F.

Paso 4 Une los puntos A y F. Ésta es la bisectriz del ∡ BAC.

2. Realicen la construcción en los vértices B y C siguiendo los pasos. Utiliza lápices de colores si lo consideras necesario.
3. Marquen el punto donde se intersecan las tres bisectrices. Este punto se llama incentro (I).
   a. Midan con un transportador los ángulos y completen la tabla.

m∡CAB =	m∡ABC =	m∡BCA =
m∡CAI =	m∡ABI =	m∡BCI =
m∡IAB =	m∡IBC =	m∡ICA =

   b. ¿Qué relación existe entre ellos?
   c. Copien los triángulos en sus cuadernos según la cuadrícula y realicen la construcción de las tres bisectrices para los siguientes triángulos.



   d. Habiendo construido las bisectrices de diferentes triángulos, definan con sus palabras qué es una bisectriz.
   e. Se observa que, para los casos anteriores, el incentro quedó dentro del triángulo.
   ¿Podrá quedar fuera de este? ¿Por qué?

Propósito

Construir bisectrices y alturas.

¿Para qué?

Cuando se diseñan figuras con material concreto, tales como aviones, barcos y robots, es común que se utilicen recursos geométricos en su construcción, como por ejemplo, bisectrices y alturas, los que permiten que el objeto tenga características físicas determinadas que evitan fallas futuras.

Palabras clave

Bisectriz
Incentro
Altura
Ortocentro

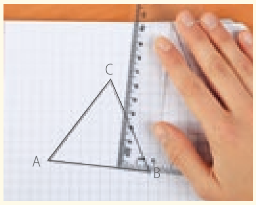
¿Qué otra estrategia utilizarías para trazar las bisectrices de un triángulo?

Taller Alturas de un triángulo acutángulo

Trabajen en parejas la siguiente actividad.

1. A partir de la definición: "La altura de un triángulo es el segmento que une perpendicularmente un vértice con su lado opuesto", completen los pasos para dibujar las alturas de un triángulo acutángulo, utilizando la escuadra.

Paso 1 Ubiquen el ángulo recto de la escuadra de forma que uno de sus lados coincida con el lado del triángulo.

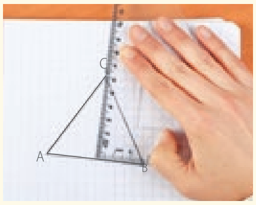


Paso 2

____

____

____

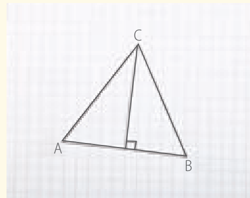


Paso 3

____

____

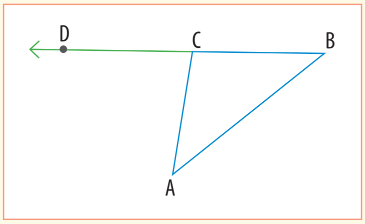
____



Paso 4 Repitan este procedimiento para cada vértice y marquen el punto de intersección de las alturas. El punto marcado se denomina ortocentro (H).

¿Dónde está ubicado el punto de intersección de las tres alturas? ______________________.

2. Siguiendo los pasos, en un triángulo obtusángulo, construyan las alturas.



Paso 1 Prolonguen el lado BC y determinen un punto D.

Paso 2 Dibujen un arco con el compás, considerando centro B y abertura BA.

Paso 3 Dibujen un arco con el compás, considerando centro D y abertura DA.

Paso 4 Unan los puntos de intersección de los arcos y repitan este procedimiento para cada vértice.

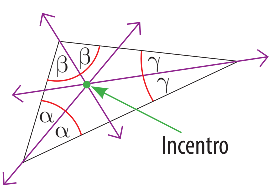
¿Dónde está ubicado el punto de intersección de las tres alturas?

____.

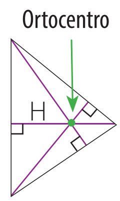
¿En qué tipos de triángulos el ortocentro coincidirá con un vértice del mismo?

Para concluir

- Las **bisectrices** de un triángulo son las rectas que dividen sus ángulos interiores en dos ángulos congruentes (de igual medida). Estas se intersecan en un punto llamado **incentro** (I).



- Las **alturas** de un triángulo son los segmentos que unen perpendicularmente un vértice con su lado opuesto o la prolongación de este. Las alturas o sus prolongaciones se intersecan en un punto llamado **ortocentro** (H).

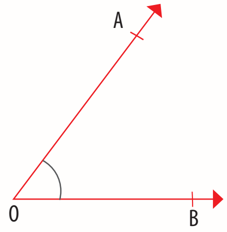


Practiquemos lo aprendido

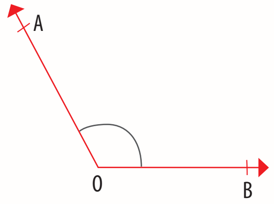
Repaso

1. Mide con tu transportador los ángulos.

a.

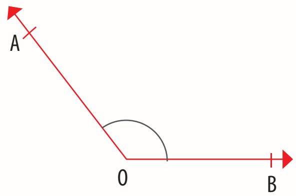


b.

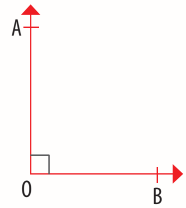


2. Construye la bisectriz de cada ángulo.

a.



b.

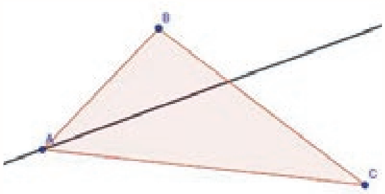


Práctica guiada

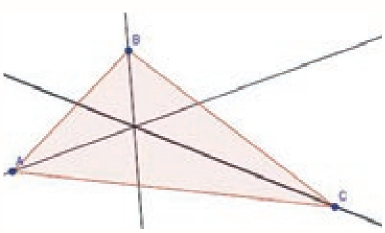
3. Construye con GeoGebra las bisectrices de un triángulo.

Paso 1 Construye un triángulo. Para esto presiona sobre el botón y ubica 3 puntos.

Paso 2 Para construir la bisectriz, haz clic en el botón y selecciona en orden (A, B y C) los tres vértices del ángulo.



Paso 3 Repite este procedimiento con los otros dos ángulos.



Para marcar el incentro, haz clic en el botón y pincha la intersección de las rectas.

a. Siguiendo los pasos anteriores, construye las bisectrices de tres triángulos diferentes.

b. Comprueba que las construcciones sean bisectrices. Para ello, selecciona el botón y pincha 3 puntos no consecutivos, para ver las medidas de los ángulos, ¿cómo son las medidas?

c. Pincha , ubica el puntero en uno de los vértices de un triángulo y mueve la figura. ¿Qué sucede con las medidas de sus ángulos? ¿Qué sucede con el incentro? Justifica ambos fenómenos.

d. Compara tu construcción con la de otros compañeros o compañeras. ¿Qué puedes concluir?

4. Construye las rectas que contienen las alturas de un triángulo con GeoGebra.

Paso 1 Construye un triángulo con el botón .

Paso 2 Haz clic en el botón y luego selecciona un vértice del triángulo y el lado opuesto a este.

Paso 3 Repite este procedimiento con los otros vértices del triángulo.

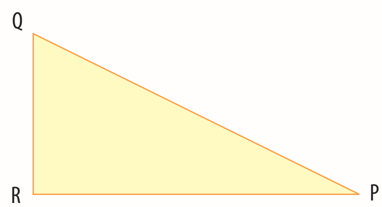
Para marcar el ortocentro, haz clic en el botón y selecciona la intersección entre las tres alturas.

a. Describe un procedimiento para comprobar que las construcciones sean alturas. Luego, pruébalo.

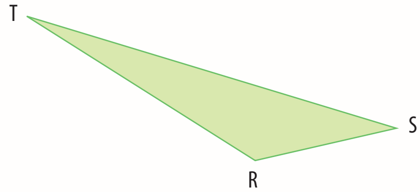
b. Pincha el botón y mueve la construcción, ¿qué sucede con el ortocentro? ¿Por qué?

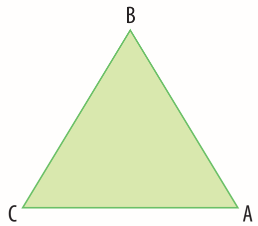
Aplica

5. Construye las bisectrices del triángulo y marca el incentro.

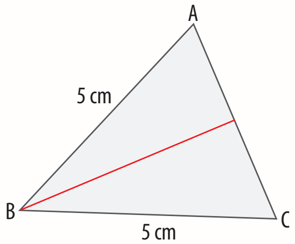


6. Construye las alturas del triángulo y marca el ortocentro.

a. 

b. 

7. En el triángulo ABC de la figura se ha trazado un segmento.

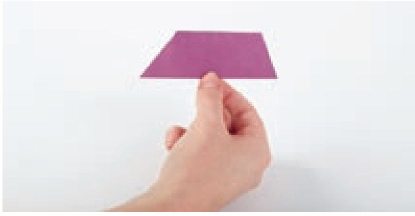


a. El segmento dibujado, ¿corresponde a una altura o a una bisectriz?
b. ¿Qué criterios utilizas para la identificación?
c. Justifica tus afirmaciones.

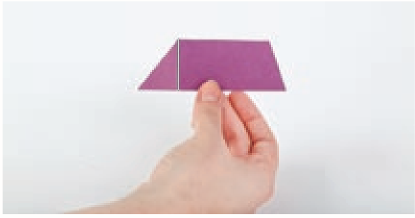
8. Dibuja un cuadrado ABCD en tu cuaderno.
a. Traza todas las bisectrices de los ángulos interiores del cuadrado.
b. Mide los ángulos de cada triángulo formado. ¿Cuál es su clasificación?

9. Construye un triángulo ABC isósceles rectángulo en C.
a. Traza la altura desde $\overline{AB}$ hasta el vértice C.
b. ¿Cuál es la clasificación de los triángulos que se forman? Justifica.

10. Analiza las imágenes.

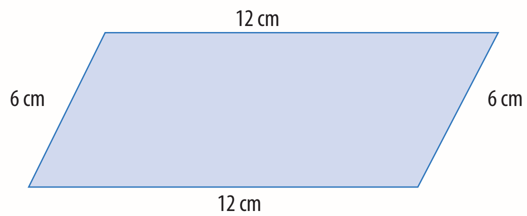
Paso 1


Paso 2


Paso 3


a. ¿Qué elemento del cuadrilátero se ha construido? ¿En qué características te fijas para responder?
b. Describe con tus palabras el paso a paso necesario para construir el elemento anterior.

11. **Evalúa** la afirmación.
Antonia plantea que, para dividir el terreno en dos partes con igual superficie, es necesario construir la bisectriz en uno de sus ángulos basales. ¿Es correcta esta afirmación? Justifica.



Reflexiono

¿Es posible que el incentro y el ortocentro coincidan en un mismo triángulo? Fundamenta tu respuesta con un ejemplo o contraejemplo.

Refuerzo

En un triángulo cuyos ángulos miden 70°, 60° y 50° se construyen tres bisectrices. Luego, se considera cada uno de los dos ángulos que originó cada bisectriz y se suman sus medidas. ¿Cuánto suman las medidas de dichos ángulos?

Lección 34

¿Cómo construir transversales de gravedad y simetrales?

Propósito

Construir transversales de gravedad y simetrales de un triángulo.

¿Para qué?

Diversos problemas que involucran distancias entre tres elementos u objetos se pueden resolver representando a través de un triángulo y conociendo los elementos de este. De esta manera, la construcción de las transversales de gravedad y de las simetrales permiten descubrir las relaciones y propiedades.

Así, se pueden resolver problemas como encontrar el punto medio de uno de los lados de un terreno triangular.

Palabras clave

Transversal de gravedad
Baricentro
Simetral
Circuncentro

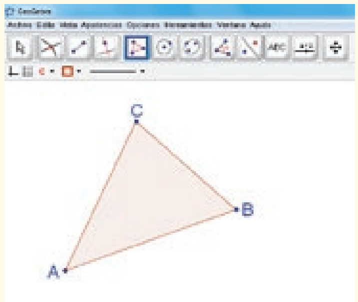
¿Qué crees que sucederá si a un triángulo hecho de un material rígido se le sostiene con la punta de un alfiler en su baricentro?

Taller Transversales de gravedad usando GeoGebra

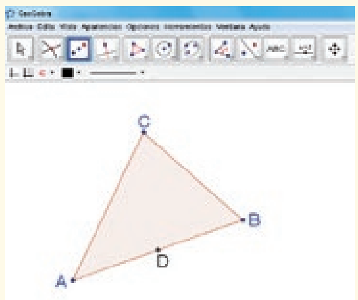
En parejas realicen la siguiente actividad usando GeoGebra.

1. Construyan las transversales de gravedad de un triángulo.

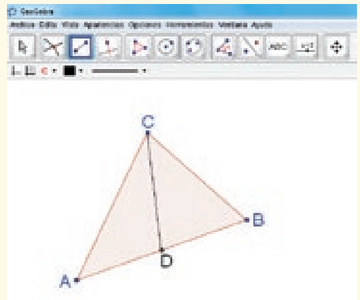
Paso 1 Construyan un triángulo presionando el botón y ubiquen 3 puntos.



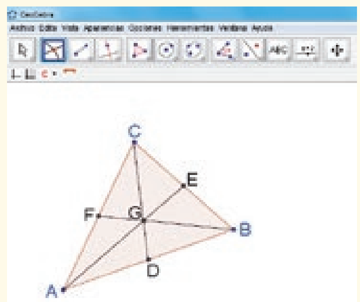
Paso 2 Ubiquen el punto medio de uno de los lados del triángulo. Para ello, hagan clic en el botón y seleccionen los vértices del lado.



Paso 3 Hagan clic en el botón y seleccionen el vértice y el punto medio del lado opuesto.



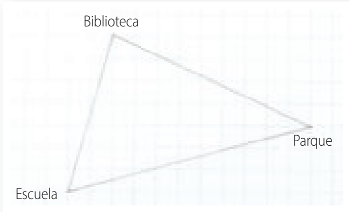
Paso 4 Repitan el procedimiento con los otros lados del triángulo. Para marcar el punto de intersección de las tres transversales, llamado baricentro (G), hagan clic en el botón y seleccionen 3 transversales.



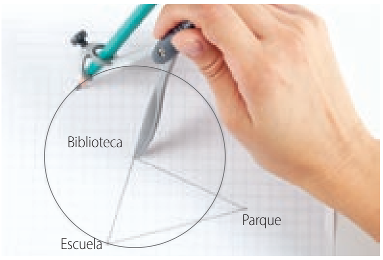
2. Con el botón midan los segmentos que componen cada transversal, presionando dos de sus puntos. ¿Cuál es la relación entre las medidas del segmento definido por el vértice y el baricentro, y el definido por el baricentro y el punto medio del lado opuesto a este vértice?
3. Modifiquen el triángulo moviendo sus vértices. ¿Se conserva la relación establecida en la actividad 2?
4. Los segmentos trazados reciben el nombre de transversales de gravedad. ¿Qué características tienen las transversales de gravedad?
5. Compartan con el curso sus definiciones y lleguen en conjunto a una definición única.

Situación Construir simetrales

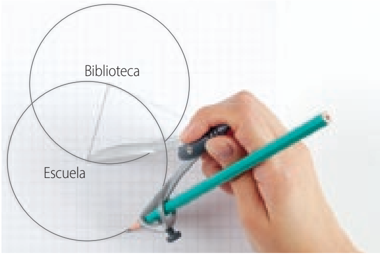
El dibujo representa un terreno en el que se construirá un quiosco. Los puntos marcados representan la biblioteca, la escuela y un parque, que al unirlos forman un triángulo.
Según los ingenieros, el mejor lugar para ubicar el quiosco es el que se encuentra a la misma distancia de los tres puntos. Para encontrarlo deben construir las simetrales de cada lado del triángulo. **¿Dónde deben ubicar el quiosco?**



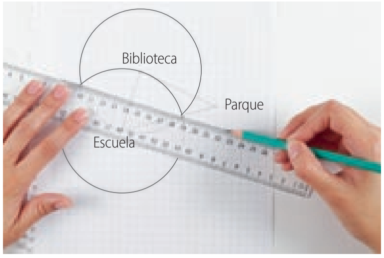
Paso 1 Abren el compás con la distancia que separa a la biblioteca y la escuela; y desde la biblioteca, trazan una circunferencia.



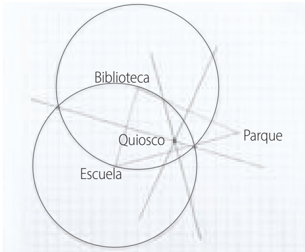
Paso 2 Ahora, con la misma abertura del paso 1, con centro en la escuela trazan otra circunferencia.



Paso 3 Marcan los puntos en que se intersecan las dos circunferencias y los unen con una regla.



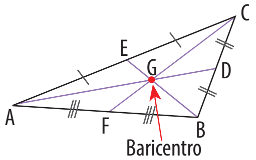
Paso 4 Repiten este procedimiento con los tres lados del triángulo que se forma entre la biblioteca, la escuela y el parque.
Marcan el punto de intersección de las tres líneas construidas.



El punto de intersección del paso 4 es el lugar en el que se construirá el quiosco, ya que está a igual distancia de cada uno de los puntos, es decir, de los vértices del triángulo.
Este punto se llama circuncentro y es la intersección de las simetrales o mediatrices.

Para concluir

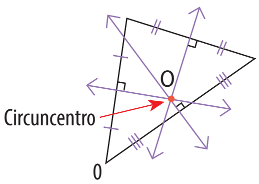
- La **transversal de gravedad** es un segmento que pasa por un vértice y el punto medio del lado opuesto a dicho vértice.



Todo triángulo tiene tres transversales que se intersecan en un punto llamado **baricentro o centro de gravedad (G)**.

$$\frac{AG}{GD} = \frac{BG}{GE} = \frac{CG}{GF} = \frac{2}{1}$$

- La **simetral** o **mediatriz** es una recta perpendicular a cada uno de los lados del triángulo en su punto medio.



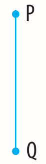
Todo triángulo tiene tres **simetrales** que se intersecan en un punto llamado **circuncentro (O)** que se encuentra a igual distancia de los tres vértices.

Practiquemos lo aprendido

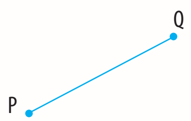
Repaso

1. Con regla y compás encuentra el punto medio de cada segmento y traza una línea perpendicular.

a.



b.



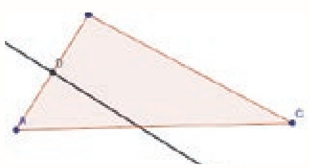
Práctica guiada

2. Utiliza GeoGebra para construir las simetrales de un triángulo.

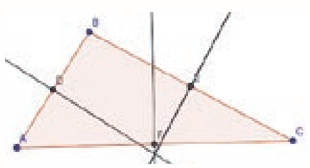
Paso 1 Construye un triángulo presionando el botón y ubicando 3 puntos.

Paso 2 Ubica el punto medio de un lado del triángulo; para ello, haz clic en el botón y selecciona los vértices de un lado.

Paso 3 Haz clic en el botón para construir una recta perpendicular al lado en el punto medio.



Paso 4 Repite este procedimiento con todos los lados del triángulo.



Para marcar el circuncentro, haz clic en el botón y selecciona dos simetrales.

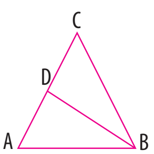
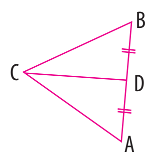
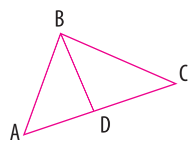
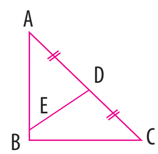
a. Dibuja las simetrales de un triángulo.

b. Marca el circuncentro.
Luego, presiona , pincha el circuncentro y un vértice cualquiera. ¿Qué objeto se construyó?

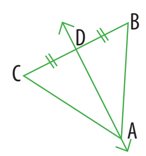
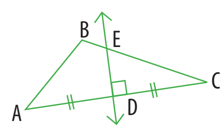
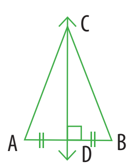
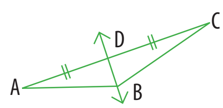
c. Pincha y mueve la figura. ¿Qué sucede con el objeto construido en b? ¿Por qué?

Aplica

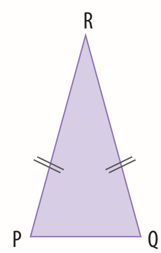
3. Identifica en cuál o cuáles de los siguientes triángulos está construida una transversal de gravedad. Justifica tu elección.

Triángulo isósceles	Triángulo equilátero
	
Triángulo escaleno	Triángulo rectángulo
	

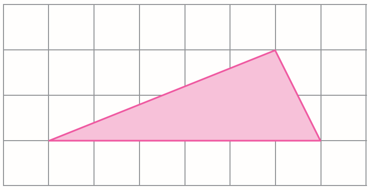
4. Identifica en cuáles de los siguientes triángulos está construida una simetral. Justifica tus elecciones.

Triángulo equilátero	Triángulo escaleno
	
Triángulo isósceles	Triángulo escaleno
	

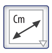
5. Construye las transversales de gravedad del triángulo PQR.



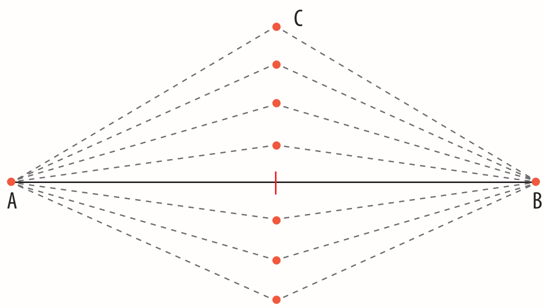
6. Dibuja en tu cuaderno el triángulo y construye sus simetrales.



7. Con GeoGebra, construye un triángulo rectángulo, uno acutángulo y uno obtusángulo.
   a. Construye las transversales de gravedad y las simetrales en cada uno de los triángulos dibujados.
   b. ¿Dónde se ubica el baricentro de cada uno? Argumenta la ubicación que indicas.
   c. ¿Dónde se ubica el circuncentro de cada triángulo? Argumenta la ubicación que indicas.

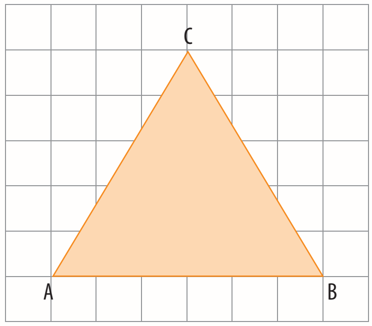
8. Con GeoGebra construye un triángulo escaleno y las simetrales de cada lado. Utiliza el botón  para medir la distancia del circuncentro a los vértices del triángulo.
   a. ¿Cuál es la distancia?
   b. ¿Qué crees que ocurrirá si realizas el mismo procedimiento con otro tipo de triángulo?

9. En la imagen, el punto C se acerca al punto medio del segmento AB y después se aleja.



   a. Mide y compara la distancia de AC y BC en cada posición del punto C.
   b. ¿Qué sucede con estas medidas?
   c. Une los puntos generados al desplazar el punto C. ¿A cuál de los elementos trabajados corresponde?, ¿por qué?

10. Copia en tu cuaderno el siguiente triángulo equilátero y construye las tres transversales de gravedad.



Mide la longitud de cada una de ellas, ¿qué sucede? ¿Por qué?

11. **Argumenta.** Tres niños deben lanzar una pelota a una canasta que debe estar a igual distancia de todos.
   a. ¿Qué línea deberías trazar para conocer la ubicación exacta de la canasta?
   b. Dibuja la canasta en el lugar indicado trazando la línea nombrada en la pregunta anterior.

12. **Investiga** en internet otras propiedades del baricentro y escríbelas en tu cuaderno.

Reflexiono

Cristina afirma que al construir dos transversales de gravedad en un triángulo rectángulo, estas siempre coinciden con los lados del triángulo. ¿Estás de acuerdo con ella? Fundamenta tu respuesta.

Refuerzo

Samuel dibuja en su cuaderno un triángulo equilátero de lado 6 cm. En él construye las alturas y las transversales de gravedad. ¿Qué relación existe entre estos segmentos? Compara tu respuesta con los demás compañeros y compañeras.

Lección 35

» Propósito

Construir circunferencias circunscritas e inscritas.

¿Para qué?

Para el diseño de máquinas, la ingeniería recurre frecuentemente a la geometría. Así, es posible apreciar que en algunas máquinas, los modelos de las piezas con forma circular se encuentran dentro de piezas triangulares o viceversa. Conocer el proceso de construcción de circunferencias inscritas y circunscritas permite relacionar sus elementos y determinar ciertas propiedades.

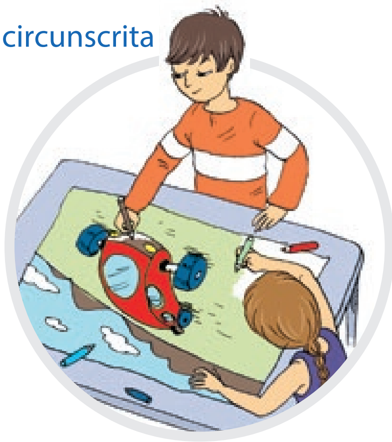
Palabras clave

Simetral
Circuncentro
Circunferencia circunscrita
Incentro
Bisectriz
Circunferencia inscrita

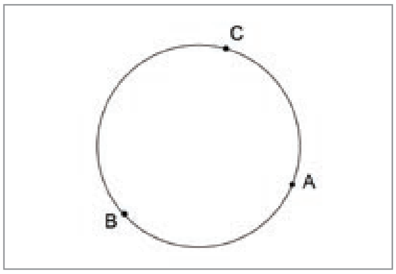
¿Cómo construir una circunferencia circunscrita y una inscrita?

Situación 1 Construir una circunferencia circunscrita

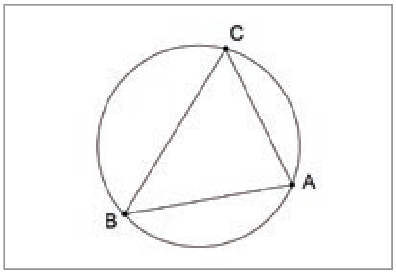
La profesora de tecnología propone realizar diseños creativos de vehículos a motor. Macarena y José deciden construir un vehículo utilizando tres ruedas. Para ello, han recortado tres círculos de madera.
Para que el vehículo funcione bien deben ubicar el centro de cada una de las ruedas (círculos) y hacer allí un orificio para ensamblarlas en el vehículo.



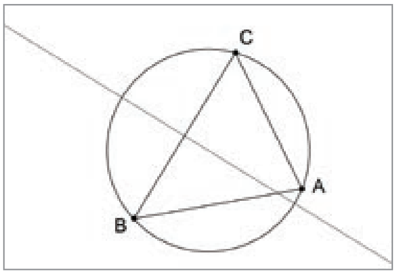
Paso 1 Ubican tres puntos cualesquiera en la circunferencia: A, B y C.



Paso 2 Con regla, unen los 3 puntos, formando el triángulo ABC.

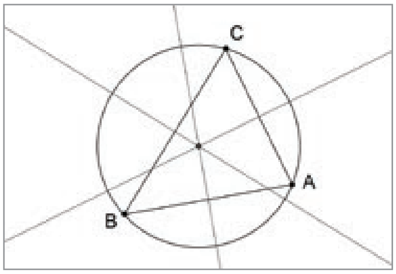


Paso 3 Construyen las simetrales de todos los lados, ya que estas se intersecan en el circuncentro, el que equidista de los tres vértices, es decir, marca el centro de la circunferencia.



Con tu regla y compás, construye las simetrales que faltan.

Paso 4 Marcan el circuncentro que corresponde al centro de la circunferencia circunscrita.

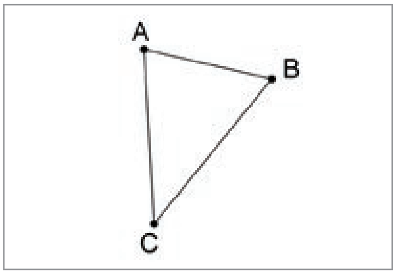


De esta forma, Macarena y José han encontrado el centro de la rueda para poder ensamblarla. Ahora pueden preparar cada rueda para realizar su proyecto.

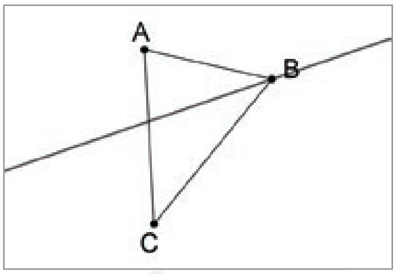
Situación 2 Construir una circunferencia inscrita

Macarena y José deciden que el techo del vehículo tendrá forma triangular y en él han decidido pintar un círculo lo más grande posible.

Paso 1 Dibujan el techo del vehículo.

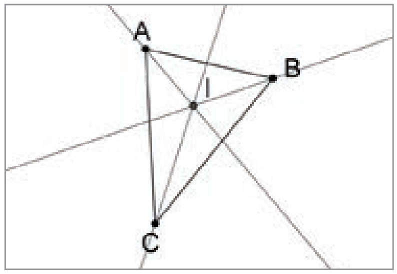


Paso 2 Construyen la bisectriz de cada ángulo.

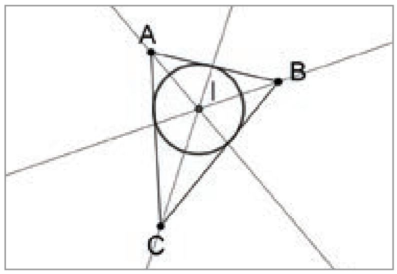


Con tu regla y compás construye las bisectrices que faltan.

Paso 3 Marcan el punto de intersección de las bisectrices I (incentro).



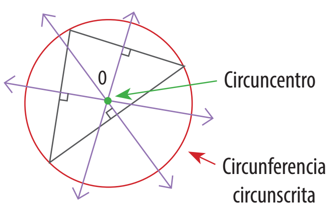
Paso 4 Ajustan la abertura del compás midiendo la distancia desde el punto I a uno de los lados del triángulo y dibujan la circunferencia inscrita.



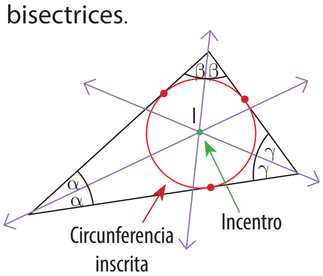
De esta forma, han determinado el círculo de mayor superficie que pueden pintar sobre el techo del vehículo.

Para concluir

- El centro de la **circunferencia circunscrita** a un triángulo es el **circuncentro**, punto de intersección de las **simetrales**. Este punto está a igual distancia de cada vértice del triángulo.



- El centro de la **circunferencia inscrita** a un triángulo es el **incentro**, punto de intersección de las **bisectrices**.

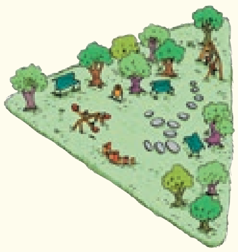


Argumenta y comunica

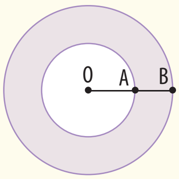
- Dibuja un triángulo en una hoja y recórtalo. Solo utilizando dobleces, ¿cómo determinarías el centro de la circunferencia inscrita? Discute con un compañero o compañera.

Repaso

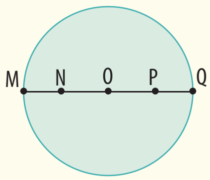
1. Vicente quiere construir una pileta de forma circular en el centro de su jardín. ¿Dónde debería ubicarla?



2. En la figura, O es el centro del círculo, OB =12 cm y AB = 5 cm. ¿Cuál es el perímetro del sector pintado? Considera $\pi = 3{,}14$.



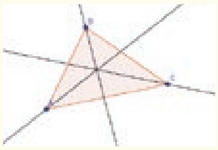
3. En la circunferencia de centro O, MP = 9 cm y MN = NO = OP = PQ. ¿Cuál es la medida del diámetro de la circunferencia?



Práctica guiada

4. Construye con GeoGebra la circunferencia inscrita.

Paso 1 Construye un triángulo cualquiera y la bisectriz de cada uno de los ángulos del mismo y marca el incentro.



Paso 2 Mide la distancia del incentro a uno de los lados del triángulo. Para ello, haz clic en la opción y selecciona el incentro y un lado del triángulo.

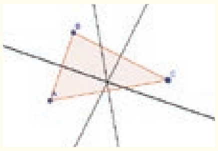
Paso 3 Haz clic en la opción y selecciona una bisectriz y el lado que corta, creando un punto. Haz clic en con centro en el incentro y que pase por el punto creado.

Dibuja 3 triángulos y construye la circunferencia inscrita en cada uno.

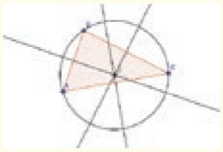
5. Construye con GeoGebra la circunferencia circunscrita a cada triángulo.

Paso 1 Construye un triángulo cualquiera.

Paso 2 Construye la simetral de cada uno de los lados del triángulo.



Paso 3 Selecciona la opción . Marca el circuncentro y luego uno de los vértices del triángulo.

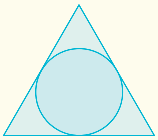


Dibuja 3 triángulos y construye la circunferencia circunscrita.

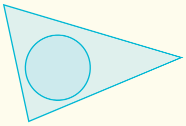
Aplica

6. Identifica en qué casos se ha dibujado la circunferencia circunscrita (CC) y en qué casos la inscrita (CI).

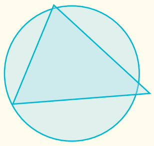
a.



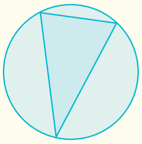
c.



b.

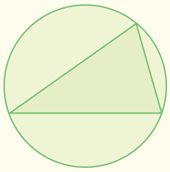


d.

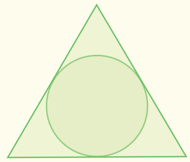


7. **Determina el centro de cada circunferencia utilizando regla y compás. Describe el procedimiento y discute con tus compañeros y compañeras.**

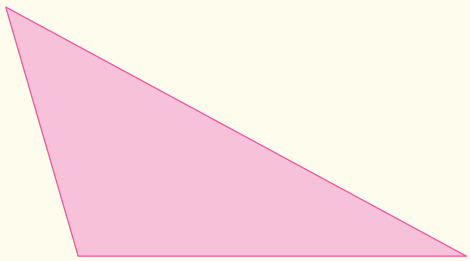
a.



b.



8. **Construye con regla y compás la circunferencia inscrita y la circunscrita al triángulo.**



9. **Construye con GeoGebra y determina dónde se ubica el centro de la circunferencia circunscrita en:**

a. Un triángulo rectángulo.

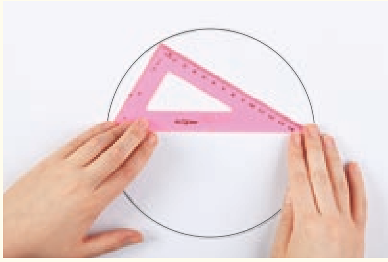
b. Un triángulo obtusángulo.

c. Un triángulo acutángulo.

d. Mueve los vértices de los triángulos. ¿Qué puedes concluir?

10. **Argumenta. Tres personas se encuentran ubicadas en diferentes posiciones, de manera que forman un triángulo. Si caminan el mismo tramo y se encuentran en un mismo punto, ¿qué elemento geométrico han descrito al caminar?**

11. **Dibuja una circunferencia cuyo diámetro tenga igual medida que el lado más largo de tu escuadra.**

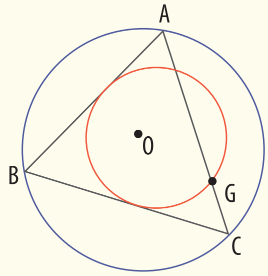


a. ¿Dónde queda ubicado el vértice del ángulo recto de la escuadra?

b. ¿Ocurrirá lo mismo en todos los triángulos rectángulos? Comprueba con otros triángulos.

c. Plantea una regularidad respecto a lo comprobado.

12. **Observa la imagen y evalúa si las siguientes afirmaciones son verdaderas (v) o falsas (f). Justifica en cada caso.**



a. ______ La circunferencia roja está inscrita en el triángulo ABC.

b. ______ La circunferencia azul está circunscrita en el triángulo ABC.

c. ______ El segmento AG es radio de la circunferencia roja.

d. ______ El segmento OG es radio de la circunferencia azul.

Reflexiono

Respecto a la afirmación, "en una circunferencia inscrita en un triángulo, la distancia mayor de la unión de dos de los puntos que intersecan al triángulo corresponde al diámetro de la circunferencia", evalúa si es correcta. Comenta con tus compañeros y compañeras.

Refuerzo

Describe el procedimiento para construir una circunferencia circunscrita en un triángulo equilátero de lado 5 cm.

Lección 36

¿Cómo construir triángulos congruentes?

Propósito

Construir triángulos congruentes.

¿Para qué?

Para realizar diseños de murales y teselados, algunos artistas recurren al uso de piezas triangulares, las cuales varían su color y posición, pero mantienen su forma y tamaño.

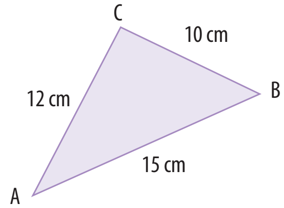
Relacionar los elementos del triángulo y sus propiedades permite que, con ayuda de regla y compás, se puedan construir triángulos congruentes a partir de los datos conocidos del triángulo original.

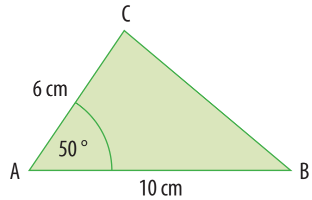
Palabras clave

Triángulo congruente

Fernando y Carolina están pintando un mural. Para ello, dibujan un diseño que se compone de triángulos congruentes de diferentes colores.

La idea es cubrir toda la superficie de la pared con estos triángulos. **¿Cómo pueden reproducirlos?**





Con la información que disponen de cada triángulo, utilizarán dos estrategias diferentes de construcción.

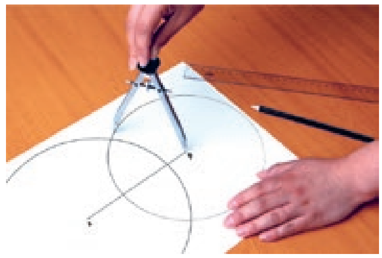
Situación 1 Construcción dadas las medidas de sus 3 lados

Del triángulo lila conocen las medidas de sus tres lados, por lo que siguen los siguientes pasos.

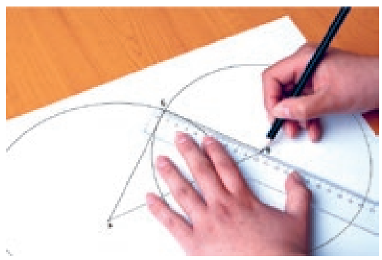
Paso 1 Dibujan el lado AB de 15 cm.

Paso 2 Abren el compás 12 cm y dibujan una circunferencia con centro en A.

Paso 3 Abren el compás 10 cm y dibujan una circunferencia con centro B.



Paso 4 Marcan el punto C de intersección de ambas circunferencias. y dibujan el triángulo uniendo los vértices A, B y C.



De esta manera se ha construido un triángulo congruente al inicial.

¿Es posible construir un triángulo congruente a otro teniendo la imagen pero no las medidas de sus lados o ángulos?

Si en vez de tener la longitud de los lados, solo tuvieran las medidas de los tres ángulos, ¿será posible construir siempre triángulos congruentes al original? ¿por qué?

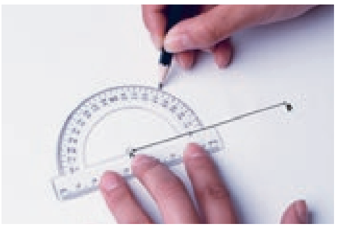
Situación 2 Construcción dada la medida de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos

Recurso digital complementario

Del triángulo verde conocen la medida de dos de sus lados y el ángulo comprendido entre ellos.

Paso 1 Dibujan el lado AB de medida 10 cm.

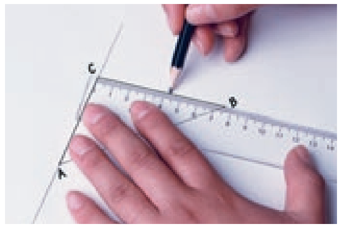
Paso 2 Ponen el centro del transportador sobre el punto A, como se muestra en la imagen, y marcan un punto que corresponda a 50º.



Paso 3 Dibujan una recta L que contenga al punto dibujado en los 50º y al punto A.

Paso 4 Usando la regla, dibujan sobre la recta L el punto C a 6 cm del punto A.

Paso 5 Unen el punto B con el punto C.



Paso 6 Se obtiene un triángulo ABC congruente con el triángulo verde de Fernando y Carolina.

De esta manera, se ha construido un triángulo congruente al inicial.

Para concluir

- Para construir **triángulos congruentes** es necesario conocer al menos tres datos de este:
  1. La medida de sus tres lados.
  2. La medida de un lado y de dos de sus ángulos.
  3. La medida de un ángulo y la medida de los lados que lo contienen.
- En un triángulo, la longitud de uno de sus lados siempre es menor que la suma de las longitudes de los otros dos y mayor que la diferencia.

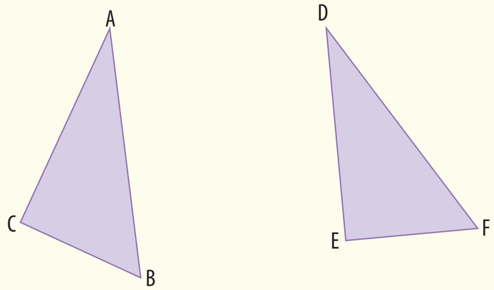
Argumenta y comunica

- Explica cómo es posible construir un par de triángulos congruentes entre sí, a partir solo de una imagen. ¿Qué instrumentos geométricos podrías utilizar? Describe el proceso.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. **Mide los lados y ángulos de los triángulos de la imagen y completa.**



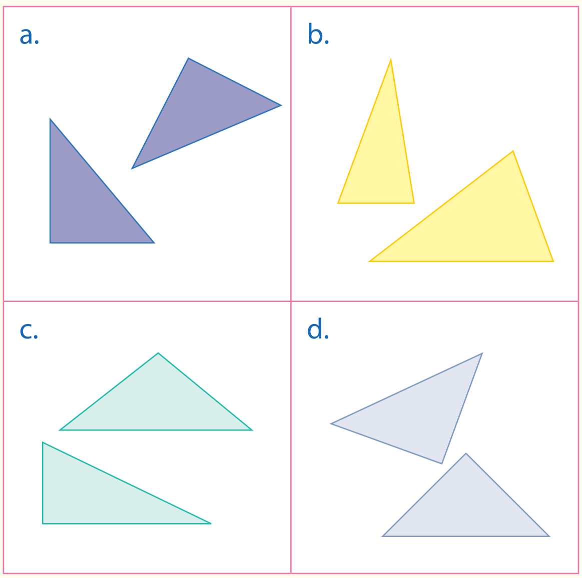
a. El lado AC es congruente con el lado _________.

b. El lado AB es congruente con el lado _________.

c. El ángulo ABC es congruente con el ángulo _________.

d. El ángulo BCA es congruente con el ángulo _________.

2. **Identifica si los triángulos son congruentes en cada caso. Para ello, utiliza regla y transportador.**



Práctica guiada

3. **Evalúa si es posible construir un triángulo con las longitudes de los lados dadas.**
Para ello, escribe ✓ o ✗ según corresponda.

$\boxed{12 \text{ cm}, 5 \text{ cm}, 13 \text{ cm}}$

Para que se pueda construir un triángulo, la longitud de cada lado tiene que ser menor que la suma de las otras dos.

En este caso: $12 < 5 + 13$, $5 < 12 + 13$ y $13 < 12 + 5$. Por lo cual el posible la construcción.

a. 6 m, 8 m, 12 m _________

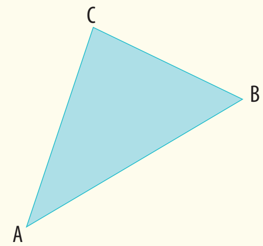
b. 7 mm, 1 mm, 6 mm _________

c. 2 cm, 8 cm, 4 cm _________

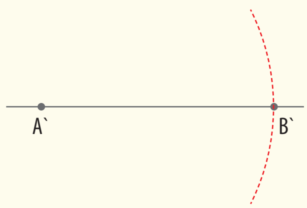
d. 4 cm, 6 cm, 9 cm _________

4. **Construye un triángulo congruente a cada uno de los triángulos dados.**

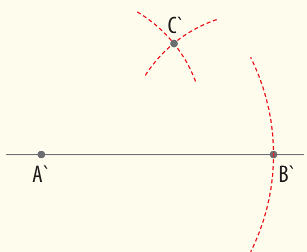
Para construir un triángulo congruente a otro dado sin tener las medidas de sus lados o sus ángulos, puedes seguir los siguientes pasos:



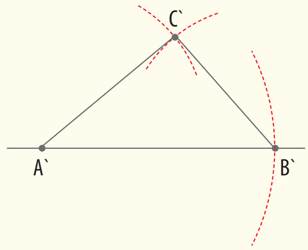
Paso 1 Traza una semirrecta más larga que AB. Luego, marca uno de los vértices en la recta trazada y con el compás, mide uno de los lados del triángulo y copia la longitud en la recta.



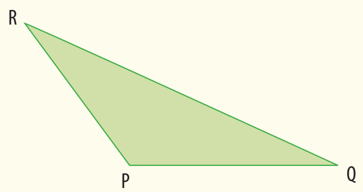
Paso 2 Mide el lado AC y con centro en A', traza una circunferencia con radio igual al lado medido. Repite el procedimiento con el lado BC.



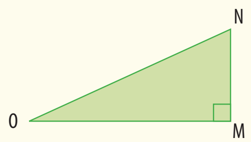
Paso 3 Marca el vértice C' y une los vértices del triángulo A'B'C' que es congruente al triángulo ABC.



a.



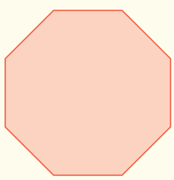
b.



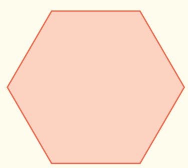
Aplica

5. Descompón las figuras en triángulos congruentes.

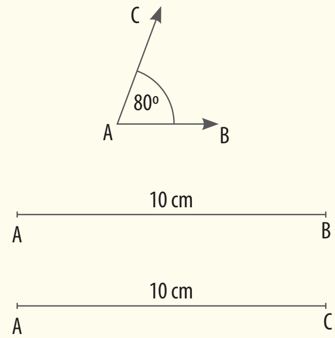
a.



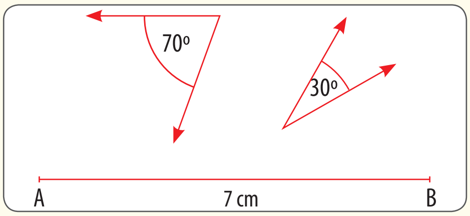
b.



6. Aplica los procedimientos estudiados y construye en tu cuaderno el triángulo con los datos que se presentan.



7. Analiza los datos y realiza las actividades.

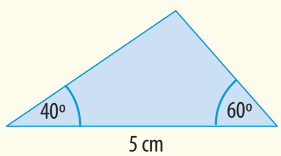


a. Realiza la construcción de un triángulo con los datos dados y describe los pasos seguidos.

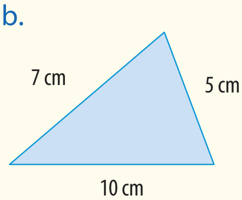
b. Intercambia con un compañero o compañera el procedimiento. Sigue sus pasos y observa si es posible realizar la construcción, de no ser posible, corrige el procedimiento.

8. Construye en tu cuaderno cada triángulo y uno congruente para cada caso.

a.



b.



9. **Investiga** Busca en internet figuras realizadas en origami en las cuales se identifiquen triángulos congruentes. Intercámbiala con un compañero o compañera y comenten cómo se formaron los triángulos al hacer la figura.

Reflexiono

Jaime afirma que si sobre un triángulo construye otro congruente a este, siempre se formará un rectángulo. ¿Estás de acuerdo con la afirmación anterior? Fundamenta tu respuesta.

Refuerzo

Fernando dibuja un triángulo en donde dos de sus lados miden 3 cm y el otro 4 cm. En cada uno de los lados construye triángulos congruentes al triángulo original. ¿Cuál es el perímetro de la figura formada?

Lección 37

¿Cómo construir cuadriláteros congruentes?

Propósito

Construir cuadriláteros congruentes.

¿Para qué?

Muchos dibujos y diseños se componen de piezas con forma de cuadriláteros. Para replicarlas y obtener un molde de ella, es necesario utilizar una serie de procedimientos y elementos de la geometría. La correcta aplicación de las propiedades permite construir cuadriláteros congruentes de manera manual o con un software como GeoGebra.

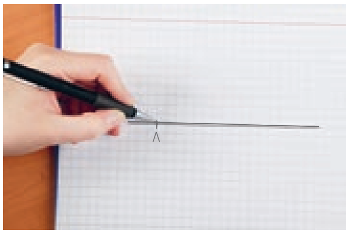
Palabras clave

Cuadrilátero congruente

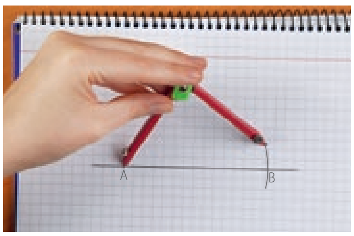
Situación 1 Construir un cuadrilátero cualquiera

Benjamín ha desafiado a Sofía a adivinar qué cuadrilátero tiene escondido en su hoja. Solo le ha dicho que la diagonal de este mide 10 cm y uno de sus lados mide 6 cm. **¿Qué podría hacer Sofía para descubrir qué cuadrilátero es?**

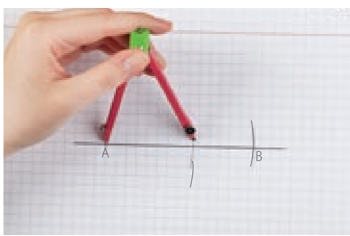
Paso 1 Dibuja una recta y marca un punto A sobre ella.



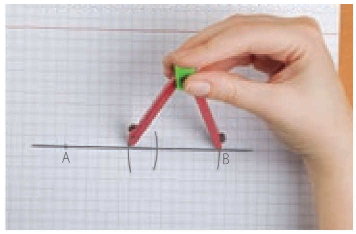
Paso 2 Ajusta la abertura del compás 10 cm, apoya la punta sobre A y traza un arco de circunferencia sobre la recta. De esta manera se ha generado el punto B.



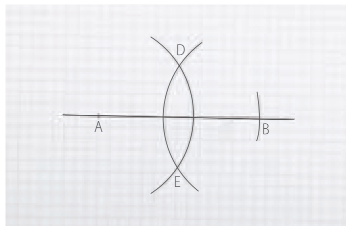
Paso 3 Ajusta la abertura del compás 6 cm, apoya la punta sobre el punto A y traza un arco de circunferencia.



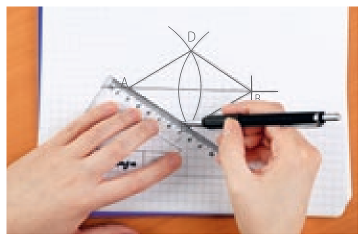
Paso 4 Con la misma abertura del compás, apoya la punta sobre B y traza un arco de circunferencia.



Paso 5 En la intersección de los dos arcos, marca los puntos D y E.



Paso 6 Con una regla, une los cuatro puntos y forma un rombo.



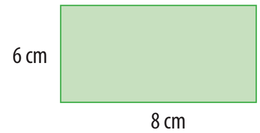
¿Cómo puede Sofía comprobar que el rombo que construyó es congruente con el cuadrilátero de Benjamín?

Con la información que entregó Benjamín acerca de su triángulo, ¿será posible construir otro cuadrilátero, diferente al que dibujo Sofía? Justifica tu respuesta.

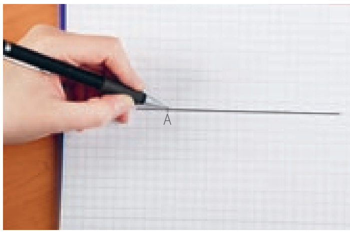
____

Situación 2 Construir un rectángulo

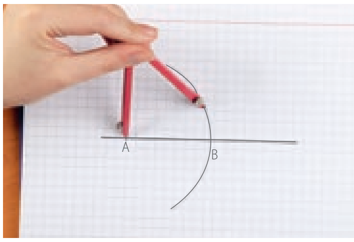
Ahora, Sofía le pide a Benjamín que construya un rectángulo congruente al de la imagen, con la condición de solo utilizar la escuadra una vez. **¿Cómo realiza esta construcción?**



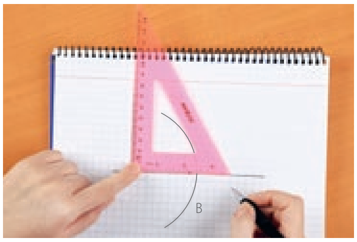
Paso 1 Dibuja una recta y sobre ella marca un punto A.



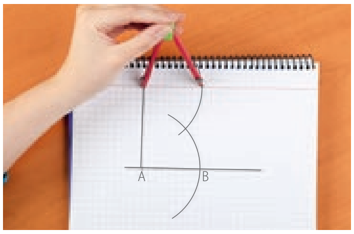
Paso 2 Ajusta la abertura del compás 6 cm y apoya la punta sobre el punto A. Traza un arco de circunferencia sobre la recta, y en la intersección marca el punto B.



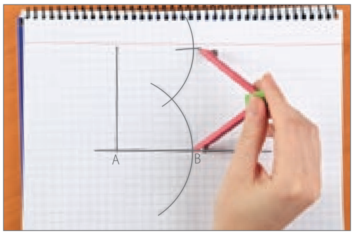
Paso 3 Apoya el ángulo recto de la escuadra sobre el punto A y marca un segmento perpendicular a la recta de largo 8 cm.



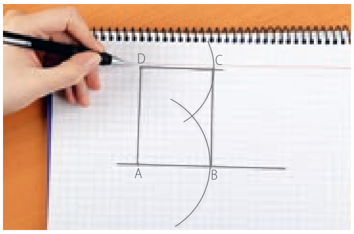
Paso 4 Ajusta la abertura del compás 6 cm, ubica la punta en el extremo del segmento de 8 cm y traza un arco.



Paso 5 Ajusta la abertura del compás 8 cm, ubica la punta en el punto B y traza un arco de circunferencia. En la intersección de los arcos marca el punto C.



Paso 6 Con regla une los puntos y forma el rectángulo congruente.



Benjamín ha dibujado un rectángulo congruente al de Sofía, es decir, de igual forma y tamaño.

Para concluir

- Existen variadas formas de **construir cuadriláteros congruentes**. Dependiendo del tipo de cuadrilátero, es el procedimiento que se utilizará para construirlos.

Argumenta y comunica

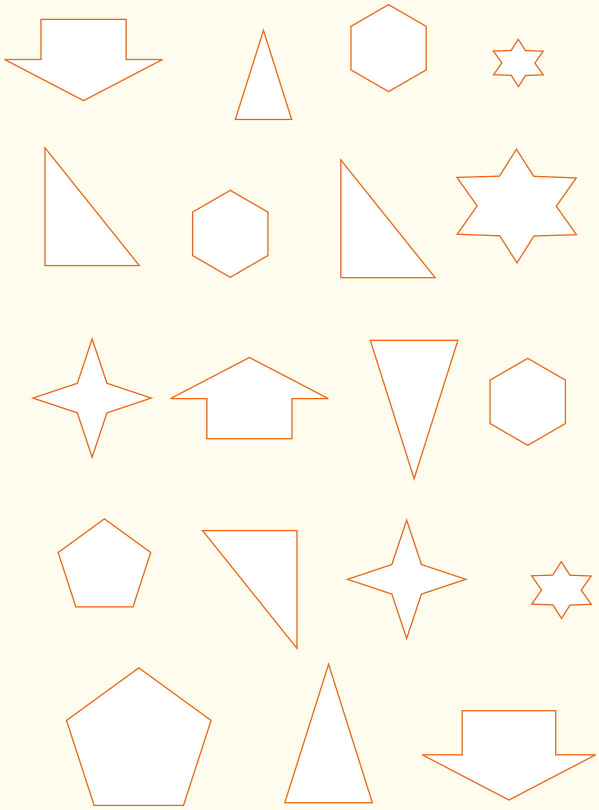
- Si se quiere construir cuadriláteros congruentes en donde se sabe la medida de sus tres ángulos y dos de sus lados. ¿Será posible realizarlos? Justifica.

Lección 37

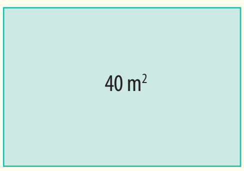
Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Identifica las figuras que visualmente sean congruentes. Para ello, píntalas del mismo color.



2. Construye tres rectángulos que tengan un área igual a la señalada y responde.



a. ¿Cuáles son las medidas de los lados de los rectángulos construidos?

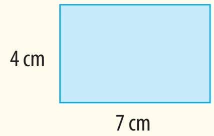
b. Calcula el perímetro de cada rectángulo.

c. ¿Qué sucede con el perímetro en los rectángulos de igual superficie?

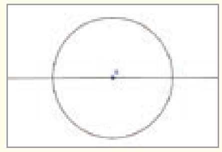
d. ¿Son congruentes los rectángulos que dibujaste? Justifica tu respuesta.

Práctica guiada

3. Construye con GeoGebra un cuadrilátero de las medidas dadas en la imagen.

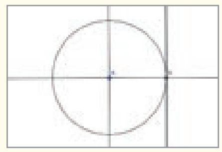


Paso 1 Marca sobre una recta el punto A. Utilizando la opción construye una circunferencia de centro A y radio 4 cm.

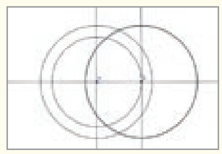


Paso 2 Marca el punto B, que es la intersección de la circunferencia con la recta.

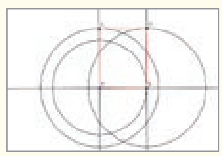
Paso 3 Utilizando la opción , construye las rectas perpendiculares a AB en los puntos A y B.



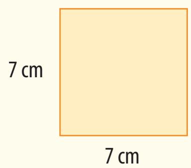
Paso 4 Haz clic en el botón y construye las circunferencias de radio 7 cm con centro en A y B.



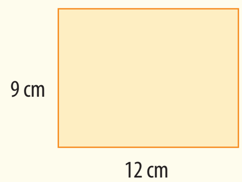
Paso 5 Marca la intersección de las rectas perpendiculares a AB con las circunferencias y une los puntos.



a.

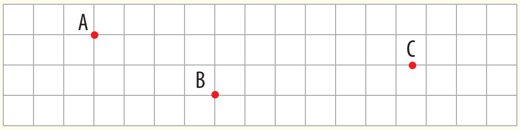


b.



Aplica

4. Observa la siguiente imagen.



a. Diseña una estrategia que te permita construir un paralelogramo con los elementos dados.

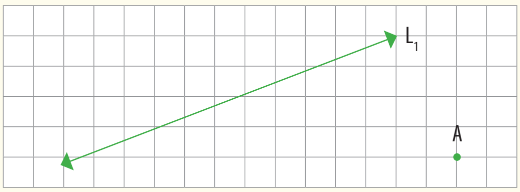
b. Comenta con tus compañeros y compañeras tu respuesta. ¿En qué se parecen o diferencian sus estrategias?

5. Dados 4 puntos no colineales en el plano, describe un procedimiento para construir un cuadrilátero.

a. ¿Se puede construir un único cuadrilátero?

b. Justifica tu respuesta.

6. Observa la imagen.

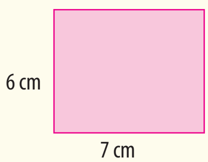


a. Diseña una estrategia que te permita construir un cuadrilátero con los elementos dados.

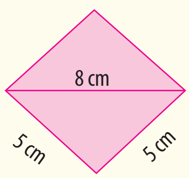
b. Comparte tu estrategia con tus compañeros y compañeras. ¿En qué se parecen o diferencian sus estrategias?

7. Construye los siguientes cuadriláteros en tu cuaderno. Además. construye solo con compás y regla no graduada, un cuadrilátero congruente a cada uno de los propuestos.

a.



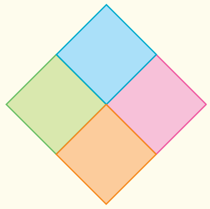
b.



c. ¿Qué estrategia utilizaste para la construcción de los cuadriláteros congruentes a los propuestos?

d. Explícala paso a paso.

8. **Describe.** Utilizando Geogebra, describe los pasos necesarios para construir este diseño.



9. **Argumenta.** Juan afirma que es posible construir un único rombo si se conoce la medida de su lado y la medida de uno de sus ángulos.

a. ¿Es correcta esta afirmación?

b. Justifica utilizando dibujos o esquemas.

10. **Argumenta.** ¿Cuántos cuadrados distintos es posible construir si solo se conoce la medida de su diagonal?
Justifica tu respuesta.

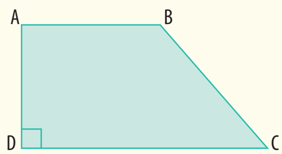
11. **Experimenta.** Diseña un procedimiento que permita construir los siguientes cuadriláteros.

a. Romboide de lados 5 y 8 cm.

b. Rombo de lado 6 cm.

Luego, intercambien con un compañero o compañera sus procedimientos; en caso de fallar, ajústenlos.

12. **Desafío.** Si se construye un trapecio congruente sobre el lado BC de la figura, ¿es posible formar un rectángulo? Realiza la construcción en tu cuaderno para justificar.



Reflexiono

Francisca afirma que si divide un hexágono regular en dos, siempre se obtiene dos trapecios congruentes. ¿Estás de acuerdo con ella? Comenta tu respuesta con tus compañeros y compañeras.

Refuerzo

¿Cómo comprobarías que un romboide es congruente con otro? Compara tu respuesta con un compañero o compañera y complementa o corrige tu respuesta.

Actitud: Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros.

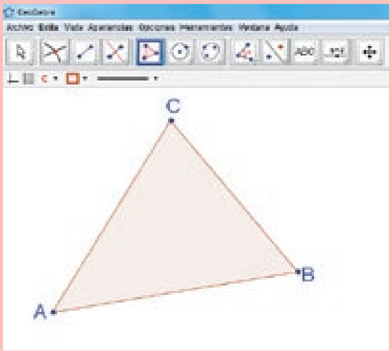
Teoremas matemáticos con el uso de *GeoGebra*

A lo largo de la historia de la matemática, muchos personajes han aportado con interesantes y sorprendentes teoremas, los cuales han permitido que el conocimiento de esta ciencia aumente a través de las civilizaciones. Un ejemplo de lo anterior es la circunferencia de los nueve puntos, la cual se puede construir utilizando GeoGebra.

En grupos de tres integrantes, desarrollen la actividad que se presenta a continuación utilizando GeoGebra. Luego, respondan las preguntas e intercambien sus respuestas con los demás equipos.

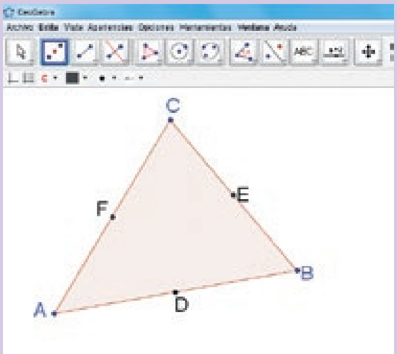
01

Con el botón, construyan un triángulo cualquiera.



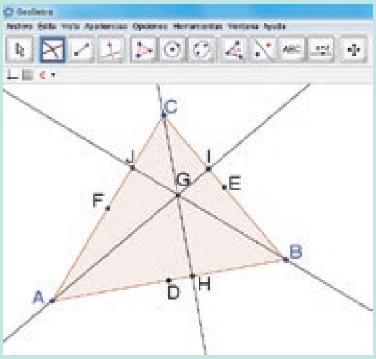
02

Con el botón, identifica y rotula los puntos medios de los lados del triángulo.



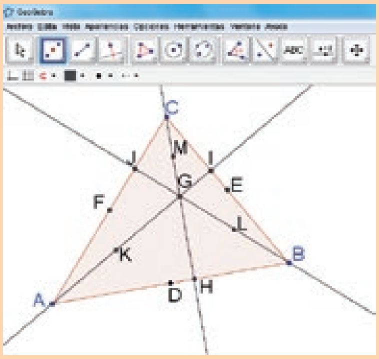
03

Construyan las alturas del triángulo ABC y ubiquen el punto de intersección de estas. Con la opción, ubiquen los puntos de intersección de las alturas con los lados del triángulo ABC.



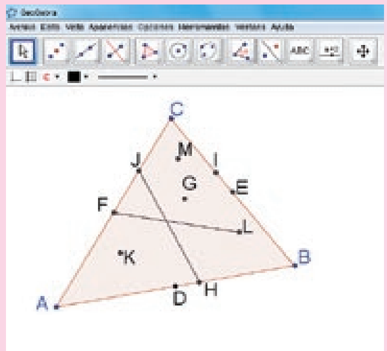
04

Con la opción , determinen el punto medio de los segmentos que unen al ortocentro con cada vértice del triángulo ABC, obteniendo así los puntos K, L y M.



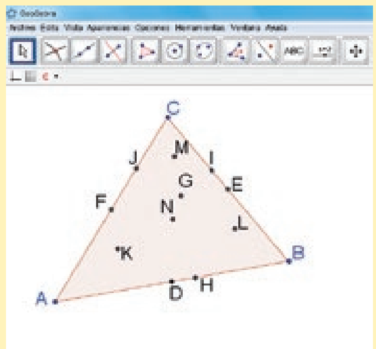
05

Con la opción , dibujen los segmentos FL y JH. Oculten las demás rectas presionando el botón derecho del mouse sobre ellas seleccionando la opción muestra objeto.



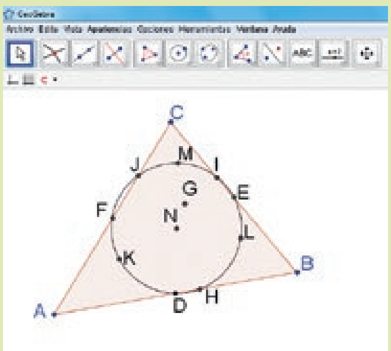
06

Con la opción presionen sobre los segmentos FL y JH y marquen el punto de intersección con la opción , denominado N. Luego oculten las líneas.



07

Finalmente, con la opción , construyan una circunferencia con centro N, hasta el punto L.



ACTIVIDAD EN GRUPO

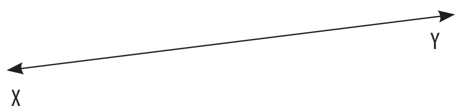
1. ¿Qué relación hay entre los puntos generados y la circunferencia?
2. ¿Qué propiedades de las construcciones geométricas utilizaron?
3. ¿De qué manera pueden comprobar que los nueve puntos pertenecen a la circunferencia? Planteen una estrategia e intercámbienla con los demás equipos.
4. ¿Cómo habrían realizado esta construcción de forma manual?
5. ¿Qué ventajas proporcionó la utilización de GeoGebra?
6. Investiguen en qué consisten el pentágono y el hexágono de Sierpinski y reconozcan en ellas las propiedades de las construcciones geométricas se utilizan.

¿Cómo voy?

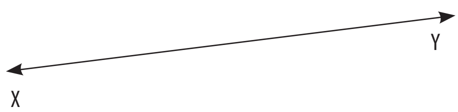
Lección 32: Construir rectas perpendiculares y paralelas

1. **Construye en cada caso lo indicado.**

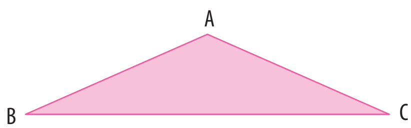
   a. Una recta paralela a la recta XY.



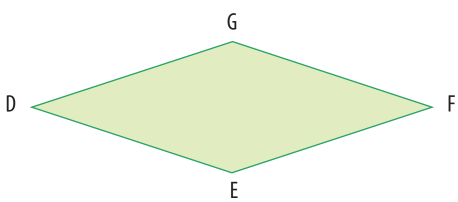
   b. Una recta perpendicular a la recta XY.



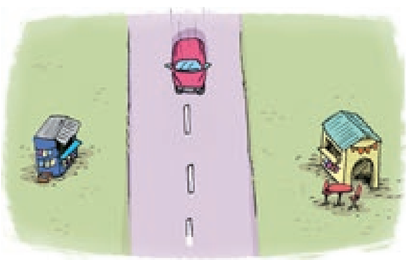
   c. Una recta paralela al lado AB que pase por el punto C.



   d. Una recta paralela a cada lado del rombo DEFG.



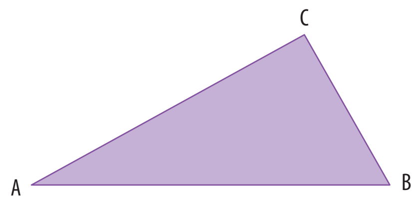
2. **Analiza la imagen y responde.**



Si el automóvil avanza en línea recta, ¿en qué punto se encontrará a la menor distancia de ambos quioscos?

Lección 33: Construir bisectrices y alturas

3. **Construye las tres alturas del triángulo ABC.**

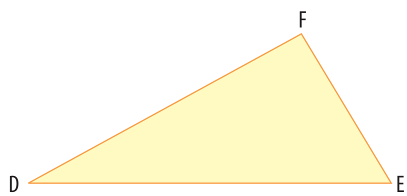


   a. Calcula el área del triángulo utilizando cada una de las tres alturas con su base respectiva.

   b. ¿Cómo son los resultados? ¿Por qué?

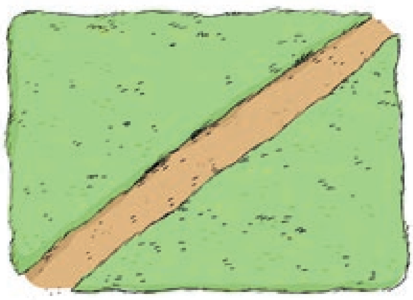
Lección 34: Construir transversales de gravedad y simetrales de un triángulo

4. **Construye las transversales de gravedad y las simetrales del siguiente triángulo.**



Lección 35: Construir una circunferencia circunscrita e inscrita

5. **En la imagen se muestra un parque. Se desea construir dos jardines circulares de manera que cubran la mayor superficie posible.**



   a. Dibuja una posible ubicación de los jardines.

   b. Justifica por qué crees que ambos jardines. cubren la mayor superficie posible.

6 La imagen muestra la organización de un grupo de alumnos para jugar a "Si lo sabe, cante". La campana ha sido ubicada a la misma distancia de los tres competidores que ya están ubicados.

a. ¿Dónde se podrían ubicar otros cinco competidores para que la competencia sea justa?

b. Haz un esquema y justifica.

Lección 36: Construir triángulos congruentes

7 **Evalúa si las afirmaciones son verdaderas (V) o falsas (F). Justifica las falsas.**

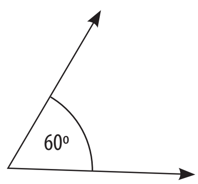
a. ______ Se puede construir un triángulo conociendo las medidas de dos lados y del ángulo comprendido entre ellos.

b. ______ La diferencia entre las medidas de dos lados de un triángulo es siempre mayor que la medida del tercer lado.

c. ______ Siempre es posible construir un triángulo si se conoce la medida de un lado y dos de sus ángulos.

d. ______ Es posible construir un triángulo congruente a otro sin conocer sus medidas exactas.

8 **Josefa debe hacer la tarea de matemática que consiste en construir un triángulo dadas ciertas medidas. Al abrir su cuaderno se da cuenta que dejó la construcción a medio camino.**

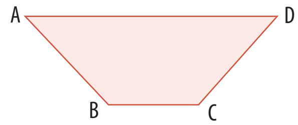


¿Podrá Josefa hacer la tarea aunque no recuerde las medidas? Justifica.

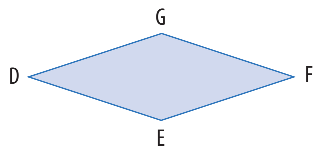
Lección 37: Construir cuadriláteros congruentes.

9 **Construye un cuadrilátero congruente a cada polígono en el recuadro.**

a.



b.



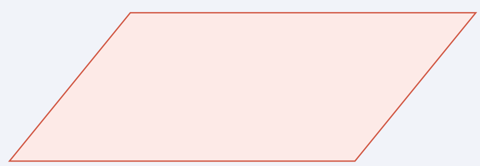
10 **Utilizando regla y compás, describe un procedimiento para construir un paralelogramo en el que todos sus lados midan 4 cm.**

a. ¿Existe otra forma de realizar la construcción? Fundamenta tu respuesta.

b. Comparte tus respuestas con tus compañeros y compañeras, y determinen cuál es la mínima cantidad de pasos necesarios para la construcción.

Desafío de integración

Tomás dividirá en dos partes iguales su terreno con forma de romboide, con una cerca. Si puede dividirlo trazando una bisectriz o una altura, ¿qué opción le resulta más económica considerando el precio por longitud? Justifica.



Resolución de problemas

Actitud: Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas.

Usar problemas más sencillos

En algunas situaciones, para resolver un problema se puede comenzar planteando uno de similares características pero más sencillo, para luego aplicar ese procedimiento para resolver el problema original.

Estrategias

- Hacer un diagrama.
- Usar ensayo y error sistemático.
- Usar problemas más sencillos.
- Hacer una tabla.
- Encontrar un patrón.
- Plantear una ecuación o una inecuación.
- Usar razonamiento lógico.

Un ingeniero debe construir una pileta con forma hexagonal en la plaza de una comuna. Mientras la pileta se encuentra en construcción, la empresa rodea circularmente con una malla el área donde se trabajará, de tal forma que los seis vértices de la pileta deben tocar la malla. Si la municipalidad le exige al ingeniero que se instale un cartel en el centro del contorno de la malla y que lo represente en un plano, ¿dónde quedará este punto ubicado en la pileta?

¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema?

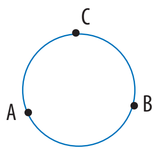
¿Qué datos tienes para resolver?

Crea un plan para resolver

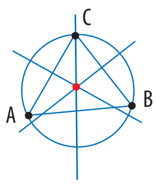
Para resolver el problema puedes utilizar la estrategia Usar problemas más sencillos. Para ello, construye una circunferencia circunscrita en un triángulo, encuentra su circuncentro y luego, aplica este método para construir la pileta hexagonal encontrando el centro de la circunferencia circunscrita en el hexágono.

Aplica la estrategia

Construye una circunferencia circunscrita en un triángulo, que es más sencillo. Para ello, en una circunferencia marca 3 puntos cualesquiera: A, B y C.

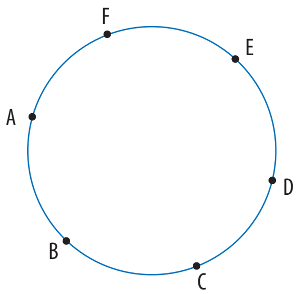


Une los puntos formando el triángulo ABC.
Luego, para cada lado del triángulo construye su simetral y marca el punto de intersección de estas.



Ahora, construye el hexágono marcando 6 puntos cualesquiera en una circunferencia siguiendo la lógica anterior.

Resuelve



Verifica la respuesta

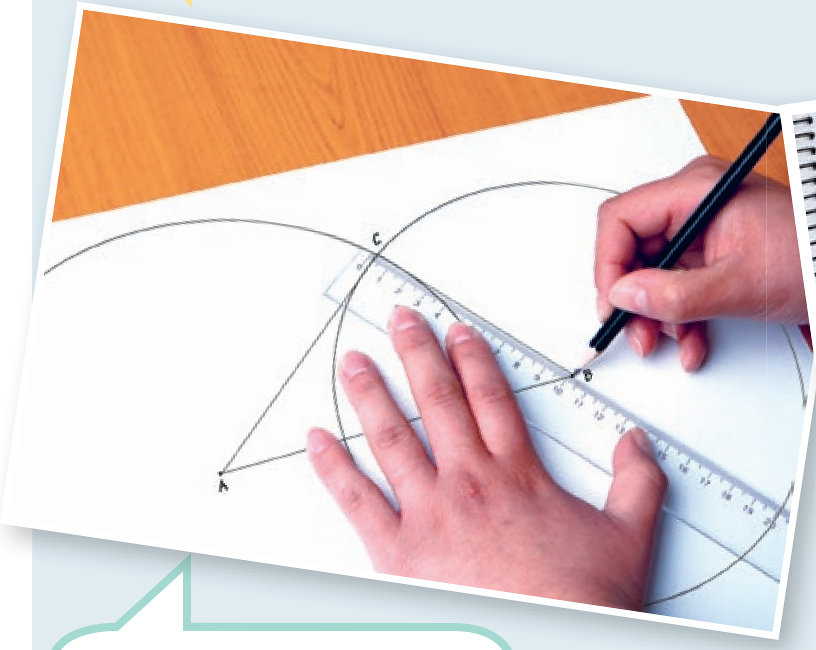
Comunica la respuesta

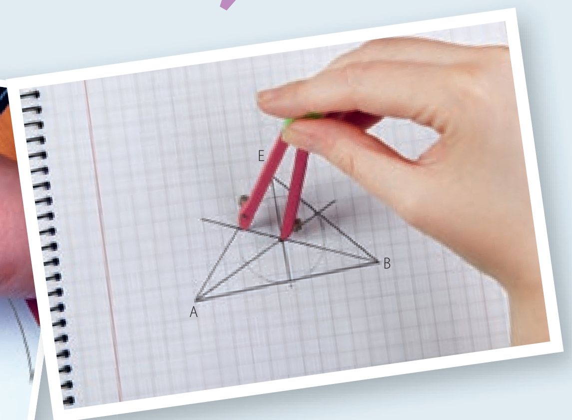
Vuelvo a mis procesos

Observa las imágenes centrales y completa.

¿Qué importancia tienen las construcciones geométricas en el aprendizaje?

¿En qué favoreció comentar los procedimientos de las construcciones con tus compañeras y compañeros?





Nombra tres aprendizajes logrados a partir de la construcción de elementos geométricos.

De las metas que te propusiste al inicio, ¿cuáles cumpliste y cuáles te faltaron?

¿Qué actividades de esta sección llamaron más tu atención? ¿Por qué?

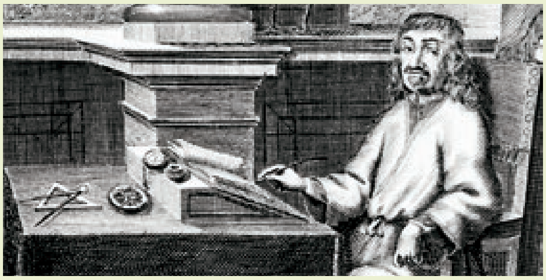
Sección
9

Plano cartesiano

Actitud: Confianza en las propias capacidades.

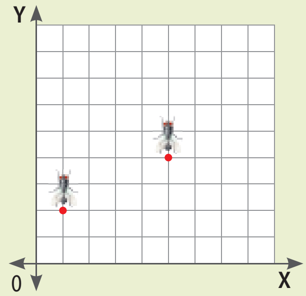
Activo ideas previas

En parejas, lean el texto y reflexionen en torno a las preguntas propuestas.



Cuenta la historia que un filósofo y matemático llamado René Descartes se encontraba un día descansando en su cama mientras observaba una mosca. Ésta se posaba en diferentes posiciones en el techo, lo que lo llevó a preguntarse: ¿cómo podría conocer la ubicación de este insecto en las diferentes posiciones que tiene durante su vuelo?

Para dar respuesta a esta pregunta, comenzó a observar que la posición de la mosca, en cualquier momento, la podía representar a través de la distancia existente respecto de dos de las paredes. Resulta curioso pensar que así fue como comenzó lo que llegó a ser una de las grandes ideas matemáticas de todos los tiempos, el plano cartesiano.



- ¿Qué ventajas tiene el uso del plano cartesiano en situaciones cotidianas? Nombra dos y explica cómo este se utilizaría en ellas.

____

____

____

- Si el plano cartesiano no existiera, ¿de qué manera representarías la posición en la que se encontraba la mosca? Fundamenta tu respuesta y compártela.

____

____

____

Activo conceptos clave

Los siguientes listados muestran los conceptos clave de la sección. Con algunos de ellos, completa las propuestas que aparecen.

Par ordenado Eje X e Y Plano cartesiano	Cuadrante Desplazamiento Vector	Magnitud Sentido Dirección

- Dos conceptos asociados al movimiento: ____
- Dos palabras relacionadas con la posición: ____
- Un concepto nuevo para ti: ____
- Una posible definición del concepto nuevo: ____

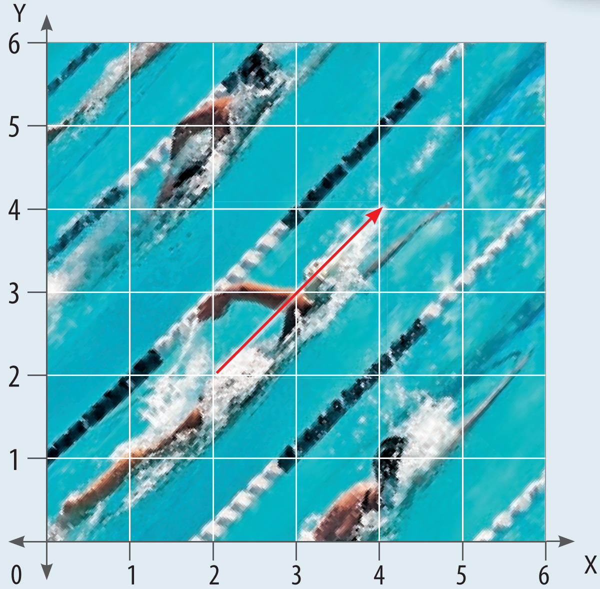
Pienso mis procesos

Observa la imagen central y completa.

Nombra los elementos del plano cartesiano presentes en la imagen.

¿Qué función cumple el plano cartesiano en la situación?

Explica qué representa la flecha en la situación.



¿En qué otras situaciones cotidianas se podría utilizar el plano cartesiano?

¿Qué estrategias de estudio te propones para trabajar en esta sección?

¿Qué metas te propones cumplir al finalizar esta sección?

¿Qué debo saber?

Activa tus conocimientos previos respondiendo la pregunta lateral. Luego, resuelve la actividad. Para terminar, registra tus logros.

Describe qué es un vértice y qué es un lado de un polígono.

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

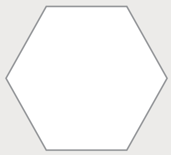
Logrado	Por lograr
3 o más puntos	2 o menos puntos

Identificar elementos de un polígono

1 Identifica los vértices y lados de los polígonos. Para ello, pinta de color azul los vértices y de color rojo los lados. (4 puntos)

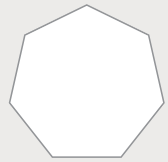
a.

b.



c.

d.



¿Qué es el área de un polígono?

¿Cómo se calcula el área de un cuadrado y de un triángulo?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
8 o más puntos	7 o menos puntos

¿Qué dificultades tuviste?

Calcular áreas y perímetros de figuras

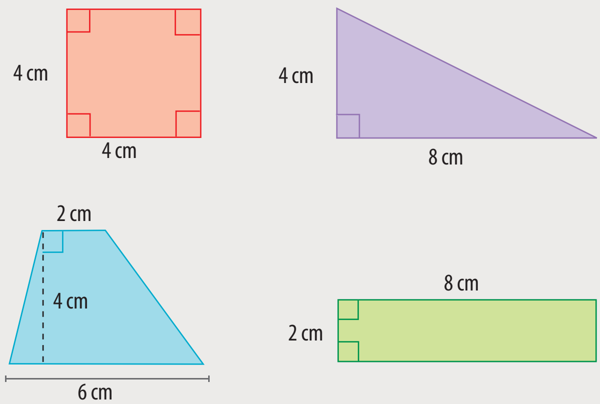
2 El área de un rectángulo es 200 cm^2.

a. ¿Puedes determinar las longitudes de sus lados? Explica. (2 puntos)

b. ¿Es posible que dos rectángulos distintos tengan igual área? ¿Por qué? (2 puntos)

c. ¿Cuántos rectángulos distintos puedes dibujar? (1 punto)

3 Calcula el área de cada figura. Luego, responde las preguntas.



a. ¿Qué ocurre al comparar el área de las cuatro figuras? (1 punto)

b. ¿A qué crees que se debe esto? (2 puntos)

c. ¿Existen más figuras con esta característica? Si es así, dibuja dos más. (2 puntos)

4 Diego quiere alfombrar su pieza, la que mide 2 metros de ancho y 3,2 metros de largo. Ha cotizado el precio con dos maestros diferentes. (3 puntos)

Don Luis	Don Manuel
$ 3269 por metro cuadrado, más $ 5600 por el pegamento.	$ 3780 por metro cuadrado, pegamento incluido.

¿A qué maestro le conviene contratar? Justifica.

¿En qué consiste la traslación de una figura geométrica?

¿Qué otras transformaciones isométricas conoces? Descríbelas.

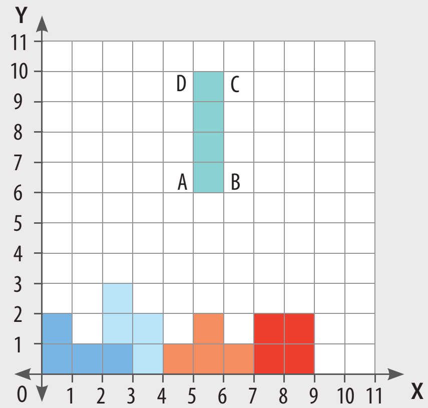
Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
5 o más puntos	4 o menos puntos

¿Qué dificultades tuviste?

Reconocer congruencia en traslaciones de figuras

5 Observa la imagen que simula el juego Tetris (videojuego que consiste en trasladar piezas) y luego responde.



a. Indica la medida de cada segmento del rectángulo ABCD contando las unidades. (2 puntos)

AB ______________ BC ______________

CD ______________ DA ______________

b. Traslada el rectángulo ABCD cuatro espacios a la derecha y seis espacios hacia abajo. Mide los segmentos del rectángulo en su nueva posición. (4 puntos)

AB ______________ BC ______________

CD ______________ DA ______________

c. ¿Qué conclusión puedes obtener al comparar las medidas? (2 puntos)

____

____

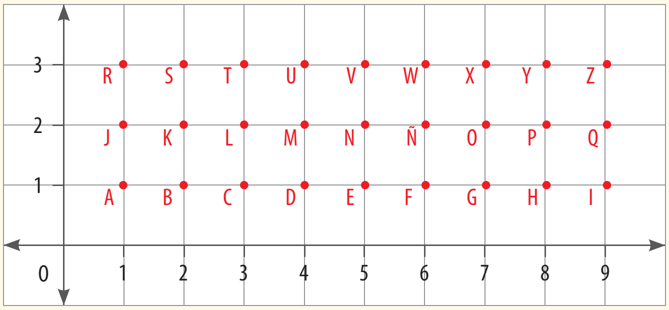
Lección 38

¿Cómo ubicar puntos en el plano cartesiano?

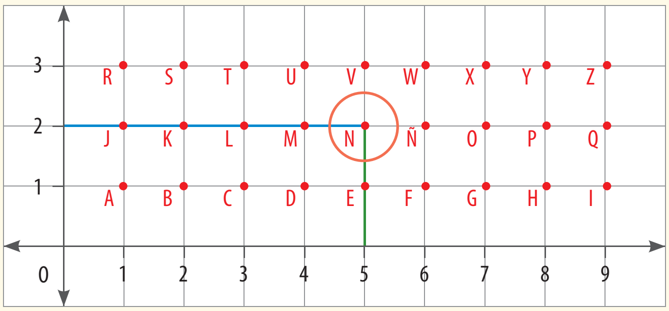
Taller Descifrando mensajes

Reúnanse en parejas, lean la situación y luego realicen las actividades.

Dos amigas crean un código para escribir mensajes secretos. Diseñan una cuadrícula y escriben las letras del abecedario en las intersecciones de la cuadrícula.



Para ubicar cada letra, escriben números en los ejes. Cada letra la escriben como un par de números entre paréntesis, separados por una coma. Primero, escriben el número correspondiente al eje horizontal; luego, el número del eje vertical. Por ejemplo, para escribir la letra **N**:



¿Indica la misma posición en el plano el par (3,1) y (1,3)?

Paso 1 Trazan una línea vertical para encontrar el primer número del par. En este caso es 5.

Paso 2 Trazan una línea horizontal para encontrar el segundo número del par. En este caso es 2.

Paso 3 Escriben el par ordenado. Así, la letra **N** corresponde al par (5, 2).

1. Utilizando el código, descifren los mensajes.

¡(2, 1) (4, 3) (5, 1) (5, 2)
(3, 3) (1, 3) (1, 1) (2, 1) (1, 1)
(1, 2) (7, 2)!

____
____
____
____

¡(5, 1) (2, 3) (3, 3) (7, 2)
(5, 1) (2, 3)
(2, 3) (5, 1) (5, 2) (3, 1) (9, 1)
(3, 2) (3, 2) (7, 2)!

____
____
____
____

Propósito

Identificar y ubicar puntos en el plano cartesiano.

¿Para qué?

Cuando alguien pregunta por alguna dirección o cómo llegar a cierto lugar, las indicaciones y el orden en que estas se dan, son básicas en la explicación. En estos casos, resulta beneficioso utilizar el plano cartesiano, ya que en él se representan puntos, asociados a coordenadas, permitiendo que las instrucciones sean precisas.

Palabras clave

- Par ordenado
- Ejes X e Y
- Plano cartesiano
- Cuadrante

René Descartes (1596 – 1650)

La necesidad del hombre de orientarse lo llevó a crear mapas y planos que relacionan puntos con números. En matemática, se cuenta con un sistema de referencia llamado plano cartesiano, nombrado así en honor a su creador, el filósofo y matemático francés René Descartes.

2. Escriban con pares ordenados el siguiente mensaje.

____

____

____

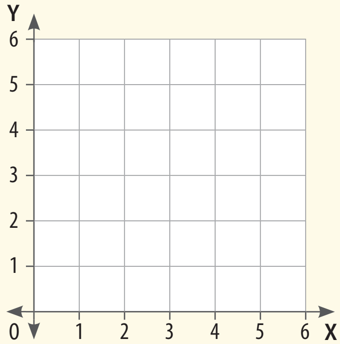
____

____

3. Creen su propio código usando plano cartesiano y escriban un mensaje en clave. Luego, intercambien con otra pareja y descifren los nuevos mensajes.

4. La cuadrícula que se forma con los ejes X e Y se conoce como plano cartesiano. Dibujen los siguientes puntos en el plano cartesiano. Luego, únanlos en el mismo orden. ¿Qué se forma?

(1, 1) (1, 5) (3, 3) (5, 5) (5, 1)



5. Los ejes X e Y se pueden prolongar formando una cruz con 4 cuadrantes. ¿Qué números crees que irán en los otros cuadrantes?

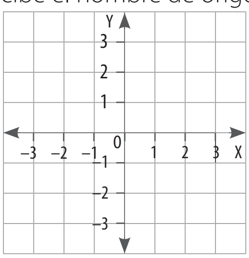
____

6. Según lo trabajado, construyan una definición de plano cartesiano y los elementos que lo conforman. Luego, presenten al curso y juntos generen una única definición.

____

Para concluir

- El **plano cartesiano** está formado por dos rectas perpendiculares llamadas ejes. El punto de intersección recibe el nombre de origen.



- Los puntos del plano cartesiano se representan mediante un **par ordenado (x, y),** donde **x** es la primera coordenada e **y** es la segunda. También x e y se nombran como **abscisa** y **ordenada,** respectivamente.

Coordenada **x** → (5, 2) ← Coordenada **y**

Argumenta y comunica

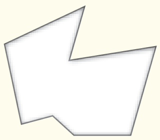
- ¿Dónde ubicarías el par ordenado (0, 5)? ¿Es igual al par ordenado (5, 0)? Justifica tu respuesta.
- ¿Cuál es el par ordenado que se considera como el origen o inicio del plano cartesiano?

Practiquemos lo aprendido

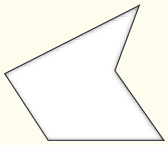
Repaso

1. Pinta de color verde los vértices y de color rojo los lados de los polígonos.

a.



b.



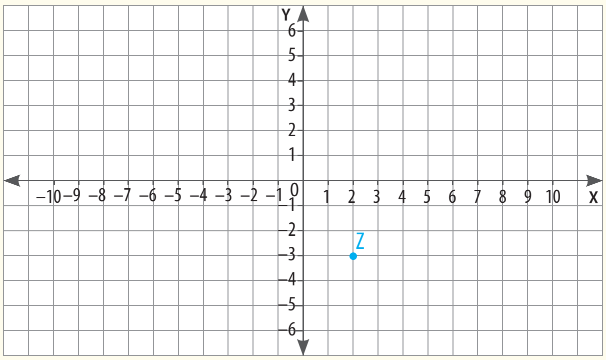
Práctica guiada

2. Ubica los puntos en el plano cartesiano.

Z(2, –3)

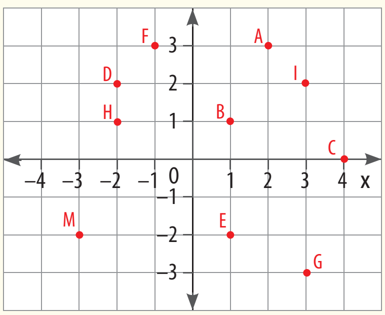
Paso 1 Avanza desde el origen, 2 lugares hacia la derecha en el eje de las X.

Paso 2 Al ser negativa la segunda coordenada, baja 3 lugares.



a. A(2, 1)	d. I(6, –5)	g. F(–10, 4)
b. C(–2, 3)	e. B(–3, 0)	h. H(7, 1)
c. E(5, –5)	f. D(4, –2)	i. J(0, –5)

3. Identifica las coordenadas de los puntos representados en el plano.



Paso 1 La coordenada x del punto M es –3.

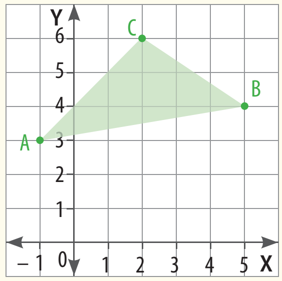
Paso 2 La coordenada y del punto M es –2.

Luego, el punto M es (–3, –2).

a. A(___, ___)	d. D(___, ___)	g. G(___, ___)
b. B(___, ___)	e. E(___, ___)	h. H(___, ___)
c. C(___, ___)	f. F(___, ___)	i. I(___, ___)

4. Representa en el plano cartesiano las figuras dados sus vértices.

Triángulo: A(–1, 3), B(5, 4) y C(2, 6)



Paso 1 Ubica el vértice A. Para ello, avanza 1 unidad a la izquierda del origen, sobre el eje X. Luego, sube 3 unidades respecto del origen, y marca el punto A.

Paso 2 Repite este procedimiento con los otros dos vértices. Luego, une los puntos.

a. Triángulo isósceles: A(0, 7), B(–4, 0), C(4, 0)

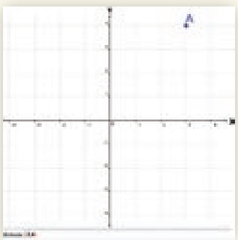
b. Cuadrilátero: A(3, 4), B(4, 5), C(–2, 0), D(–4, –5)

c. Pentágono: A(3, 5), B(–2, –2), C(0, 5), D(3, 4), E(6, 7)

5. Representa en el plano cartesiano las figuras utilizando GeoGebra. Utiliza distintas ventanas.

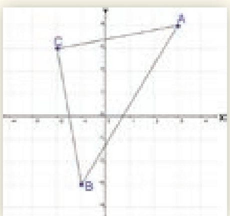
Triángulo, A(3, 4), B(–1, –3) y C(–2, 3)

Paso 1 En la barra de entrada escribe las coordenadas del punto A entre paréntesis, es decir (3, 4) y presiona enter.



Paso 2 Repite este procedimiento con el vértice B y C.

Paso 3 Selecciona la opción  y marca los puntos A y B. Luego, repite este procedimientos para los puntos A y C y finalmente B y C.



a. Triángulo: A(2, 2), B(6, 2) y C(4, 7).

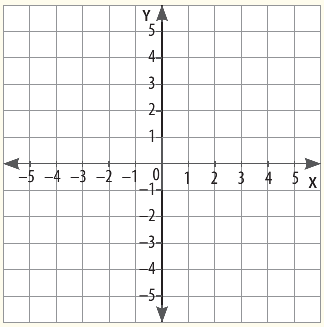
b. Triángulo: A(2, –5), B(6, –5) y C(–2, –2).

c. Cuadrilátero: A(4, 8), B(4, 4), C(10, 4), D(10, 8).

Aplica

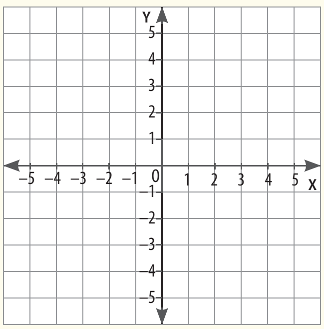
6. **Dibuja cada polígono y calcula el el área (A). Considera que cada cuadrado vale 1 cm².**

a. B(0, 0), C(4, 0) y D(2, 5)



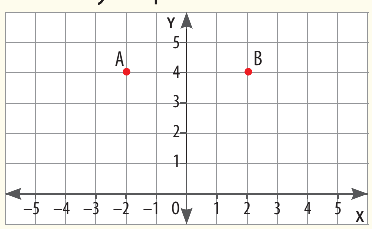
A = ________

b. A(–2, –1), C(3, 1) y D(–2, 1)



A = ________

7. **Considera los puntos A y B como vértices en la construcción y responde:**



a. Si se forma un triángulo rectángulo, ¿qué coordenadas podría tener el tercer vértice?

b. Si se construye un cuadrado, ¿qué coordenadas tendrían los otros dos vértices? ¿Existen más opciones? Justifica.

c. ¿Es posible formar un triángulo equilátero agregando un tercer punto?, ¿y un isósceles? Justifica.

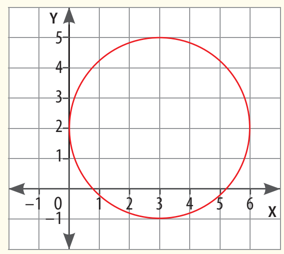
8. Resuelve los problemas.

a. Las coordenadas del punto A(4, 7) han cambiado: el valor de la abscisa se duplicó y la ordenada disminuyó 4 unidades. ¿Cuáles son las coordenadas del nuevo punto?

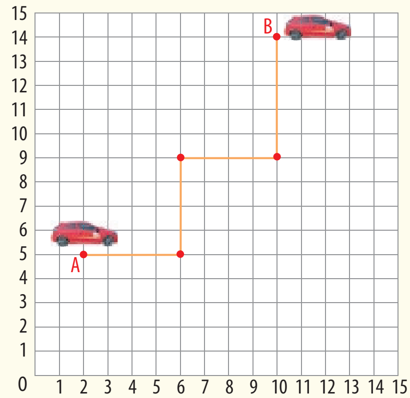
b. Los extremos de una de las diagonales de un rectángulo son (1, 2) y (7, 5). ¿Cuáles son los vértices del rectángulo?

c. Si una figura tiene vértices (1, 3), (6, 3), (6, 8) y (1, 8), ¿qué tipo de figura es?

9. **Diseña un procedimiento que te permita dibujar la siguiente circunferencia en el plano cartesiano.**
¿Qué información deberías conocer de la circunferencia para marcar cualquiera de sus puntos en el plano?



10. **Analiza la imagen y responde.**



¿Cuáles son los puntos por los que se trasladó el automóvil para llegar del punto A al punto B?

Reflexiono

Gabriela dice que el punto A(6, 3) se encuentra a la mitad de la distancia desde el origen del plano cartesiano que el punto B(12, 3). ¿Estás de acuerdo con ella? Fundamenta tu respuesta.

Refuerzo

Se construye un cuadrado en un plano cartesiano. Tres de sus vértices son A(3, 2); B(6, 2) y C(6, 5). ¿Qué coordenadas debe tener el vértice D para completar la figura?

Lección 39

¿Cómo desplazar objetos por medio de vectores?

Propósito

Desplazar objetos según un vector.

¿Para qué?

Cuando cambia de posición un elemento desde una ubicación inicial, por ejemplo, el recorrido de un insecto en un tiempo dado, se hace necesario especificar hacia dónde y cuánto se desplaza, para así conocer su posición final. Utilizando vectores, es posible determinar en qué dirección y sentido se traslada un elemento cualquiera.

Palabras clave

Desplazamiento
Vector
Magnitud
Sentido
Dirección

Situación 1 Representar el desplazamiento de un objeto

Un avión, al estar en movimiento, se va desplazando hacia nuevas posiciones.

¿Cómo representar el desplazamiento del avión en el plano cartesiano?

Paso 1 Identifica el punto final (B) e inicial (A) del desplazamiento, es decir los puntos finales e iniciales de la posición del avión.

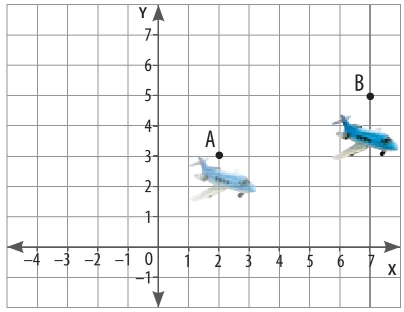
La abscisa del punto A se incrementa en 5 unidades y su ordenada se incrementa en 2 unidades, por lo tanto:

El punto inicial es: (2, 3)

El punto final es: (2 + 5, 3 + 2)

↓

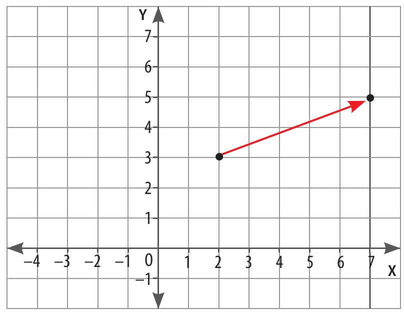
(______, ______)



Paso 2 Representa el desplazamiento mediante un vector $\vec{v}$.

Para ello, une con una flecha el punto inicial y final.

La posición inicial del avión corresponderá al inicio del vector y la posición final corresponde al extremo de la flecha del vector.



Paso 3 Determina las coordenadas del vector de desplazamiento $\vec{v}$.

Para ello, resta las abscisas de los puntos final e inicial y luego resta las ordenadas de los mismos.

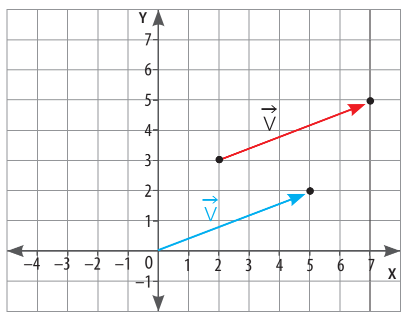
$\vec{v} = (7, 5) - (2, 3) = (7 - 2, 5 - 3) = (5, 2)$

punto final | punto inicial

Paso 4 Identifica el vector de desplazamiento.

El vector desplazamiento $\vec{v}$ es el que tiene inicio en el punto (0, 0) y extremo en (5, 2), es decir, el vector trasladado al origen del plano cartesiano.

El vector que une el punto inicial y el final es equivalente al vector de desplazamiento, ya que ambos son segmentos de recta dirigidos de igual tamaño (magnitud), sentido y dirección.



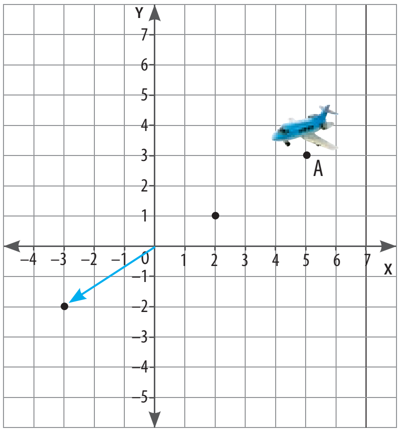
Situación 2 ¿Cómo desplazar el avión dado el vector de desplazamiento?

Un avión, se traslada de un lugar a otro siguiendo ciertas rutas.

¿Cómo se desplaza el avión en el plano cartesiano dado el vector de desplazamiento?

Paso 1 Identifica las coordenadas del vector de desplazamiento.

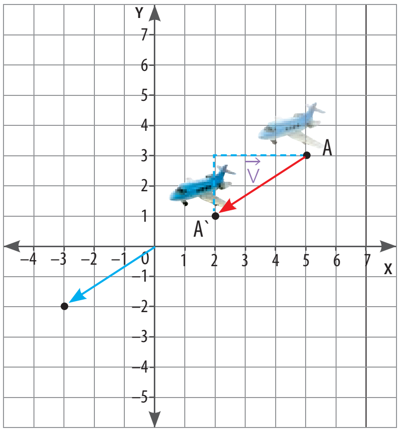
El vector de desplazamiento tiene su origen en (0, 0) y su extremo en (–3, –2), por lo que podemos decir que el vector es: $\vec{v} = (-3, -2)$.



Paso 2 Realiza el desplazamiento según el vector.

Como el vector es $\vec{v} = (-3, -2)$, esto significa que se desplaza el avión 3 unidades a la izquierda y 2 unidades hacia abajo.

El vector que une el punto inicial (A) y el final (A') del avión es equivalente al vector de desplazamiento.

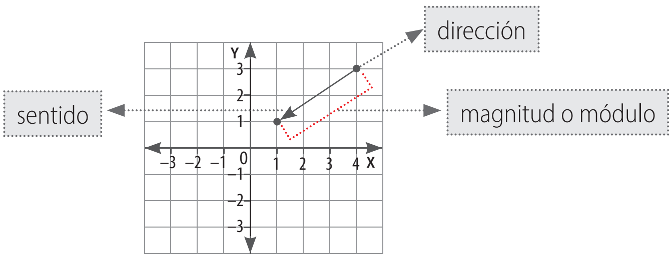


Ayuda

Cuando se aplique un desplazamiento mediante un vector a una figura, al punto o vértice P desplazado se le llamará P' (P prima).

Para concluir

- Un **vector** es un segmento de recta dirigido que tiene **dirección, sentido y módulo o magnitud.** Se denota $\vec{v}$.



- Un vector permite realizar **traslaciones o desplazamientos** de objetos en el plano cartesiano. Todo vector tiene un punto inicial y un punto final.
- Un vector de desplazamiento se puede identificar con un par ordenado entendiendo que este parte en el origen y termina en dicha coordenada. En el par ordenado **(a, b)** la coordenada **a** representará el desplazamiento en forma horizontal y la coordenada **b**, el desplazamiento vertical.

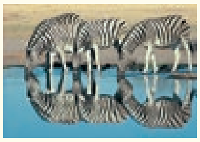
Argumenta y comunica

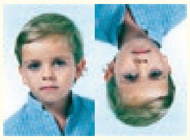
- ¿Es lo mismo trasladar un punto según el vector (–2, 2) que según el vector (2, –2)? Justifica tu respuesta.

Practiquemos lo aprendido

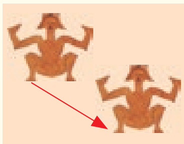
Repaso

1. Identifica cuáles de los siguientes movimientos pueden ser asociados a desplazamientos por medio de un vector. Justifica.

a. 

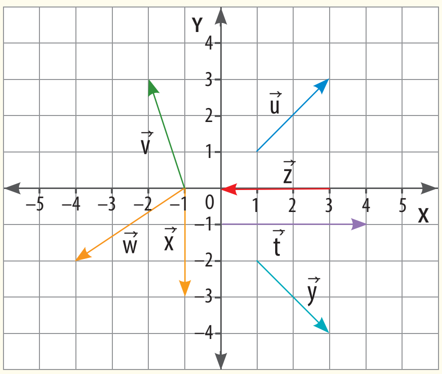
c. 

b. 

d. 

Práctica guiada

2. Identifica las coordenadas de cada vector.



Se restan las abscisas de los puntos final e inicial y luego se restan las ordenadas de los mismos:

$\vec{u} = (3, 3) - (1, 1)$

$= (3 - 1, 3 - 1) = (2, 2)$

a. $\vec{v}$ ______ c. $\vec{x}$ ______ e. $\vec{z}$ ______

b. $\vec{w}$ ______ d. $\vec{y}$ ______ f. $\vec{t}$ ______

3. Escribe las coordenadas del vector de desplazamiento.

a. 3 unidades a la derecha y 4 hacia abajo.

$\vec{v}$ = (______, ______)

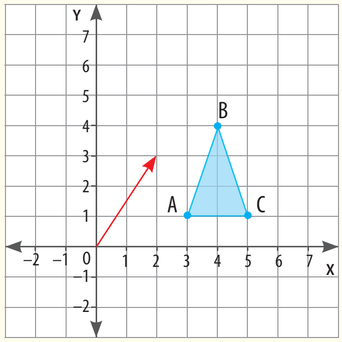
b. 4 unidades a la izquierda y 3 hacia arriba.

$\vec{v}$ = (______, ______)

c. 2 unidades a la izquierda y 1 hacia abajo.

$\vec{v}$ = (______, ______)

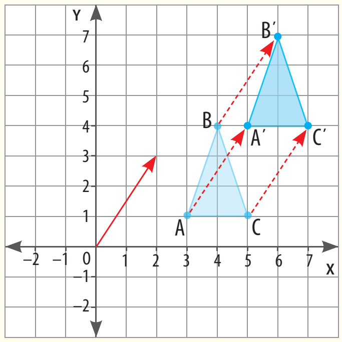
4. Desplaza las figuras según el vector.

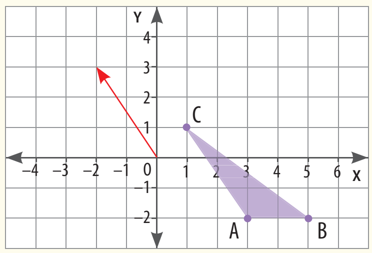


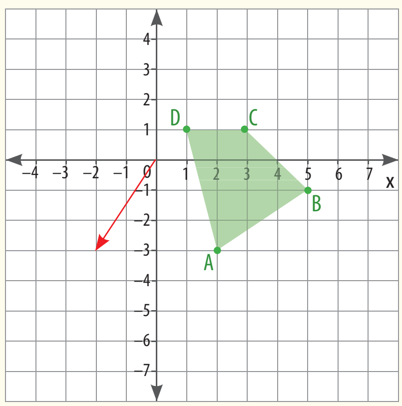
Paso 1 Identifica las coordenadas del vector de desplazamiento. $\vec{v} = (2, 3)$

Paso 2 Desplaza cada vértice del polígono en 2 unidades a la derecha y 3 unidades hacia arriba.

Paso 3 Une los vértices de la figura.

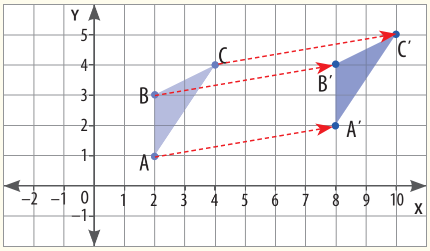


a. 

b. 

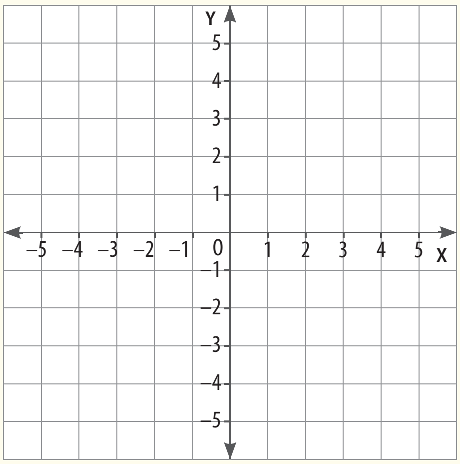
Aplica

5. Identifica las coordenadas del vector de desplazamiento.

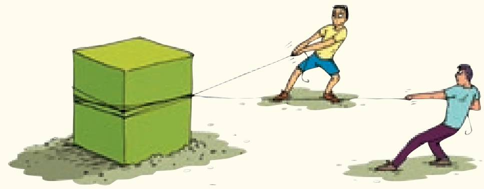


6. Represente el polígono y desplázalo según el vector $\vec{v}$.

Cuadrado de vértices A(3, 2), B(5, 2), C(5, 4), D(3, 4) y $\vec{v} = (-2, -6)$



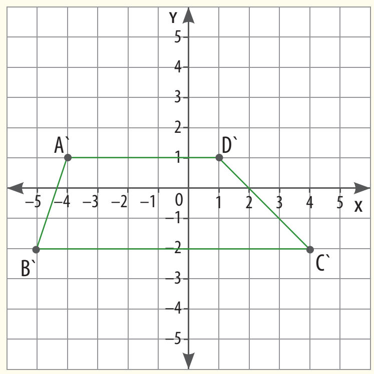
7. **Desafío.** Analiza las siguientes imágenes y dibuja el o los vectores que representan la fuerza que están ejerciendo las personas.



8. **Argumenta.** ¿Cuál es la diferencia entre un punto (a, b) y un vector de desplazamiento (a, b)?

9. **Describe** un procedimiento para conocer las coordenadas del trapecio original si se conocen las coordenadas de la figura resultante y el vector de desplazamiento. Construye la figura original en el mismo plano.

$\vec{v} = (-2, -3)$



Reflexiono

1. ¿Es posible que al aplicar el mismo vector de desplazamiento a dos puntos que estén en cuadrantes diferentes, coincidan en la posición final?, ¿por qué? Fundamenta tu respuesta.
2. En el recorrido de un automóvil, ¿qué diferencia hay entre la distancia que este recorre y su desplazamiento? Fundamenta tu respuesta nombrando dos ejemplos y luego intercámbialos con los de algún compañero o compañera.

Refuerzo

1. Se traslada el punto M según un vector de desplazamiento de coordenadas (4, 2), quedando en la posición (8, 3). ¿Dónde estaba el punto M originalmente? Compara tu respuesta con tus compañeros y compañeras.
2. Se dibuja un plano cartesiano sobre una hoja cuadriculada y se coloca sobre ella una hormiga. Si esta comienza su recorrido desde el punto (2, 3), luego se encuentra en la posición (4, 7) y termina su recorrido en la posición (12, 5). ¿Qué vector indica su desplazamiento?

Mural

Actitud: Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva.

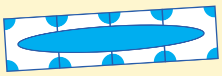
Barquitos de papel

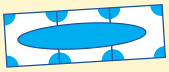
Existen diversos juegos de mesa en los que para ganar, se deben poner en práctica conocimientos matemáticos. A continuación, te presentamos el juego de los barquitos de papel, en el cual deberás aplicar los conocimientos sobre el plano cartesiano para poder ganar. Reúnanse en parejas y lean las instrucciones del juego.

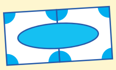
Materiales:
Hojas cuadriculadas
Lápices de colores

¿Cómo jugar?

- Cada participante deberá dibujar dos tableros de 10 unidades de largo y 10 de ancho, cada uno en una hoja cuadriculada. En uno de ellos se ubicará la flota de naves marcando puntos de colores y en el otro se registrarán los disparos realizados.
- Cada participante podrá ubicar su propia flota de la manera que guste, con la condición de que ningún barco esté tocando a otro y sin que su contrincante vea la ubicación que les ha dado. La flota debe estar compuesta por:

1 portaviones (cuatro puntos): 

2 acorazados (tres puntos): 

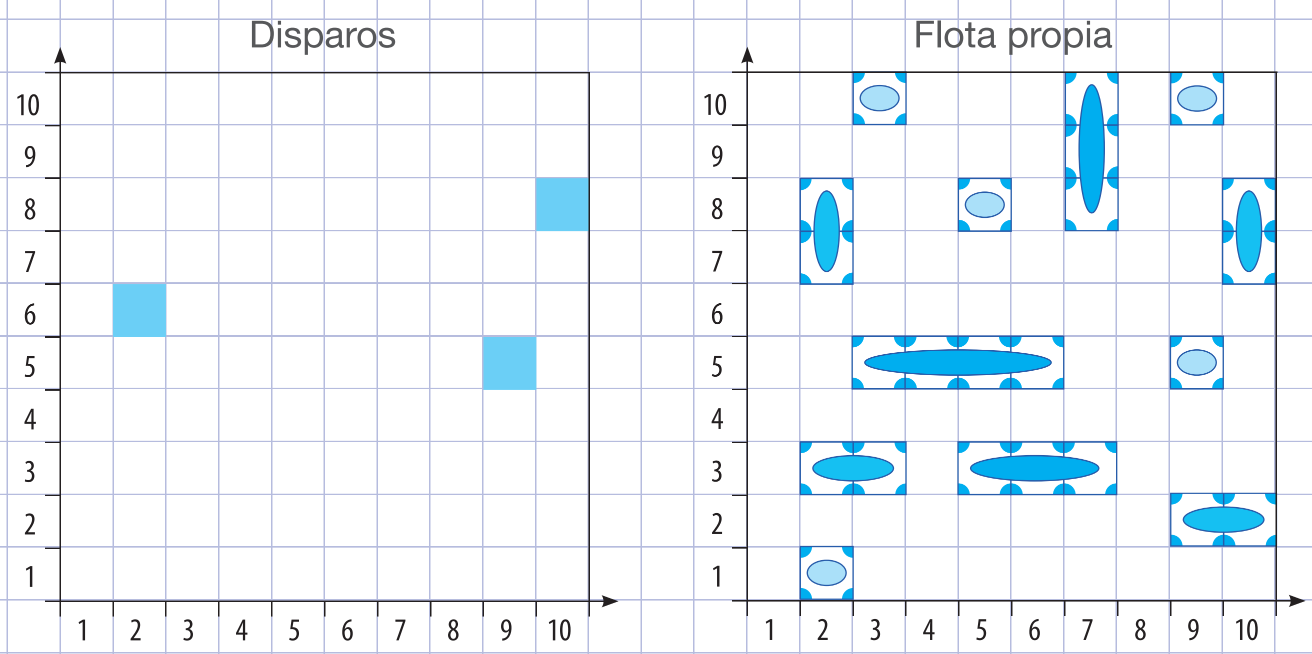
4 buques de guerra (dos puntos): 

5 submarinos (un punto): 

Reglas del juego

- El jugador que comienza hace un disparo, señalando las coordenadas de su tiro: el primer número indicado hace referencia a la horizontal y el segundo a la vertical.
- Si dichas coordenadas no tocan a ninguna de las naves del contrincante, él debe decir “agua”; si toca a alguna, debe decir “tocado”. Cuando se complete una nave, se debe decir “hundido”.
- En el tablero de disparos, debes ir marcando cada disparo realizado, para no perder tiros repitiendo jugadas.
- Gana el participante que logre hundir toda la flota de su contrincante.

A continuación se muestra un ejemplo de una jugada:



De acuerdo a los tableros anteriores, el disparo en el punto (2, 6) se debe decir “agua”, en el punto (10, 8) “tocado”, y en el punto (9, 5) “hundido”.

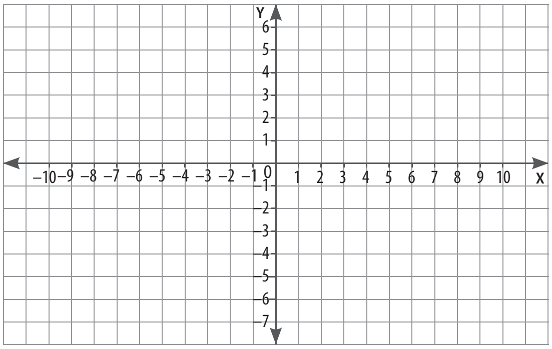
ACTIVIDAD EN GRUPO

Luego de terminado el juego, responde en tu cuaderno:

1. ¿Qué elementos de la sección del plano cartesiano utilizaste en este juego? Nómbralos y explica para qué los utilizaste.
2. ¿Qué estrategia utilizaste para elegir los disparos? Comparte tu respuesta con tu compañera o compañero.
3. ¿Qué dificultades tendría el juego si las cuadrículas no tuvieran numeración? Fundamenta tu respuesta.

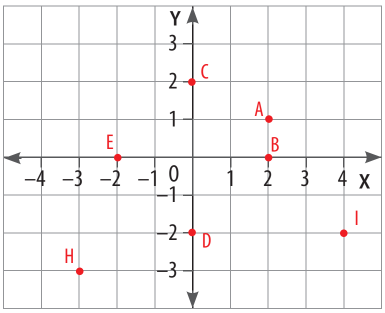
Lección 38: Identificar y ubicar puntos en el plano cartesiano

1 Representa los puntos en el plano.



a. A(9, 2)
b. B(6, –3)
c. C(–2, 0)
d. D(–2, –7)
e. E(4, 0)
f. F(–7, 6)

2 Para cada propuesta escribe V si es verdadera o F si es falsa. Justifica las falsas.



a. _____ Las coordenadas de A son (2, 1).

b. _____ Las coordenadas de B son (0, 2).

c. _____ Las coordenadas de C son (2, 0).

d. _____ Las coordenadas de D son (0, –2).

e. _____ Las coordenadas de E son (–2, 0).

f. _____ Las coordenadas de H son (2, –2).

3 Para cada caso, identifica el polígono cuyos vértices corresponden a las coordenadas dadas.

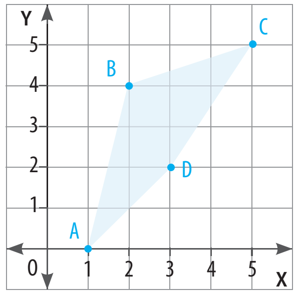
a. (2, 3), (–3, 4), (–3, –3) ________________

b. (–3, –2), (3, –2), (1, 0), (–2, 0) ____________

c. (–2, 1), (–4, –1), (0, –1), (–2, –3) ____________

4 ¿Cuáles son las coordenadas de los puntos medios de los lados del cuadrilátero?

Describe un procedimiento para encontrar las coordenadas de dichos puntos.



5 Dadas las coordenadas de los vértices de los polígonos calcula el área (A) de cada uno. Expresa tu resultado en cm^2.

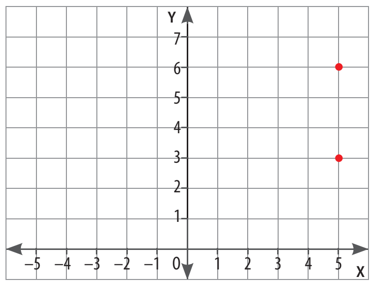
a. A(–5, –1) , B(–5, –2), C(– 1, –3) , D(–1, 0)

A = __________

b. O(–3, –4), P(3, –4) , Q(2, –1) R(–2, –1)

A = __________

6 Si el área de un rectángulo es 21 cm^2, ¿cuáles son las posibles coordenadas de los vértices de faltan?



7 Diseña una figura en el plano cartesiano. Escribe las coordenadas de los vértices y pídele a tu compañero o compañera de banco que la dibuje. ¿Es la misma que tú diseñaste? Justifica.

Lección 39: Desplazar objetos según un vector

8 Escribe como vector de desplazamiento.

a. 5 unidades a la derecha y 2 hacia arriba.

$\vec{v}$ = (_____, _____)

b. 3 unidades a la derecha y 4 hacia abajo.

$\vec{v}$ = (_____, _____)

c. 4 unidades a la izquierda y 3 hacia arriba.

$\vec{v}$ = (_____, _____)

9 Determina en cada caso el vector $\vec{v}$ según el cual se desplazó un punto desde la posición B a la P.

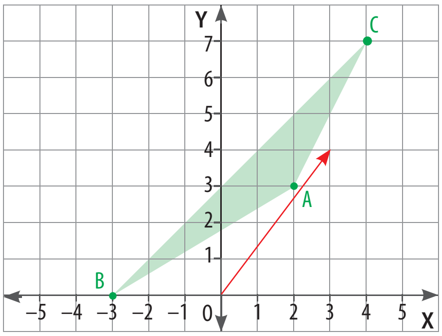
a. B(5, 8) ⟶ P(3, 4) $\vec{v}$ = (______, ______)

b. B(8, 7) ⟶ P(4, 10) $\vec{v}$ = (______, ______)

c. B(2, –1) ⟶ P(–1, 1) $\vec{v}$ = (______, ______)

d. B(–4, –3) ⟶ P (7, –4) $\vec{v}$ = (______, ______)

10 Observa la imagen y decide si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica en ambos casos.



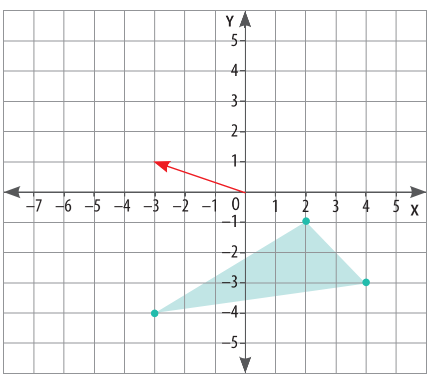
a. _____ Las coordenadas del vector $\vec{v}$ son (3, 4).

b. _____ Las coordenadas del punto A' luego de trasladarlo mediante el vector, serán (5, 7).

c. _____ Las coordenadas del punto B' luego de trasladarlo mediante el vector serán (0, 1).

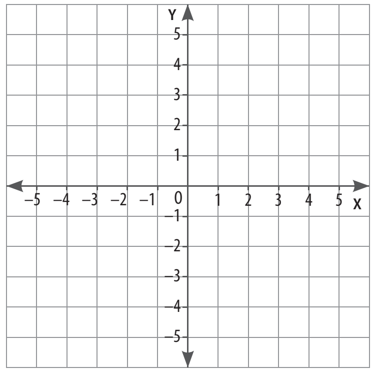
d. _____ Al aplicar la traslación, el punto C' quedará ubicado sobre el eje X.

11 Desplaza el triángulo según el vector.



12 Represente el triángulo y desplázalo según el vector $\vec{v}$.

Triángulo de vértices A(–5, –3), B(2, –4), C(–2, 2).
$\vec{v}$ = (3, 2).



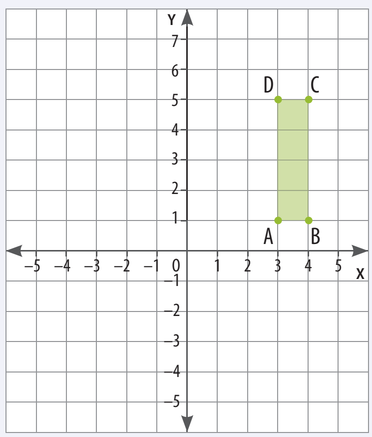
Desafío de integración

1. Si el área de un triángulo es 144 cm², ¿cuáles podrían ser las coordenadas de sus vértices?

   Conjetura acerca de cuántos triángulos con esta misma área se pueden formar. Justifica en tu cuaderno.

   Discute las respuestas anteriores con tus compañeros. ¿Todos obtuvieron la misma respuesta? ¿Por qué?

2. En el plano se muestra la figura que resultó luego de una traslación según el vector (4, 5). ¿Cuáles son las coordenadas de la figura original?



Resolución de problemas

Actitud: Demostrar interés, esfuerzo, perseverancia y rigor frente a la resolución de problemas.(

Hacer un diagrama

En un problema geométrico, muchas veces conviene realizar un dibujo o un diagrama de la situación que muestre sus dimensiones, para así calcular los datos pedidos.

Estrategias

- Hacer un diagrama.
- Usar ensayo y error sistemático.
- Usar problemas más sencillos.
- Hacer una tabla.
- Encontrar un patrón.
- Plantear una ecuación o inecuación.
- Usar razonamiento lógico.

Con motivo de conmemorar el Combate Naval de Iquique, Lorena dibuja en una hoja cuadriculada el diseño de un barco para utilizarlo de molde y así decorar el mural de su sala. El lado de cada cuadrado de la hoja que utiliza mide 1 cm. Si el barco que dibuja se forma uniendo los puntos A(–1, 0); B(2, 0), C(3, 2); D(2, 2), E(2, 4); F(0, 4), G(0, 3) y H(–1, 3), I(–1, 2), J(–2, 2) ¿Cuál es el área total del molde que utilizará?

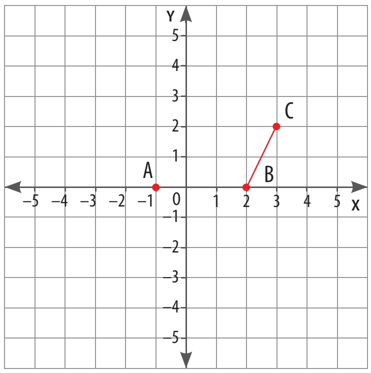
¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema?

¿Qué datos tienes para resolver?

Resuelve

Para resolver el problema puedes aplicar la estrategia Hacer un diagrama. Para ello, continúa representando los vértices del polígono como puntos en el plano cartesiano y únelos para formar la figura. Luego, descompón la figura en polígonos para determinar su área.

Aplica la estrategia



Resuelve

Verifica la respuesta

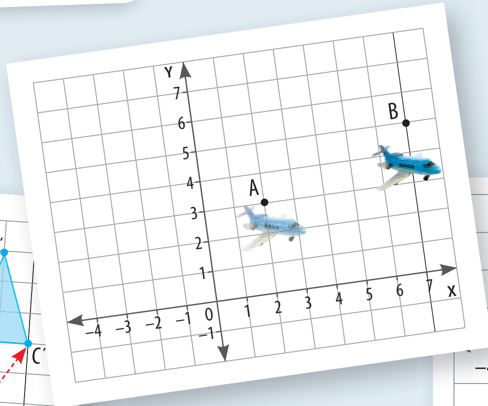
Comunica la respuesta

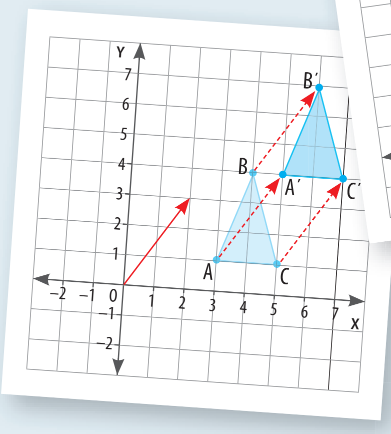
Vuelvo a mis procesos

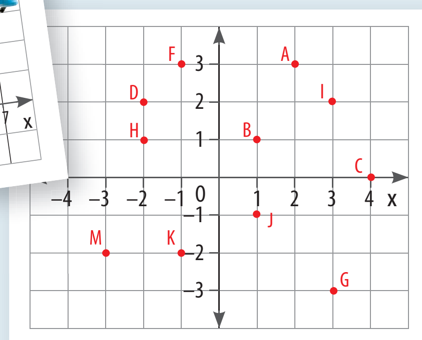
Observa las imágenes centrales y completa.

En relación a cada imagen escribe un aprendizaje trabajado en esta sección.

¿Qué estrategias utilizaste para resolver los problemas de esta sección?







¿Cuál de los temas o habilidades trabajadas en la sección podrías aplicar en la vida cotidiana?

De las metas que te propusiste al inicio de esta sección, ¿cuáles cumpliste y cuáles te faltaron?

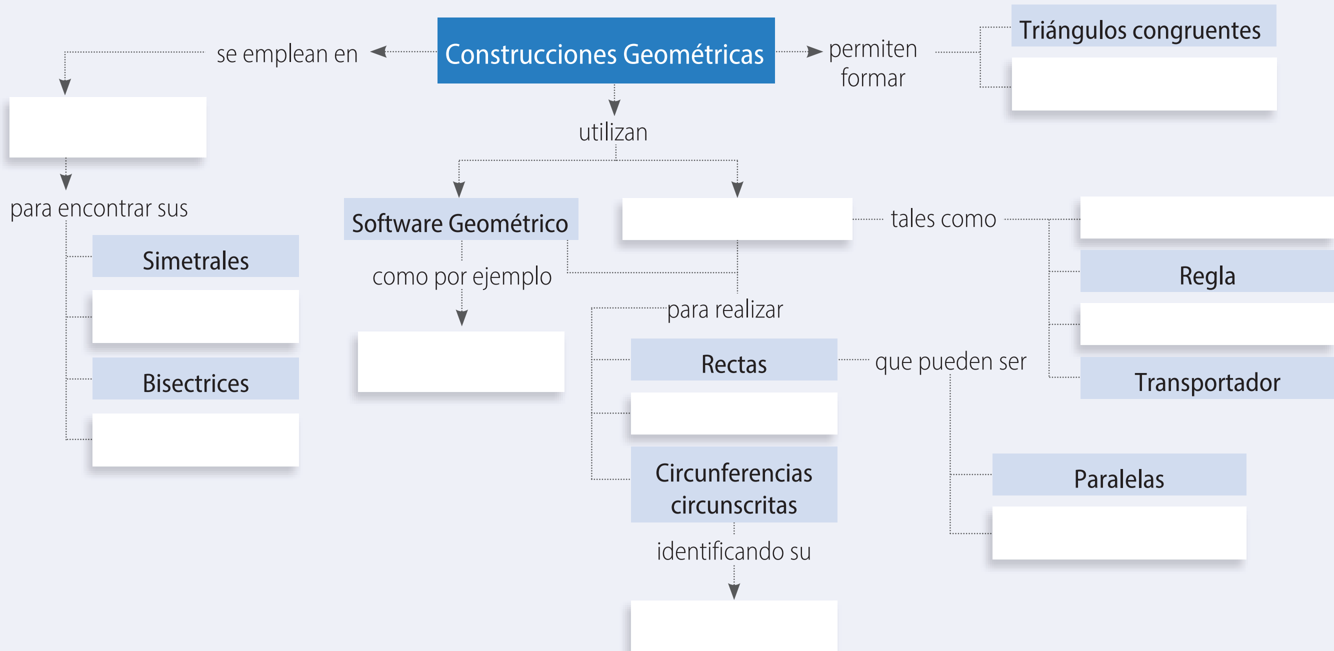
¿Qué dificultades tuviste en la sección? Nombra al menos dos y describe cómo las superaste.

Sintetizo mis aprendizajes

¿Cómo se llama?

Completa el mapa conceptual correspondiente a la sección 8 de Construcciones geométricas. Para ello, ubica los conceptos donde corresponda.

Triángulos – Transversales de gravedad – Escuadra – Circunferencias inscritas – Compás – Perpendiculares – Circuncentro – Cuadriláteros congruentes – GeoGebra – Alturas – Instrumentos geométricos



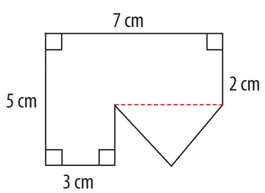
Organiza los aprendizajes trabajados en las secciones 6, 7 y 9, construyendo un mapa conceptual para cada una en tu cuaderno.

Recurso digital complementario

¿Cómo se hace?

• Pregunta 1

Si tienes una figura como la siguiente, ¿cómo calcularías su área? Describe un procedimiento y luego calcula.



• Pregunta 2

¿Cómo se puede estimar el perímetro y el área de un círculo?

• Pregunta 3

¿Qué propiedades se deducen a partir del punto de intersección de las bisectrices de un triángulo?

• Pregunta 4

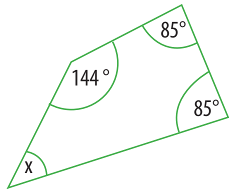
¿Qué diferencia hay entre un punto A(2, 3) y un vector $\vec{v}$ (2, 3)?

Refuerzo mis aprendizajes

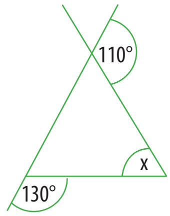
Polígonos

1. Determina el valor de **x**.

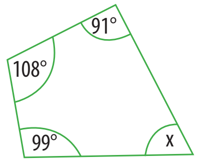
a.



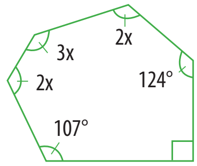
c.



b.

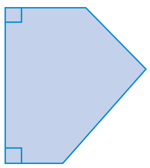


d.

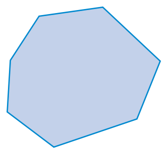


2. Determina la suma de los ángulos interiores de los siguientes polígonos.

a.

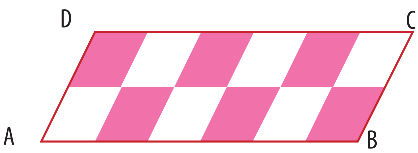


b.

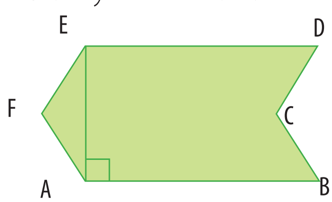


3. Calcula el área de la sección pintada.

a. El paralelogramo ABCD está dividido en 12 partes congruentes. AB = 6 cm y la altura del paralelogramo es 2 cm.



b. AB // CF // DE ; AF // BC ; CD // FE , AB = 20 cm y AE = 12 cm.

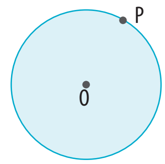


4. Para calcular la cantidad de tela que se debe comprar para confeccionar una cortina, se considera el doble del ancho de la ventana y 40 cm más en la altura. Si la ventana tiene 150 cm de ancho y 120 cm de alto, ¿cuánta tela se debe comprar para hacer la cortina?

Círculo y circunferencia

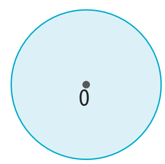
5. Dibuja los elementos del círculo. Luego, identifícalos y escríbelos en la línea.

a.



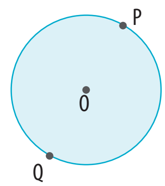
OP → ________

c.



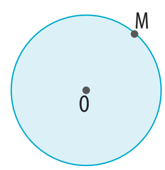
0 → ________

b.



PQ → ________

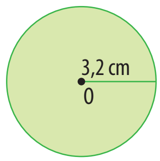
d.



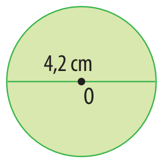
OM → ________

6. Estima el área y el perímetro de cada circunferencia. Considera $\pi = 3{,}14$.

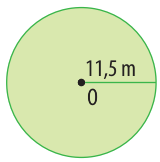
a.



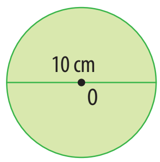
c.



b.

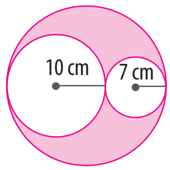


d.

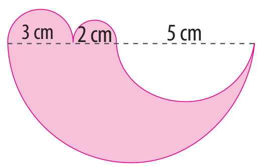


7. Estima el área de la figura sombreada. Considera $\pi = 3{,}14$

a.



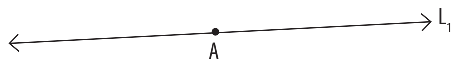
b.



8. Una empresa debe arreglar en una avenida una alcantarilla circular y para evitar accidentes, la rodea con una malla. Si se utilizan 2,198 m de malla en rodearla, calcula el radio de la alcantarilla.

Construcciones geométricas

9. Dada la recta L_1:



a. Construye una recta perpendicular a la recta L_1 que pase por el punto A. Llámala L_2.

b. Construye una recta paralela a L_1 que interseque a L_2 en un punto.

c. Si construyes una recta paralela a la recta L_2, ¿qué cuadrilátero se formará?

10. Observa la imagen.

a. ¿Qué elemento representa el doblez? Justifica.

b. ¿Cómo comprobarías que el elemento de la pregunta **a.** sea el correcto?

11. Con regla y compás construye:

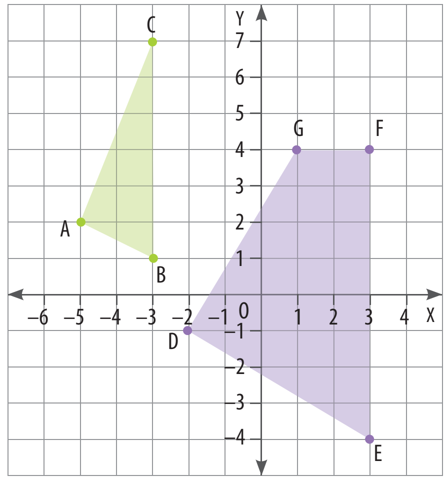
a. Un triángulo en el que las longitudes de dos de sus lados son 3 cm y 5 cm, y la medida del ángulo comprendido entre ellos es 80°.

b. Un rectángulo cuyo largo es 6 cm y su ancho es 3 cm.

12. Tres personas están ubicadas de tal manera que forman un triángulo. ¿Qué camino debiesen seguir para encontrarse en un punto recorriendo lo mínimo?

Plano cartesiano

13. Identifica las coordenadas de los vértices de cada polígono.



14. Representa los puntos en el plano cartesiano. ¿Qué figura se forma al unirlos?

a. G(–7, –4), H(–2, –4) y I(–2, 0)

b. L(–1, –3), M(4, –3), N(4, –1) y P(–1, –1)

15. Determina en cada caso el vector ($\vec{v}$)según el cual se desplazó un punto desde la posición M a la P.

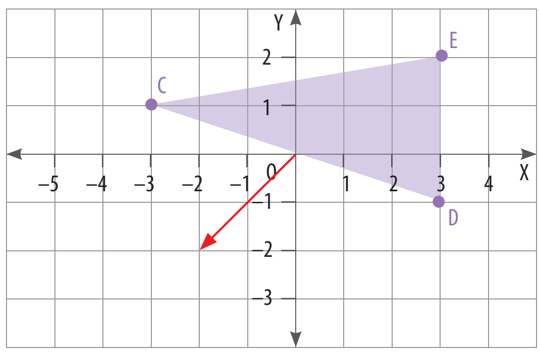
a. M(3, –7) ⟶ P(–3, 7) $\vec{v}$ = (_____, _____)

b. M(0, 0) ⟶ P(3, 4) $\vec{v}$ = (_____, _____)

c. M(–4, 9) ⟶ P(6, 10) $\vec{v}$ = (_____, _____)

d. M(6, –7) ⟶ P(–6, 7) $\vec{v}$ = (_____, _____)

16. Desplaza el triángulo según el vector.



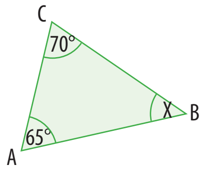
¿Qué aprendí?

PARTE I Evaluación de contenidos

En los ejercicios 1 al 9 selecciona la alternativa correcta. (9 puntos)

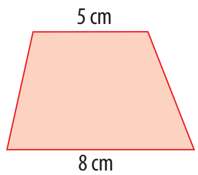
1 ¿Cuál es el valor de **x**?

A. 40°
B. 45°
C. 50°
D. 55°



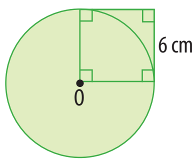
2 El área del trapecio es 39 cm^2. ¿Cuánto mide su altura?

A. 3 cm
B. 6 cm
C. 12 cm
D. Falta información para calcularla.



3 Aproximadamente, ¿cuál es el área de la figura? Considera $\pi \approx 3{,}14$.

A. 120,78 cm^2
B. 113,04 cm^2
C. 84,78 cm^2
D. 76,45 cm^2



4 Si el radio de una circunferencia aumenta 20 %, ¿qué variación experimenta su área?

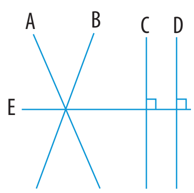
A. Aumenta 12 %.
B. Aumenta 20 %.
C. Aumenta 40 %.
D. Aumenta 44 %.

5 ¿Cuál es el área del círculo que se forma con un cordel de 12,56 m de longitud? Considera $\pi \approx 3{,}14$.

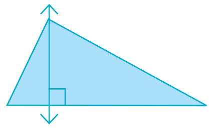
A. 6,28 m^2
B. 12,56 m^2
C. 18,84 m^2
D. 25,12 m^2

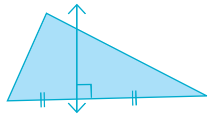
6 Según la información que se entrega en la imagen, ¿cuál de las siguientes alternativas es verdadera?

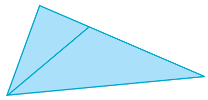
A. A es paralela a B.
B. C es paralela a B.
C. D es perpendicular a E.
D. C es perpendicular a A.

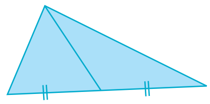


7 ¿En qué triángulo se ha construido una transversal de gravedad?

A.


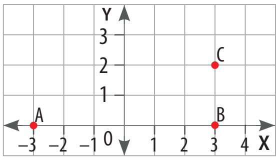
C.


B.


D.


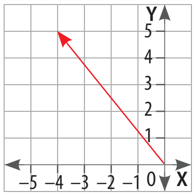
8 Los tres puntos marcados representan los vértices de un rectángulo. ¿Dónde deberían ubicarse las coordenadas del vértice D?

A. (3, 2)
B. (2, 3)
C. (–3, 2)
D. (2, –3)

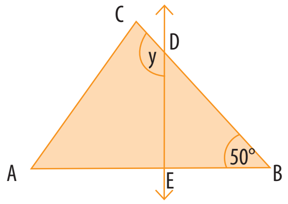


9 ¿Cuáles son las coordenadas del vector desplazamiento?

A. (5, 4)
B. (4, 5)
C. (–5, 4)
D. (–4, 5)

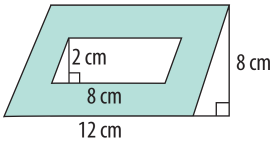


10 Si el segmento DE representa la simetral del lado AB, ¿cuál es el valor del ángulo y? (2 puntos)



R: ______________________________

11 La figura está compuesta por dos paralelogramos. ¿Cuál es el área sombreada? (2 puntos)



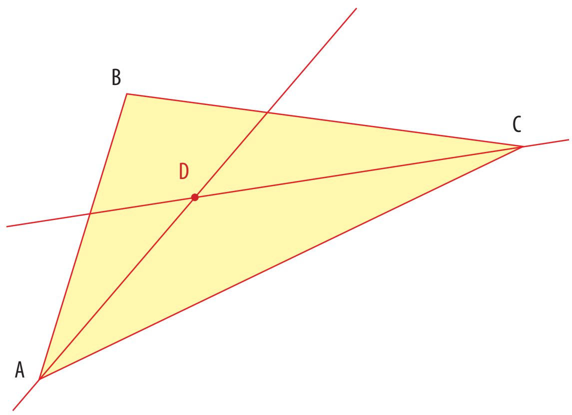
R: ______________________________

PARTE II Evaluación de habilidades

1. Camila utiliza un listón de madera de 25,6 cm de largo para confeccionar un portafoto con forma rectangular de ancho 6 cm.

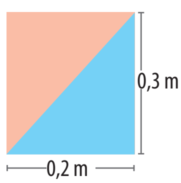
   Si utilizó todo el listón, ¿cuál es la medida del largo del portafoto? (2 puntos)

2. Utiliza tus instrumentos geométricos y determina a qué punto corresponde el punto D. Describe el procedimiento que sigues con los instrumentos. (2 puntos)



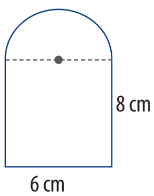
3. Una pista circular para ciclistas tiene un diámetro de 54 m. Si se considera que las ruedas de una bicicleta tienen un diámetro de 60 cm, ¿cuántas vueltas completas dan las ruedas por cada recorrido al borde de la pista? Considera $\pi \approx 3{,}14$. (2 puntos)

4. Se desea cubrir el piso de una pieza rectangular de lados 5,7 m y 4,2 m con baldosas que tengan el diseño adjunto.



   ¿Cuántas baldosas se utilizarán como mínimo para cubrir todo el piso? (2 puntos)

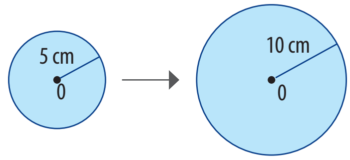
5. La siguiente figura está compuesta por un rectángulo y un semicírculo.



   a. ¿Cuál es el perímetro de la figura? (1 punto)

   b. ¿Cuál es su área? (1 punto)

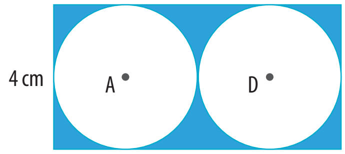
6. Observa la figura.



   a. ¿En qué razón varía el área de los siguientes círculos? Considera $\pi \approx 3{,}14$. (2 puntos)

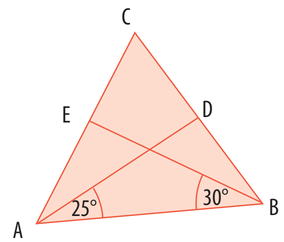
   b. Si el radio del círculo mayor se triplica, ¿en qué razón varía su perímetro? (1 punto)

7. ¿Cuál es el área del sector azul? (2 puntos)

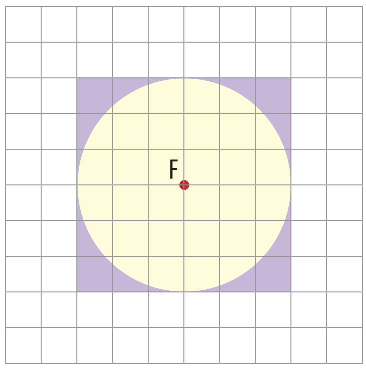


8. En el triángulo ABC, $\overline{BE}$ es bisectriz del ángulo CBA y $\overline{AD}$ es bisectriz del ángulo BAC.

   ¿Cuál es la medida del ángulo ACB? (2 puntos)



9. ¿Cuál es el área comprendida entre el cuadrado y el círculo inscrito en él? Considera $\pi \approx 3{,}14$. (2 puntos)



Registra tus aprendizajes

PARTE I Para repasar contenidos

Cuenta el puntaje que obtuviste en la parte I y II de la evaluación. Luego, repasa según tu nivel de logro

Contenido	Logrado	Por lograr	Repasa en...
Ángulos y área de polígonos (Actividades 1 y 2 y 12)	3 o más puntos	2 o menos puntos	Lecciones 26 y 27
Área y perímetro del círculo (Actividades 3, 4 y 5)	2 o 3 puntos	0 o 1 punto	Lecciones 30 y 31
Construcciones geométricas (Actividades 6, 7, 8 y 11)	4 o más puntos	3 o menos puntos	Lecciones 32, 33 y 34
Representación en el plano cartesiano (Actividades 9 y 10)	2 puntos	0 o 1 punto	Lecciones 38 y 39

Parte II Para practicar habilidades

Habilidad	Logrado	Por lograr	Practica en...
Representar (Actividades 1 y 2)	3 o más puntos	2 o menos puntos	Cuaderno de ejercicios, página 123
Modelar (Actividad 3)	2 puntos	0 puntos	Cuaderno de ejercicios, página 123
Resolver problemas (Actividades 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10)	7 o más puntos	6 o menos puntos	Cuaderno de ejercicios, página 123
Argumentar y comunicar (Actividad 11)	2 o 3 puntos	0 o 1 punto	Cuaderno de ejercicios, página 123

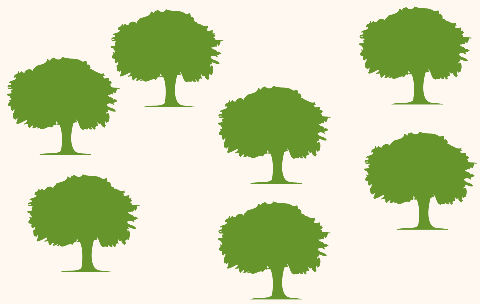
Actitud: Demostrar curiosidad, interés por resolver desafíos matemáticos, con confianza en las propias capacidades.

Desafío en equipo

Al terminar esta unidad los invitamos a formar parejas para que, de manera creativa y reflexiva, puedan resolver el desafío.

Plantando árboles

1. Tienen siete árboles para plantar. Hay que ubicarlos en seis hileras y cada una de ellas debe tener tres árboles. ¿Cómo lo harán?



2. Tomando en consideración los contenidos, las habilidades y las actitudes desarrollados en esta unidad, ¿qué nivel de dificultad representó este desafío para ustedes? ¿Por qué? ¿En qué fallaron? Respondan individualmente, escribiendo en el recuadro.

UNIDAD 4

Estadística y probabilidad

- **Sección 10** Muestreo y representación de datos
- **Sección 11** Medidas de tendencia central
- **Sección 12** Probabilidad

La estadística al servicio de un país

La estadística es una ciencia que estudia datos de una población para obtener inferencias. Hoy su uso se ha extendido a diferentes ámbitos, y así lo han entendido los diversos estados y gobiernos, los cuales se valen de esta disciplina para recopilar datos, estudiarlos y tomar decisiones a fin de, por ejemplo, la creación de políticas públicas, como Fonasa, subsidios a la vivienda, entrega de bonos, entre muchos otros.

La estadística es una rama de la matemática al servicio de las ciencias sociales. En la imagen aparece el mundo, ¿en qué situaciones cotidianas la estadística juega un rol fundamental en la sociedad? Nombra tres y explícalas.

¿Qué aprenderé?

Recurso digital complementario

- Representar datos obtenidos en una muestra mediante tablas de frecuencias absolutas y relativas, utilizando gráficos apropiados.
- Calcular e interpretar las medidas de tendencia central y el rango.
- Explicar las probabilidades de eventos obtenidos por medio de experimentos de manera manual o con software educativo.
- Comparar las frecuencias relativas de un evento obtenidas al repetir un experimento de manera manual o con software, con la probabilidad obtenida de manera teórica.

¿Cuál es su importancia?

- Te permite elegir representaciones gráficas pertinentes al contexto y al interés del estudio.
- Forma un espíritu crítico en torno a la información que recibimos a través de los medios de comunicación.

Actitudes

- Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros, y manifestando disposición a entender sus argumentos.
- Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información.
- Mostrar una actitud crítica al evaluar informaciones matemáticas y valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad.

¿Para qué otra finalidad pueden servir estos aprendizajes?

¿Qué dificultades piensas que enfrentaría la sociedad si no se realizaran estas investigaciones estadísticas, como lo es el Censo? Explica.

Frecuentemente, utilizamos los términos "muy probable" o "poco probable" para referirnos a un hecho o acontecimiento determinado, ¿qué significado piensas que tienen estos términos?

¿Cuál crees que es la relación entre la estadística y la probabilidad? ¿Qué utilidad tiene la probabilidad para las tareas realizadas a diario?

Sección 10

Actitud: Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información.

Muestreo y representación de datos

Activo ideas previas

En parejas lean el texto y reflexionen en torno a las preguntas propuestas.

La estadística es una ciencia que se ocupa de los métodos y procedimientos para recopilar, analizar e interpretar datos a través de herramientas matemáticas que permitan realizar inferencias sobre un grupo de individuos, objetos o sucesos con la finalidad de ayudar a la toma de decisiones e incluso realizar predicciones.

El Censo de Población y Vivienda es una encuesta que se realiza a todos los residentes en Chile para obtener información de la distribución etaria (perteneciente a la misma edad), de los ingresos, el nivel de escolaridad, etc.

Para analizar la información recopilada en el Censo, es que recurrimos a la estadística, que resume la información obtenida en tablas y gráficos que hacen más comprensibles los datos, y cuya información es difundida en los distintos medios de comunicación para que la población conozca los resultados.

- ¿Cuál piensas que es el procedimiento que se sigue al momento de realizar un censo?
  ____
- ¿Qué implicancias tiene el Censo en nuestra vida cotidiana?
  ____
- ¿Qué predicciones permite realizar el Censo?
  ____

CENSO TODOS CONTAMOS 2017

¿Sabías que el 19 de abril del 2017, el INE realizará un censo de hecho? Tú podrás participar junto a tu familia, para que este acto soberano y republicano sea un éxito. Si quieres saber más sobre el censo, conéctate a www.ine.cl o a www.censo2017.cl

Activo conceptos clave

Los siguientes listados muestran los conceptos clave de la sección. Con algunos de ellos, completa las propuestas que aparecen.

Población Variable estadística Muestra Dato	Representatividad Muestra aleatoria Muestra representativa Tabla de frecuencia	Frecuencia absoluta Frecuencia relativa Frecuencia absoluta acumulada Rango

- Dos conceptos para referirse a la cantidad de elementos de un grupo: ____________________
- Dos palabras que se utilicen para el estudio de habitantes de un lugar: ____________________
- Un concepto nuevo para ti: ____________________
- Una posible definición del concepto nuevo: ____________________

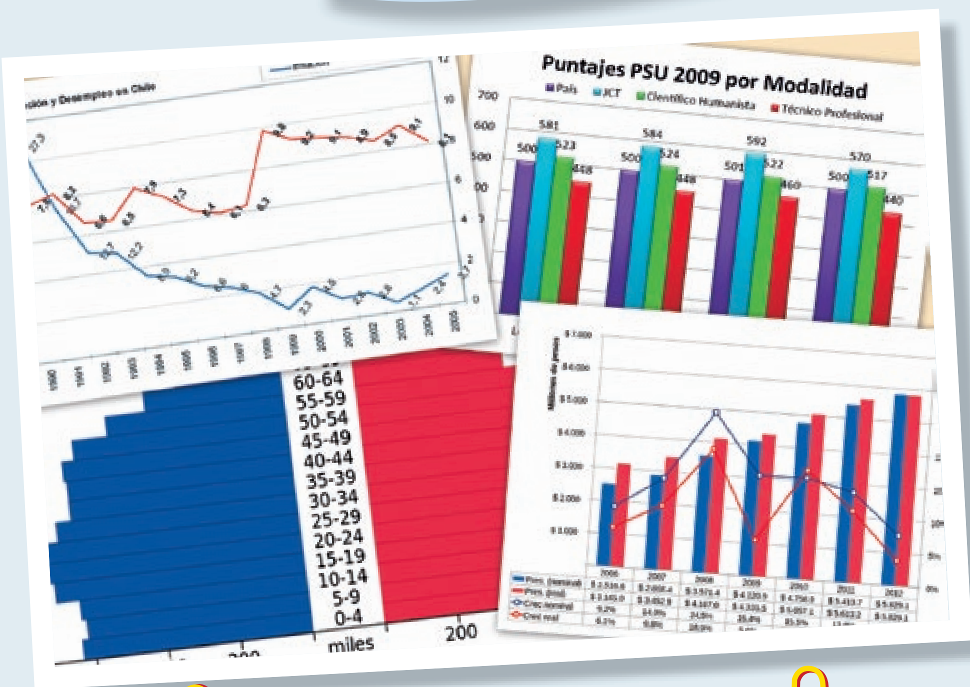
Pienso mis procesos

Observa la imagen central y completa.

Describe la situación que se muestra en la imagen.

¿Qué elementos presentes en la imagen conoces?

¿Por qué crees que en la sociedad se utiliza esta manera de informar?



¿De qué piensas que se tratará esta sección?

¿Qué estrategias de estudio podrías usar para trabajar en esta sección?

¿Qué metas te propones cumplir al finalizar esta sección?

¿Qué debo saber?

Activa tus conocimientos previos respondiendo la pregunta lateral. Luego, resuelve la actividad. Para terminar, registra tus logros.

¿Cómo se puede identificar si una variable es cuantitativa o cualitativa?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
5 o más puntos	4 o menos puntos

Identificar variables

1 **Identifica si las siguientes variables son cuantitativas o cualitativas.** (7 puntos)

a. Edad. ______

b. Estado civil. ______

c. Color de ojos. ______

d. Cantidad de hijos. ______

e. Comida preferida. ______

f. Color del cabello. ______

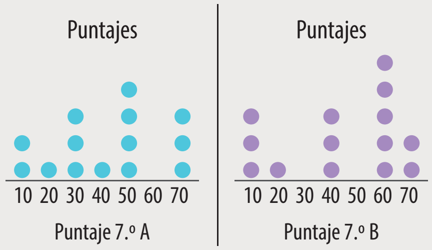
g. Cantidad de automóviles. ______

En un gráfico de puntos o de barras, ¿cómo se representan los distintos valores que toma la variable?

¿Cuál es la importancia de representar información en gráficos?

Interpretar gráficos

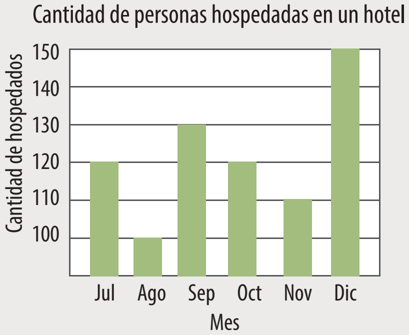
2 **Analiza el diagrama de puntos que representa los puntajes obtenidos por dos cursos en las competencias de la semana del colegio.** (4 puntos)



a. ¿Cuántos puntos obtuvo el 7.° A y el 7.° B, respectivamente?

b. ¿Cuál fue el puntaje más alto obtenido por el 7.º A?

3 **Interpreta el gráfico. Escribe V o F según corresponda. Justifica las falsas.** (7 puntos)



Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
7 o más puntos	6 o menos puntos

¿Qué dificultades tuviste?

a. ______ Hubo menos hospedados en octubre que en julio.

b. ______ Diciembre tuvo la mayor cantidad de hospedados.

c. ______ El mes en que menos personas se hospedaron fue agosto.

d. ______ La mayor diferencia entre la cantidad de hospedados se da en los meses de agosto y septiembre.

e. ______ En noviembre disminuyó en 20 la cantidad de hospedados respecto a septiembre.

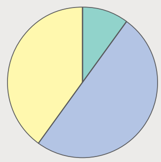
¿Qué porcentaje representa el círculo completo?

Dada la frecuencia absoluta de un valor de la variable, ¿cómo calcularías a qué porcentaje corresponde?

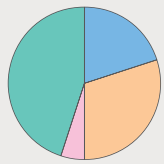
Estimar y determinar porcentajes en un gráfico

4 Estima el porcentaje que ocupa cada sector del gráfico circular. (4 puntos)

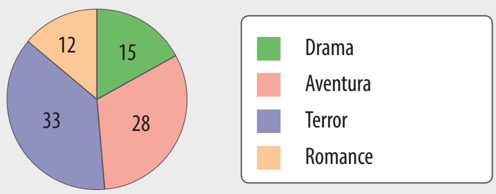
a.



b.

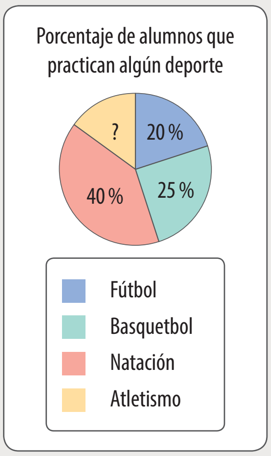


5 Estima el porcentaje de personas que prefirieron una determinada película en un cine. (2 puntos)

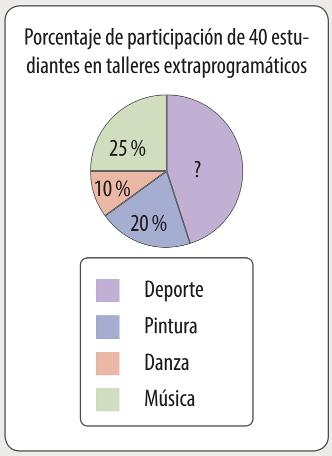


6 Calcula el porcentaje desconocido en cada caso. (4 puntos)

a.



b.



Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
6 o más puntos	5 o menos puntos

¿Qué dificultades tuviste?

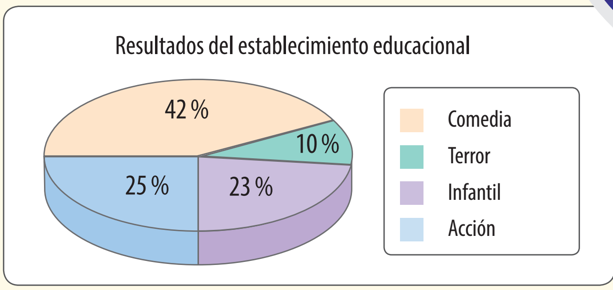
Lección 40

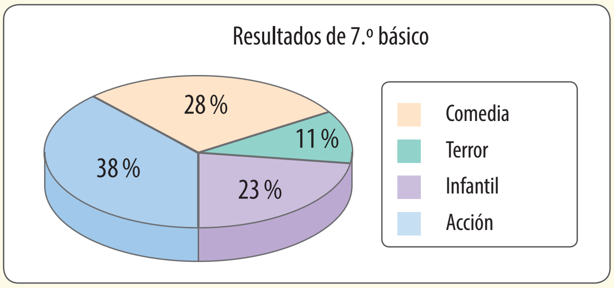
¿Qué es una población y una muestra?

Taller 1 El todo y la parte

En parejas realicen la siguiente actividad:

Un grupo de estudiantes realizó una encuesta en su colegio y la organizó en los siguientes gráficos:





1. Identifiquen qué se está investigando en la encuesta.

   ____

2. ¿Qué pueden inferir acerca de los estudiantes de este colegio?

   ____

3. ¿Se puede considerar al 7.° básico como un subconjunto de los estudiantes del colegio? ¿Por qué?

   ____

4. ¿Por qué varían los resultados al considerar solo el 7.° básico?

   ____

5. ¿Podrían decir que el 7.° básico es un buen representante del estudio realizado en todo el colegio? Justifiquen su respuesta.

   ____

Propósito

Identificar población y muestra.

¿Para qué?

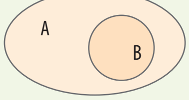
Cuando se quieren estudiar las características de un conjunto de personas u objetos, es importante determinar cómo se obtendrán los datos. Diferenciar entre una población y una muestra permite que se escoja una cantidad suficiente de encuestados sin necesidad de aplicar el instrumento a gran escala y recolectando la información necesaria para realizar las conclusiones.

Palabras clave

Población
Variable estadística
Muestra
Dato

Ayuda

Un subconjunto de un conjunto es una parte del conjunto completo. Todo conjunto es subconjunto de sí mismo.



El conjunto B es un subconjunto de A.

Taller 2 El estudio estadístico

En grupos de 4 personas realicen la siguiente actividad:

Elijan un tema que les gustaría investigar sobre los estudiantes de su curso y elaboren una encuesta dirigida a obtener la información sobre ese tema. Por ejemplo: el tipo de música que escuchan.

1. Indiquen la variable en estudio.
2. ¿Qué aspectos deben considerar al momento de realizar la investigación?
3. Describan el método o criterio que utilizaron para seleccionar a los alumnos que serán encuestados.
4. Resuman y organicen la información obtenida en una tabla como la siguiente:

Tipo de música	Cantidad de estudiantes
Bachata	
Electrónica	
Pop	
Otros	

5. ¿Qué pueden inferir de acuerdo a su encuesta y las realizadas por sus compañeros sobre los estudiantes de su curso?

Ayuda

Consideren que la muestra debe ser representativa de la población en estudio. Para ello:
- Debe tener un tamaño adecuado.
- Los elementos de la muestra deben tener un comportamiento y características similares a los que se observan en la población.

Para concluir

Elementos del estudio estadístico

- **Población**
  Conjunto de individuos (elementos) con características determinadas.
- **Muestra**
  Subconjunto de una población.
- **Variable estadística**
  Característica que se estudia en una población o muestra.
- **Dato**
  Es el valor (cantidad o cualidad) observado de una variable. Por ejemplo: si la variable es color de ojos, algunos datos serían negros, azules, verdes, pardos.

- **Cuantitativa**
  Es la que describe una cantidad. Por ejemplo: números de hermanos, tiempo, etc.
- **Cualitativa**
  Es la que describe una cualidad. Por ejemplo: color de ojos, lugar obtenido en una competencia, sexo, profesión, etc.

Argumenta y comunica

- ¿Puede existir más de una muestra de una población para realizar el mismo experimento? ¿Por qué? Discute tu postura con tus compañeros y compañeras.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. **Evalúa la veracidad de cada afirmación. Para ello, escribe V o F. Justifica las falsas.**

a. ______ La nacionalidad es una variable cualitativa.

b. ______ La estatura es una variable que no es cuantitativa.

c. ______ La cantidad de agua que ha caído no es una variable cualitativa.

d. ______ Las variables pueden clasificarse en cuantitativas o cualitativas.

e. ______ Las variables son características observables de un conjunto de datos.

f. ______ La cantidad de células que se generan en 10 horas es una variable cualitativa.

2. **Identifica en cada caso cuál grupo es parte del otro.**

a. Perros / Animales.

b. Abecedario / Vocales.

3. **Para saber el uso de Internet en un edificio, se realiza una encuesta en tres departamentos con Internet. ¿Cuál es la población y la muestra en el estudio anterior?**

Práctica guiada

4. **Identifica en cada caso si el estudio realizado se refiere a una población o a una muestra. Luego, identifica el tipo de variable involucrada.**

Una empresa automotriz desea hacer un estudio para determinar los diferentes tipos de automóviles que circulan en la Región Metropolitana. Se instalan distintos puntos de observación y se consideran 1500 automóviles según las características de marca, color y rapidez.

- Al considerarse 1500 automóviles en los puntos de observación y no todos los de la región, se trata de una muestra.
- La variable rapidez se mide en forma numérica; por ende, es una variable cuantitativa.
- Las variables marca y color describen una cualidad; por lo tanto, son cualitativas.

a. Para analizar la mortalidad de los recién nacidos en el país se toman los datos de todos los centros hospitalarios nacionales, analizando cuántos recién nacidos fallecieron.

b. En un colegio se desea analizar las carreras universitarias en las que se han inscrito los egresados de cuarto medio. Para ello, buscan las bases de datos de inscripción de todos los egresados en los años 2013, 2014 y 2015.

c. En un estudio del Minvu (Ministerio de Vivienda y Urbanismo) sobre la cantidad de metros cuadrados que tienen las viviendas sociales ya construidas, se toman cinco proyectos aprobados durante el último año en el país.

d. En una encuesta a una empresa sobre la cantidad de dinero que les gustaría ganar a cada tipo de empleado (administrativo, funcionario, etc.) se consulta a 5 funcionarios de cada departamento.

Aplica

5. Clasifica las siguientes variables estadísticas. Para ello, completa la tabla en tu cuaderno.

a. Gustos musicales.
b. Tiempo.
c. Cantidad de animales.
d. Color de ojos.
e. Estatura.
f. Marca de celular.
g. Número de amigos.
h. Sabor de helado.
i. Países.
j. Masa corporal

Variables cuantitativas	Variables cualitativas

6. En la siguiente encuesta analiza las variables en juego y clasifícalas según su tipo.
"Un restaurante analiza la satisfacción en la atención al público."

- El tiempo que usted esperó por su pedido fue: .... minutos.
- La atención del mozo fue:
  Muy buena .... Buena ....
  Mala .... Muy mala ....
- ¿Volvería usted al restaurante?
  Sí .... No ....

7. Determina qué muestra sería la más adecuada para un estudio. Para ello, marca con una ✗ tu elección.

a. ¿Cuál es el grupo musical que tiene la mayor popularidad entre los adolescentes en la actualidad?

_____ Un grupo de 50 personas encuestadas al azar a la salida del Metro.

_____ Un grupo de 50 personas entre 5 y 10 años escogidas al azar.

_____ Un grupo de 50 estudiantes de enseñanza media de diferentes colegios.

b. ¿Cuál es el mejor dibujo animado del año?

_____ Un grupo de 3 estudiantes de enseñanza básica elegidos de un colegio.

_____ Un grupo de 40 estudiantes de enseñanza básica elegidos de diferentes comunas.

_____ Un grupo de 30 trabajadores de una empresa.

c. ¿Cómo justificarías tu elección en cada caso?

8. Analiza cada situación e identifica la población, muestra y variable.

a. En una fábrica de ampolletas se efectúa un control de calidad sobre 100 unidades para estimar cuántas son defectuosas.

b. Se desea estimar el promedio de estatura de todos los estudiantes de un colegio. Para ello, se mide a 42 estudiantes.

c. Se desea conocer el porcentaje de personas en Chile que realizan algún deporte. Para ello, se escogen 6000 personas de todo el país.

9. Investiga. Recolecta información en diarios sobre estudios estadísticos y analiza la población en estudio, la muestra, y el tipo de variable.

Reflexiono

El tipo de variable que se desea estudiar de una muestra dependerá de la cantidad de datos que esta tenga. ¿Estás de acuerdo con la afirmación anterior? Justifica tu respuesta.

Refuerzo

1. Nombra 2 ejemplos en los cuales se diferencie la población de la muestra e intercámbialos con algún compañero o compañera.
2. Jaime pregunta a sus amigos cuál es el lugar preferido para jugar y cuántos días a la semana asisten a él. Además, pregunta cuántos libros tienen en sus casas. ¿Cuáles son los tipos de variable involucradas?

Lección 41

¿Cómo debe ser la muestra?

Taller 1 Representatividad de la muestra

Propósito

Analizar la representatividad de una muestra y estimar el porcentaje de características de la población por medio del muestreo.

¿Para qué?

Al escoger una muestra, es necesario que esta sea la adecuada o lo más representativa posible, dependiendo del tipo de información que se quiera recoger. Por ejemplo, si se quiere estimar el tiempo que demora un estudiante en llegar desde su casa al colegio, no se obtendrán los mismos resultados si se encuestan a tres estudiantes que si se encuestan a 90.

Palabras clave

Representatividad
Muestra aleatoria
Muestra representativa

En tríos analicen la siguiente situación:

Carlos y Silvana deben aplicar una encuesta para la asignatura de Historia. El tema es: "¿Qué hacen los estudiantes de tu colegio durante su tiempo libre?". Para ello, discuten sobre cómo elegirán a las personas que encuestarán, ya que no pueden encuestarlas a todas, debido a que cuentan con poco tiempo y su colegio tiene 1200 alumnos en total, con cursos desde kínder hasta 4.° medio.

1. ¿Cuál es la población en estudio?

2. ¿Es posible que la muestra de Silvana tenga la misma cantidad de estudiantes que la de Carlos?

3. ¿Quién tiene razón respecto de la elección de la muestra? Justifiquen su respuesta.

4. ¿Qué criterio para la elección de la muestra debiesen aplicar los demás compañeros cuyos temas son los que aparecen a continuación?
   a. "¿Cuánto tiempo pasan diariamente conversando con sus padres?"
   b. "¿Qué tipo de deporte te gustaría que se impartiera en el colegio?"
   c. "¿Que mejoras harías en los baños de mujeres?"
   d. "¿Qué carrera piensas estudiar al salir del colegio?"

* Nota: se debe tener la precaución de que, al elegir una muestra, esta represente las características de la población en estudio.

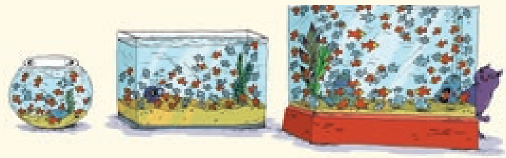
Taller 2 Infiriendo características de la población

En los mismos tríos del taller anterior analicen la siguiente situación:

Los investigadores de una universidad descubrieron que en un lago hay dos especies de peces.

Ellos desean conocer qué cantidad hay de cada una, pero no saben cuántos peces hay en total en el lago. Para ello, extraen distintos tamaños de muestra:

Muestra 1 Muestra 2 Muestra 3



n = 20 n = 50 n = 100

> **Ayuda**
> El tamaño de muestra es la cantidad de individuos, objetos o sucesos que se toman en un estudio. Por ejemplo: si se escogen 30 personas para realizar una encuesta, el tamaño de la muestra se anota como n = 30.

1. ¿Por qué deben extraer muestras para saber la cantidad que hay de cada especie de pez?
2. Los resultados obtenidos en cada muestra son los de la tabla.

   ¿Es relevante el tamaño de la muestra para determinar el porcentaje de peces en el lago?
   Justifiquen su respuesta.

	Especie A	Especie B
M 1	30 %	70 %
M 2	50 %	50 %
M 3	60 %	40 %

3. La muestra de 50 peces la repitieron 10 veces y en cada oportunidad repusieron los peces al lago. A continuación se presentan los resultados.

	1º	2º	3º	4º	5º	6º	7º	8º	9º	10º
Especie A	35	28	22	31	30	32	34	27	29	33
Especie B	15	22	28	19	20	18	16	23	21	17

Al repetir un experimento muchas veces, los porcentajes se estabilizan, es decir se observa que tienden a acercarse a un valor determinado.

¿Podrían estimar el porcentaje de peces de cada especie en el lago? Expliquen su procedimiento.

Para concluir

- La **representatividad** de una muestra depende del tipo de elección de esta, la que siempre debe incluir la aleatoriedad. Al ser al azar, recibe el nombre de **muestra aleatoria** (cada individuo de la muestra tiene la misma posibilidad de ser escogido).
  Esta representatividad no tiene relación con su tamaño exclusivamente, sino con la capacidad de reproducir a pequeña escala las características de la población; por lo tanto, una **muestra representativa** es la que permite afirmar que las características presentes en ella se pueden generalizar a toda la población.
- Cuando la población en estudio no concuerda con la muestra, esta no es representativa y se produce error de cobertura. Por ejemplo:

	Mujeres	Hombres
Población objetivo	30 %	70 %
Muestra	60 %	40 %

La muestra no es representativa respecto del sexo de la población.

Argumenta y comunica

- ¿Tiene alguna relación el tamaño de la muestra con la representatividad de esta? Justifica tu respuesta con ejemplos. Luego intercámbialos y coméntalos con un compañero o compañera.

Lección 41
Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Calcula los porcentajes.

a. El 30 % de 100.
b. El 20 % de 80.
c. El 7 % de 224.
d. El 40 % de 350.
e. El 15 % de 40,5.
f. El 30 % de 2,5.
g. El 50 % de 44,8.
h. El 30 % de 1000.

2. Expresa como razón.

"En una empresa hay 60 empleados: 40 son hombres y 20 son mujeres, 50 son de planta y el resto son practicantes."

a. La razón entre la cantidad de hombres y de mujeres en la empresa.
b. La razón entre la cantidad de los empleados de planta y el total de empleados.

Práctica guiada

3. Determina en cada caso el sujeto de estudio (personas, objetos o sucesos) y analiza si la muestra es aleatoria o no aleatoria.

Para asegurar que una prueba de medición nacional está bien diseñada, se seleccionan dos preguntas de cada tema para aplicar un piloto.

- Sujeto de estudio: prueba de medición.
- La muestra consiste en dos preguntas de cada uno de los temas a medir. Entonces, la muestra no es aleatoria, ya que se ha cuidado que ningún tema quede sin pilotear.

a. Para determinar si ha aumentado la cantidad de lectores en las familias de la Región de Valparaíso, se escogen al azar alumnos de todos los tipos de colegios.
b. En un consultorio se estudian los motivos por los que comúnmente las personas asisten a Urgencias. Para esto, toman los datos de los pacientes que asisten durante los turnos más concurridos del mes.
c. Para saber si la mosca de la fruta está atacando en nuestro país, se colocan varios señuelos en algunos frutales de la Región del Maule.

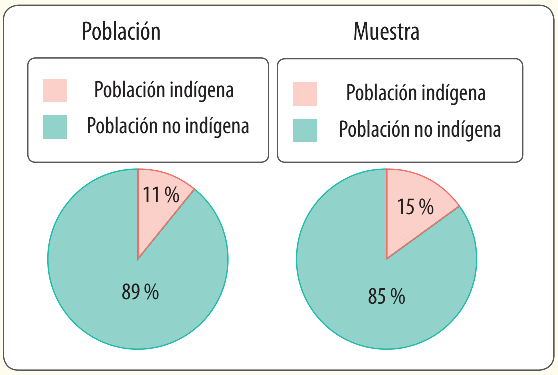
Aplica

4. Evalúa si cada afirmación es verdadera (V) o falsa (F). Justifica las falsas.

a. ______ Mientras mayor sea la cantidad de individuos considerados en una muestra, esta será más representativa de la población.
b. ______ Una muestra aleatoria es aquella en que los individuos que la constituyen no son elegidos al azar.
c. ______ Si en un curso de 45 estudiantes 25 son hombres, una muestra de 9 estudiantes que está en la misma razón tendría 4 mujeres.
d. ______ Para hacer una encuesta sobre la preferencia musical entre los jóvenes menores de 20 años en Chile, una muestra que está a la misma razón de la población sería tomar 5 estudiantes que vivan en la Región Metropolitana.

5. Analiza si la muestra es representativa de la población en estudio o no.

a. Población indígena en Chile.



b. En un noticiario se anuncia que la cantidad de personas que muere en Chile por influenza humana H1N1 asciende al 50 % de los afectados por la enfermedad. El porcentaje es obtenido a partir de la población mayor de 65 años que fue afectada por dicha enfermedad.
c. En una encuesta telefónica sobre la preferencia que tienen los chilenos acerca de los candidatos presidenciales se llama a 100 personas de Santiago.

6. **Se sabe que hay dos tipos de parásitos que están atacando un jardín compuesto por 1500 rosas. Se requiere detener la infección aplicando insecticida en la misma razón que hay de parásitos. ¿Cómo puedes calcular el porcentaje de parásitos de cada tipo presente en el jardín?**

7. Debatan en grupos de cuatro estudiantes (dos a favor y dos en contra) las siguientes situaciones:

a. Se desea investigar las dificultades que presentan los alumnos en el aprendizaje de la matemática. Para ello se toma una muestra formada por 60 % de alumnos provenientes de colegios particulares, 30 % de alumnos de colegios subvencionados y 10 % de alumnos de colegios municipales.

¿Es representativa la muestra obtenida para la investigación que se desea realizar sobre las dificultades en el aprendizaje de la matemática?

b. Supongamos que para estudiar el presupuesto familiar (ingresos y gastos del hogar) en nuestro país, se toma una muestra formada por 30 % de hogares con ingresos bajos, 50 % con ingresos medios y 20 % con ingresos altos.

Si desean responder a cuánto ascienden los gastos de los hogares de acuerdo a su tipo de ingreso (bajo, medio, alto), ¿es representativa la muestra obtenida para responder la pregunta?

8. Realicen las siguientes actividades en duplas:

a. Un compañero coloca en una caja o bolsa, que no sea trasparente, una cantidad de papelitos rojos y otros azules de igual tamaño, sin decir qué cantidad. Luego, el otro compañero, a través del muestreo (sacando un papelito a la vez y reponiéndolo), debe determinar cuál es el porcentaje de papelitos rojos y azules en la caja. Realicen el experimento y luego comprueben sus resultados abriendo la caja o bolsa.

b. Lancen una moneda 60 veces y anoten si salió cara o sello en cada lanzamiento. Calculen el porcentaje de veces que salió cara. Si vuelven a lanzar 60 veces la moneda, ¿pueden determinar, de acuerdo al resultado anterior, cuál será el porcentaje de veces que saldrá sello? Realicen el experimento y luego comparen los resultados.

9. **Crea un ejemplo donde tengas que elegir una muestra aleatoria para saber el promedio diario de uso de internet en tu curso.**

Reflexiono

1. ¿En qué casos no conviene que la muestra sea aleatoria? Nombra 2 y explica por qué.
2. ¿Qué diferencia hay entre una muestra aleatoria y no aleatoria? Fundamenta tu respuesta utilizando un ejemplo de la vida cotidiana e intercámbialo con un compañero o compañera.

Refuerzo

1. Para la corrida de fin de año del colegio, el profesor selecciona a ocho estudiantes de 7.° básico con alta resistencia física. ¿A qué tipo de muestra corresponde? Justifica.
2. Ana quiere averiguar la altura promedio de los estudiantes de 7.° básico de su colegio. Ella afirma que debe encuestar a todos los estudiantes de 7.° (300), pero Álex le dice que basta con elegir a 3 personas de cada 7. ¿Quién tiene razón? ¿Por qué? Fundamenta tu respuesta.

Lección 42

¿Cómo organizar datos?

El Sernatur (Servicio Nacional de Turismo) quiere dar a conocer la cantidad de hoteles, según su calidad, en términos de estrellas. La información recolectada es:

5	3	4	4	3	4	3	3	3	3	3	3	4	5
4	2	4	4	3	3	3	3	3	3	2	3	3	3
4	2	3	4	3	5	2	4	4	4	2	5	3	3
4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	3	3	5	4
4	3	3	3	2	3	3	3	4	4	3	5	3	5
3	3	3	3	3	5	2	3	3	2	3	3	3	3

Propósito

Organizar datos en tablas.

¿Para qué?

Cuando se aplican instrumentos de recolección de información, se obtiene una gran cantidad de datos. Por ejemplo, si durante un día se pregunta la cantidad de hermanos que tiene a la gente que transita por una calle, al finalizar la encuesta, tendremos la información que necesitamos, pero como esta no se encuentra agrupada u organizada, será difícil analizarla. El uso de tablas permite organizar la información, facilitando su análisis e interpretación.

Palabras clave

- Dato
- Tabla de frecuencia
- Frecuencia absoluta
- Frecuencia relativa
- Frecuencia absoluta acumulada

Situación 1 Frecuencia absoluta

¿Cuál es la categoría de hotel que más se ofrece?

Paso 1 Organiza los datos en una tabla de frecuencia.

Construye una tabla de dos columnas. En la primera coloca los datos (valores que puede tomar la variable) y en la segunda, la cantidad de veces que se repite cada dato. A esto se le llama frecuencia absoluta (f).

N.º de estrellas	f
2	8
3	45
4	23
5	8

¿Cómo calculas el total de datos **n**?

Paso 2 Interpreta la información.

El dato que tiene mayor frecuencia es hotel de ________ estrellas, por lo tanto esta categoría tiene una mayor oferta.

Situación 2 Frecuencia relativa

¿Qué categoría de estrellas tiene aproximadamente la mitad de los hoteles?

Paso 1 Calcula qué fracción del entero representa cada dato.

Para esto, divide la frecuencia absoluta de cada dato por el total de datos, en este caso 84 hoteles. Esto se conoce como frecuencia relativa (f_{rel}) y se calcula: $f_{rel} = \frac{f}{n}$

N.º de estrellas	f	f_{rel}
2	8	$\frac{8}{84} = 0{,}095$
3	45	0,536
4	23	0,274
5	8	0,095

Paso 2 Interpreta la frecuencia relativa (f_{rel})

El dato que representa la mitad del entero o cercano a este son los hoteles de ________ estrellas, ya que es aproximadamente $\frac{1}{2}$.

Situación 3 Frecuencia relativa expresada como porcentaje

Recurso digital complementario

¿Qué categoría de hotel tiene un menor porcentaje en su oferta?

Paso 1 Calcula qué porcentaje representa cada dato.

Para esto multiplica la frecuencia relativa por 100. Así, la frecuencia relativa se puede expresar como porcentaje: ($f_{\%}$) y se calcula: $f_{\%} = f_{rel} \cdot 100$.

N.º de estrellas	f_{rel}	$f_{\%}$
2	$\frac{8}{84} = 0{,}095$	0,095 x 100 = 9,5 %
3	0,536	
4	0,274	
5	0,095	

Paso 2 Interpreta la frecuencia relativa expresada como porcentaje.

Busca el porcentaje más bajo, que es ________ %, por lo tanto los hoteles de ______ y ______ estrellas son los que presentan una menor oferta.

Situación 4 Frecuencia absoluta acumulada

¿Cuántos hoteles tienen a lo más 4 estrellas?

Paso 1 Calcula la cantidad de hoteles que tiene 4 estrellas o menos.

Para esto, suma cada frecuencia absoluta con la de la fila anterior.

N.º de estrellas	f	F
2	8	8
3	45	45 + 8 = 53
4	23	
5	8	
	n = 84	

Ayuda

La frecuencia acumulada solo puede considerarse en una tabla si la variable tiene un orden.

Paso 2 Interpreta la frecuencia absoluta acumulada (F).

Hasta los hoteles de 4 estrellas se han acumulado ________ hoteles, por lo tanto existen como máximo ________ hoteles que no son de lujo.

Para concluir

Las **tablas de frecuencias** sirven para organizar datos.

- **Frecuencia absoluta (f)** es el número de veces que se repite un dato.
- **Frecuencia relativa (f_{rel})** es el cociente entre la frecuencia absoluta y el número total de datos. Se puede expresar como fracción, decimal o porcentaje.
- **Frecuencia absoluta acumulada (F)** es la suma de las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales a un valor de la variable.

Argumenta y comunica

- ¿En qué tipos de situaciones conviene dar a conocer información a través de la frecuencia absoluta acumulada en vez de la frecuencia absoluta? Reúnete con un compañero o compañera, inventen una situación como ejemplo de esto y preséntenlo al curso.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Identifica las variables involucradas y clasifícalas en cualitativas o cuantitativas.

a. En una universidad se estudia el sexo de los estudiantes y su país de procedencia.

____

____

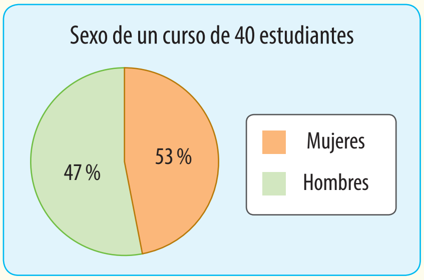
b. En la municipalidad de Algarrobo estudian el número de hijos por familia y sus ingresos económicos para saber si existe alguna relación entre ellos.

____

____

Práctica guiada

2. Represente la información del gráfico en una tabla de valores escribiendo todas las frecuencias que sean posibles.



Paso 1 Identifica la variable en estudio.

Sexo de los estudiantes.

Paso 2 Calcula la frecuencia absoluta.

Mujeres: $40 \cdot \frac{53}{100} = 21{,}2 = 21$

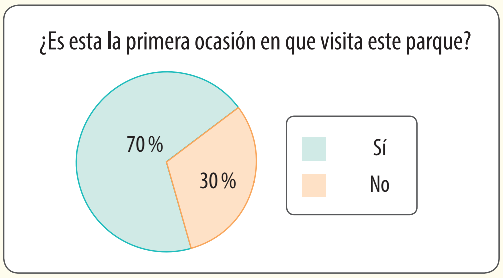
Hombres: $40 \cdot \frac{47}{100} = 18{,}8 = 19$

Paso 3 Calcula la frecuencia relativa y ordena los datos en la tabla:

Sexo	f	f_{rel}	$f_{\%}$
M	21	0,53	53 %
H	19	0,47	47 %

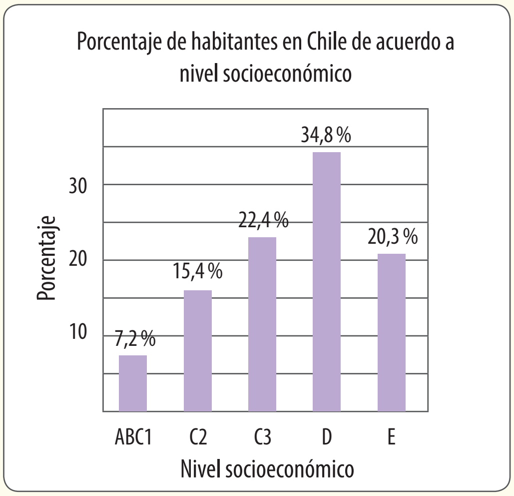
Observa que se escribió la frecuencia absoluta acumulada, ya que la variable sexo no se puede ordenar de menor a mayor.

a. Visita a un parque nacional durante 2012, con un total de 2890 visitantes.



b. Porcentajes de habitantes en Chile de acuerdo a su nivel socioeconómico, con una población de 15 116 435 habitantes en Chile.

Fuente: www.adimark.cl, Censo 2002.



Aplica

3. Completa la tabla y luego responde.

Respuestas de 16 personas acerca de la cantidad de televisores que tienen en sus hogares: 4, 3, 2, 1, 3, 5, 1, 1, 3, 1, 1, 2, 4, 4, 3, 2

Cantidad de televisores por hogar			
Cantidad de televisores	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia acumulada (F)	Frecuencia relativa (f_{rel})
0			
1			
2	3	8	0,2
3			
4			
5			

a. ¿Qué porcentaje de encuestados no tiene televisor en su hogar?
b. ¿Qué porcentaje de encuestados tiene 3 televisores?
c. ¿Cuántas personas tienen menos de 5 televisores? Justifica.

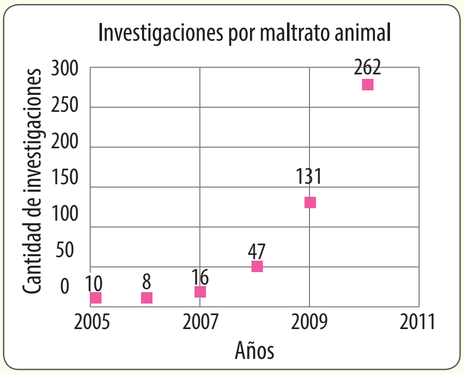
4. En una encuesta se preguntó a un grupo de estudiantes por su deporte favorito.

Deporte favorito			
Deporte	f	$f_{\%}$	f_{rel} (fracción)
Fútbol	24	48 %	
Básquetbol	2		
Vóleibol	7		
Ciclismo	8		
Tenis de mesa	4	8 %	
Gimnasia	5		
Total			

a. Completa la tabla.
b. ¿Cuál es la variable en estudio de esta encuesta? ¿De qué tipo es?
c. ¿A cuántos estudiantes se encuestó? ¿Cuál es el deporte favorito de estos?
d. ¿Qué porcentaje prefiere vóleibol?

5. El gráfico muestra la cantidad de investigaciones realizadas por la PDI por maltrato animal en cierta ciudad del país.

Datos extraídos de Jefatura Nacional de Delitos contra el Medio Ambiente y Patrimonio Cultural.



a. Desde el año 2005 hasta el año 2010, ¿en qué porcentaje aumentó el número de investigaciones realizadas por maltrato animal?
b. ¿Tiene sentido calcular el total de investigaciones realizadas entre el año 2005 y 2010? ¿Cómo podrías utilizar esa información?

6. Investiga. Realiza la siguiente encuesta a tus vecinos:

¿Cuántas mascotas tienes? ....
¿Qué tipo de mascota tienes?
Perro .... Peces ....
Gato .... Otros ....
¿Tus mascotas tienen el espacio necesario para moverse?
Sí .... No ....

a. Organiza la información de cada variable en tablas de frecuencias.
b. ¿Cuántas personas tienen mascota?
c. ¿Cuántas personas tienen como máximo dos mascotas?
d. ¿Cuántas personas tienen dos o más mascotas?
e. ¿Cuál es el porcentaje de personas que tienen perros o gatos?
f. ¿Cuál es el porcentaje de personas que no tienen el espacio suficiente para sus mascotas?

Reflexiono

¿Para qué crees que es necesario obtener la frecuencia absoluta acumulada en una tabla de frecuencias? Explica su utilidad a través de un ejemplo y coméntala con un compañero o compañera.

Refuerzo

En un gráfico circular, de 1500 personas que fueron encuestadas, el 45 % de ellos está casado, el 51 % está soltero mientras que el resto es separado. Representa los datos en una tabla de frecuencias y calcula a cuántas personas corresponden estos porcentajes.

Lección 43

¿Qué gráfico utilizar?

Propósito

Analizar la pertinencia de un gráfico.

¿Para qué?

Para dar a conocer los resultados de una investigación o estudio, es importante que el gráfico utilizado sea pertinente, de tal manera que la información sea recibida claramente por la población. No todos los gráficos sirven para todas las variables, o para todas las preguntas o para todos los receptores, por lo tanto, este dependerá de diversos factores.

Palabras clave

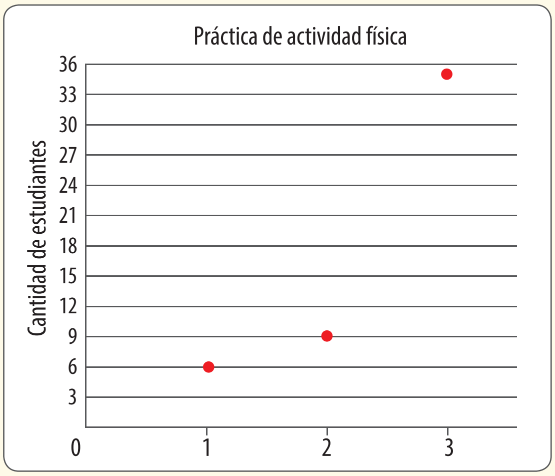
Pertinencia de un gráfico
Tipo de variable
Agrupación de los datos

Taller Construcción de gráficos a partir de la información.

Un profesor de educación física decide encuestar a los estudiantes del 7.°A y 7.°B para saber con qué frecuencia realizan actividad física.

El gráfico 1 corresponde a la frecuencia con la que practican actividad física a la semana, en la cual las categorías de 1 al 3 significan respectivamente: frecuentemente (si se realiza actividad física dos o más veces a la semana), ocasionalmente (si solo realiza actividad física una vez a la semana), y Nunca (si no realiza actividad física).

Gráfico 1



A continuación se presenta una tabla con las respuestas que los estudiantes que practicaban actividad deportiva, ya sea de manera ocasional como frecuente, sobre cuál era su motivación para realizarla.

Motivo	Porcentaje
Compartir con mis amigos(as)	60 %
Utilizar mi tiempo libre	20 %
Mejorar mi salud	20 %

El profesor pide a Camilo que represente la información del gráfico utilizando un gráfico distinto al ya utilizado, y a Alejandra, que construya un gráfico a partir de la información presentada en la tabla.

Gráfico 2: Gráfico realizado por Camilo

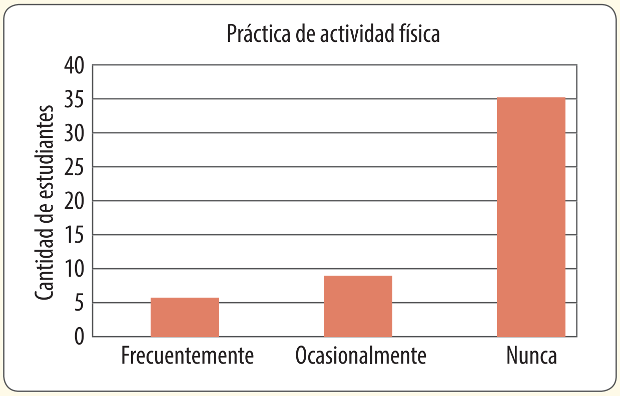
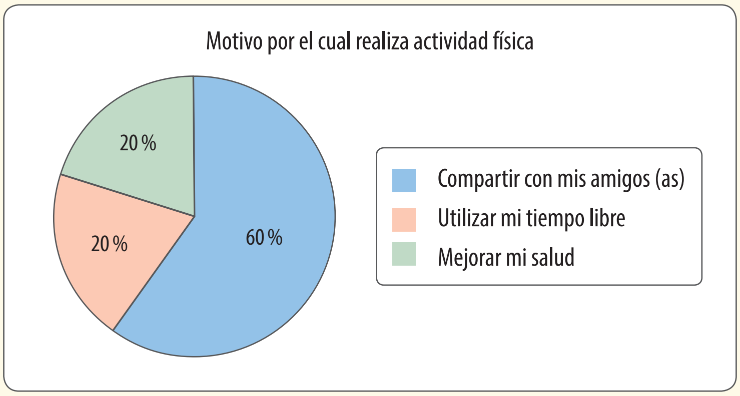


Gráfico 3: Gráfico realizado por Alejandra.



1. ¿Cuáles son las ventajas de presentar información a través de gráficos?
2. Analicen la información representada a través del gráfico 1 y a partir de este, elaboren una tabla de frecuencias.
3. ¿Creen que un gráfico de barras o un gráfico de puntos sea pertinente para representar la información de la tabla que muestra los motivos de practicar actividad física? ¿Por qué?
4. En el año 2012, el instituto Nacional de Deporte dio a conocer los resultados de los hábitos de actividad física y deportes, el cual se muestra que el 71% de las personas encuestadas no practican actividad física. Comenten en grupos esta noticia y comenten sobre las consecuencias en la salud.

Situación Graficar con Excel

Para construir gráficos utilizando Excel, puedes realizar los siguientes pasos.

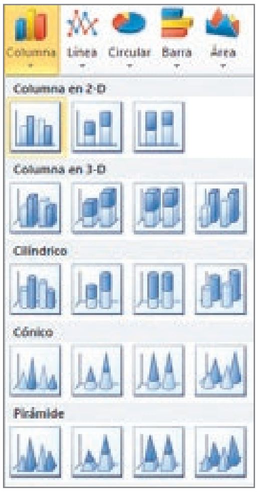
Paso 1 Copia la tabla que represente la situación a graficar.

Por ejemplo: Se encuestó a 120 personas para saber si estas eran fumadores o no.

	A	B
1	Fumadores	75
2	No fumadores	27

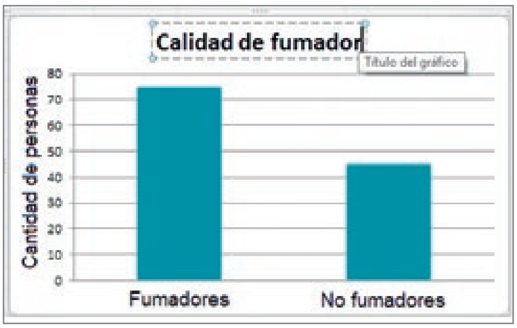
Paso 2 Selecciona la tabla y presiona el ícono  que se encuentra en la pestaña "insertar".

Selecciona la opción "columna agrupada".



Paso 3 A continuación despliega las opciones de diseños gráficos y selecciona el "diseño 9", para poder colocarle título al gráfico y asignar un nombre para cada eje.

Paso 4 Para finalizar, asígnale el título: Número de ocurrencia y los nombres; al eje X: Resultados, y al eje Y: Número de ocurrencia, como se muestra a continuación.



Para concluir

Los gráficos permiten representar información de manera más concisa y resumida, de los cuales se pueden extraen conclusiones. El gráfico que se escoja y que sea pertinente a una situación, dependerá de diversos factores, como por ejemplo:

- La información que se quiera entregar.
- La naturaleza de los datos
- Las preguntas que se quieran responder.

Argumenta y comunica

- Explica qué aspectos debes considerar en una investigación estadística con el fin de que el gráfico escogido para representar los datos sea adecuado.

Repaso

1. Identifica el tipo de variable en cada caso y pinta el recuadro.

a. Tipo de café mayormente consumido en una cafetería.

Cuantitativa	Cualitativa

b. Nota con la que califica un grupo de encuestados un servicio público.

Cuantitativa	Cualitativa

c. Número de palabras que tienen las páginas de un libro.

Cuantitativa	Cualitativa

Práctica guiada

2. Identifica la variable en estudio y escoge el gráfico más pertinente para representar la información. Justifica tu respuesta.

Cantidad de días al mes que va a la feria un grupo de familias.

Paso 1 Identifica el tipo de variable.

Cantidad de veces al mes que asisten a la feria. Es de tipo cuantitativa, ya que se puede ir 1 vez, 2 veces, o más veces.

Paso 2 Elige un gráfico de acuerdo al tipo de variable.

Se puede utilizar un gráfico de puntos, un gráfico de barra, un gráfico circular.

Utilizaremos el primero, ya que son datos cuantitativos no agrupados.

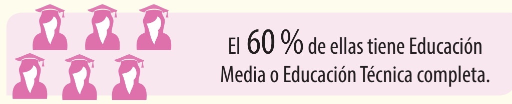
a. Grupo sanguíneo de un conjunto de personas.

b. Cantidad de turistas que entraron al país durante cada mes del año 2015.

c. Duración en horas de una muestra de 50 pilas.

3. Interpreta el significado de cada imagen.

En un diario apareció la siguiente información sobre las emprendedoras de una región:



Paso 1 Identifica cuántas imágenes hay para representar la frecuencia.

Hay 6 imágenes que representan el 65 %.

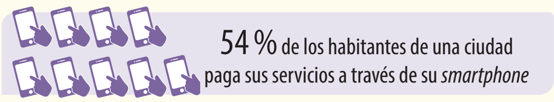
Paso 2 Divide el porcentaje por el total de imágenes.

60 : 6 = 10

Por lo tanto, cada imagen completa representa un 10 %.

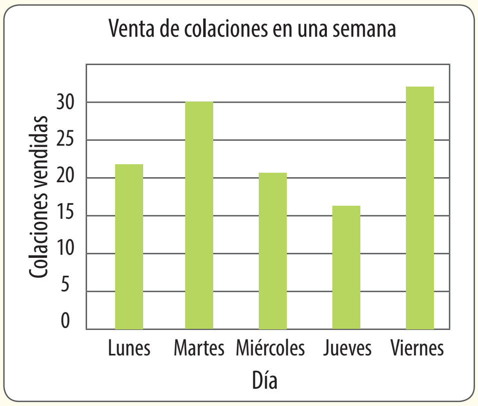
a.

b.



Aplica

4. Analiza el gráfico y responde.



a. ¿Qué día de la semana hay una mayor venta de colaciones? ¿Por qué puedes interpretar esto?

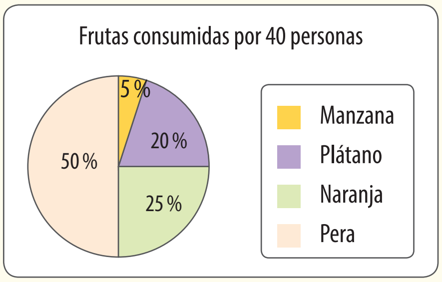
b. ¿Entre qué días se vendieron más de 20 colaciones?

c. ¿En qué días se produce la mayor disminución de las ventas?

d. ¿Por qué las barras están separadas?

5. Analiza el gráfico y responde.

El gráfico muestra la información obtenida a través de una encuesta aplicada a 40 personas acerca de la fruta que más consumen.



a. Completa la tabla.

Frutas	Manzana	Plátano	Naranja	Pera
Número de personas	2			

b. ¿Qué tipo de variable se está estudiando?

c. ¿Cuántas personas consumen más plátanos que manzanas?

d. ¿Cuál es la fruta menos consumida?

e. ¿Por qué se ha representado la información en un gráfico circular? ¿Pudo ser otro? Justifica.

6. Observa el diagrama de tallo y hojas que representa las notas obtenidas en una prueba de Matemática por los estudiantes de 7.º básico de un colegio. Luego, responde.

Notas Matemática

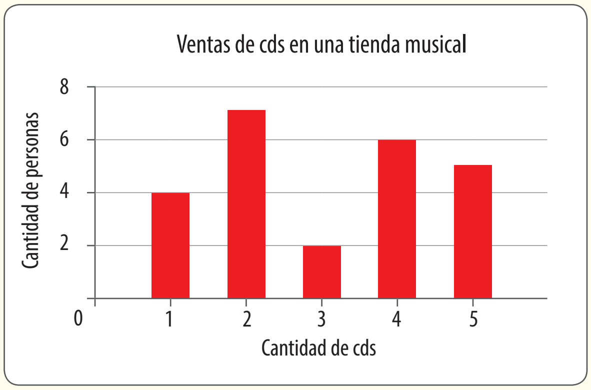
7.º A		7.º B
3 2 0	3	1 5
9 8 8 6 3 3	4	0 4 5 5 7
8 5 5 0 0	5	4 5 7 8 8
9 8 7 4 0 0	6	0 2 3 7 7 9
0 0 0 0 0	7	0 0 0

a. ¿Cuántos estudiantes rindieron la prueba?

b. ¿Cuál fue la nota más baja obtenida? ¿Y la más alta?

c. ¿Cuántos estudiantes del 7.º A obtuvieron nota 5,0?

7. El siguiente gráfico muestra la cantidad de discos que se compran en una tienda musical durante un día.



a. Completa la tabla según los datos del gráfico.

Cantidad de personas	Cantidad de cds

b. ¿Cuántas personas compraron en la tienda?

c. ¿Cuántas personas compraron menos de 3 cds?

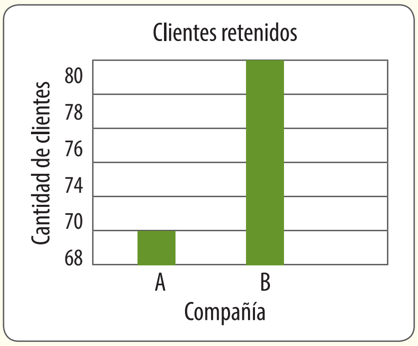
8. En el año 2014 el número de accidentes de tránsito por conducción en estado de ebriedad fue de 4576, 15 % más que el año 2013 y 42 % más que el 2012.

a. Calcula la cantidad de muertes durante el año 2012 y 2013.

b. ¿Qué gráfico es pertinente para representar la situación? Justifica tu elección.

c. Comenta con tus compañeros, ¿a qué se puede atribuir que, a pesar de endurecer las penas por conducción en estado de ebriedad, las cifras de accidente hayan aumentado?

9. El siguiente gráfico se presenta en un noticiario informando la cantidad de clientes que han retenido dos compañías (A y B) de telefonía celular durante el último año.



a. ¿Piensas que el gráfico es adecuado? ¿Por qué?

b. ¿Notas alguna característica que puede llevar a un error de interpretación? ¿Cuál?

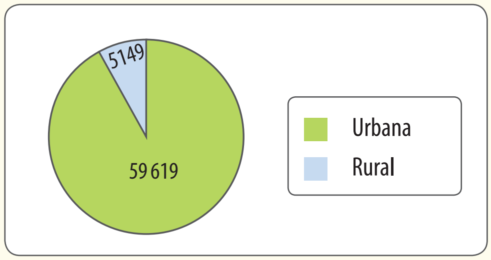
10. Lee la información y analiza cuál es la mejor forma de graficar los datos.

Una tienda decide vender perfumes importados y para ello, realiza una encuesta a un grupo de personas para saber cuál es su fragancia preferida.

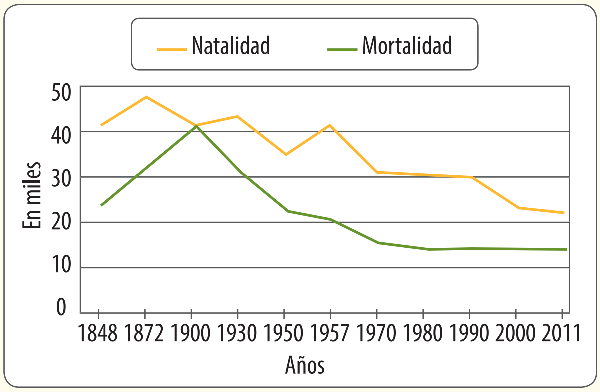
Fragancias	$f_{\%}$
Cítrico	15,2 %
Dulce	20,3 %
Floral	5,4 %
Frutal	36,5 %
Herbal	22,6 %

11. **Conecta con Historia, Geografía y Ciencias Sociales.** Analiza los gráficos presentados por el INE y comenta con tus compañeros y compañeras la información dada y la pertinencia del gráfico.

a. Información sobre la cantidad de matrimonios por área geográfica al año 2011.



b. Evolución de los nacimientos versus defunciones desde el año 1848 al 2011.



Reflexiono

Un médico registra las masas de los recién nacidos de un hospital, organizando la información en intervalos. En su informe semanal debe presentar un gráfico de la situación, ¿qué gráfico le conviene escoger: circular, de barra o histograma? Fundamenta tu respuesta.

Refuerzo

Catalina representó en un histograma el número de primos que tienen sus compañeros de curso. Si esta información la traspasa a un gráfico circular, ¿qué datos no podrá organizar?

Mural

Actitud: Valorando el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.

Los riesgos del consumo de *bebidas energéticas con alcohol*

70 %

de las personas entre 18 a 29 años que consumen bebidas energéticas las mezclan con alcohol.

Son muchos los riesgos asociados al consumo de alcohol, más si este se mezcla con bebidas energéticas: consumo intenso, intoxicación y dependencia. Así lo demuestran diversas investigaciones realizadas por el SENDA (Servicio Nacional para la Prevención y Rehabilitación del Consumo de Drogas y Alcohol).

Lamentablemente los jóvenes las consumen libremente sin saber cuáles son sus reales efectos, ya que el alcohol tiene un efecto depresor y a su vez la bebida energética tiene el efecto contrario, y entonces la persona que la consume no siente cansancio, con lo cual consume más alcohol, produciendo una intoxicación que podría llevarla a la muerte.

Al respecto Erwin Núñez, académico de la Escuela de Nutrición y Dietética de la U. Andrés Bello, explica sobre los riesgos:

"Tanto el alcohol como las energéticas tienen un efecto diurético, por lo que al combinarlas es más factible que se produzca deshidratación, la cual conduce a diarrea, náuseas, vómitos, fatiga, dolor de cabeza, aumento de la frecuencia cardíaca, calambres musculares y una resaca severa."

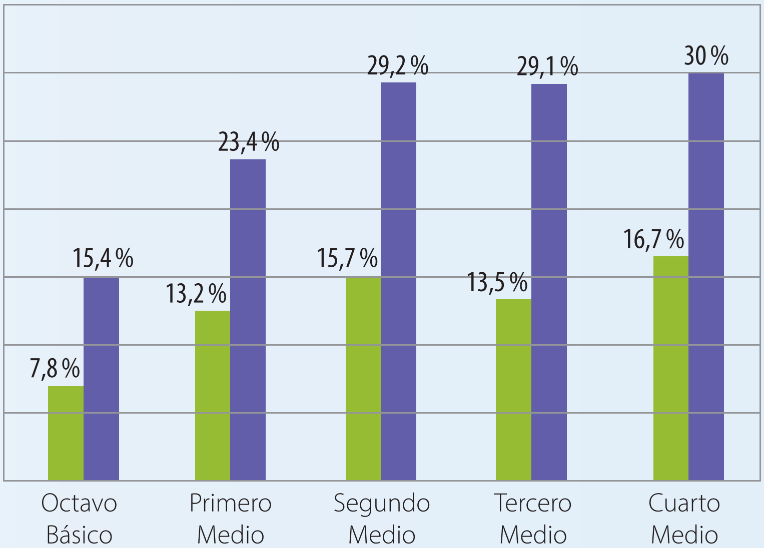
Diario El Sur, 23 de abril de 2012.

Distribución por categorías de la pregunta: ¿Qué tan seguido toma usted alguna bebida alcohólica?

Categoría	f	$f_{\%}$
Nunca	1 006 901	18,1
Una vez al mes o menos	2 417 413	43,3
Dos a cuatro veces al mes	1 801 531	32,2
Dos o más veces a la semana	350 797	6,3
Total	5 576 642	100

Extraído de http://www.senda.gob.cl

Prevalencia consumo de bebidas energéticas por año escolar cursado (ENPE 2011)



Extraído de http://www.senda.gob.cl

En el año 2013 el consumo de bebidas energéticas mezcladas con alcohol por parte de los jóvenes causó gran preocupación en el acontecer nacional, debido a que un adolescente falleció producto de esta mezcla fatal.

ACTIVIDAD EN GRUPO

Reúnanse en grupos de 4 integrantes y realicen las actividades propuestas. Luego, comuniquen su respuesta a los demás equipos.

1. ¿Qué variables están presenten en cada estudio? ¿De qué tipo son?
2. Realiza una tabla para resumir la información del gráfico.
   a. ¿Es posible calcular todas las frecuencias? Fundamenten su respuesta.
   b. ¿Qué pueden concluir respecto a la prevalencia mensual y anual?
3. Realicen un gráfico adecuado para representar los valores de la tabla.
   a. ¿Cómo interpretan los resultados del gráfico?
   b. ¿Qué gráfico no es conveniente utilizar para estos datos? ¿Por qué?
4. Investiguen cómo afecta el consumo de alcohol a edad temprana en el organismo y confeccionen afiches informativos con datos e imágenes. Presenten su trabajo al resto del curso y discutan sobre la importancia de estar informados sobre sus efectos.

¿Cómo voy?

Lección 40. Identificar población y muestra

1. **Identifica en cuál de los siguientes casos es necesario recurrir a una muestra ya que no es posible realizar un estudio poblacional. Justifica tu respuesta.**
   - a. Transporte que utilizan las personas de una ciudad para asistir a su trabajo diariamente.
   - b. Edad de las personas que asisten a una función circense en una ciudad.
   - c. Profesión que quieren seguir los estudiantes de una escuela al egresar.
   - d. Número de minutos diarios que hablan por celular niños de entre 12 y 15 años.

2. **En el ejercicio anterior determina la variable en estudio y su tipo.**

Lección 41. Analizar la representatividad de una muestra y estimar el porcentaje de algunas características de la población por medio del muestreo

3. **Para conocer la preferencia respecto de los candidatos a un municipio de 3400 habitantes, se va a elegir una muestra de 500 individuos. Analiza y justifica si es válida la selección realizada en cada caso en cada caso.**
   - a. Se le pregunta al alcalde actual, que conoce a muchas personas de la ciudad, qué individuos le parecen más representativos.
   - b. Se eligen 500 personas al azar entre las que acuden a una celebración de cata de vinos.
   - c. Se seleccionan al azar en la guía telefónica y se les encuesta por teléfono.
   - d. Se acude a las listas electorales y se seleccionan al azar 500 de ellos.

4. **Un investigador de cierta ave en el sur de Chile quiere saber cuántas especies de esta hay. Para ello, investiga la cantidad de nidos que existen de esta ave en un área de 200 m^2, realizando una búsqueda minuciosa por cada metro cuadrado.**

   Al no encontrar nidos de la especie en cuestión, informa a las autoridades que se ha extinguido. ¿Es correcta su afirmación? Justifica.

Lección 42. Organizar datos en tablas

5. **En una encuesta se preguntó con qué regularidad las personas de una ciudad leen algún medio de noticias (electrónico o papel). Se obtuvieron los siguientes datos:**

Respuestas	$f_{\%}$
Todos los días	23 %
Una vez a la semana	15 %
Una vez al mes	18 %
Alguna vez al año	9 %
Nunca	¿?

   - a. ¿Qué porcentaje de personas nunca lee algún medio de noticias?
   - b. Si las personas que leen todos los días fueron 92, ¿cuál es la cantidad de personas que contestaron las demás opciones?

6. **Analiza la siguiente información. Luego, completa la tabla de frecuencias y responde.**

   Las respuestas de 20 personas acerca de la cantidad de mascotas que tienen en sus hogares fueron 4; 2; 3; 2; 1; 3; 5; 4; 2; 5; 1; 1; 3; 2; 1; 1; 2; 4; 3; 2.

Cantidad de mascotas por hogar			
Cantidad de mascotas	f	F	f_{rel}
0			
1			
2	6		0,3
3			
4			
5			

   - a. ¿Qué porcentaje de la encuesta representa el número de personas que no tiene mascota en su hogar?
   - b. ¿Qué porcentaje representa la cantidad de personas que tiene 4 mascotas?
   - c. ¿Cuántas personas tienen menos de 3 mascotas? Justifica.

7 **Analiza la tabla y responde las preguntas.**

Número de revistas compradas	
Cantidad de personas	f
1	9
2	12
3	7
4	12
Total	40

a. ¿Cuál es la variable en estudio?

b. ¿Cuál es el rango?

c. ¿Cuántas personas compraron menos de 3 revistas?

8 **Una sicopedagoga ha realizado un test de habilidad de canto a los alumnos de un curso, obteniendo los siguientes puntajes:**

Hombres

40 – 50 – 60 – 35 – 33 – 42 – 58 – 51 – 43

Mujeres

32 – 41 – 41 – 47 – 38 – 54 – 50 – 40 – 45

a. Construye una tabla con la cantidad de hombres y mujeres que realizaron el test.

b. . ¿Cuál es el máximo puntaje obtenido entre las mujeres? ¿Y entre los hombres?

c. Calcula el rango de los puntajes obtenidos entre las mujeres y entre los hombres.

Lección 43. Analizar la pertinencia de un gráfico

9 **Los siguientes resultados corresponden al número de pulsaciones por minuto (ritmo cardíaco) en reposo de 35 hombres entre 20 y 30 años.**

108	82	62	74	58	90	85
70	70	63	63	80	58	98
85	90	84	68	67	81	66
60	65	57	100	62	92	103
66	102	65	70	55	87	54

El ritmo cardíaco normal de una persona en reposo se encuentra entre 60 a 100 pulsaciones por minuto. ¿Qué tipo de gráfico podría representar mejor los datos de la tabla?

Desafío de integración

1. Para contar la cantidad de palabras que tiene un libro de 150 páginas, se decide escoger al azar una página y contar la cantidad de palabras para luego multiplicarlas por las 150 páginas y así obtener la cantidad total de palabras del libro. ¿Es válida la selección? ¿Por qué? ¿Qué habrías hecho tú?
2. Analiza cada conjunto de datos y reconoce el tipo de gráfico pertinente para representar la información.
   a. Las estaturas de los alumnos de 7.º básico son:

   1,56 – 1,65 – 1,49 – 1,67 – 1,70 – 1,74 – 1,68 – 1,64 – 1,61 – 1,59 – 1,54 – 1,80

   b. Las frutas más consumidas en los recreos de un colegio son:

   Pera – Manzana – Frutilla – Melón – Uva
   Pera – Uva – Durazno – Sandía – Melón

Resolución de problemas

Actitud: Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información.

Hacer una tabla

Para resolver problemas que tienen varios datos, se puede organizar la información en una tabla con el propósito de facilitar los cálculos y el análisis de los resultados.

Estrategias

- Hacer un diagrama.
- Usar ensayo y error sistemático.
- Usar problemas más sencillos.
- Hacer una tabla.
- Encontrar un patrón.
- Plantear una ecuación o inecuación.
- Usar razonamiento lógico.

Muchos ciudadanos chilenos pertenecen a algún pueblo originario, por lo que el Estado ha realizado en el último tiempo esfuerzos en políticas de integración y preservación de la cultura de estos. Según los resultados del Censo 2002, 692 192 personas pertenecen a alguna etnia. De ellas, 2622 son alacalufes, 21 015 atacameños, 48 501 aimara, 3198 colla, 6175 quechua, 4647 rapanui, 1685 yámana, y 604 349 mapuches, siendo esta la etnia que más predomina a nivel nacional. ¿Qué porcentaje corresponde a cada etnia?

¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema?

¿Qué datos tienes para resolver?

Crea un plan para resolver

Para resolver el problema puedes aplicar la estrategia Hacer una tabla. Para ello, organiza los datos entregados en una tabla y calcula la frecuencia absoluta y la frecuencia relativa.

Aplica la estrategia

Organizan los datos en una tabla de frecuencia para obtener la frecuencia absoluta, relativa y relativa porcentual.

Resuelve

Etnia	frecuencia absoluta	frecuencia relativa	frecuencia relativa porcentual
Alacalufe	2622	0,0038	0,38 %
Atacameño	21 015		
Aimara	48 501		
Colla			
Mapuche			
Quechua			
Rapanui			
Yámana			
Total	692 192		

Verifica la respuesta

Comunica la respuesta

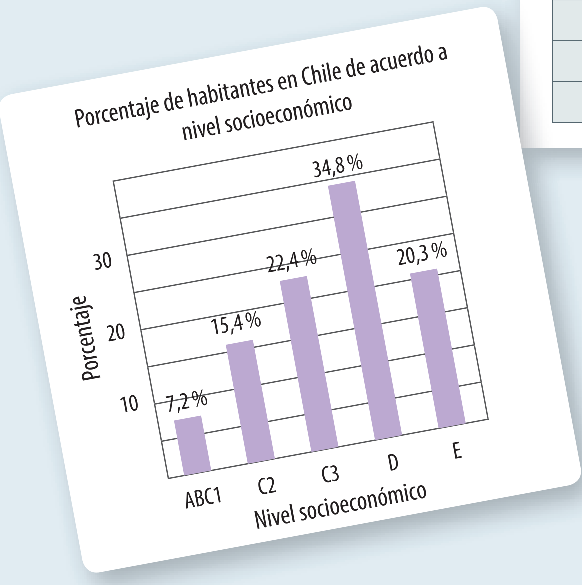
Vuelvo a mis procesos

Observa las imágenes centrales y completa.

Para cada imagen, nombra 2 aprendizajes logrados en esta sección.

¿Cómo te organizaste con tus compañeros y compañeras para realizar las actividades en equipo?

N.º de estrellas	f
2	8
3	45
4	23
5	8



¿Qué utilidad tienen en la vida cotidiana los aprendizajes trabajados en esta sección? Nombra al menos 3.

De las metas que te propusiste al inicio, ¿cuáles cumpliste y cuáles te faltaron?

¿Cuánto tiempo dedicaste al estudio de las lecciones de esta sección?

Sección 11

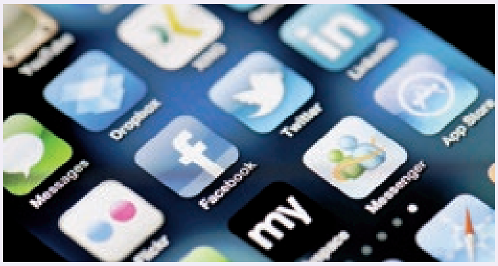
Actitud: Mostrar una actitud crítica al evaluar informaciones matemáticas para la comprensión de la realidad social.

Medidas de tendencia central

Activo ideas previas

En parejas lean el texto y reflexionen en torno a las preguntas propuestas.

"Chile es el tercer país del mundo que más horas dedica a las redes sociales"



Partió como una red de comunicación militar. Evolucionó como herramienta comunicativa entre universidades; pero hoy, Internet es, básicamente, un lugar de encuentro para diferentes personas. Siempre ha habido diferentes maneras: primero fue el e-mail, luego el chat y hoy son las redes sociales las que concentran la mayor cantidad de interacciones entre personas en el mundo.

Chile es uno de los países que más rápida y masivamente se ha adaptado a estos cambios, según reveló el estudio "Estado de Internet en Chile 2011", que revela que Facebook se está convirtiendo en la nueva plaza pública.

Algunos datos del estudio:

- Los internautas entre 15 y 24 años dedican 32 horas al mes a Internet, 7 más que el promedio nacional y casi 10 más que el promedio mundial.
- Un usuario promedio que utiliza Internet accede frecuentemente a las redes sociales. En promedio, los chilenos pasan 8,2 horas conectados al mes.

Fuente: Christiansen, A. (2011, 22 de Julio). Chile es el tercer país del mundo que más horas dedica a las redes sociales. La Tercera. P. 48. (Extracto).

- Enumera las actividades que realizas en tus ratos libres y escribe el tiempo aproximado diario que destinas a ellas. ¿Cuánto tiempo estimas que estás conectado mensualmente a las redes sociales?

  ____

- El promedio es una medida de tendencia central frecuentemente utilizada.
  ¿En qué otras situaciones del diario vivir la has escuchado o utilizado? Explica.

  ____

Activo conceptos clave

Los siguientes listados muestran los conceptos clave de la sección. Con algunos de ellos, completa las propuestas que aparecen.

Muestra
Promedio
Media aritmética
Frecuencia absoluta

Variable
Moda
Término central
Mediana

Frecuencia absoluta acumulada
Rango
Distribución

- Dos conceptos para referirse a la cantidad de elementos de un grupo: ________________
- Un concepto asociado al orden de los datos: ________________
- Un concepto nuevo para ti: ________________
- Una posible definición del concepto nuevo: ________________

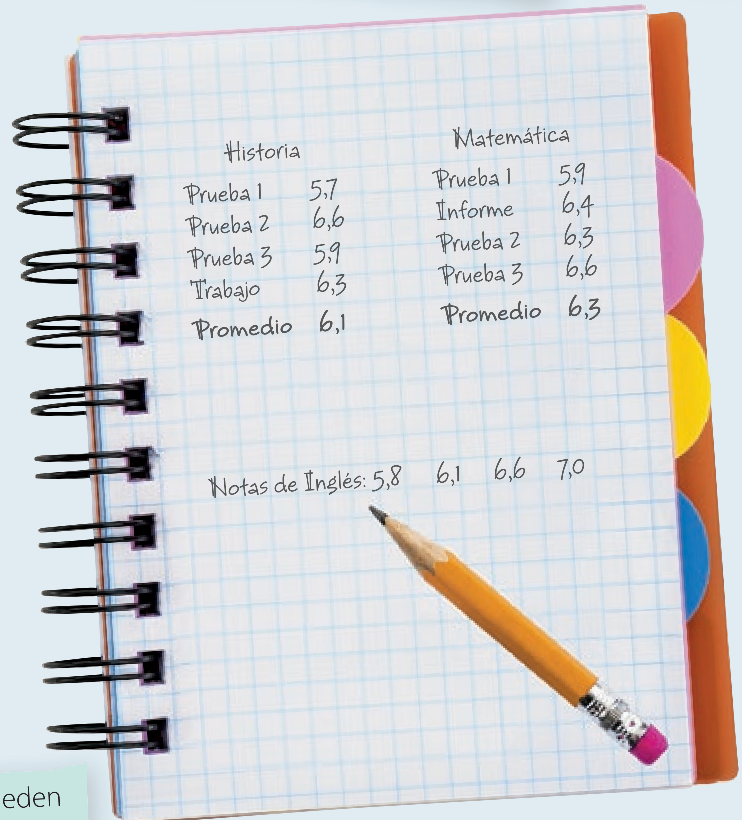
Pienso mis procesos

Observa la imagen central y completa.

¿Qué situación está representada en la imagen?

¿Qué variables puedes identificar en la situación de la imagen?

Explica la relación que existe entre lo que se muestra en la imagen con el título de la sección.



¿Qué otras situaciones se pueden modelar como la que se muestra en la imagen?

¿Qué estrategias de estudio te propones para trabajar en esta sección?

¿Qué metas te propones cumplir al finalizar esta sección?

¿Qué debo saber?

Activa tus conocimientos previos respondiendo la pregunta lateral. Luego, resuelve la actividad. Para terminar, registra tus logros.

¿Qué información entregan las tablas de frecuencia?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
4 o más puntos	3 o menos puntos

Representar e interpretar datos mediante tablas

1 Organiza los datos de los trabajadores de una oficina utilizando tablas de frecuencias e interpreta lo obtenido. (6 puntos)

a. El sexo de los trabajadores:

F	M	M	M	F	F
M	F	F	M	M	F
F	M	M	M	M	M

b. La cantidad de hijos que tienen los trabajadores:

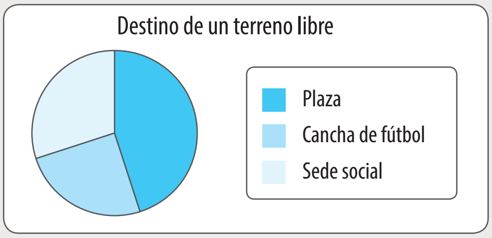
2	3	4	1	0	2
2	0	0	1	1	2
0	1	3	3	2	4

¿Qué aspectos se deben considerar para escoger el gráfico más pertinente a un conjunto de datos determinado?

¿En qué te fijas para interpretar un gráfico?

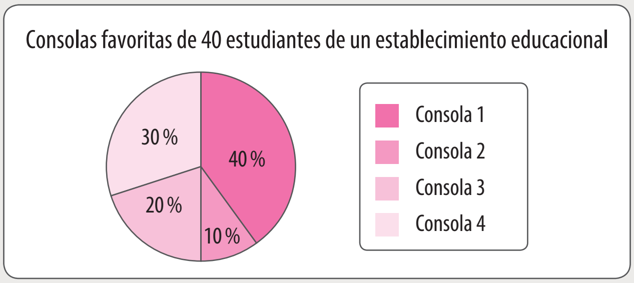
Representar e interpretar datos mediante gráficos

2 Estima el porcentaje de personas que respondieron una consulta ciudadana para decidir a qué se destinaría un terreno libre en una población.



¿En qué te fijas para realizar la estimación? (2 puntos)

3 El siguiente gráfico circular resume la información recopilada de un estudio a alumnos de 7.º básico. (4 puntos)



a. ¿Cuál es la población en estudio?

b. ¿Cuál es la muestra?

c. ¿Cuál es el tamaño de la muestra?

d. ¿Qué tipo de variable está en estudio?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
9 o más puntos	8 o menos puntos

¿Qué dificultades tuviste?

4 **Representa en un gráfico pertinente e interpreta.** (6 puntos)

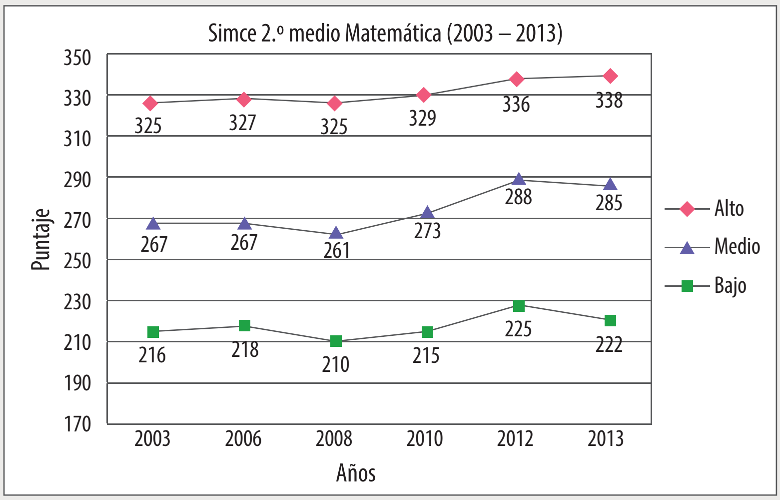
a. Temperaturas máximas en Puerto Montt registradas durante una semana.

Lunes	20°
Martes	17°
Miércoles	13°
Jueves	14°
Viernes	14°
Sábado	13°
Domingo	9°

b. Porcentaje de alumnos interesados en continuar sus estudios al egresar de 4.° medio.

Desea seguir estudios universitarios superiores.	53 %
Desea seguir estudios de nivel técnico en institutos profesionales.	35 %
No desea seguir estudiando.	12 %

5 **El siguiente gráfico muestra la evolución de los resultados Simce de Matemática 2.° medio, organizados según grupos socioeconómicos.** (3 puntos)



Fuente: Agencia de Calidad de la Educación.

a. ¿Qué tipo de variable es la del estudio?

b. ¿Qué se puede inferir de los resultados entre un grupo socioeconómico y otro?

c. ¿Qué sucede con los resultados en relación al tiempo?

Lección 44

¿Qué es la media aritmética o promedio?

Propósito

Determinar e interpretar la media aritmética o promedio en contexto.

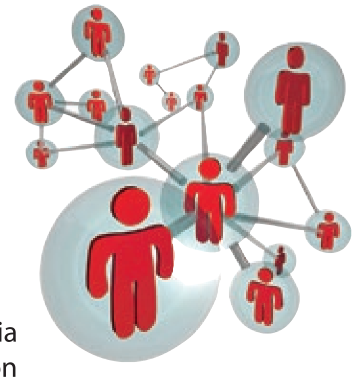
¿Para qué?

Para presentar los resultados de una investigación, no necesariamente se muestran todos los datos, sino que se da a conocer una cifra que representa la tendencia de estos. Es así como obtener la media aritmética o promedio permite realizar conclusiones sin tener que dar a conocer los detalles de cada dato del estudio.

Palabras clave

Muestra
Media aritmética
Promedio

Andrea, al leer la noticia anterior de que "Chile es el tercer país del mundo que más horas dedica a las redes sociales", quiso saber cuánto tiempo en promedio dedica ella y sus amigos a esta actividad. Como tiene muchos amigos eligió solo a cuatro de ellos para su investigación.



Situación 1 Calcular la media aritmética

¿Cuál es el promedio de tiempo de conexión diaria a Internet de Andrea y sus amigos si los tiempos son los que se muestran en la tabla?

Tiempo de conexión en horas	
Andrea	2 horas
Carlos	2,5 horas
Karina	3 horas
Verónica	1,5 horas
Marcelo	3,5 horas

Paso 1 Determina el tamaño de la muestra. Para ello, cuenta la cantidad de datos.

$$n = \boxed{}$$

Paso 2 Calcula la suma de los datos.

$$2 + 2{,}5 + 3 + 1{,}5 + 3{,}5 = \boxed{}$$

Paso 3 Calcula el cociente entre la suma anterior y el tamaño de la muestra.

$$\overline{x} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

La media aritmética o promedio representa la tendencia central de los datos, es decir, Andrea y sus amigos tienden a estar conectados ________ horas en promedio diariamente.

Situación 2 Calcular la media aritmética para datos repetidos

¿Se mantiene la tendencia anterior si se incluyen más amigos en el estudio?

Andrea resumió las respuestas en la siguiente tabla:

Tiempo de conexión en horas	f
1,8	7
2	6
3,5	7
4	11
5,2	9
6	15

Paso 1 Determina el tamaño de la muestra. Para ello, suma las frecuencias absolutas (f).

$$n = 7 + 6 + 7 + 11 + 9 + 15 = \boxed{}$$

Paso 2 Calcula el producto entre cada valor de la variable en estudio con su respectiva frecuencia absoluta.

$1{,}8 \cdot 7 =$ 12,6 $\quad 4 \cdot 11 =$ 44

$2 \cdot 6 = \boxed{}$ $\quad 5{,}2 \cdot 9 = \boxed{}$

$3{,}5 \cdot 7 = \boxed{}$ $\quad 6 \cdot 15 = \boxed{}$

Paso 3 Calcula la suma de los productos obtenidos.

$$S = 12{,}6 + \boxed{} + \boxed{} + \boxed{} + \boxed{} + \boxed{} = \boxed{}$$

Paso 4 Calcula el cociente entre la suma anterior y el tamaño de la muestra.

$$\overline{x} = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} = \boxed{}$$

Andrea y todos sus amigos tienden a estar conectados ________ horas en promedio diariamente. Se observa que la tendencia general ha cambiado al realizar, en este caso, un estudio mayor.

Para concluir

- Se llama **media aritmética** o **promedio** a la cantidad total de la variable distribuida en partes iguales.
  La fórmula para el cálculo de esta medida de tendencia central es:
  $$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n}{n}$$
- Si los datos están repetidos, puedes multiplicar el valor de la variable por su frecuencia absoluta, evitando así una adición reiterada.
  $$\overline{X} = \frac{x_1 \cdot f_1 + x_2 \cdot f_2 + x_3 \cdot f_3 + \ldots + x_n \cdot f_n}{n}$$

Argumenta y comunica

- Supón que estas son tus notas semestrales en matemática:
  6,2 – 6,5 – 7,0 – 2,0
  ¿Cuál es el promedio? ¿Te parece que representaría tu desempeño académico? Discute con tus compañeros y compañeras.

Repaso

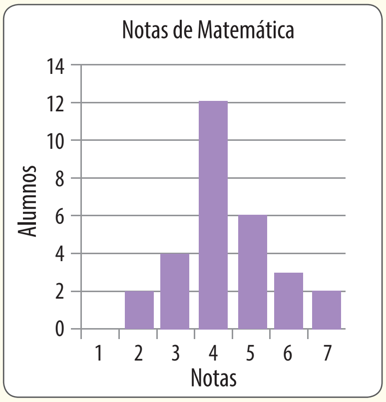
1. **Aproxima los siguientes números a la décima:**

a. 2,342
b. 5,7614
c. 0,08
d. 1,846

2. A continuación se presenta la masa corporal (kg) aproximada de los niños de un consultorio de entre 5 y 10 años. Organiza los datos en una tabla de frecuencia absoluta y representa los datos en un gráfico.

17	20	16	17	18	30	20	28
25	38	18	36	33	36	20	26
18	20	20	38	17	25	37	27

3. El siguiente histograma muestra las notas obtenidas por los alumnos de un curso en la última prueba de Matemática. Calcula cuántos alumnos tiene el curso.



Práctica guiada

4. **Calcula el promedio de cada conjunto y analiza si es un buen representante de ellos.**

3	4	50	2	5	2

Calcula el promedio.

$$\bar{x} = \frac{3 + 4 + 50 + 2 + 5 + 2}{6} = 11$$

En este caso el promedio obtenido no es un buen representante de la tendencia de los datos ya que la mayoría de los datos son muy pequeños, excepto por un valor.

a.

5,5	6,2	7,1	8	6,7	5,5

b.

2	30	1	3	1	1	2	1

c.

30	32	45	2	31	30	35

5. **Calcula el promedio ponderado (medida que se utiliza cuando los datos tienen distinta relevancia según un porcentaje) de los alumnos sabiendo que la primera prueba vale 30 %, y la segunda y tercera prueba 35 %.**

Jorge: 5,5 – 4,0 – 3,6

Paso 1 Calcula el porcentaje que vale cada nota:

El 30 % de 5,5 = 5,5 • 0,3 = 1,65

El 35 % de 4,0 = 4,0 • 0,35 = 1,4

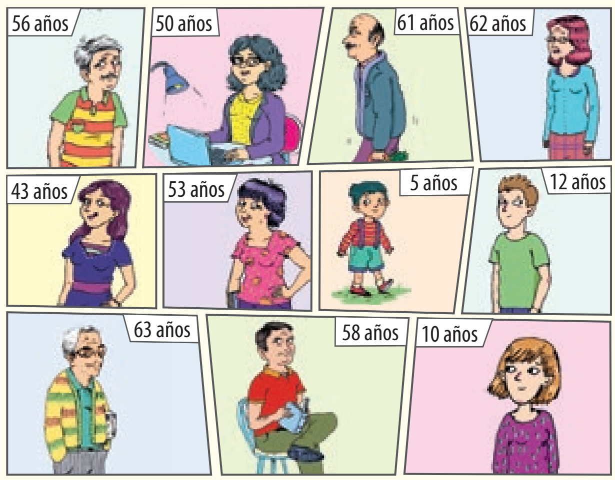
El 35 % de 3,6 = 3,6 • 0,35 = 1,26

Paso 2 Suma los valores: 1,65 + 1,4 + 1,26 = 4,31

a. Camila: 5,1 – 3,4 – 4,5
b. María: 6,3 – 6,7 – 6,6
c. Pedro: 3,3 – 4,1 – 3,8
d. Mateo: 5,8 – 6,0 – 6,2
e. Renata: 4,3 - 5,1 – 5,8

Aplica

6. **Una municipalidad desea saber las edades de las personas que van a la plaza durante la mañana, con el objeto de ofrecer actividades enfocadas a ellos. Observa la imagen y calcula la edad promedio de las personas que asisten a la plaza.**



Analiza el resultado obtenido. De acuerdo a esto, ¿la municipalidad debiese realizar actividades para niños o adultos? Justifica tu respuesta.

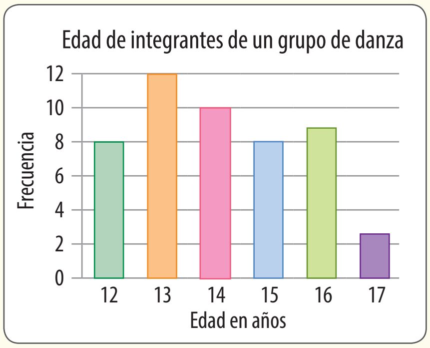
7. **Un grupo de alumnos es medido antes y después de realizar un entrenamiento de salto largo y se quiere estimar si el entrenamiento es efectivo.**

	Distancia promedio saltada (cm)	
Estudiante	Antes del entrenamiento	Después del entrenamiento
1	95	94
2	112	115
3	83	85
4	92	102
5	112	122
6	115	118
7	137	145
8	126	132
9	93	97
10	105	103
11	104	112
12	115	123
13	112	112
14	107	115

a. ¿Cuál es la diferencia entre el promedio que resulta antes y después del entrenamiento?

b. ¿Piensas que el entrenamiento es efectivo? Argumenta tu respuesta.

8. **El siguiente gráfico muestra las edades de los integrantes de un grupo de danza.**



a. ¿Cuántas personas integran el grupo de danza?

b. ¿Cuál es el promedio de edad del grupo?

c. ¿Cuál es el valor máximo y cuál es el mínimo?

d. ¿Cuál es la diferencia de edad entre el integrante mayor y el integrante menor?

9. **Investiga cuántas calorías debe consumir una mujer de 21 años (como mínimo y máximo) en promedio semanal. Realiza un plan diario para una mujer, sabiendo que el domingo consumirá 1800 kcal, considerando que su promedio semanal de consumo de calorías sea el investigado.**

Día	Consumo energético diario (kcal)
Lunes	
Martes	
Miércoles	
Jueves	
Viernes	
Sábado	
Domingo	1800
Promedio $\overline{x}$	

10. **Argumenta. En dos colegios de Iquique, el tiempo promedio que demora un estudiante en trasladarse de su casa al colegio es de 23,5 minutos. ¿Por qué no se puede asegurar que en ambos colegios cada estudiante realmente demore 23,5 minutos? Fundamenta.**

Reflexiono

1. Las estaturas (en metros) de los niños de un curso son: 1,62; 1,55; 1,58; 1,65; 1,45; 1,46. Sin calcular, responde si es posible que el promedio sea 1,67 m. Justifica tu respuesta.
2. La media aritmética de cinco números es 6,1. Si al grupo de datos se agrega un número, cuyo valor es 6,1, ¿influirá este último al calcular el promedio, si ahora se consideran los seis números? Justifica.

Refuerzo

1. Calcula la media aritmética entre los números: 73, 80, 50, 30, 28, 75 y 49.
2. Durante el semestre, las notas de José en Matemática son: 5; 6,2; 7; 5,7; 6,6. Si él quiere que su promedio final sea de 6, ¿qué nota debe obtener en la siguiente prueba para que esto ocurra? Comenta el procedimiento que seguiste con un compañero o compañera.

Lección 45

¿Qué es la moda?

Un colegio ha tenido distintas denuncias por *bullying* cibernético, por lo que ha decidido investigar cuántos de sus estudiantes han sido víctimas de esta práctica a través de la siguiente encuesta anónima.

¿Has sido víctima de *bullying*? SÍ .... NO ....

Curso: 7.º básico .... 8.º básico .... 1.º medio ....
2.º medio .... 3.º medio .... 4.º medio ....

A continuación se muestra el curso de los alumnos que contestaron SÍ.

7.°	8.°	8.°	8.°	1.°	8.°	3.°	8.°	1.°	1.°	2.°	3.°	3.°
8.°	1.°	8.°	7.°	8.°	1.°	3.°	1.°	8.°	1.°	3.°	8.°	7.°

Situación 1 Conjuntos de datos con una moda

En el curso mayormente afectado por *bullying* realizarán una intervención inmediata y con el resto del colegio se trabajará en campañas para evitar este tipo de conductas y apoyar a los alumnos que lo han sufrido.

¿Cuál es el curso mayormente afectado por *bulliyng*?

Paso 1 Representa en una tabla de frecuencia absoluta la información obtenida. Para determinarla contamos la variable en estudio.

Casos de *bullying*	
Curso	**N.º de alumnos afectados (f)**
7.º básico	3
8.º básico	
1.º medio	
2.º medio	
3.º medio	
4.º medio	

Paso 2 Identifica la variable con mayor frecuencia absoluta.

Casos de *bullying*	
Curso	**N.º de alumnos afectados (f)**
7.º básico	3
8.º básico	
1.º medio	
2.º medio	
3.º medio	
4.º medio	

La moda es el ______________, ya que es la variable con mayor frecuencia absoluta. Por lo tanto, este curso será inmediatamente intervenido, pues presenta mayor cantidad de alumnos afectados por *bullying*.

Ayuda
La moda es la variable con mayor frecuencia, y no la frecuencia más grande.

Propósito
Determinar e interpretar la moda en contexto.

¿Para qué?
Cuando se estudia una situación determinada, es posible observar si esta presenta algún hecho o dato que se repita más que los otros. Por ejemplo, en el mundo del vestuario, la tendencia repetitiva en ropa y accesorios se conoce como moda.

Palabras clave
Frecuencia absoluta
Variable
Moda

Situación 2 Conjuntos de datos con más de una moda o amodal

En otros dos colegios han decidido replicar la iniciativa anterior, obteniendo los siguientes resultados:

Colegio A

Casos de *bullying*	
Curso	N.º de alumnos afectados (f)
7.º básico	9
8.º básico	9
1.º medio	2
2.º medio	0
3.º medio	3
4.º medio	6

Colegio B

Casos de *bullying*	
Curso	N.º de alumnos afectados (f)
7.º básico	2
8.º básico	2
1.º medio	2
2.º medio	2
3.º medio	2
4.º medio	2

¿Cuál es el curso mayormente afectado por *bullying*?

Calculamos la moda teniendo en cuenta el procedimiento anterior.

Paso 1 Identifica la variable con mayor frecuencia absoluta para el colegio A.

- En el colegio A existen dos datos cuya frecuencia es mayor que los demás, entonces tenemos dos modas, ___________ y ___________ básico.

Paso 2 Identifica la variable con mayor frecuencia absoluta para el colegio B.

- En el colegio B no existen datos con una frecuencia absoluta mayor que los demás, por lo tanto en este caso no hay moda.

Luego, en el colegio A, el _______ y el _______ son los cursos con mayor *bullying*, mientras que en el colegio B ___________ .

Para concluir

- Se llama **moda** (M_o) de un conjunto de datos a la variable que presenta mayor tendencia de ocurrencia.
- Para calcular esta medida de tendencia central identificamos la variable cuya **frecuencia absoluta es mayor** que el resto de los datos.
- Un conjunto de datos puede tener **más de una moda**, o bien puede que no exista moda (amodal) si todos los datos se distribuyen con la misma frecuencia.

Argumenta y comunica

- ¿Cómo piensas que será la distribución de los datos de un problema en el cual el valor de la media aritmética y la moda es el mismo? Fundamenta tu respuesta.

Repaso

1. Responde en relación con cada muestra.

Número de llamadas realizadas por un grupo de personas a un *call center*					
N.º de llamadas	5	3	4	2	1
Cantidad de personas	5	2	7	3	6

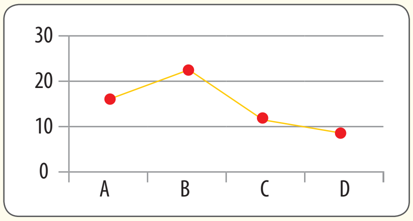
Presión arterial sistólica medida a un grupo de pacientes					
N.º de pacientes	50	12	35	22	14
Presión arterial sistólica	36	33	36	20	26

a. Identifica la variable en estudio y justifica tu elección.

b. Calcula la cantidad de datos en cada muestra.

c. Calcula el valor máximo, el valor mínimo y el rango.

2. Estima la frecuencia absoluta para cada valor de la variable en el siguiente gráfico.



Práctica guiada

3. Determina la moda, el valor máximo, el valor mínimo y el rango de cada distribución.

2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 5

El dato que más se repite es 4, por lo tanto es la moda. El valor máximo es 5 porque es el mayor valor que toma un dato, mientras que el valor mínimo es 2. El rango es $5 - 2 = 3$.

a. 1, 1, 1, 4, 4, 5, 5, 5, 7, 8, 9, 9, 9

b. 2, 2, 3, 3, 6, 6, 9, 9

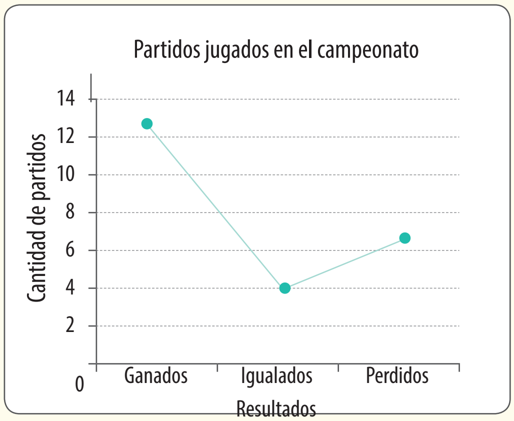
c. 0, 1, 3, 3, 5, 5, 7, 8

d. 5, 7, 7, 5, 5, 7, 5

Aplica

4. Calcula el valor de la moda en cada caso. Luego, interpreta el valor en cada situación.

a.



M_o = ______________________

Esta medida significa que: ______________________

____

b.

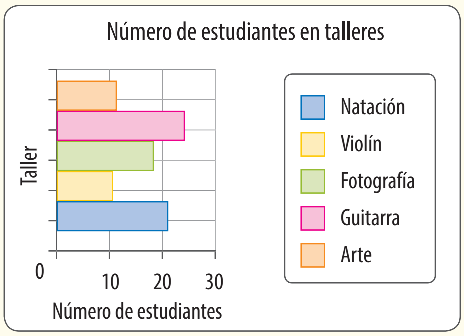
Número de veces que han salido del país	
Número de viajes	Número de personas
0	7
1	5
2	3
3	2
4 o más	0

M_o = ______________________

Esta medida significa que: ______________________

____

c.



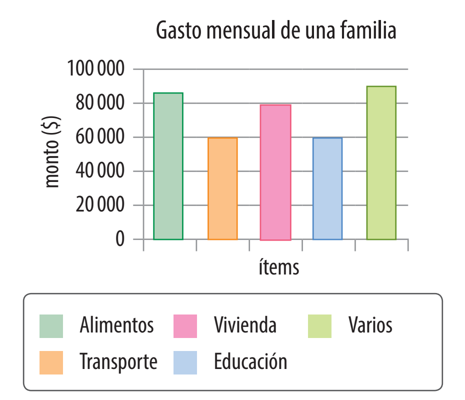
M_o = ______________________

Esta medida significa que: ______________________

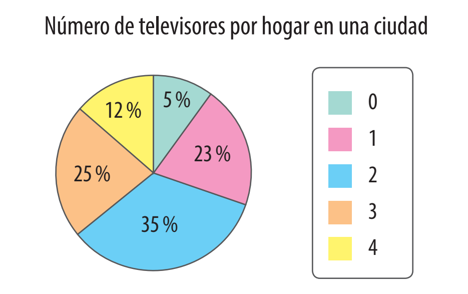
____

5. **Identifica si la muestra tiene una única moda, tiene más de una moda o no posee ninguna.**

a.



b.



6. **Aplica la siguiente encuesta sobre vida saludable por lo menos a 10 personas. Comparte con tu curso los resultados.**

1. Edad ....
2. ¿Fumas? Sí .... NO ....
3. ¿Realizas ejercicio semanalmente?
   Sí .... NO ....
4. ¿Qué tipo de comida chatarra consumes habitualmente?
   Completos, hamburguesas, etc. ....
   Dulces, papas fritas, galletas, etc. ....
   Otros ....
   No consumo comida chatarra ....
5. ¿Cuántas frutas consumes diariamente? ....

a. Identifica las variables en estudio.

b. ¿Es posible obtener la moda para cada variable en estudio? Justifica tu respuesta.

7. **Identifica la variable que se está estudiando en cada caso y determina la moda. ¿Es posible calcular el valor máximo, el valor mínimo y el rango en cada situación? Justifica.**

a.

Cantidad de grasa quemada (en gramos)	100	200	300	450	525
Cantidad de personas	6	5	5	7	7

b.

Color de ojos	Número de personas
Café	46
Verde	10
Azul	7
Pardo	21

8. **Conecta con el deporte.** Lee el texto y luego responde.

La información obtenida a través de Fitbook (una herramienta gratuita donde las personas pueden autoevaluarse respecto a su estilo de vida y salud) permitió descubrir que un 50 % de los participantes de la muestra tiene una actividad física baja, un 32 % moderada y solo un 18 % intensa.

En cuanto al tabaquismo, un 41 % se declaró fumador, mientras que un 59 % afirmó no tener el hábito.

Asimismo, el estudio comprobó una relación directa entre estos dos factores y la alimentación saludable. De esta manera, quienes comen mal, frecuentemente fuman y son sedentarios; y aquellas personas que se alimentan bien, en su mayoría realizan actividad física y no fuman.

Adaptado de Diario La Estrella de Valparaíso. (2010, 7 de Diciembre).

a. En el texto, ¿dónde se habla de la moda?

b. Investiga otras noticias dónde aparezca el concepto de moda.

Reflexiono

¿Es posible calcular la media aritmética y la moda para cualquier variable? ¿Por qué? Justifica a través de un ejemplo y compáralo con tus compañeros y compañeras.

Refuerzo

Indica la moda y la media aritmética de los goles realizados en un torneo por un equipo de fútbol, cuyos resultados fueron:

2, 2, 3, 2, 1, 1, 2, 1, 3, 4, 2, 1.

Lección 46

¿Qué es la mediana?

Propósito

Determinar e interpretar la mediana en contexto.

¿Para qué?

Al recolectar los datos de un estudio, como por ejemplo, la edad de un grupo de personas, es conveniente ordenarlos de menor a mayor o viceversa. Este hecho permite reconocer cómo se encuentran distribuidos los datos a partir del valor que divide a la muestra ordenada en dos grupos de igual tamaño.

Palabras clave

Término central
Mediana
Frecuencia absoluta acumulada

Situación 1 Calcular la mediana para datos sin agrupar

Para las Olimpiadas de Matemática los profesores han escogido 15 jóvenes que representarán al colegio. Las edades de los competidores son: 14, 11, 10, 15, 12, 15, 10, 16, 10, 10, 11, 14, 15, 16, 10.

¿Qué edad tiene como máximo la mitad más joven de los competidores?

Paso 1 Ordena los datos en forma creciente o decreciente. En este caso creciente.

10 – 10 – 10 – 10 – 10 – 11 – 11 – 12 – 14 – 14 – 15 – 15 – 15 – 16 – 16

Paso 2 Determina el término central.

8.º término

10	10	10	10	10	11	11	12	14	14	15	15	15	16	16

Términos — Término central — Términos

Por lo tanto, el 50 % de los competidores tiene hasta ________ años; este valor corresponde a la mediana del conjunto de datos.

¿Qué sucedería si al grupo escogido de las Olimpiadas se agrega un joven de 15 años?

En este caso, la cantidad de datos sería par (16 jóvenes), por lo tanto, al ordenar los datos de menor a mayor existen dos términos centrales. En estas situaciones cuando **n** es par, la mediana corresponde a la media aritmética de los dos términos centrales y no necesariamente este valor pertenece al conjunto de datos. Así, en este caso la mediana correspondería a la media aritmética entre 12 y 14, que es 13 años, la cual no pertenece al conjunto.

Situación 2 Calcular la mediana para datos organizados en tablas de frecuencias

En una empresa se asigna un bono de Navidad de acuerdo a la cantidad de hijos que tiene cada trabajador. El 50 % de los trabajadores recibe un bono de $ 40 000, ya que tiene mayor cantidad de hijos; el 50 % restante recibe un bono de $ 25 000, ya que tiene menor cantidad de hijos. **¿Con cuántos hijos como mínimo se recibe el bono de $ 40 000?**

Cantidad de hijos que tiene cada trabajador:

1	2	2	2	1	4	4	1	3	3	1	3	3	1
2	1	3	3	2	4	1	3	2	3	3	4	3	3
1	2	2	1	3	2	4	3	3	2	3	3	1	1
2	1	3	4	3	4	2	2	3	3	2	3	2	

Interesa saber cuántos hijos tienen los trabajadores que recibirán el bono.

Paso 1 Ordena la variable en orden de menor a mayor.

Cantidad de hijos	Cantidad de trabajadores
1	12
2	15
3	21
4	7
Total	55

Paso 2 Calcula la frecuencia absoluta acumulada.

Cantidad de hijos	f	F
1	12	12
2	15	12 + 15 = 27
3	21	
4	7	

Paso 3 Calcula la posición del dato que divide al total de los datos en dos grupos de igual tamaño. Como la cantidad de datos es impar, entonces:

$$\frac{n+1}{2} = \frac{55+1}{2} = \frac{56}{2} = 28$$

Lo que significa que el término central de los datos una vez ordenados está en la posición 28.

Paso 4 Identifica en la frecuencia absoluta acumulada el dato que se encuentra en la posición 28.

Cantidad de hijos	f	F
1	12	12
2	15	27
3	21	
4	8	

Por lo tanto, una vez ordenado el conjunto de datos, el que se encuentra en la posición 28 corresponde a la mediana y es ________ hijos.

Así, se recibe el bono de $ 40 000 con un mínimo de ________ hijos.

Ayuda

Si la cantidad de los datos es impar, la posición que ocupa la mediana está dada por : $\frac{n+1}{2}$

Donde **n** es la cantidad de datos .

En cambio si **n** es impar se debe sumar 1.

Para concluir

- La **mediana** corresponde al **valor que ocupa el término central** de un conjunto de datos una vez ordenados de menor a mayor o viceversa. Si la cantidad de datos **n** es impar, entonces la posición de la mediana está dada por:

$$\frac{n+1}{2}$$

- Cuando la cantidad de datos de un conjunto es par, la mediana corresponde a la media aritmética de los dos términos centrales una vez que estos se ordenan.
- Si los datos están en una tabla de frecuencias, el valor de la variable cuya frecuencia acumulada sea igual o inmediatamente superior al 50 % de los datos es la mediana.

Argumenta y comunica

- ¿Es posible que una muestra muy dispersa tenga la misma mediana que otra homogénea? Fundamenta tu respuesta con un ejemplo o contraejemplo y coméntalo con un compañero o compañera.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Responde.

a. ¿Qué porcentaje es 35 de 50?
b. ¿Qué porcentaje es 12 de 75?
c. ¿De qué cantidad 75 es el 20 %?
d. ¿De qué cantidad 0,6 es el 15 %?
e. ¿Cuál es el 45 % del 25 % de 700?

2. Completa la tabla con las frecuencias indicadas y luego responde las preguntas.

Cantidad de dulces que consume un grupo de estudiantes en la semana			
N.° dulces	f	$f_{\%}$	F
2	12		
3	7		
4	10		
5			
Total	40	100	

a. ¿Cuántos estudiantes comieron como máximo 4 dulces?
b. ¿Qué porcentaje de los estudiantes comieron a lo más 3 dulces?
c. ¿Cuántos estudiantes comieron como mínimo 3 dulces?

Práctica guiada

3. Calcula la mediana para cada grupo de datos.

12, 20, 34, 15, 12, 26

Paso 1 Ordena los datos de menor a mayor.

12, 12, 15, 20, 26, 34

Paso 2 Identifica el o los dato(s) central(es).

Paso 3 Como n es par, calcula el promedio de los términos centrales para obtener la mediana.

$$M_e = \frac{15 + 20}{2} = \frac{35}{2} = 17{,}5$$

a. 30, 67, 50, 45, 38, 63, 40
b. 2, 5, 7, 4
c. 1, 1, 2, 4, 3, 3, 1, 1, 5, 2, 3
d. 123, 456, 321, 267, 490, 200

4. Calcula e interpreta la mediana para cada situación.

Un curso realizó una campaña solidaria para reunir azúcar. 4 estudiantes llevaron 1 kg, 11 llevaron 2 kg, 13 llevaron 3 kg y 4 aportaron con 4 kg.

Paso 1 Ordena los datos en una tabla de frecuencia.

Cantidad de azúcar (kg)	f	F
1	4	4
2	11	15
3	13	28
4	4	32
Total	32	

Paso 2 Calcula la posición de la mediana. Como los datos son pares, entonces hay dos datos centrales, cuya posición está dada por:

$\frac{n}{2} = \frac{32}{2} = 16$ Dato central 1

$\frac{n}{2} + 1 = \frac{32}{2} + 1 = 16 + 1 = 17$ Dato central 2

Paso 3 Encuentra en la frecuencia absoluta acumulada la posición 16 y 17 o que contiene a ambas.

Cantidad de azúcar (kg)	f	F
1	4	4
2	11	15
3	13	28
4	4	32
Total	32	

La frecuencia que las contiene es 28.

Paso 4 Identifica en la columna F los datos (kg de azúcar) que están en la posición 16 y 17. Estos datos son 3 kg y 3 kg, por lo tanto la mediana es 3.

Paso 5 Interpreta la mediana en la situación

La mediana es 3 kg, lo que significa que la mitad de los estudiantes que donó la mayor cantidad de azúcar, donó como mínimo 3 kg.

a. Durante un bingo, la comisión organizadora registra el número de cartones que compran las personas. De las 20 personas que participaron, 9 compraron 1 cartón, 5 compraron 2, 4 compraron 3 y 2 compraron 4.

b. Un restaurante ofrece en su menú la posibilidad de adicionar ingredientes a una pizza. De las 25 personas que compraron una pizza durante la tarde, 10 adicionaron 1 ingrediente, 8 adicionaron 2 ingredientes y 4 adicionaron 3. Los 3 clientes restantes no quisieron adicionar ingredientes.

Aplica

5. **Calcula la mediana del conjunto A y B. Compara lo obtenido y concluye respecto a la distribución de las muestras.**

A	30	2	45	30	5	55	2	32	4	7	2
B	7	8	3	2	1	9	9	2	2	8	7

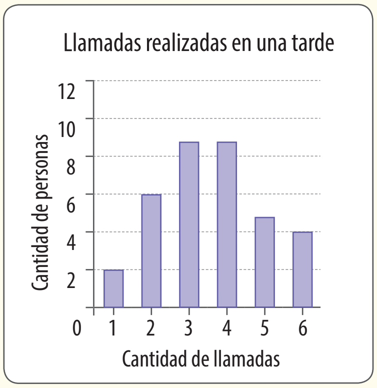
6. **Claudia pregunta a 20 de sus amigos cuántas mascotas han tenido durante los últimos 10 años. El 45 % responde que solo 1, el 35 % responde que 2, el 15 % dice que 3, mientras que el resto dice que 4.**

a. Calcula las frecuencias absolutas para la cantidad de mascotas.

b. Representa las frecuencias absolutas en un gráfico de barras.

c. ¿Cuál es la mediana?

7. **El gráfico muestra la cantidad de llamadas realizadas en una tarde por los estudiantes de un 7.° básico para invitar a sus amistades al teatro.**



a. Construye una tabla de frecuencias con los datos que se muestran.

b. ¿Cuál es la mediana? Interpreta su valor en la situación.

c. Si los 4 estudiantes que realizaron 6 llamadas hubiesen realizado 5, ¿cambiaría la mediana?, ¿por qué? Comenta tu respuesta con tus compañeros y compañeras.

8. **Las siguientes son las notas obtenidas por los alumnos de 7.° básico en un trabajo de historia.**

6,0	6,5	5,5	4,5	5,0	6,0	6,5	5,0
5,5	6,0	5,0	5,0	5,0	5,0	6,5	6,5
5,0	5,0	6,0	6,0	5,0	4,5	6,0	6,0
5,0	6,5	5,0	5,5	5,5	5,5	6,0	5,5

a. Determina la media aritmética y la mediana.

b. Compara el valor de la media y la mediana, ¿qué puedes concluir acerca de la distribución de la muestra?

c. ¿Cambiaría la mediana si no se consideraran las notas 4,5? Contesta sin calcular.

9. **Los siguientes números fueron ordenados de menor a mayor:**

1, 8, 9, **x**, 17, 23

Calcula el valor de x y la mediana del conjunto, si se sabe que el promedio de los datos es 12.

10. **Crea una tabla de frecuencia con un conjunto de 10 números que cumplan las siguientes condiciones:**

- La media es 45, el valor mínimo es 10, el rango es 90 y la media debe ser mayor que la mediana.
- La media es 116, el valor máximo es 160, el rango es 70 y la media debe ser mayor que la mediana.

a. ¿Qué características presentan ambas tablas?

b. ¿Qué diferencias existen entre ambas tablas?

Reflexiono

Manuel organiza la información de una encuesta y al calcular las medidas de tendencia central, obtiene que la mediana es 0. ¿Puede ser posible que ocurra esto? Fundamenta tu respuesta.

Refuerzo

En un estudio de mercado se realiza una encuesta a 100 personas de determinada población, sobre las cuales se medirán las siguientes variables: ingreso mensual, nivel socioeconómico, sexo y edad. Justifica para cada variable si es posible calcular la mediana o no.

Lección 47

¿Cómo comparar muestras utilizando las medidas de tendencia central?

Propósito

Comparar dos o más conjuntos de datos a través de las medidas de tendencia central.

¿Para qué?

Cuando se comparan dos o más conjuntos de datos, como por ejemplo, las notas obtenidas en una prueba en dos cursos, es posible identificar semejanzas y diferencias entre ambas muestras. Así, utilizando las medidas de tendencia central se puede saber cómo fue la distribución de las notas en ambos cursos y realizar conclusiones con respecto a su desempeño.

Palabras clave

Media aritmética o promedio
Rango
Distribución
Moda
Mediana

Situación 1 Comparar muestras

El departamento de deportes de un municipio inició las inscripciones para el taller de zumba. Cada inscrito tiene derecho a asistir a una clase semanal, siendo estas los lunes (grupo 1) o los miércoles (grupo 2). Para conocer el impacto de este taller, la profesora registró las edades (años) de los asistentes durante la primera semana.

¿Cómo es la distribución de las edades en cada uno de los grupos?

Paso 1 Identifica las características de los datos de cada grupo.

Día	Asistentes	Edad promedio	Mediana	Edad mínima	Edad máxima	Rango
Lunes	11	25	16	14	45	31
Miércoles	11	25	27	21	28	7

Paso 2 Establece criterios de comparación.

Puedes comparar ambos grupos a partir de los siguientes criterios:

✓ La cantidad de asistentes en cada grupo.
✓ La edad promedio de las que asisten el lunes y el miércoles.
✓ El rango y distribución de los datos.
✓ La mediana de ambos grupos.

Ayuda
El rango nos permite tener una idea de la distribución de los datos de la muestra; cuanto mayor sea el rango, más distribuidos estarán los datos.

Paso 3 Establece semejanzas y diferencias entre ambos grupos.

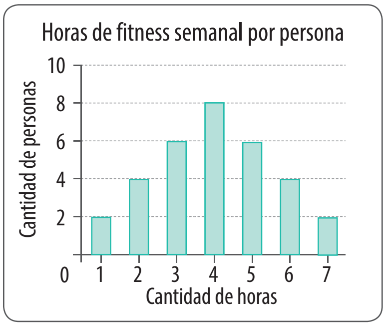
Semejanzas	Diferencias
• Ambos grupos tuvieron la misma cantidad de asistentes. • La edad promedio de los asistentes del lunes y del miércoles es la misma.	• El rango de edad de los asistentes del lunes es mayor que los del miércoles, lo que significa que las edades del grupo 1 están más distribuidas que en el grupo 2. • La mediana del grupo 2 es mayor que la del grupo 1, lo que significa que el miércoles la mitad de las personas tienen como mínimo 27 años.

¿Por qué la moda para estas muestras no es buen criterio de comparación?

Situación 2 Comparar muestras organizadas en gráficos

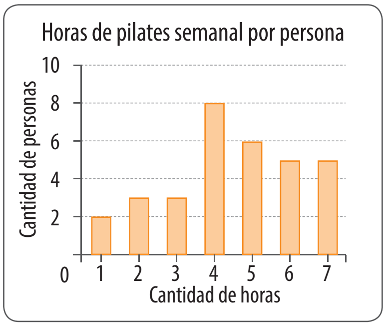
Debido al interés de otras personas en realizar actividad física, la municipalidad habilitó tres salones para realizar fitness (taller 1), yoga (taller 2) y pilates (taller 3). Cada persona puede inscribirse en solo uno de los tres talleres.

A continuación se muestra la cantidad de horas semanales que realizan las personas inscritas en cada uno de los talleres. **¿Cómo es la distribución de las horas de las personas en cada taller?**



Mediana: 4 horas.
Media: 4 horas.

Mediana: 4 horas.
Media: 3,6 horas.



Mediana: 4,5 horas.
Media: 4,5 horas.

Paso 1 Establece criterios de comparación.

Puedes comparar los tres talleres a partir de los siguientes criterios, de acuerdo a la información que entrega cada gráfico:

- ✓ La diferencia entre la moda, la mediana y la media aritmética de cada taller.
- ✓ La distribución de las barras del gráfico con respecto a su centro.

Paso 2 Establece semejanzas y diferencias entre los tres talleres.

Semejanzas	Diferencias
• La moda en los tres talleres es 4 horas. • El número de asistentes en los tres talleres es 32.	• En el taller 1 la moda, la mediana y el promedio son iguales (4 horas) mientras que en el taller 2 y 3 la media, la moda y la mediana no coinciden. • En los talleres 1 y 3 la mediana y la media coinciden entre sí. • La media y la mediana son distintos en el taller 2.

¿Qué puedes decir de la distribución de las barras?

Para concluir

- Para comparar dos o más muestras se pueden establecer criterios de comparación de acuerdo a la información que entreguen los datos. Así, se pueden establecer semejanzas y diferencias entre las muestras comparando según la **distribución** de los datos, la **media aritmética**, la **mediana** y la **moda**.

Argumenta y comunica

- ¿Cómo sería la distribución de los datos de una muestra si la moda fuese mayor que la mediana y su media menor que esta? Discute con tus compañeras y compañeros.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Calcula el rango de cada conjunto.

a. 41, 66, 30, 22, 41, 55.

b. 1,25; 3,45; 12,5; 6,78; 4,73.

c. 2, 2, 2, 2, 2, 2, 2.

d. 10; 12,5; 10; 23,4; 12,5; 15

Práctica guiada

2. A continuación se presentan las medidas de tendencia central de tres niveles y tres cursos de un colegio, respecto de la cantidad de alumnos que asistieron durante un semestre a un taller.

Indica para cada caso cuál de las tres muestras fue más homogénea que las demás de acuerdo a los criterios de comparación.

*** Nota: En cada situación, los tres cursos tienen la misma cantidad de estudiantes.**

Asistencia al taller de música

6.° A		6.° B		6.° C	
Moda	12	Moda	11	Moda	19
Media	25	Media	15	Media	21
Mediana	18	Mediana	20	Mediana	22

Paso 1 Establece un criterio de comparación.

Diferencia entre la media aritmética y la mediana.

Paso 2 Compara las muestras.

La diferencia entre la media aritmética y la mediana en el 6.° A es 7, en el 6.° B es 5 y en el 6.° C es 1, por lo tanto, como la diferencia entre ambas medidas es menor en el 6.° C, entonces la asistencia en este curso fue más similar que en los otros dos.

a. Asistencia al taller de pintura.

7.° A		7.° B		7.° C	
Moda	21	Moda	18	Moda	22
Media	12	Media	18	Media	21
Mediana	23	Mediana	18	Mediana	17

b. Asistencia al taller de danza.

8.° A		8.° B		8.° C	
Moda	17	Moda	18	Moda	23
Media	18	Media	26	Media	14
Mediana	16	Mediana	21	Mediana	21

Aplica

3. Analiza las siguientes situaciones y justifica tu respuesta.

a. A Nicole le ofrecen empleo en dos empresas distintas por la misma cantidad de horas. El único dato que tiene para decidir a cuál irse es el promedio de sueldos de ambas. En la empresa A, el promedio de sueldos es \$ 600 000 y en la empresa B es de \$ 540 000. ¿Le basta conocer el promedio de ambas empresas para decidir cuál le conviene?

b. El profesor de Educación Física de un colegio compara los puntos obtenidos de dos equipos de básquetbol durante los partidos jugados en un semestre. Para ello, sabe que la mediana del equipo A fue de 51 puntos y su promedio de 66 puntos, mientras que la mediana del equipo B fue de 62 puntos y su media de 64 puntos. ¿Cuál de los equipos obtuvo un desempeño más homogéneo durante el semestre?

c. Alejandra se ha ganado un viaje. Las opciones son Túnez o Sudáfrica. La única información con la que cuenta es la moda de las temperaturas, la cual es 35 °C en la primera opción y 26 °C en la segunda. Alejandra desea irse a un lugar caluroso por lo que opta por la primera opción. ¿Es posible saber si tomó una buena decisión? ¿Por qué? ¿Qué datos son necesarios para decidir?

4. En la tabla se muestra el rendimiento en la PSU de Matemática de dos cuartos medio de un colegio. Indica si las siguientes afirmaciones son correctas, incorrectas o no se pueden determinar.

Curso	Media	Moda	Mediana
4.º A	640	450	500
4.º B	580	600	600

a. Los puntajes obtenidos en el 4.° A están más dispersos que los obtenidos en el 4.° B.

b. En el 4.° B el número de alumnos que obtuvo 600 puntos fue mayor que el número de alumnos del 4.° A que obtuvo 450 puntos.

c. En el 4.° A la mitad de los alumnos tuvo sobre 640 puntos, mientras que en el 4.° B la mitad de ellos obtuvo sobre 580.

5. Las tablas muestran la cantidad mensual de los mensajes telefónicos mandados por dos estudiantes.

1.er semestre		
	Paula	Pedro
Ene	40	55
Feb	30	32
Mar	120	88
Abr	93	124
May	60	47
Jun	185	164

2.° semestre		
	Paula	Pedro
Jul	155	110
Ago	66	90
Sep	94	68
Oct	48	88
Nov	76	32
Dic	80	75

a. Ordena la lista de menor a mayor.
b. Determina los valores máximos, mínimos, el rango y las medidas de tendencia central de ambas listas.
c. Representa los datos en un gráfico de doble barra.
d. ¿Cuál de las medidas de tendencia central crees que es la más representativa? Justifica tu respuesta.

6. **A partir de la información calcula el rango, la media aritmética, la moda, y la mediana. Luego, argumenta cuál de estas medidas de tendencia central responde mejor a la pregunta planteada.**

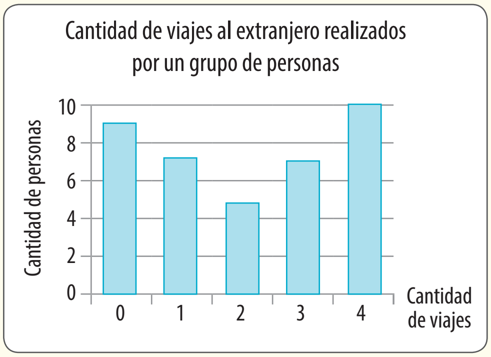
a. Los siguientes datos corresponden al número de pulsaciones por minuto de un grupo de estudiantes. Ellos quieren conocer cuál es la pulsación que más presentan.

74	75	77	75	75	75	76	75
76	78	78	74	77	70	71	78
79	79	80	79	77	80	75	74

b. El profesor de Lenguaje de un 7.° básico, luego de una evaluación, requiere saber qué porcentaje de estudiantes del curso obtuvo una nota sobre 4.

3	5	2	5	3	5	3	5	5	4
6	4	6	2	3	5	5	2	5	3

c. Una agencia de viajes publica en su página *web* la cantidad de viajes que realizan fuera de Chile durante enero.



¿Cuál fue la cantidad de viajes realizados con mayor frecuencia?

7. **Desafío.** **Inventa un conjunto de datos donde la media, moda y mediana tengan el mismo valor. ¿Qué característica tienen estos datos?**

* Nota: Los datos no pueden ser todos iguales.

8. **Investiga.** **Realiza un estudio sobre la cantidad de azúcar de dos grupos de cereales, los denominados *light* y los cereales comunes. Luego, calcula la moda, media aritmética y mediana para comparar estos grupos.**

* Nota: El azúcar en muchos alimentos se cataloga como hidratos de carbono disponibles.

Reflexiono

1. Si las medidas de tendencia central de una muestra coinciden con las de otra, entonces los dos grupos tienen igual cantidad de datos. ¿Estás de acuerdo? Justifica con un ejemplo o contraejemplo.
2. Si a una muestra que tiene una media aritmética de 7,9, se le agregan dos datos con el mismo valor que la media, ¿cambiará la distribución de los datos? ¿Por qué?

Refuerzo

1. Describe los diferentes gráficos que se pueden obtener de acuerdo a la distribución de los datos de una muestra.
2. ¿Qué relación existe entre la distribución de los datos de la muestra y las medidas de tendencia central? Comenta tu respuesta con tus compañeros y compañeras.

Mural

Actitud: Usar de manera responsable y efectiva las tecnologías de la comunicación en la obtención de información.

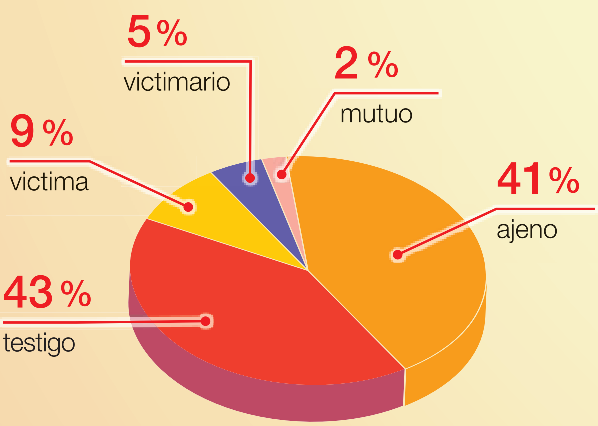
Bullying
¿Cómo nos afecta?

8059 estudiantes de 2.° medio han sido víctimas de *bullying*

Según los resultados de la Encuesta Nacional de Agresión y Acoso Escolar dados a conocer por el Mineduc el 2013.

En octubre del 2012 la encuesta Nacional de Agresión y acoso escolar fue aplicada a más de 4 000 000 estudiantes de 4º básico y 2° medio junto al Simce. Esta encuesta mostró además que el rendimiento se ve afectado por el *bullying*: los afectados bajan 9 puntos en el Simce.

Roles que asumen los estudiantes



***Bullying* y ciberbullying**

El *bullying* también aparece en las redes sociales. Es muy frecuente entre estudiantes, lo que afecta el autoestima y la autoconfianza de la víctima. En el 2010 se entrevistó 1365 estudiantes entre séptimo y cuarto medio de establecimientos de la Región Metropolitana, la cual mostró los roles que asumen los estudiantes en una situación de *bullying*.

58%
De los afectados, son mujeres.

Durante el 2012 se puso en práctica el plan Escuela Segura, que tiene como propósito realizar medidas preventivas en los colegios para evitar problemas como el *buylling* y las agresiones sexuales.

La Superintendencia de Educación Escolar es el organismo encargado de recibir denuncias de *bullying* y fiscalizar a las escuelas.

Fuente: www.mineduc.cl

Del total de los encuestados, el 8 % declara haber sido víctima a través de internet.

ACTIVIDAD EN GRUPO

Reúnanse en equipos de tres o cuatro integrantes y realicen las actividades propuestas. Luego, comuniquen su respuesta a los demás equipos.

1. ¿Qué medidas de tendencia central pueden reconocer en los datos entregados? Nómbrenlas y explíquenlas.
2. Si los resultados de la encuesta señalan que los 8059 estudiantes de 2° medio son víctimas de *bullying*, lo que corresponde al 4,2 % del total de estudiantes de ese nivel, ¿aproximadamente cuántos estudiantes de 2° medio contestaron la encuesta?
3. Con respecto a los roles que asumen los estudiantes en una situación de *bullying*: ¿Cuál es la más frecuente? ¿Con qué medida de tendencia central se asocia?
4. Si tuvieran que realizar una encuesta en su colegio con el fin de detectar casos de *bullying*, ¿qué tipo de variable y medidas de tendencia central elegirían? ¿Por qué? Comparen sus respuestas con los demás equipos.
5. Elaboren un afiche que contenga normas que mejoren la convivencia en su curso que eviten situaciones de maltrato escolar y discriminación. Expongan su trabajo frente al curso y comenten con los demás compañeros y compañeras acerca de la importancia de estas medidas.

¿Cómo voy?

Lección 44: Determinar e interpretar la media aritmética o promedio en contexto

1. En una municipalidad se ha realizado un catastro de cuántas personas aportan económicamente por familia, obteniéndose los siguientes resultados: en 20 familias solo hay una persona que sustenta económicamente, en 18 familias 2 personas aportan económicamente, en 12 familias aportan 3 personas, en 8 familias aportan 4 personas.

   De acuerdo a esta información:

   a. Identifica la variable en estudio.

   b. Organiza la información en una tabla de frecuencias.

   c. Calcula la media e interpreta este resultado.

2. El promedio de temperaturas durante una semana en una ciudad de nuestro país fue de 12° C. ¿Es correcto afirmar que la temperatura de cada día fue cercana a este valor? Justifica.

3. Macarena es pediatra y ha tomado tres muestras de las alturas (en centímetros) de sus pacientes:

Muestra 1	72	73	75	76	77	76	78	75
Muestra 2	122	120	123	124	126	120	122	121
Muestra 3	107	105	109	111	112	107	107	108

   a. Determina el valor máximo, el valor mínimo y el rango de cada muestra.

   b. Calcula el promedio de las alturas de cada muestra.

   c. Interpreta los resultados obtenidos.

   d. De acuerdo a los promedios obtenidos, ¿qué edades crees que tienen aproximadamente los pacientes que atendió la pediatra en cada muestra?

Lección 45: Determinar e interpretar la moda en contexto

4. En un colegio se analizan los niveles de logro del Simce en Matemática, los cuales están catalogados como: avanzado, intermedio e inicial. En el colegio obtuvieron 35 % avanzado, 45 % intermedio y 20 % inicial. Un estudiante dice que la moda fue 45 %. ¿Es correcta su afirmación? Fundamenta.

5. En las noticias de un diario se publica que el precio de venta de los *notebook* ha descendido en el último trimestre considerablemente y agregan que la moda obtenida en un estudio de *marketing* es de $ 170 000 ¿Qué significa esto?

Lección 46: Determinar e interpretar la mediana en contexto

6. A continuación se presentan los tiempos (en horas) que demoró la atención al público en una sucursal de ventas durante una falla del sistema de facturación.

3	2,6	4,5	3	4,3	3,2	3,8
5	4	4,1	4	5,2	3	3,7
2,1	3	3,5	4,5	5,5	2,8	3,5
3,5	3,2	5	4,8	4	3,5	4

   a. ¿Es una muestra o población? Justifica tu respuesta.

   b. Calcula la mediana e interpreta este resultado.

7. En un supermercado se realiza una evaluación del nivel de manejo de una nueva máquina para etiquetar productos, de tal forma que el 50 % de los trabajadores que tengan un nivel de manejo más alto serán los que la utilizarán en la etapa inicial. Los resultados obtenidos son:

Nivel de manejo de máquina	
Nivel	Cantidad de trabajadores
Básico	31
Medio	8
Avanzado	41

¿En qué nivel se encuentra el 50 % que utilizará la máquina de etiquetación en la primera etapa?

8 En un estacionamiento de un *mall* se desea estudiar el tiempo que están estacionados los autos durante el día. Los datos obtenidos son:

Tiempo que están estacionados los automóviles en un *mall*						
Cantidad de automóviles	90	120	240	210	190	70
Minutos estacionados	30	60	90	120	200	150

a. Determina el valor máximo, el valor mínimo y el rango.
b. Representa los datos en un gráfico de barras.
c. Calcula la mediana y la media aritmética para los datos. ¿Cómo interpretas estos valores en la situación?

Lección 47: Comparar dos o más conjuntos de datos a través de las medidas de tendencia central

9 En un canal durante la emisión del noticiario de mediodía la conductora muestra que el sueldo promedio del país durante el año anterior estuvo en $ 670 000, mientras que en otro canal dicen que la mediana del sueldo estuvo en $ 420 000. ¿Alguno de los noticiarios se ha equivocado en dar la información? Argumenta tu respuesta.

10 El dueño de un local de venta de *tablets* de una determinada marca, que tiene sucursales en cuatro puntos del país, desea analizar en qué sucursal sus ventas son mejores. La tabla presenta las medidas de tendencia central de sus cuatro sucursales, respecto de la cantidad de *tablets* vendidas cada día durante un mes:

Venta de *tablets*			
Sucursal	Moda	Media	Mediana
A	7	5	2
B	2	5	5
C	4	3	1
D	1	5	4

¿Qué sucursal tiene mejor rendimiento en ventas para esta marca de *tablets*?

11 Carla averigua el puntaje de ingreso de una determinada carrera en el 2014, siendo el puntaje máximo de esta 760 puntos y el puntaje mínimo, 624 puntos. En la página oficial de la institución se indican los puntajes que corresponden a la mediana y a la moda. Si la información se representa en un gráfico de barras, ¿hacia qué lado del gráfico se concentran más los datos si el promedio de los puntajes obtenidos por los estudiantes que ingresaron a la carrera es menor que el que corresponde a la mediana y al de la moda?

Desafío de integración

1. En una fuente de agua vacía con una capacidad de 400 litros hay tres mangueras conectadas. Dos de ellas llenan la fuente con 20 litros y 15 litros de agua, respectivamente, por cada 2 minutos, mientras que la tercera manguera deja salir 5 litros por cada 2 minutos. ¿Cuánta agua habrá al cabo de 10 minutos?
2. En un hotel se registró los días de estadía de los huéspedes por el período de una semana. El resultado se representa en la siguiente tabla:

Estadías de huéspedes en una semana		
Estadía en días	f	F
1	142	142
2		305
3	203	
4	170	
5	76	
6	54	
7	82	

a. Completa la tabla con las frecuencias acumuladas.
b. Determina la media aritmética.
c. Determina la mediana.
d. Confecciona un gráfico de barras con los datos de la tabla.
e. ¿Cambiaría la mediana si no se consideraran las estadías que sobrepasan los 4 días? Fundamenta.

Resolución de problemas

Actitud: Valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.

Plantear una ecuación o una inecuación

Cuando en una situación existen variables involucradas, como lo es el tiempo y la distancia, puedes relacionarlas mediante una expresión algebraica que permite encontrar la solución al problema.

Estrategias

- Hacer un diagrama.
- Usar ensayo y error sistemático.
- Usar problemas más sencillos.
- Hacer una tabla.
- Encontrar un patrón.
- Plantear una ecuación o una inecuación.
- Usar razonamiento lógico.

Las corridas se han hecho populares en los últimos años y Cristina se ha inscrito en una de 10 km. Para tener un buen desempeño, ha creado un plan de entrenamiento que consiste en anotar las distancias de algunas calles, el tiempo que demora aproximadamente en recorrerlas y el número de veces que repite el trayecto. Si Cristina quiere recorrer en promedio 135 metros por cada minuto. ¿Cuántos minutos debe demorar en realizar el trayecto por la avenida 3?

Trayecto	Distancia (metros)	Tiempo (min)	Repeticiones
Avenida 1	1100	7	2
Avenida 2	723	9	1
Avenida 3	2180	x	1

¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema?

¿Qué datos tienes para resolver?

Crea un plan para resolver

Para resolver el problema, puedes aplicar la estrategia Plantear una ecuación o una inecuación. Para ello, escribe una expresión que permita relacionar la distancia recorrida y el total de minutos con la distancia promedio que Cristina recorre en 1 minuto.

Aplica la estrategia

- Calcula el total de metros que recorrerá, considerando las repeticiones.
- Plantea una expresión que represente el total de los minutos empleados en todo el trayecto.
- Al dividir el total de metros recorridos por el total de minutos, se obtiene la cantidad de metros recorridos por cada minuto, que es igual a 135.

Resuelve

Total de metros recorridos:

$$1100 + 1100 + 723 + 2180 = 5103$$

Total de minutos empleados:

$$7 + 7 + 9 + x = 23 + x$$

Cantidad de minutos que debe demorar en recorrer la avenida central:

$$\frac{5103}{23 + x} = 135$$

Verifica la respuesta

Comunica la respuesta

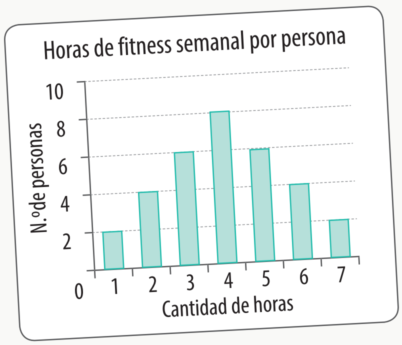
Vuelvo a mis procesos

Observa las imágenes centrales y completa.

Para cada imagen nombra dos aprendizajes logrados en esta unidad.

¿En qué situaciones cotidianas podrías aplicar lo aprendido en esta sección?

Casos de *bullying*	
Curso	**N.º de alumnos afectados (f)**
7.º básico	3
8.º básico	
1.º medio	
2.º medio	
3.º medio	
4.º medio	



¿Cómo fue tu aporte al trabajo en equipo? Describe tus fortalezas y debilidades y cómo podrías superar estas últimas.

Busca dos estudios, en la prensa escrita donde intervenga alguna de las medidas de tendencia central trabajadas en esta sección e interpreta los valores.

De las metas que te propusiste al inicio de esta sección, ¿cuáles cumpliste y cuáles te faltaron?

Sección

12

Probabilidad

Actitud: Valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.

Activo ideas previas

Lee el siguiente texto y luego contesta las preguntas.

Se dice que la probabilidad de que te caiga un rayo es de 1 entre 3 000 000. Esto se puede interpretar como que de 3 000 000 de rayos que caen a la Tierra, existe solo una posibilidad de que te caiga un rayo encima y 2 999 999 veces caerá en otro sitio. Por otro lado, la probabilidad de ganar el Kimo es de 1 entre 4 457 400, esto quiere decir, que existen 4 457 400 combinaciones posibles de números, y solo una de ellas es ganadora. Si te fijas, es más probable que te caiga un rayo que ganar el Kimo.

El estudio de las probabilidades nos permite saber cuán posible es que un suceso ocurra. En sus inicios, esta ciencia nació para dar respuestas a problemas que surgían de los juegos de azar. Sin embargo, actualmente, esta ciencia se aplica para mejorar la calidad de vida de las personas, en donde sus principales aplicaciones son en genética, en control de calidad de las empresas, en seguros de vida, para probar la efectividad de un medicamento, etc.

- ¿En qué otras situaciones cotidianas crees que se involucran las probabilidades? ¿Por qué? Comparte tus respuestas con tus compañeros o compañeras.

  ____

  ____

- ¿Crees que el hecho de que te ganes el Kimo y que a su vez te caiga un rayo es muy probable o poco probable? ¿Cómo calcularías ese valor a partir de los datos ya conocidos? Comenta tu procedimiento con un compañero o compañera.

  ____

Activo conceptos clave

Los siguientes listados muestran los conceptos clave de la sección. Con algunos de ellos completa las propuestas que aparecen.

Experimento aleatorio
Experimento determinístico
Espacio muestral
Evento o suceso
Frecuencia relativa

Experimento equiprobable
Probabilidad frecuencial
Probabilidad
Frecuencia relativa

Casos favorables
Casos totales
Regla de Laplace
Diagrama de árbol

- Dos palabras que representen un procedimiento o estrategia: ____________________.
- Dos conceptos que involucren más de un resultado: ____________________.
- Un concepto nuevo para ti: ____________________.
- Una posible definición del concepto nuevo: ____________________.

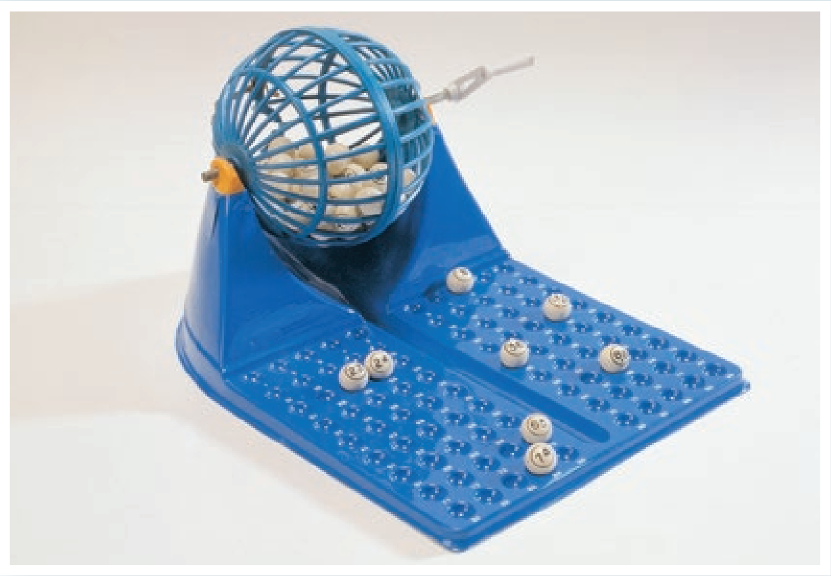
Pienso mis procesos

Observa la imagen central y completa.

Describe la situación que se muestra en la imagen.

¿Qué relación puedes establecer entre la imagen y el título de la sección?

¿Qué otros hechos cotidianos puedes relacionar con el estudio de la probabilidad?



¿Cuáles crees que son las ventajas de aplicar la probabilidad a estos juegos?

¿Qué estrategias de estudio te propones para trabajar en esta sección?

¿Qué metas te propones cumplir al finalizar esta sección?

¿Qué debo saber?

Activa tus conocimientos previos respondiendo la pregunta lateral. Luego, resuelve la actividad. Para terminar, registra tus logros.

¿Por qué es posible relacionar los porcentajes con las fracciones y los números decimales?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
5 o más puntos	4 o menos puntos

¿Qué dificultades tuviste?

Relacionar fracciones, decimales y porcentajes

1. Transforma de fracción a decimal o viceversa. (2 puntos)

a. $\frac{2}{5}$

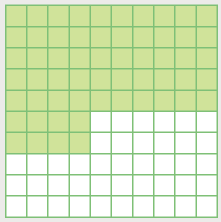
b. 0,73

c. 0,103

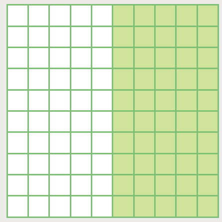
d. $\frac{36}{25}$

2. Escribe el porcentaje representado, luego exprésalo como fracción y número decimal. (4 puntos)

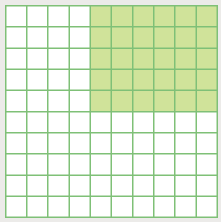
a.



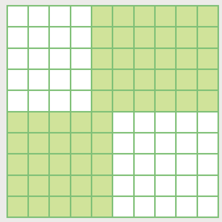
c.



b.



d.



3. Represente los porcentajes como una fracción y número decimal. (2 puntos)

a. 57 %

b. 7 %

c. 2 %

d. 84 %

¿Cómo se calcula el promedio?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
5 o más puntos	4 o menos puntos

Calcular promedios

4. Un colegio entrega un premio semestral al mejor promedio por asignatura. Iván y Claudia son los estudiantes con mejores notas en Matemática de su curso. Sus notas del primer semestre fueron las siguientes: (6 puntos)

Iván	6,7	6,8	7,0	6,6	6,8
Claudia	6,9	6,8	6,9	6,9	6,8

¿A quién se le otorgará el premio?

5. Camila quiere calcular qué nota necesita obtener en la última prueba que le queda de Lenguaje, para que su promedio final sea 6,1. Hasta el momento las notas de Camila son 6,3; 5,9; 6,1; 5,8. (3 puntos)

¿Qué utilidad tienen las tablas en estadística?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
4 o más puntos	3 o menos puntos

¿Qué dificultades tuviste?

Interpretar tablas de doble entrada

6 **Observa la tabla y luego responde.** (4 puntos)

	7.º A	7.º B	7.º C
Hombres	9	12	18
Mujeres	14	15	13

a. ¿Cuántos alumnos en total hay en 7.° básico?
b. ¿Cuántos hombres son del 7.° A?
c. ¿Cuántos alumnos en total tiene el 7.° B?
d. ¿Cuántas mujeres en el colegio van en 7.° básico?

7 **Interpreta el dato marcado en la tabla con color rojo.** (2 puntos)

	Molestias respiratorias	No tiene molestias respiratorias
Fuma	85	48
No fuma	56	63

Qué información entrega la frecuencia relativa porcentual que no entrega la frecuencia absoluta?

Marca con una ✗ tu nivel de logro:

Logrado	Por lograr
5 o más puntos	4 o menos puntos

¿Qué dificultades tuviste?

Calcular frecuencia relativa y definir conceptos cotidianos

8 **Clasifica cada evento. Para ello, pinta la casilla que corresponde.** (6 puntos)

a. Elegir una mujer de un curso solo compuesto de hombres.

Seguro | Posible | Imposible

b. Elegir una manzana verde entre manzanas rojas y verdes.

Seguro | Posible | Imposible

c. Que una persona obtenga cara o sello al lanzar una moneda.

Seguro | Posible | Imposible

d. Que si amanece nublado salga el Sol.

Seguro | Posible | Imposible

9 **Define con tus palabras los siguientes conceptos.** (3 puntos)

a. Experimento.
b. Evento.
c. Aleatorio.

Lección 48

¿Qué es un experimento aleatorio?

Propósito

Describir espacio muestral, evento y casos favorables en experimentos aleatorios.

¿Para qué?

A veces se puede saber fehacientemente el resultado de un experimento o juego, pero esto no siempre es posible. Diferenciar un experimento aleatorio de uno determinístico hará que se consideren todos los resultados posibles, con lo que se podrá evaluar qué tan difícil es obtener lo que se desea. Así, se pueden tomar decisiones de si es conveniente o pertinente hacer cierta cosa u otra.

Palabras clave

Experimento aleatorio
Experimento determinístico
Espacio muestral
Evento o suceso

Materiales

– Un dado de 6 caras.

Ampliando

Aleatorio alude a azar, y se refiere a todo fenómeno incierto. Proviene del latín *aleas*, que significa dados y, por extensión, azar.

Un experimento determinístico es aquel cuyo resultado es cierto o seguro y, por lo tanto, se puede predecir. Por ejemplo:

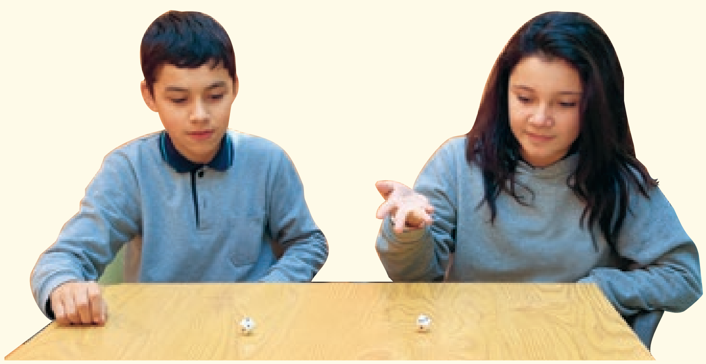
- Dejar caer un peso desde una altura y ver si se acerca o aleja de la Tierra.
- Aplicar calor a una masa de agua y ver el efecto que tiene sobre ella.

Taller Experimento con un dado

Formen grupos de tres alumnos.

- Cada uno lanzará una vez el dado.
- Antes de cada lanzamiento, cada miembro del grupo dirá qué número cree que saldrá en la cara de arriba.
- Gana quien acierte al número que sale.
- Repitan el juego 3 veces cada uno.
- Anoten en la tabla el número que salió en el dado y el nombre de la persona que ganó.

Lanzamiento	Número que salió	¿Quién ganó?
1.°		
2.°		
3.°		
4.°		
5.°		
6.°		
7.°		
8.°		
9.°		



1. ¿Qué números pueden elegir al lanzar un dado?
2. Al elegir el 6, ¿es más difícil ganar que al elegir cualquier otro número? Justifiquen su respuesta.
3. ¿Existe algún número con el que, al elegirlo, haya más posibilidades de ganar? Justifiquen sus respuestas.
4. ¿Se puedes saber *a priori* quién ganará el juego de acuerdo a la elección de sus números? Justifiquen sus respuestas.

Existen algunos experimentos en los que no es posible predecir con exactitud el resultado, tal como el juego que acabamos de ver: este tipo de experimentos se llaman aleatorios. En otros casos podemos saber *a priori* con precisión el resultado: estos experimentos se denominan determinísticos.

Situación Experimento aleatorio

En un experimento aleatorio pueden obtenerse distintos resultados. Considerando todos los resultados posibles al lanzar dos dados, **¿en cuántos de ellos se obtiene el mismo número en ambos dados?**

Ayuda
La ocurrencia de un resultado específico de un evento o suceso se llama **caso favorable**.

Paso 1 Determina todos los posibles resultados al lanzar dos dados de manera simultánea. A esto le llamamos espacio muestral.

Para ello, se puede hacer una tabla en donde se combinan ambos elementos del experimento, en este caso los números de los dados.

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)		
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)		
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)			
4	(4, 1)	(4, 2)				
5	(5, 1)	(5, 2)			(5, 5)	
6	(6, 1)	(6, 2)			(6, 5)	

Vemos que existen ____________ posibles resultados al lanzar dos dados.

Paso 2 Determina las ocasiones en que ambos dados muestran el mismo número. A esto se le denomina evento o suceso, y es un subconjunto del espacio muestral. En este caso está dado por:

A = {(1, 1), (____, ____), (____, ____), (____, ____), (____, ____), (____, ____)}

Luego, existen ____________ ocasiones o casos favorables, es decir, ____________ posibles resultados que cumplen con la condición del evento.

Para concluir

Experimento
Aplicar un procedimiento con el fin de descubrir, comprobar o demostrar determinados fenómenos o principios.

Determinístico
Su resultado se puede predecir, ya que es único y, si se repite bajo las mismas condiciones, no varía.

Aleatorio
No se puede predecir su resultado, ya que no es único y, si se repite bajo las mismas condiciones, puede variar.

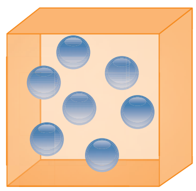
- En un experimento aleatorio el conjunto formado por todos los posibles resultados se denomina **espacio muestral**, designado por Ω .
- Un **suceso o evento A** es cualquier subconjunto del espacio muestral.
  Por ejemplo:

Experimento: lanzar un dado y registrar el número que muestra su cara superior. → Espacio muestral: Ω: {1, 2, 3, 4, 5, 6}.

Suceso: que salga un número par. → Casos favorables: A: {2, 4, 6}

Argumenta y comunica

- De la siguiente caja se toma una pelota de color azul.



¿Qué sucede con el espacio muestral y los casos favorables al evento? ¿Por qué?
Da otro ejemplo en que suceda algo similar.

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. **Determina cada conjunto.**

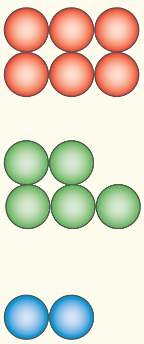
a. Los números pares que están entre el 1 y el 11.

b. Los números impares que están entre el 1 y el 15.

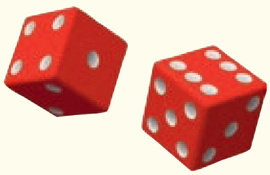
c. Los números primos que están entre el 1 y el 20.

2. **Inventa un experimento aleatorio utilizando los elementos que se muestra.**

a.



b.



Práctica guiada

3. **Clasifica los experimentos en aleatorios o determinístico.**

Saber el resultado de un partido de fútbol antes de que se juegue.

Aleatorio, se puede ganar, empatar o perder.

a. Lo que saldrá al lanzar una moneda al aire.

____

b. Dejar caer un vaso.

____

c. Acertar a los números de un juego de lotería.

____

d. Pronosticar el clima de la próxima semana.

____

4. **Relaciona cada experimento con su espacio muestral. Para ello, une con una línea.**

a. Lanzar una moneda.

b. Extraer una bolita de una urna que contiene tres bolitas de distinto color.

c. Lanzar dos monedas al aire.

d. Extraer una moneda de una bolsa.

e. Extraer una carta de un mazo inglés.

Ω : {1, 5, 10, 50, 100, 500}

Ω : {CS, SS, CC, SC}

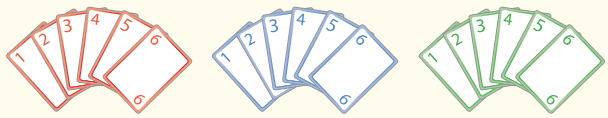
Ω : {C, S}

Ω : {azul, amarillo, rojo}

Ω : {♣, ♥, ♦, ♠}

5. **Determina cómo se relacionan los sucesos y luego representa el conjunto de casos favorables.**

Que al sacar una carta, esta sea azul o número par.



Paso 1 Separa los sucesos.

A: la carta es azul.

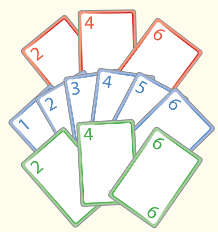
B: la carta es un número par.

Paso 2 **Determina cómo se relacionan.**

Si la conjunción es "o", los sucesos se unen, pues puede cumplir cualquiera de las dos condiciones. Si la conjunción es "y", los sucesos se intersecan, pues debe cumplir con las dos condiciones.

En este caso es "o"; entonces se unen.

Paso 3 Representa la cantidad de casos favorables.



Luego, hay 12 casos favorables.

a. "Que la carta sea azul o verde".
b. "Que la carta sea verde o número impar".
c. "Que la carta sea roja y número primo".
d. "Que la carta sea roja y mayor que 4".
e. "Que la carta no sea roja".

Aplica

6. **Completa la tabla.**

Experimento	Espacio muestral	Suceso	Casos favorables
Lanzar un dado de ocho caras numeradas del 1 al 8		Obtener un número primo	
	{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS}	Obtener exactamente dos sellos y una cara	
	{a, e, i, o, u}	Obtener una vocal fuerte	{a, e, o}

7. **Se escriben en el pizarrón los números del 1 al 10. Luego, tres alumnos toman aleatoriamente dos cartas y de acuerdo a las condiciones simultáneas de estas considerará la suma de los números que las cumplan. Gana quien tiene la mayor suma.**

- **Marcela saca las tarjetas:**

Que sea par	Que sea mayor que 6

- **Enrique saca las tarjetas:**

Que sea impar	Que sea cuadrado perfecto

- **Mariela saca las tarjetas:**

Que sea número primo	Que sea mayor que 6

¿Quién ganó?

8. **Escribe lo que se pide a partir de la palabra:**

A	L	E	A	T	O	R	I	O

a. Espacio muestral.
b. Casos favorables al evento: que salga vocal.
c. Casos favorables al evento: que salga consonante.

9. **Escribe la cantidad de casos favorables para cada evento del experimento "escoger una pieza de dominó".**

a. Que las dos caras sean par: ________.

b. Que las caras sean iguales: ________.

c. Que una cara sea par y la otra impar: ________.

10. **Crea. Para cada situación formula un experimento aleatorio y uno determinístico.**

a. Juego de naipes.

Aleatorio: ______________________________

Determinístico: ______________________________

b. Partido de fútbol.

Aleatorio: ______________________________

Determinístico: ______________________________

Reflexiono

1. Jaime afirma que solo los experimentos aleatorios poseen espacio muestral, ¿estás de acuerdo con la afirmación anterior? Fundamenta tu respuesta.
2. ¿Es posible que en un experimento aleatorio, el espacio muestral tenga solo 1 elemento? ¿Por qué? Comenta tu respuesta con tus compañeros y compañeras.

Refuerzo

Claudia tiene 3 monedas en su mano y al lanzarlas anota los resultados. ¿Cuál será el espacio muestral del experimento? Compara tu respuesta con los demás compañeros y compañeras.

Lección 49

¿Cómo estimar la probabilidad mediante la frecuencia relativa?

Propósito

Analizar experimentos equiprobables a través de la frecuencia relativa.

¿Para qué?

Hay experimentos que al realizarlos, alguno de sus posibles resultados se van repitiendo. Cuando lanzamos un dado y anotamos sus resultados, luego de repetirlo muchas veces, es posible observar cierta tendencia en los resultados obtenidos. Relacionar esta tendencia con la probabilidad de obtener un resultado determinado ayuda a generar conclusiones y proyecciones sobre el resultado que se obtendrá una vez terminado el experimento.

Palabras clave

Probabilidad
Frecuencia relativa
Experimento equiprobable

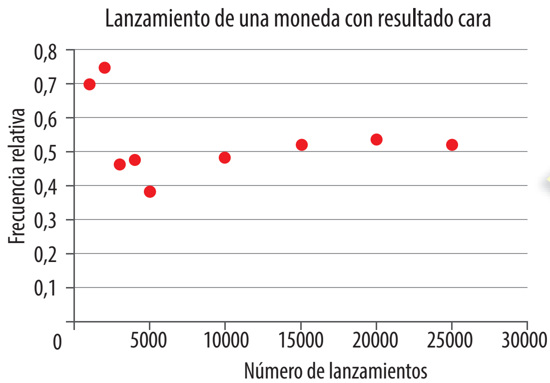
Situación 1 Experimentos equiprobables

La tabla muestra los resultados (cara–sello) del experimento "lanzar una moneda", de acuerdo a la cantidad de veces que este se repite.

N.° de lanzamientos	f_{cara}	$f_{rel\ cara}$	f_{sello}	$f_{rel\ sello}$
1000	700	0,70	300	0,30
2000	1500	0,75	500	0,25
3000	1400	0,47	1600	0,53
4000	1900	0,48	2100	0,52
5000	1900	0,38	3100	0,62
10 000	4800	0,48	5200	0,52
15 000	7700	0,51	7300	0,49
20 000	10 700	0,54	9300	0,46
25 000	12 800	0,51	12 200	0,49

¿Cuál de los dos eventos "sale cara" o "sale sello" tiene mayor probabilidad de ocurrir?

Paso 1 Realiza un gráfico de puntos con las frecuencias relativas para uno de los eventos. Se elige el evento "sale cara".



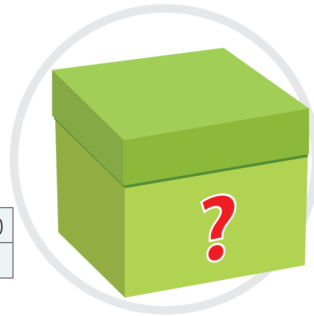
¿Por qué en este caso basta con representar solo un evento?

Paso 2 Estima la probabilidad de los dos eventos a partir del gráfico.

A medida que aumentan las repeticiones del experimento, la frecuencia relativa de un suceso tiende a estabilizarse en torno a un valor. Este valor es llamado probabilidad del suceso. En este caso, ambos resultados tienen la misma probabilidad de ocurrir, cuando esto ocurre se habla de experimento equiprobable.

¿Qué relación observas entre la probabilidad y la frecuencia con que ocurre un evento?

Situación 2 Probabilidad frecuencial



En la caja hay bolitas rojas y verdes. No se sabe cuántas hay de cada tipo ni el total. Se define el experimento "sacar una bolita de la caja".

La tabla muestra los resultados del evento "sacar una bolita roja".

N.° de repeticiones	500	1100	2300	3000	5000	10 000	15 000
N.° de veces que la bolita es roja	100	400	400	600	800	1700	2600

¿Qué se puede decir acerca de la probabilidad de sacar una bolita roja de acuerdo a las veces que se repite el experimento?

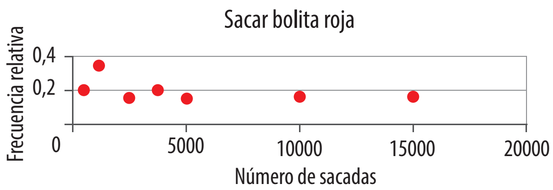
¿Qué porcentaje de cada color de bolitas habrá en la caja?

La frecuencia relativa f_{rel} es el cociente entre la frecuencia absoluta (número de veces que ocurre un evento) y el total de veces que se repite el experimento.

Paso 1 Calcula la frecuencia relativa.

N.° de repeticiones	f	f_{rel}
500	100	0,2
1100	400	0,36
2300	400	
3000	600	
5000	800	
10000	1700	
15000	2600	

Paso 2 Construye un gráfico de puntos para representar la frecuencia relativa.



Paso 3 Analiza en qué valor se estabiliza la frecuencia.

La frecuencia relativa comienza a estabilizarse en el valor ________; así la probabilidad frecuencial de sacar una bolita roja es ________.

Si el valor de la probabilidad se relaciona con la frecuencia relativa, ¿cuál será el valor mínimo que puede tomar y cuál el máximo? ¿Por qué?

Paso 4 Relaciona la probabilidad de ocurrencia con el porcentaje de bolitas.

La probabilidad de sacar una bolita roja se acerca a ________ y este número lo podemos expresar como la fracción $\frac{1700}{10\,000}$, lo que es equivalente al porcentaje ________ %.

Entonces, cerca de un ________ % de bolitas son rojas y por ende un ________ % de bolitas son verdes.

Para concluir

- En un experimento aleatorio, la **probabilidad** es un número que se asigna a cada suceso y que da información acerca de la **frecuencia** con que ocurre. Una estimación de dicho número es la **probabilidad frecuencial** (P_f), que corresponde a la frecuencia relativa del suceso al realizar el experimento.
- Un experimento es **equiprobable** cuando todos sus resultados tienen la misma probabilidad de ocurrencia.

Argumenta y comunica

Según el experimento de la caja:

- Si se preguntara por la probabilidad de sacar una bolita rosada, ¿qué número piensas se obtendría? ¿Por qué?
- Ahora, si todas las bolitas fueran rojas, ¿cuál sería la probabilidad que se obtendría?
  Comenta con tus compañeros y compañeras.

Lección 50

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Calcula las frecuencias relativas.

Edad de los integrantes de una barra de fútbol		
Edades	f	f_{rel}
10	33	
15	10	
20	45	
25	15	
30	22	

2. Realiza un gráfico de barras para la tabla anterior.

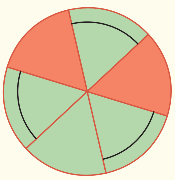
Práctica guiada

3. Analiza si los experimentos son equiprobables.

Lanzar un tetraedro y registrar el color de su base.

Dado que todas las caras, es decir, los resultados del experimento, tienen la misma posibilidad de ocurrencia, el experimento es equiprobable.

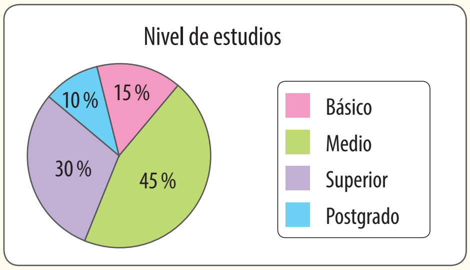
a. Lanzar un dardo en el tablero y registrar el color acertado.



b. Lanzar un dado de ocho caras y registrar el número obtenido.

Aplica

4. Se realizó una encuesta sobre el nivel de estudio de los empleados de una empresa obteniendo los resultados registrados en el gráfico.



a. ¿Cuáles son los niveles de estudio con mayor y menor cantidad de empleados respectivamente?

b. ¿Es equiprobable escoger un trabajador y que tenga estudios medios con elegir un trabajador y que tenga estudios superiores? Justifica tu respuesta.

5. Cada gráfico muestra el número de veces que se repite el experimento "escoger una persona de un grupo de 5", con resultado de que sea mujer, para dos grupos diferentes.

a. Estima la probabilidad del evento "escoger una mujer" para cada grupo.

b. El evento "escoger una mujer", ¿tiene la misma probabilidad en ambos grupos? ¿Qué consideras para responder?

6. **Considera el experimento de extraer una bolita, registrar su color en la tabla, devolverla, y repetirlo 2000 veces.**

a. Completa la tabla.

Extracción de una bolita		
Color	f	f_{rel}
Rojo	1329	
Azul	671	

b. ¿Qué observas de las probabilidades frecuenciales?

c. ¿Qué se espera de la probabilidad de cada suceso?

d. Estima el porcentaje de bolitas de cada color.

7. **Completa la tabla sabiendo que se realizaron 5000 extracciones de una ficha desde una urna con 10 fichas numeradas desde el 1 al 10.**

5000 extracciones										
Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	490	513	501	491	508	506	493	498	502	498
f_{rel}										
$f_{\%}$										

a. Calcula la diferencia entre la mayor y la menor probabilidad frecuencial. ¿Es significativo ese valor? Justifica.

b. Si se aumentan las extracciones a 100 000, ¿a qué valor debería tender cada probabilidad frecuencial? ¿Por qué?

c. Según tu respuesta anterior, estima la probabilidad de extraer una ficha con el 7.

8. **Se anota la venta de 544 productos de una cafetería. Estima la probabilidad de que al escoger una persona, esta haya comprado un café con endulzante.**

Venta de una cafetería	
Tipo de café	Frecuencia
Con endulzante	204
Sin endulzante	340

9. **Experimenta. Con un compañero lancen un dado y analicen las siguientes probabilidades (repitan el experimento todas las veces que sea necesario).**

a. Conjeturen acerca de la frecuencia relativa para cada número.

b. Realicen el experimento repetidas veces y elaboren un gráfico que muestre la frecuencia relativa del evento “salir número 5”.

c. ¿Cuál será la frecuencia relativa del evento “obtener un número mayor que 2”?

d. ¿Cuál será la frecuencia relativa del evento “obtener un número menor o igual que 4”?

e. ¿Tienen la misma probabilidad de ocurrencia los tres eventos anteriores? ¿Por qué?

10. **Analiza. Katherine lanza un dado equilibrado y sale una vez el 3 y la siguiente sale el número 6, resultados que se repiten 5 veces, ¿qué resultado saldrá la sexta vez que lance?**

11. **Argumenta. Al realizar un experimento aleatorio, Javier calcula la probabilidad frecuencial de un suceso, siendo esta un 17 %. Él afirma que si aumenta el número de repeticiones del experimento, la probabilidad frecuencial también aumentará. ¿Estás de acuerdo con Javier? Fundamenta tu respuesta.**

12. **Desafío. Un dado de 6 caras numeradas del 1 al 6, está trucado de manera que la probabilidad de sacar un número par es 0,71. Si se sabe que la probabilidad de sacar un número impar cualquiera es la misma en cada caso, ¿cuál es la probabilidad de sacar el número 3?**

Reflexiono

Andrés lanza una moneda al aire y sale 10 veces cara, por lo que afirma que la próxima vez que la lance también saldrá cara. ¿Es cierto esto? ¿Por qué?

Refuerzo

Explica cuál es la relación que hay entre frecuencia relativa y probabilidad. Compara tu respuesta con la de algún compañero o compañera.

Lección 50

¿Cómo determinar la probabilidad teóricamente?

Propósito

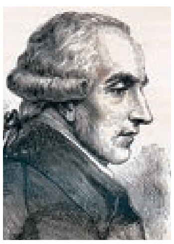
Determinar la probabilidad de un evento de manera teórica.

¿Para qué?

Si bien no podemos predecir el resultado exacto de un juego o experimento, sí es posible obtener la probabilidad de que ocurra un determinado evento. De esta manera, obtener la probabilidad de forma teórica permite ver qué tan posible es obtener un cierto resultado conociendo las condiciones en que se realiza el experimento.

Palabras clave

Casos favorables
Casos totales
Regla de Laplace



Pierre Simon Laplace (1749 – 1827)

"En el fondo, la teoría de la probabilidad es solo sentido común expresado con números".

Astrónomo y matemático francés cuyo obra y aporte a la ciencia es reconocida hasta la actualidad.
Realizó aportes a la estadística, al estudio del sistema Solar y también a la probabilidad.

Taller Probabilidad para experimentos equiprobables

Reúnanse en tríos y realicen la siguiente actividad.

En 10 papelitos de igual tamaño escriban los números del 1 al 10 y analicen ciertas probabilidades de ocurrencia antes de realizar el experimento "extraer un papelito y anotar el número"

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

1. Si se saca un papelito del conjunto sin mirar, ¿cuántas posibilidades hay que salga 3? ________ de 10 posibilidades.
2. Si se saca un papelito del conjunto sin mirar, ¿cuántas posibilidades hay que salga 4? ________ de 10 posibilidades.
3. Si se saca un papelito del conjunto sin mirar, ¿cuántas posibilidades hay que salga 5? ________ de 10 posibilidades.
4. ¿Qué pasará con las posibilidades para los demás resultados?
5. Escriban como razón la probabilidad de obtener cada papelito al realizar una extracción (resultado).

   $\frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}, \frac{\square}{\square}$

6. Entonces, cada resultado del experimento "sacar un papelito y anotar el número" tiene la misma probabilidad de ocurrir, es decir el experimento es equiprobable. ¿Qué sucede si se quiere conocer la probabilidad del evento "que sea número par"?
   a. Hay ________ casos totales o resultados.
   b. Hay ________ casos favorables al evento.
   c. Los casos favorables son: ________________________
   d. ¿Cuál es la probabilidad para cada caso favorable?, ¿y cuál es la probabilidad de extraer un número par?

   ____

   ____

   ____

7. Calculen la probabilidad del evento "que sea número primo".

   ____

   ____

   ____

8. ¿De qué manera se podría generalizar la forma de encontrar la probabilidad para cierto evento?

   ____

Situación Regla de Laplace

Giselle hará collares con flores de colores para regalar al público de un desfile.

Una vez fabricadas todas las flores tiene: 300 verdes, 250 naranjas y 200 amarillas. Como no tiene igual cantidad de cada color, decide hacer los collares sacando las flores al azar.

¿Cuál es la probabilidad de que la primera flor que saca sea verde?, ¿y de que sea naranja?, ¿y de que sea amarilla?

Paso 1 Calcula la cantidad de casos favorables (ocurrencia de un suceso) para cada color de flor, y la cantidad de casos totales.

Los casos favorables son:

Suceso V: que salga una flor verde; cantidad de casos favorables: 300.

Suceso N: que salga una flor naranja; cantidad de casos favorables: ______.

Suceso A: que salga una flor amarilla; cantidad de casos favorables: ______.
Los casos totales corresponden a la cantidad total de flores, en este caso 750.

Paso 2 Calcula la probabilidad de sacar cada flor dependiendo de su color.

La probabilidad de sacar una flor dependiendo de su color está dada por:

$$\text{P (suceso)} = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$$

Entonces: $P(V) = \frac{300}{750} = 0{,}4$ $\quad P(N) = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \approx 0{,}33$ $\quad P(A) = \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \approx 0{,}27$

Así, la probabilidad de que la primera flor sea verde es cerca de un 40 %, de que sea naranja un ______% y de que sea amarilla un ______%.

Entonces hay más posibilidades de que la primera flor sea __________.

Para concluir

- La **probabilidad de un suceso** se escribe **P(A)**. Este número está entre **0** y **1** y lo puedes escribir como número decimal, fracción o porcentaje.

imposible — seguro

imposible		seguro
0	$\frac{1}{2}$	1
0	0,5	1,0
0 %	50 %	100 %

- Si en un experimento ninguno de los resultados posibles es privilegiado respecto de los demás, es decir, se trata de resultados o eventos equiprobables, y además el espacio muestral es finito, el cálculo de la probabilidad de ocurrencia de un suceso A se puede calcular utilizando la **regla de Laplace**:

$$P(A) = \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos totales}}$$

casos favorables: cantidad de casos en los cuales ocurre el suceso.

casos totales: cantidad de elementos del espacio muestral.

Argumenta y comunica

- ¿Por qué la probabilidad de un suceso no puede ser mayor que 1 o menor que 0? Discute con tus compañeros y compañeras.

Lección 51

Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Completa la tabla.

Evento	Espacio muestral	Cantidad de casos favorables
Lanzar un dado y obtener 5.		
Lanzar dos monedas al mismo tiempo y obtener cara en ambas.		
Elegir un número natural par menor que 10.		

2. Determina el conjunto de casos favorables para cada suceso.

a. Suceso A: obtener un número mayor que 4 al lanzar un dado.

b. Suceso B: obtener un número primo al lanzar un dado.

c. Suceso C: obtener un número impar al lanzar un dado.

Práctica guiada

3. Para cada caso de situación de genética, determina la probabilidad requerida, la cual depende de los alelos.

El alelo dominante (A) determina ojos marrones cuando se presentan las combinaciones Aa o AA. El alelo recesivo (a) determina ojos claros cuando se presenta la combinación aa.

Si el papá es Aa y la mamá es Aa, ¿cuál es la probabilidad de que el hijo tenga ojos marrones?

papá \ mamá	A	a
A	AA	Aa
a	Aa	aa

Paso 1 Cuenta los casos favorables para ojos marrones.

Hay tres casos: AA, Aa, Aa.

Paso 2 Calcula la probabilidad de ojos marrones.

P (ojos marrones) $\frac{3}{4} = 0{,}75$

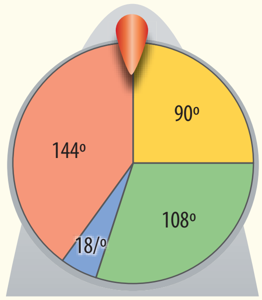
Así, la probabilidad de que tenga los ojos marrones es de 75 %.

a. El alelo dominante (B) determina pelo castaño y el alelo recesivo (b) pelo rubio.
Si el papa es Bb y la mamá bb, ¿cuál es la probabilidad de que el hijo sea rubio?

b. El alelo dominante (C) determina piel morena y el alelo recesivo (c) piel clara.
Si el papá es cc y la mamá CC, ¿cuál es la probabilidad de que el hijo tenga piel clara?

4. Calcula la probabilidad de cada suceso al hacer girar la ruleta.

Que caiga en el color amarillo



Los casos favorables de que salga el color amarillo son 90° y los casos totales son 360° (giro completo de la ruleta), por lo tanto, la probabilidad de que salga amarillo será:

$$P(\text{amarillo}) = \frac{90}{360} \approx 0{,}25$$

Así, la probabilidad es de un 25 %.

a. Que quede en el color verde.

b. Que quede en el color rojo o azul.

Aplica

5. En un *tour* por Valparaíso hay 20 turistas: 8 son franceses, 5 japoneses, 6 ingleses y 1 alemán.

a. Determina los casos favorables para el suceso “que el primero en subir al bus sea japonés”.

b. ¿Cuál es la probabilidad de este evento, si todos tienen la misma probabilidad de subir primero al bus?

6. La tabla muestra la cantidad de hombres y mujeres que estudia en un colegio técnico las especialidades de mecánica y contador.

	Mecánica	Contador
Mujeres	11	54
Hombres	**81**	54

a. Interpreta el dato destacado en gris.

b. Calcula la probabilidad de escoger al azar, del total de alumnos, una mujer que estudie mecánica.

c. Calcula la probabilidad de escoger al azar, del total de hombres, uno que estudie para contador.

7. En una tómbola hay 100 bolitas numeradas del 1 al 100. Identifica el espacio muestral y calcula la probabilidad de cada evento.

a. Que la bolita extraída sea 0.

b. Que la bolita extraída tenga tres cifras.

c. Que la bolita extraída tenga dos cifras y ambas sean pares.

8. Representa en una tabla y calcula la probabilidad de que en una familia que tiene dos hijos:

a. Ambos sean mujeres.

b. Ambos sean hombres.

c. Sea una mujer y un hombre.

9. En una empresa de linternas la probabilidad de que una falle antes de que cumpla el año de garantía es de 0,007. Si se vendieron 250 000 linternas durante el último año, calcula cuántas linternas se espera que tengan fallas antes de que venza el año de garantía.

10. Evalúa las afirmaciones con respecto a la siguiente situación. Para ello, marca V o F. Justifica las falsas.

"En un curso de 50 estudiantes, 18 quieren ir de paseo de fin de año a la playa y el resto, a la montaña".

a. ______ Es más probable que al seleccionar aleatoriamente a un estudiante, este quiera ir a la montaña.

b. ______ De los 50 estudiantes 34 quieren ir de paseo a la montaña.

c. ______ Aproximadamente, la probabilidad de escoger un estudiante que quiera ir a la montaña es de 0,036.

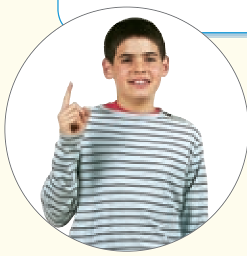
d. ______ Aproximadamente, la probabilidad de escoger un estudiante que quiera ir a la playa es de 0,034.

11. **Detecta el error.** ¿Cuál es la probabilidad de al lanzar dos dados, se obtenga primero un 3 y luego un 1?

Luis dice:

Yo calculé la probabilidad de obtener un 3 al lanzar el primer dado, luego la probabilidad de obtener un 1 al lanzar el otro dado y finalmente sumé estas probabilidades.

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$



12. **Desafío.** El profesor de música de un colegio asiste con sus estudiantes del taller de guitarra y flauta a ver un documental sobre la historia de la música chilena y los principales exponentes de cada estilo.

sexo \ taller	Taller de guitarra	Taller de flauta
mujer	15	24
hombre	15	21

a. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger un estudiante , este sea hombre y del taller de guitarra?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger un estudiante, este sea hombre o mujer?

13. **Argumenta.** ¿En cuál de los siguientes casos hay mayor probabilidad de ganar, si solo un número gana premio?

Comprando un número de una rifa de 10 números distintos enumerados del 1 al 10 o comprando un número de una rifa de 20 números enumerados del 1 al 10, cada uno repetido una vez. Justifica tu respuesta.

Reflexiono

Felipe lanza dos dados y anota la suma de los números obtenidos. Él dice que la probabilidad de obtener 11 puntos es la misma que obtener 12. ¿Estás de acuerdo con su afirmación? Comenta tu respuesta con los demás compañeras y compañeros.

Refuerzo

Gabriela participa en un concurso donde debe extraer una tarjeta de una bolsa negra. En ella hay 1 tarjeta con un viaje, 4 tarjetas con premios de consuelo y 3 tarjetas sin premio. ¿Cuál es la probabilidad de que Gabriela no tenga premio?

Lección 51

¿Cómo calcular probabilidades usando diagramas de árbol?

Propósito

Calcular probabilidades mediante diagramas de árbol.

¿Para qué?

Hay situaciones que presentan diversas etapas, de las cuales dependerá el resultado final del experimento, por ejemplo, al elegir los sabores e ingredientes de un helado o armar el menú del día. En este tipo de circunstancias es conveniente realizar una representación a través de un diagrama de árbol, que visualiza no solo todas las opciones de resultados, sino que además permite calcular la probabilidad de que ocurran.

Palabras clave

Espacio muestral
Diagrama de árbol

Taller Posibles combinaciones

Reúnanse en parejas y realicen el siguiente juego.

1. Busquen tres monedas iguales y cada uno láncelas una vez al mismo tiempo. Gana quien obtiene solo dos caras en su lanzamiento.

   ¿Quién ganó?

   ____

2. Analicen el juego por medio de las siguientes preguntas:

   a. ¿Cuántas combinaciones o posibilidades de cara y sello existen al realizar los tres lanzamientos? Muestren con un dibujo, las combinaciones.

   b. ¿Cómo podrían determinar *a priori* la probabilidad de ganar, es decir, de solo obtener dos caras en los tres lanzamientos? Discutan un procedimiento confiable.

   ____

   c. ¿Cuál sería la probabilidad de perder? Justifiquen.

   ____

   d. ¿Qué sucede con la probabilidad de ganar si solo lanzan dos monedas?

   ____

   e. ¿Qué sucede con la probabilidad de ganar si se agrega una cuarta moneda?

   ____

   f. Armen una presentación para mostrar las combinaciones al curso de manera gráfica y los resultados del taller.

   ____

   g. Evalúen las distintas alternativas del curso y, de ser necesario, replanteen su estrategia.

   ____

Situación Diagrama de árbol

Andrés selecciona la ropa que usará para su fiesta de cumpleaños.
Puede elegir entre 4 poleras de distinto color: roja, amarilla, azul y verde.
Además, escoge un pantalón entre 3 opciones, café, azul o negro.
Si escoge al azar una polera y un pantalón, ¿cuál es la probabilidad de que Andrés elija la polera azul y el pantalón negro?

Paso 1 Representa las posibilidades de polera.

Paso 2 Para cada polera representa las opciones de pantalón en un diagrama de árbol.

Paso 3 Cuenta la cantidad de combinaciones que corresponde al espacio muestral y observa cuántas son polera azul y pantalón negro para conocer los casos favorables.

Esta fila representa las distintas poleras que puede elegir Andrés, que son 4.

Esta fila señala que por cada polera, Andrés puede elegir un pantalón entre 3 diferentes.

Esta fila muestra todas las combinaciones que se pueden determinar al combinar 4 poleras con 3 pantalones.
$4 \cdot 3 = 12$

Hay ______ tenidas y solo ______ es polera azul y pantalón negro, por lo tanto, la probabilidad de escoger esta tenida es:

$$\frac{\square}{\square} \approx 0{,}083 \rightarrow \square\ \%$$

Para concluir

- Los **diagramas de árbol** permiten representar gráficamente los **espacios muestrales** de experimentos aleatorios formados por varias etapas o que se repiten dos o más veces. De esta manera, se puede calcular la probabilidad de ocurrencia de cada uno de los sucesos.
- Para calcular la cantidad de elementos del espacio muestral usando diagrama de árbol, se puede multiplicar la cantidad de elementos de cada etapa o fila del árbol.

Lección 52

Practiquemos lo aprendido

Repaso

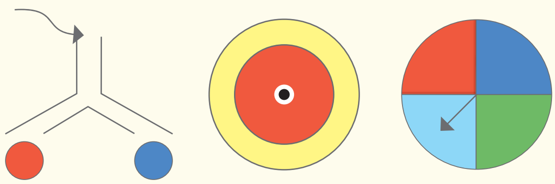
1. Describe el conjunto de los casos favorables para los siguientes sucesos.

a. Lanzar dos dados y que salga en ambos un número mayor que 3.

b. De una urna con 4 bolitas negras y 7 blancas, sacar dos bolitas y que al menos una de ellas sea negra.

2. Analiza la siguiente situación.

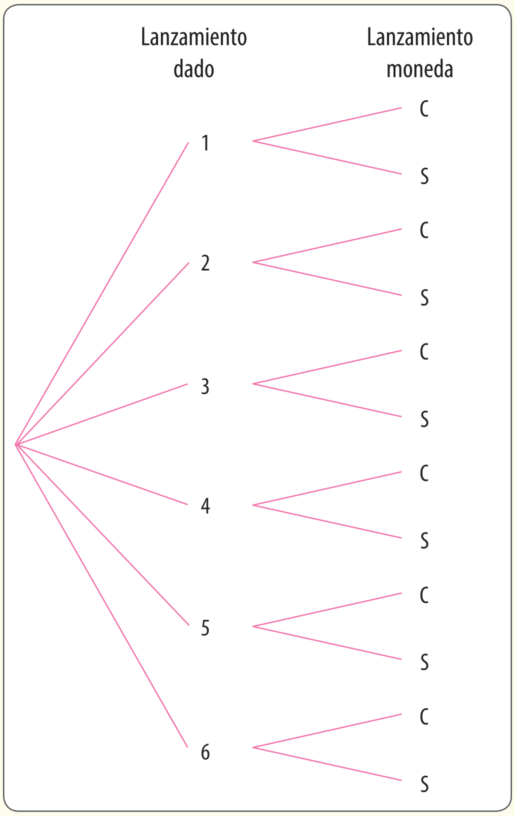
En un parque de diversiones se dispone de tres tipos de juegos en los que gana el participante que acierte al color rojo.



¿En cuál de los juegos anteriores es más probable ganar? Justifica tu elección.

Práctica guiada

3. Interpreta la información dada en el diagrama de árbol.



¿Qué experimento aleatorio representa el diagrama de árbol?

Los resultados posibles de lanzar un dados de 6 caras y una moneda.

a. ¿Cuál es el espacio muestral?

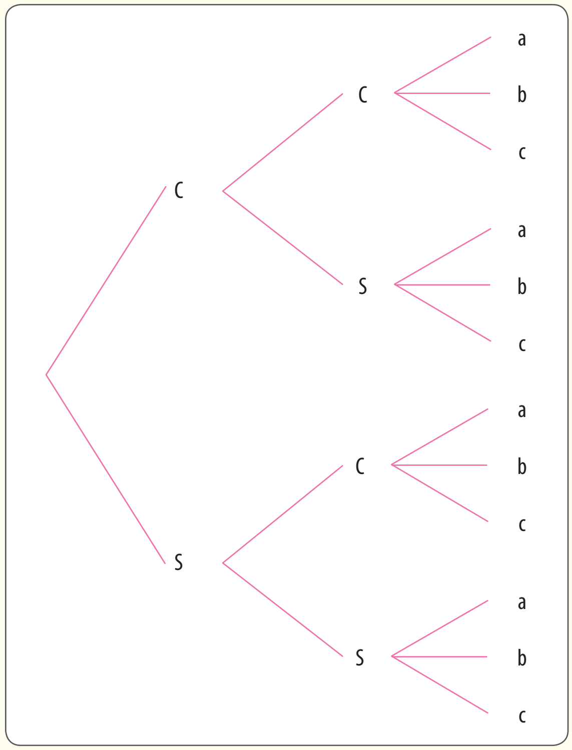
b. ¿En cuántos casos se obtiene un sello?

c. ¿En cuántos casos se obtiene un número primo en el dado?

d. ¿En cuántos casos se obtiene una cara y un número par de puntos?

Aplica

4. El siguiente diagrama de árbol representa el lanzamiento de dos monedas y sacar al azar un papel de una bolsa con las letras a, b y c.



a. ¿Cuál es el espacio muestral?

b. ¿En cuántos casos se obtiene solo un sello?

c. ¿En cuántos casos se extrae un papel que contiene la letra b?

d. ¿Cuál es la probabilidad de obtener CCa?

5. **Verónica tiene 3 jeans, 4 poleras y dos pares de zapatos.**

a. Representa los casos posibles de las tenidas que puede armar utilizando un diagrama de árbol.

b. Calcula la cantidad de combinaciones que puede armar Verónica con las prendas que tiene.

6. **Representa cada experimento por medio de un diagrama de árbol.**

a. Lanzamiento de un dado y de una moneda.

b. Lanzamiento de una moneda y de un dado.

c. ¿Qué sucede con el espacio muestral en los experimentos a. y b.? ¿Por qué?

7. **Representa en un diagrama de árbol para responder.**

En un restaurante se tiene las siguientes opciones en el menú.

Menú del día

Platos:
– espagueti alfredo
– carne mechada
– humita

Jugo:
– naranja
– frutilla

Postre:
– jalea
– macedonia

a. Si el menú del día incluye un jugo, un plato de fondo y un postre, ¿cuántos menús ofrece el restaurante?

b. Si Antonio no consume carne, ¿cuántos posibilidades de menú existen para él?

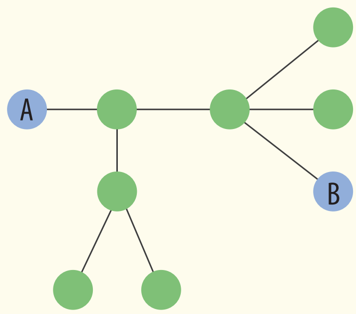
8. **Experimenta.** **Escribe en papelitos del mismo tamaño las letras: S, S, S, I, I, N, N, O y colócalas en una bolsa.**

a. Saca una letra, anótala y luego vuelve a ponerla en la bolsa. Luego, saca otra letra y anótala. ¿Cuál es la probabilidad de formar la palabra SI?

* Nota: Repite el experimento tantas veces como desees.

b. Compara el resultado anterior realizando un diagrama de árbol para calcular la probabilidad.

9. **Desafío.** **A una persona se le cae un objeto a la cañería desde el punto marcado en A. Supón que cada vez que el objeto llega a uno de los puntos marcados con verde tiene las mismas probabilidades de seguir por cualquier camino, pero sin retroceder. ¿Cuál es la probabilidad de que el objeto salga por el desagüe marcado en B?**



Reflexiono

1. Al representar el espacio muestral de un experimento aleatorio en un diagrama de árbol que cuenta con varias etapas, ¿importa el orden? Da un ejemplo para justificar tu respuesta.
2. ¿Es posible asegurar que en un diagrama de árbol todos los eventos son equiprobables? ¿Por qué? Comenta y compara tu respuesta con tus compañeros y compañeras.

Refuerzo

1. Calcula la cantidad de caminos posibles que tiene un automóvil para realizar su recorrido desde el punto A hasta el punto D, si de A a B tiene 2 caminos, de B a C, 3 caminos y de C a D, 2 caminos.
2. Al comprar un helado se puede elegir si se quiere en vaso o en cono. Además, los sabores disponibles son chocolate, lúcuma, manjar, frutilla y vainilla. ¿Cuál es la probabilidad de que, al escoger al azar a un cliente, este haya comprado un helado en cono de frutilla?

Actitud: Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros y considerando los aportes de todos.

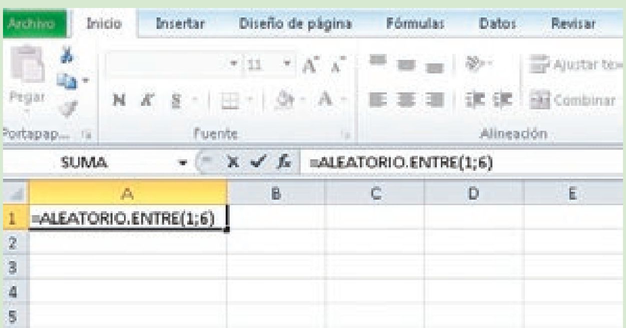
Simulando experimentos aleatorios con *Excel*

El software Excel es una herramienta que facilita la comprensión de conceptos matemáticos. Con él se puede, entre otras cosas, organizar datos en tablas (tabular) y manipularlos a través de la aplicación de ciertos comandos, con los que se obtienen diversos tipos de cálculos y a partir de estos se pueden generar sus gráficos asociados.

A continuación, realicen en parejas los siguientes pasos para simular la suma en el lanzamiento de dos dados. Luego, desarrollen las preguntas de la actividad.

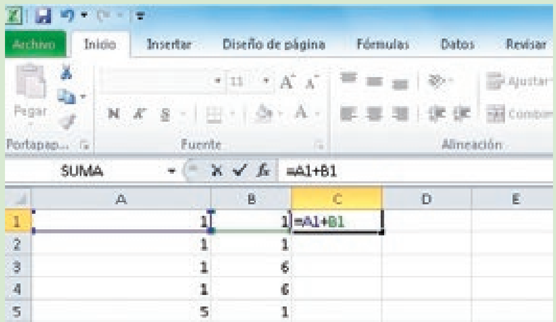
01

Ingresen dos listas de 7000 números aleatorios. Para ello, en la celda A1 escriban = ALEATORIO.ENTRE(1;6) como se muestra en la imagen y presionen ENTER. Luego, arrastren la esquina inferior derecha de la celda hacia abajo hasta llegar a la celda A7000. Repitan el procedimiento en la celda B1.



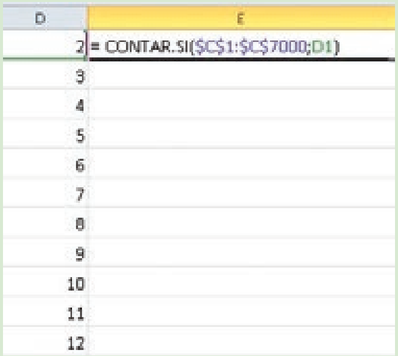
02

Sumen los resultados de las listas A y B. Para ello, en la celda C3 escriban =A1 + B1, como se muestra en la imagen y presionen ENTER. Luego, arrastren la esquina de la celda hasta llegar a la C7000.



03

Cuenten los resultados obtenidos. Para ello, escriban desde la celda D1 hasta la D11 los números del 2 al 12, que representan las posibles sumas de los dados. Luego, en la celda E1 escriban = CONTAR.SI($C$1:$C$7000;D1) y arrastren la esquina de la celda hasta la E11, lo que arroja la cantidad de veces que se obtiene la posible suma de los dados.



04

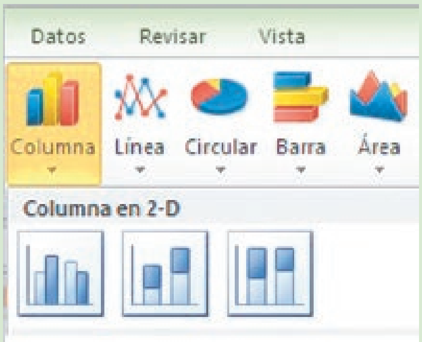
Dividan la cantidad de veces de las posibles sumas de los dados por 7000. Para ello, en la celda F1 escriban = E1/7000 y presionen ENTER. Luego, arrastren la esquina de la celda hasta la F11.

05

Multipliquen por 100 el resultado de la celda F1 hasta la F11. Para ello, en la celda G1 escriban = F1*100 y presionen ENTER. Luego, arrastren la esquina de la celda hasta G11.

06

Grafiquen los resultados. Para esto, seleccionen los datos de las celdas desde G1 hasta la G11. A continuación, presionen la opción insertar y seleccionen columna agrupada, como se muestra en la imagen. Finalmente, presionen el botón derecho del mouse sobre el eje horizontal, elijan Seleccionar datos y en Etiquetas del eje horizontal presionen Editar y seleccionen los datos del D1 al D11 en la columna D.



ACTIVIDAD EN GRUPO

1. Con respecto a los resultados obtenidos en el paso 2, ¿cuáles son los máximos y mínimos valores que se pueden obtener?, ¿por qué?
2. Si se suman los valores obtenidos en el paso 4, ¿qué valor se obtiene?, ¿por qué? Comparen su respuesta con los demás equipos.
3. ¿Qué representan los valores obtenidos en el paso 4? Fundamenten su respuesta.
4. Comparen los resultados obtenidos de las frecuencias relativas con la probabilidad teórica de Laplace. ¿A qué se debe la diferencia entre estos valores? Expliquen
5. ¿Qué información está representada en el grafico obtenido? Generen conclusiones e intercámbienla con otro equipo.
6. En una nueva hoja de Excel, repitan la actividad y analicen los resultados, ¿cómo son respecto a los presentados en el mural? Justifiquen lo que observan.

¿Cómo voy?

Lección 49: Describir espacio muestral, evento y casos favorables en experimentos aleatorios

1 **Clasifica los experimentos en aleatorios o determinístico.**

a. Poner un hielo al sol.
b. Abrir un libro en cualquier página y que salga una ilustración.
c. Ganar un premio de una rifa.
d. Extraer de una bolsa con bolas de color rojo una bola roja.
e. Tirar una sandía de una escalera hacia al piso.

2 **Se lanza un dado con forma de dodecaedro, con caras numeradas del 1 al 12:**

a. Escribe el espacio muestral.
b. Escribe los casos favorables del evento "que salga número impar".

3 **El experimento "sacar una carta del naipe inglés" se ha caracterizado por los siguientes subconjuntos de casos favorables. Para cada uno escribe el evento que lo generó.**

a. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10}
b. B = {1, 2, 3,4}
c. C = {3, 5, 7, 9}
d. D = {J, Q, K}

Lección 50: Analizar experimentos equiprobables a través de la frecuencia relativa

4 **La siguiente tabla muestra las veces que ha salido cada uno de los 25 números del juego KIMO, en un total de 992 juegos.**

Número	Cantidad sorteos	Número	Cantidad sorteos
1	958	14	940
2	933	15	958
3	889	16	915
4	946	17	933
5	967	18	976
6	911	19	920
7	953	20	937
8	941	21	920
9	949	22	926
10	979	23	935
11	944	24	952
12	982	25	989
13	938		

a. ¿A qué número tiende la probabilidad frecuencial de cada número?
b. ¿Se puede considerar que este juego es un experimento equiprobables?

5 **Se lanzan dos dados de seis caras 100 000 veces y se suman los números obtenidos.**

Suma de los números obtenidos al lanzar dos dados de seis caras		
Suma	f	f_{rel}
2	2739	0,02739
3	5520	0,05520
4	8207	0,08207
5	11 163	0,11163
6	13 904	0,13904
7	16 591	0,16591
8	13 980	0,13980
9	11 068	0,11068
10	8414	0,08414
11	5656	0,05656
12	2758	0,02758

a. ¿Cuál es la moda de los resultados obtenidos?
b. ¿Cuál es la probabilidad frecuencial de obtener una suma igual a 11?

c. ¿Por qué la frecuencia absoluta de una suma igual a 4 es aproximadamente el triple de obtener una suma igual a 2?

d. ¿Son equiprobables los resultados de este experimento?, ¿por qué?

Lección 51: Determinar la probabilidad de un evento de manera teórica

6 **Define qué datos necesitas para calcular las siguientes probabilidades.**

a. Escoger un chocolate al azar de una caja de bombones.

b. Comprar una licuadora nueva y que esta salga defectuosa.

7 **En la clase de Matemática hay 22 alumnos con pelo castaño, 4 rubios, 1 pelirrojo y 5 con pelo negro.**

a. Calcula la probabilidad de que el alumno tenga pelo negro.

b. Calcula la probabilidad de que no sea de pelo castaño.

Lección 52: Calcular probabilidades mediante diagramas de árbol

8 **En un restaurante se presenta el siguiente menú:**

Menú del día

Platos:
– pollo asado
– merluza frita
– carne al jugo

Acompañamientos:
– ensalada mixta
– puré
– arroz
– papas fritas

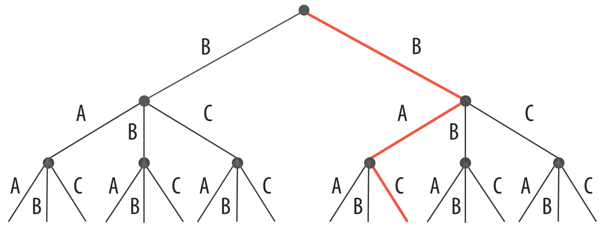
Bebidas:
– jugo
– bebida

Postre:
– duraznos al jugo
– helado

a. ¿Cuántas opciones distintas se pueden armar a partir del menú del día?

b Una persona está muy indecisa y decide pedir al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que pida carne al jugo con papas fritas, bebida y helado de postre?

9 **A partir del diagrama de árbol responde.**



a. ¿Cuántos elementos tiene el espacio muestral?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger al azar salga el “camino” marcado en rojo?

Desafío de integración

1. Un laboratorio farmacéutico crea dos medicamentos, alercín y alergiol, para mejorar los síntomas de la alergia al polen. Se realiza un experimento para saber cuán eficaces son estos medicamentos, obteniéndose que alercín logra que 72 pacientes mejoren de 90 a los que se le aplicó, mientras que alergiol logra mejoras en 42 de 75 pacientes. ¿Cuál de los dos medicamentos es más eficaz? Explica tu procedimiento.

2. En una urna hay 20 bolitas. La probabilidad de cada evento posible es:

Que sea azul: 20%
Que sea verde: 50%
Que sea roja: 30%
Que sea negra: 0%

a. ¿Cuántas bolitas hay de cada color?

b. ¿Cuántas bolitas forman el espacio muestral?

Resolución de problemas

Actitud: Valorar el aporte de los datos cuantitativos en la comprensión de la realidad social.

Usar problemas más sencillos

Cuando un problema posee varias opciones o etapas, se puede plantear un problema similar pero que sea más simple, de manera que se pueda aplicar el procedimiento del problema simple al original.

Estrategias

- Hacer un diagrama.
- Usar ensayo y error sistemático.
- Usar problemas más sencillos.
- Hacer una tabla.
- Encontrar un patrón.
- Plantear una ecuación o una inecuación.
- Usar razonamiento lógico.

En un campeonato de fútbol regional se enfrentarán 8 equipos en los cuartos de final para determinar al campeón del año. Los 8 equipos formarán 4 parejas para definir las 4 escuadras que pasarán a semifinales. Los habitantes del pueblo de Cuycuy están muy entusiasmados y sueñan con conseguir el título por primera vez en su historia.

Como el equipo favorito y campeón de los últimos 7 torneos es Los Cóndores, los hinchas de Deportes Cuycuy esperan que su equipo no deba enfrentarse con ellos en esta primera instancia de eliminación. Si las parejas se elegirán al azar y cada equipo tiene la misma probabilidad de ser elegido, ¿cuál es la probabilidad de que Deportes Cuycuy se enfrente a Los Cóndores en los cuartos de final?

¿Qué se quiere saber una vez resuelto el problema?

¿Qué datos tienes para resolver?

Crea un plan para resolver

Para resolver puedes aplicar la estrategia Usar problemas más sencillos. Por ejemplo, puedes considerar primero que hay 2 equipos en lugar de 8 y luego, 4 equipos en lugar de 8. Y una vez que identifiques una regularidad, puedes aplicarla al problema con los 8 equipos.

Aplica la estrategia

Si consideras solo los equipos Deportes Cuycuy y Los Cóndores, entonces, evidentemente, la probabilidad de que se enfrenten es 1, ya que es un suceso seguro.
Si consideras solo 4 equipos, por ejemplo, Deportes Cuycuy, Los Cóndores, Los renegados y Deportivo Cuz, el equipo de Cuycuy puede emparejarse de las siguientes maneras:
Cuycuy-Los Cóndores, ________-________ y ________-________.
Como la probabilidad de que se conforme cada una de estas parejas es la misma, la probabilidad de que Deportes Cuycuy se enfrente a Los Cóndores es:

- Cantidad de casos favorables: ________
- Cantidad de casos totales: ________
- P: ________

Resuelve

Estudia esta probabilidad para 6 equipos e identifica la regularidad existente. Ahora aplica la estrategia considerando los 8 equipos clasificados:

- Cantidad de casos favorables: ______
- Cantidad de casos totales: ______
- Probabilidad de que Deportes Cuyuy enfrente a Los Cóndores: ________

Verifica la respuesta

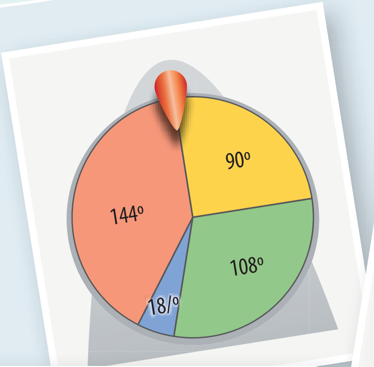
Comunica la respuesta

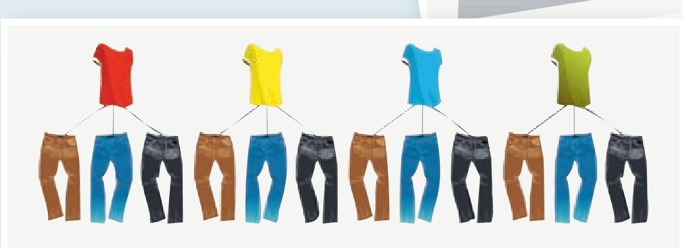
Vuelvo a mis procesos

Observa las imágenes centrales y completa.

¿Qué temas de los estudiados en esta sección aplicas en la vida cotidiana?

Si tuvieras que elegir uno de los temas de esta sección para explicárselo a un amigo o amiga, ¿cuál elegirías?, ¿por qué? Describe brevemente cómo lo harías.





¿Cuál crees que fue el motivo de estudiar la sección de probabilidad a través de juegos?

En la lección 51 decía la frase de Laplace: *"En el fondo, la teoría de la probabilidad es solo sentido común expresado con números".* ¿Qué opinas de esta frase? ¿Estás de acuerdo? ¿Por qué?

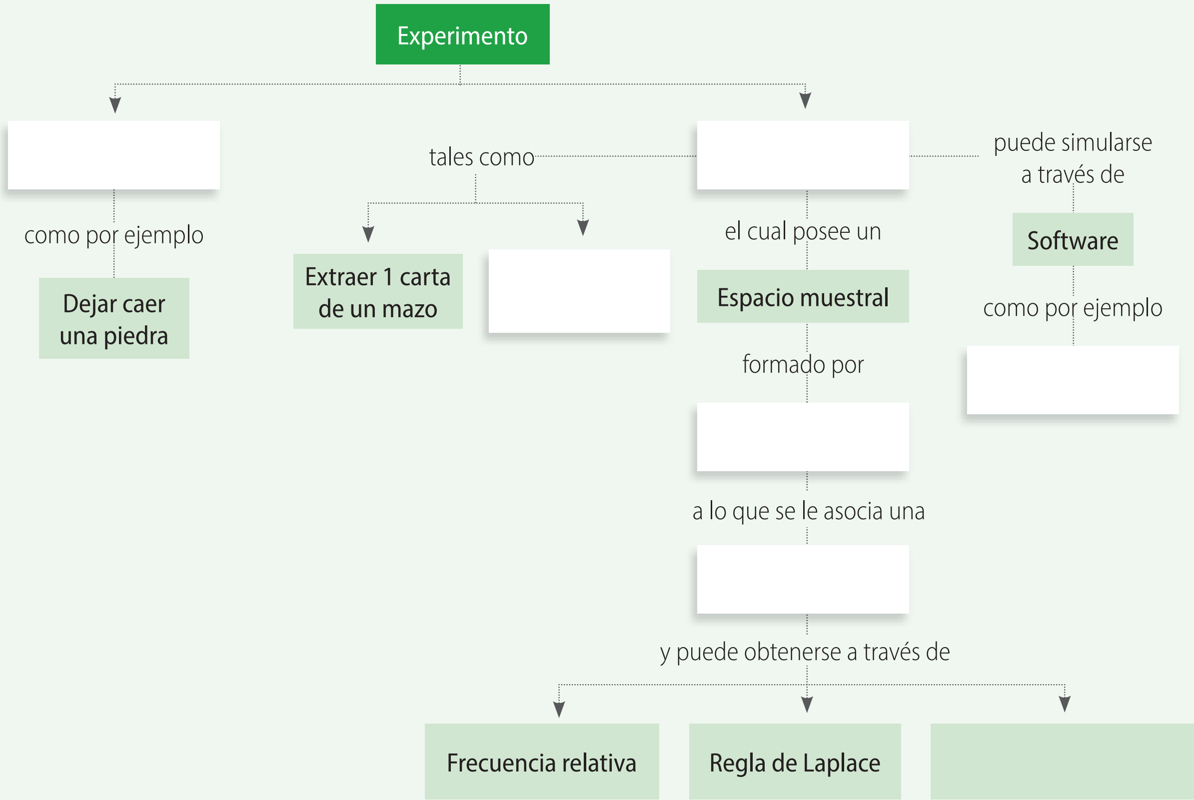
De las metas que te propusiste al principio, ¿cuáles cumpliste y cuáles te faltaron? ¿Qué harías para superar las deficiencias?

Sintetizo mis aprendizajes

¿Cómo se llama?

Completa el mapa conceptual correspondiente a la sección de Probabilidades. Para ello, ubica los conceptos donde corresponda.

Aleatorio – Determinístico – Lanzar un dado – Sucesos o eventos – Probabilidad – Diagrama de árbol – Excel



Organiza los aprendizajes trabajados en la sección 10 y 11 construyendo un mapa conceptual en tu cuaderno.

¿Cómo se hace?

- **Pregunta 1**

¿Qué métodos se pueden utilizar para organizar un conjunto de datos en una tabla de frecuencias?

- **Pregunta 2**

¿Qué criterios es posible aplicar para establecer las diferencias y semejanzas entre dos o más muestras?

- **Pregunta 3**

¿Cuáles son los pasos a seguir para calcular la probabilidad de una situación por medio de un diagrama de árbol?

Muestreo y representación de datos

1. Determina en cada caso la población y la muestra.

a. Se entrevista a 500 personas para conocer el equipo de fútbol preferido de los chilenos.

b. Para conocer mi rendimiento escolar, mis padres analizan mis mejores notas.

c. Para analizar las temperaturas máximas diarias de abril en Arica, se registran las temperaturas máximas de 5 días seguidos.

d. Para saber el uso dado a Internet en un edificio, se realiza una encuesta en tres departamentos con Internet.

2. Pide a un compañero o compañera que coloque en una bolsa papelitos de colores azul, rojo, negro (como máximo 15 en total), pero sin decirte cuántos hay de cada color. Realiza un muestreo y estima el porcentaje de papelitos de cada color en la bolsa.

3. Analiza la tabla.

Cantidad de cuadernos comprados por un grupo de personas			
Cantidad de cuadernos	f	F	f_{rel}
1	19	19	0,121
2	37	56	0,236
3	45	101	0,287
4	38	139	0,242
5	18	157	0,115

a. ¿Cuántas personas en total compraron cuadernos?

b. ¿Cuántos cuadernos se compraron?

c. ¿Cuántas personas compraron menos de 4 cuadernos??

4. Analiza los datos acerca de la edad de la población cesante en una localidad.

25	31	47	26	59	50	28	30
55	48	52	51	49	53	25	60
50	27	57	56	26	62	60	44
30	54	53	60	30	61	25	63

a. ¿Cuál es el mínimo y cuál es el máximo?

b. Calcula el rango.

5. Define la variable en estudio en cada tabla y representa en un gráfico adecuado de acuerdo al tipo de variable.

a. Tabla 1: Número de funciones realizadas por un grupo de teatro en Chile, Brasil y Argentina entre el 2010 y 2012.

	2010	2011	2012
Chile	5	7	3
Brasil	1	4	2
Argentina	10	8	7

b. Tabla 2: Distribución de ingresos extras de una persona acuerdo al tipo de entrada.

	Porcentaje
Jubilación	37 %
Arriendo	15 %
Otros	48 %

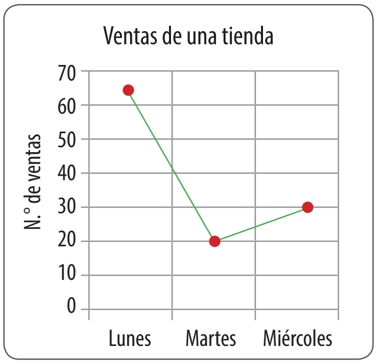
Medidas de tendencia central

6. **En cada caso calcula la(s) medida(s) de tendencia central.**

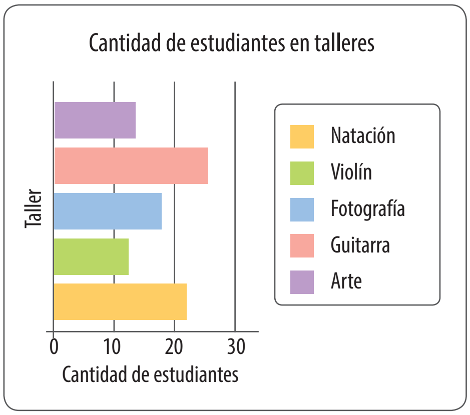
a. Las flores que plantó un grupo de jóvenes en el taller de ecología.

Flores plantadas	
Cantidad de jóvenes	Cantidad de flores plantadas
1	2
2	3
3	7
4	1
5	19
Total	32

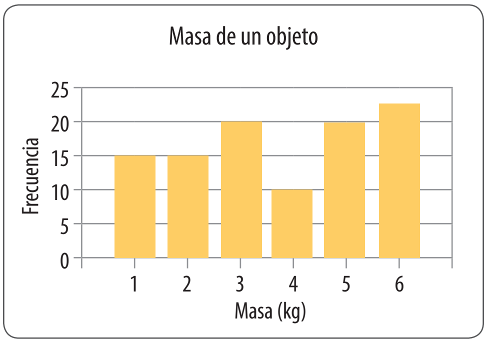
b. Ventas de una tienda durante los días posteriores a su inauguración.



c. La cantidad de estudiantes inscritos en los talleres del viernes en su colegio.

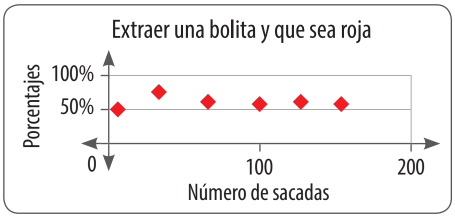


7. **De acuerdo al gráfico, ¿en qué intervalo podría estimarse la mediana?**



Probabilidades

8. **En la caja hay 5 bolitas de colores rojo y azul. Se extrae una bolita 10 , 30, 60, 90, 120 y 150 veces obteniendo los siguientes resultados:**



Si se repite el experimento 400 veces, ¿qué color de bolita es más probable que salga? ¿Por qué?

9. **La selección chilena de fútbol tiene 2 colores de camisetas (blanca y roja), 2 colores de pantalones (azules y blancos) y 2 colores de calcetas (azules y blancas).**

a. ¿Cuál es la cantidad de tenidas distintas que se pueden armar para jugar?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que salgan vestidos con la tenida tradicional (polera roja, pantalón azul y calcetas blancas)?

¿Qué aprendí?

Parte I Evaluación de contenidos.

En los ejercicios 1 al 7 selecciona la alternativa correcta. (7 puntos)

1 En un estudio odontológico se analizan muestras dentales de acuerdo al color (que va desde el blanco radiante al gris opaco), la medida (en milímetros) y el nivel de descalcificación (alto, medio, bajo). ¿De qué tipo son las variables mencionadas respectivamente?

A. Cuantitativa, Cualitativa, Cuantitativa.
B. Cualitativa, Cuantitativa, Cuantitativa.
C. Cualitativa, Cualitativa, Cuantitativa.
D. Cualitativa, Cuantitativa, Cualitativa.

2 En una fábrica de tornillos se realiza un control de calidad eligiendo 1 de cada 100 tornillos producidos. ¿Cuál es la población de estudio?

A. Solo los tornillos en buen estado producidos en la fábrica.
B. El 1 % de los tornillos producidos en la fábrica.
C. El 100 % de los tornillos producidos en la fábrica.
D. Solo los tornillos en mal estado producidos en la fábrica.

3 ¿Cuál de las siguientes muestras es más representativa de la población de estudiantes de un colegio?

A. Los estudiantes de mejor rendimiento de cada curso.
B. Cinco estudiantes de cada curso.
C. Solo los estudiantes que rinden la PSU este año.
D. Los estudiantes de mejor asistencia del colegio.

4 Se ha tomado una muestra representativa de los asistentes a un concierto para conocer sus edades.

Estas son: 13 – 25 – 15 – 14 – 14 – 15 – 18 – 48 – 32 – 16 – 15 – 12.

El rango de edades es:

A. 36
B. 48
C. 30
D. 60

5 ¿Cuál es el espacio muestral del experimento aleatorio “girar la ruleta y verificar el número indicado por la flecha”?

A. {1, 2, 3, 4}
B. {5, 6, 7, 8}
C. {2, 4, 6, 8}
D. {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}

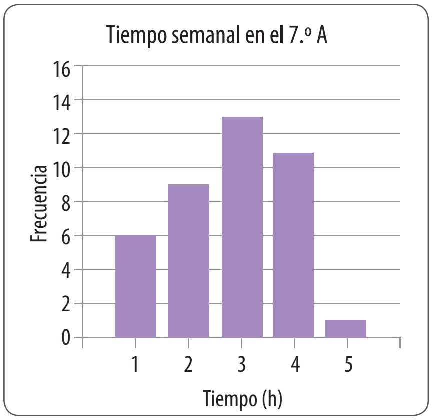
6 ¿Cuál es la probabilidad de sumar 6 al lanzar dos dados?

A. $\frac{1}{6}$
B. $\frac{1}{36}$
C. $\frac{5}{36}$
D. $\frac{1}{2}$

7 Cristina tiene en su monedero 5 monedas de \$ 100; 4 de \$ 50 y 3 de \$ 10. Si saca dos monedas sin mirar, ¿cuál es la probabilidad de que saque \$ 150?

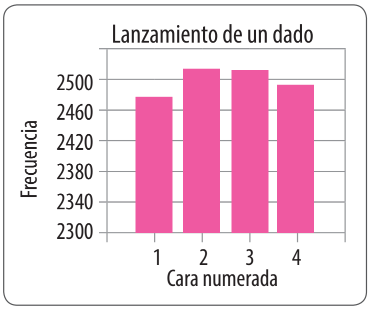
A. $\frac{3}{4}$
B. $\frac{10}{33}$
C. $\frac{1}{6}$
D. $\frac{5}{33}$

8 En un colegio se encuestó sobre el tiempo semanal que dedican los estudiantes de un curso en realizar un proyecto tecnológico. Si el gráfico representa los datos recogidos, ¿cuál es el promedio de horas dedicadas? (2 puntos)



Parte II Evaluación de habilidades

1 El siguiente gráfico representa el resultado de 10 000 lanzamientos de un dado de 4 caras numeradas del 1 al 4:

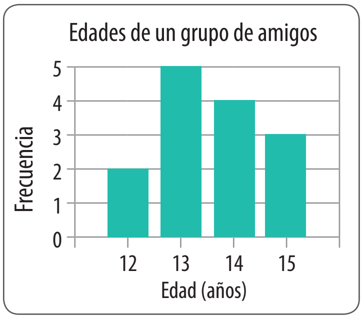


¿Cuál es la frecuencia relativa aproximada de obtener la cara numerada con un 4? (3 puntos)

2 A un partido asisten 115 hinchas del equipo Corazón de fútbol y 285 del equipo Peloteros. En un sorteo para elegir al azar a un hincha que saldrá en un eslogan sobre el espíritu deportivo, ¿cuál es la probabilidad de escoger a un hincha del equipo Corazón de fútbol? (2 puntos)

3 En una bolsa se colocan papelitos de colores del mismo tamaño. No se sabe cuántos papelitos hay en total en la bolsa ni de qué colores, por lo que se realizan 800 extracciones (siempre devolviendo el papelito que se saca). Los resultados fueron los siguientes: 390 papelitos de color azul, 240 papelitos de color rojo y 170 de color verde. Si en la bolsa hubiese 50 papelitos en total, ¿cuántos papelitos de cada tipo probablemente habría? (3 puntos)

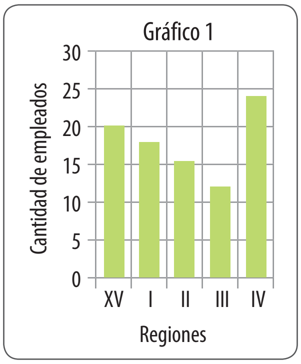
4 A partir del gráfico crea un problema. Luego genera dos preguntas referentes a medidas de tendencia central.

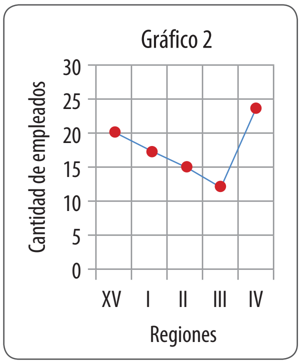


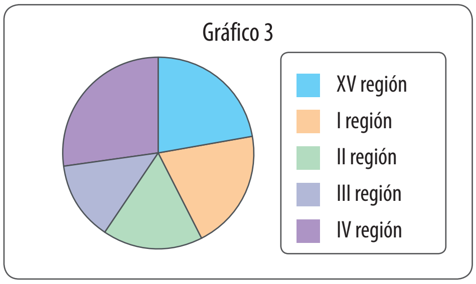
Intercambia tu creación y preguntas con un compañero o compañera y responde sus preguntas. (3 puntos)

5 En un espectáculo gratuito en la playa había 680 espectadores (hombres y mujeres). Una muestra de 100 espectadores fue tomada al azar y en ella había 60 mujeres. ¿Cuál es la cantidad más probable de mujeres en el espectáculo? (2 puntos)

6 ¿Cuál es el gráfico que mejor representa la información sobre el número de empleados en una cadena de panadería a lo largo de la zona norte del país? Argumenta tu elección. (3 puntos)







7 En la tabla a continuación se presentan las medidas de tendencia central de las notas de cuatro cursos respecto de los promedios de biología ¿En cuál de los tres cursos puede asegurarse que al menos el 50 % tiene nota promedio superior a 5,2? Justifica. (3 puntos)

Curso	Media	Mediana	Moda
7.º A	5,4	5,1	5,7
7.º B	5,2	4,9	5,5
7.º C	5,1	5,2	4,7
7.º D	5,1	4,9	5,2

Registra tus aprendizajes

PARTE I Para repasar contenidos

Cuenta el puntaje que obtuviste en la parte I y II de la evaluación. Luego, repasa según tu nivel de logro.

Contenido	Logrado	Por lograr	Repasa en...
Muestreo y representación de datos (Actividades 1, 2 y 3)	2 o 3 puntos	0 o 1 punto	Lecciones 40 y 41
Medidas de tendencia central (Actividades 4 y 8)	2 o 3 puntos	0 o 1 punto	Lecciones 45 y 47
Probabilidades (Actividades 5, 6, y 7)	2 o 3 puntos	0 o 1 punto	Lecciones 49, 50 y 51

PARTE II Para practicar habilidades

Contenido	Logrado	Por lograr	Repasa en...
Representar (Actividad 1)	2 o más puntos	1 o menos puntos	Cuaderno de ejercicios, página 163
Modelar (Actividades 2, 3 y 4)	5 o más puntos	4 o menos puntos	Cuaderno de ejercicios, página 163
Resolver problemas (Actividades 5 y 6)	3 o más puntos	2 o menos puntos	Cuaderno de ejercicios, página 163
Argumentar y comunicar (Actividades 7)	4 o más puntos	3 o menos puntos	Cuaderno de ejercicios, página 163

Actitud: Trabajar en equipo, en forma responsable y proactiva, ayudando a los otros y considerando los aportes de todos.

Desafío en equipo

Al terminar esta unidad los invitamos a formar parejas para de manera creativa y reflexiva resolver el desafío.

Varones contra mujeres

1. Cuenta la historia acerca de un sultán que pensó en aumentar el número de mujeres de su país con respecto al número de hombres, para que estos pudieran tener harenes más grandes. Para lograrlo formuló la siguiente ley: **"En cuanto una madre dé a luz su primer hijo varón, se le prohibirá tener más niños".**

Así algunas familias tendrían varias mujeres y solo un varón, pero ninguna familia podría tener más de un varón.

No pasaría mucho tiempo sin que el número de mujeres no fuera mayor que el de varones.

¿Qué sucedió con la ley del sultán? ¿Por qué no dio resultado?

Fuente: http://www.librosmaravillosos.com/matematicaparadivertirse/seccion07.html

2. Tomando en consideración los contenidos, las habilidades y las actitudes desarrollados en esta unidad, ¿qué nivel de dificultad representó este desafío para ustedes? ¿Por qué? ¿En qué fallaron? Respondan individualmente.

Abscisa: primera coordenada de un par ordenado.

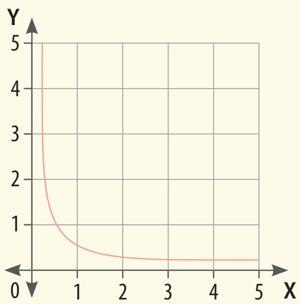
Altura: segmento que une perpendicularmente un vértice de un triángulo con su respectivo lado opuesto.

Amplitud: diferencia entre el límite inferior y el límite superior de un intervalo.

Ángulo: región comprendida entre 2 rayos con un origen común.

Área: medida de la región o superficie de una figura en 2D. Se expresa en unidades cuadradas.

Asíntota: rectas que se aproximan cada vez más a la curva de un gráfico sin intersecarla. Por ejemplo, en la curva que representa la proporcionalidad inversa, las asíntotas corresponden a los ejes X e Y.



Baricentro: centro de gravedad.

Base de una potencia: en la potencia 10^3, la base es 10.

Binomio: expresión algebraica que consta de dos términos.

Bisectriz: recta que divide un ángulo en dos ángulos congruentes.

Centésima: cada una de las cien partes iguales en que se divide un entero. Cifra que ocupa la segunda posición a la derecha de la coma en un número decimal. Por ejemplo, en 3,487, la centésima es 8.

Centro de gravedad: punto de intersección de las transversales de gravedad de un triángulo.

Circuncentro: punto de intersección de las simetrales de un triángulo.

Circunferencia circunscrita: la circunferencia que contiene todos los vértices de una figura, se dice circunscrita a esta.

Circunferencia inscrita: circunferencia que se halla al interior de un polígono y es tangente a todos los lados de este.

Coeficiente numérico: factor numérico de un término algebraico.

Constante de proporcionalidad directa: cociente constante entre cantidades o variables que son directamente proporcionales.

Constante de proporcionalidad inversa: producto constante entre cantidades o variables que son inversamente proporcionales.

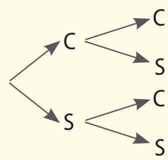
Coordenadas cartesianas: par ordenado que identifica la posición de un punto en el plano cartesiano.

Dato: valor (cantidad o cualidad) observado de una variable.

Décima: cada una de las diez partes iguales en que se divide un entero. Cifra que ocupa la primera posición a la derecha de la coma en un número decimal. Por ejemplo, en 2,357, la décima es 3.

Diagonal: segmento que une dos vértices no consecutivos en una figura 2D.

Diagrama de árbol: diagrama que representa todos los posibles resultados o combinaciones de un experimento (espacio muestral). Por ejemplo, lanzar dos veces una moneda.



Diámetro: segmento que une dos puntos de la circunferencia y pasa por el centro. El diámetro mide el doble del radio.

Dirección: línea recta que describe una orientación.

Distribución: forma en que los datos se dispersan en una muestra o población.

Ecuación: igualdad en la que aparece una incógnita o término desconocido y se verifica para algunos valores de ella. Por ejemplo, $x + 2 = 20$.
Se verifica para $x = 18$.

Elemento neutro: número que operado con cualquier otro, no lo altera. Por ejemplo, el elemento neutro de la adición en los enteros es el cero.

Escala: relación matemática entre las distancias representadas gráficamente y la realidad.

Espacio muestral: conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

Evento o suceso: subconjunto del espacio muestral de un experimento aleatorio.

Experimento aleatorio: experimento cuyos resultados no se pueden predecir al realizarse bajo las mismas circunstancias.

Experimento equiprobable: cada uno de sus resultados tiene igual probabilidad de ocurrencia.

Exponente: en la potencia 10^3, el exponente es 3.

Expresión algebraica: secuencia de números y letras unidos mediante operaciones matemáticas.

Factor literal: variables que se expresan con letras y que son parte de un término algebraico.

Figuras congruentes: figuras que tienen igual forma y medidas.

Frecuencia absoluta (f): cantidad de veces que se repite cierto dato. La suma de todas las frecuencias absolutas de los datos es igual al total de datos de la muestra.

Frecuencia acumulada (F): suma sucesiva de las frecuencias absolutas de los datos.

Frecuencia relativa (f_{rel}): número que se obtiene al dividir la frecuencia absoluta por el número total de datos de la muestra. La frecuencia relativa se puede expresar en forma de fracción, número decimal o porcentaje.

Frecuencia relativa porcentual ($f_{\%}$): frecuencia relativa expresada en porcentaje.

Hipérbola: lugar geométrico que se representa por una curva, la cual se aproxima a las asíntotas. Corresponde a la representación gráfica de la proporcionalidad inversa.

Histograma: gráfico usado para representar variables cuantitativas continuas agrupadas en intervalos.

Incentro: punto de intersección de las bisectrices de un triángulo.

Incógnita: cantidad desconocida en una ecuación o inecuación, que solo se verifica para algunos valores determinados.

Inecuación: desigualdad en la que aparecen una o más incógnitas.

Intervalo cerrado: conjunto de números que se encuentran entre dos valores (uno mínimo y otro máximo).

Inverso aditivo: número que sumado a otro, da como resultado cero, el elemento neutro aditivo. El inverso aditivo de **n** es **–n**.

Lado opuesto: lado no adyacente que queda frente al lado que se esté comparando en una figura 2D.

Lenguaje algebraico: lenguaje simbólico, que utiliza letras para representar cantidades y las relaciones entre ellas.

Lugar geométrico: Conjunto de puntos que cumplen con una misma condición. Ejemplo: la circunferencia es el lugar geométrico de los puntos que equidistan de un punto fijo llamado centro.

Magnitud de un vector: tamaño que tiene un vector.

Media aritmética: promedio.

Mediana: medida de tendencia central que corresponde al dato que ocupa el lugar central de una muestra de datos ordenados. Si la cantidad de datos es par, se considera el promedio de los dos valores centrales.

Mediatriz: simetral.

Medidas de tendencia central: medidas representativas para identificar el valor de un dato central alrededor de cual se centran los demás datos.

Milésima: cada una de las mil partes iguales en que se divide un entero. Cifra que ocupa la tercera posición a la derecha de la coma en un número decimal. Por ejemplo, en 2,783, la milésima es 3.

Moda: medida de tendencia central que corresponde al valor que más se repite en un conjunto de datos.

Monomio: expresión algebraica que consta de un término.

Muestra: subconjunto de elementos de una población.

Muestra aleatoria: muestra en la cual cada individuo ha sido escogido al azar.

Notación científica: forma de escribir números usando potencias de 10 que permite compararlos rápidamente. Es especialmente útil para representar números muy grandes o muy pequeños. Operacionalmente consiste en expresar un número como el producto entre un número mayor o igual que 1 y menor que 10, y una potencia de base 10.

Números enteros: conjunto formado por los números naturales, el cero y los opuestos de cada número natural.

Opuesto aditivo: inverso aditivo.

Ordenada: segunda coordenada de un par ordenado.

Ortocentro: punto de intersección de las alturas de un triángulo.

Par ordenado: pareja de elementos matemáticos en los que se distingue claramente un orden para el primer y el segundo elemento. Aplicado al plano cartesiano, el primer elemento de un par ordenado indica una posición en el eje horizontal y el segundo, una posición en el eje vertical.

Perímetro: medida del contorno de una figura. Por ejemplo, si el radio de un círculo mide **r**, su perímetro está dado por $2\pi r$.

Plano cartesiano: sistema de referencia conformado por dos rectas numéricas perpendiculares, cuya intersección se denomina origen.

Población: conjunto de todos los elementos que cumplen una o varias características o propiedades que pueden ser objeto de estudio.

Porcentaje: parte proporcional a un número de cada cien. Por ejemplo, 23 % corresponde a 23 de cada 100.

Probabilidad: número que se asigna a cada suceso y que da información acerca de la frecuencia con que este puede ocurrir. Sus valores están entre 0 y 1.

Proporción directa: relación entre variables cuyo cociente es constante.

Proporción inversa: relación entre variables cuyo producto es constante.

Radio: segmento que une el centro de la circunferencia con cualquier punto de ella.

Rango: corresponde a la diferencia entre el mayor y el menor de los valores de una variable cuantitativa.

Razón: comparación entre dos números por cociente. Por ejemplo, la razón entre los días de descanso y días laborales a la semana es de $\frac{2}{5}$, es decir, dos es a cinco. Su valor es 0,4.

Rectas paralelas: rectas que no tienen puntos en común.

Rectas perpendiculares: rectas que se intersecan formando ángulos rectos.

Recta tangente a una circunferencia: recta que interseca en un solo punto a la circunferencia.

Regla de Laplace: cuando un experimento es equiprobable, la probabilidad de ocurrencia de un suceso se obtiene mediante el cociente entre la cantidad de casos favorables y la cantidad de casos totales

Sentido: indica hacia dónde apunta la línea recta que representa la dirección.

Simetral: recta perpendicular a un segmento y que pasa por su punto medio.

Soluciones de la ecuación: aquellos valores de la o las incógnitas que al sustituirlos en una ecuación hacen que la igualdad sea cierta.

Tabla de frecuencias: tabla que permite organizar datos mostrando su frecuencia.

Término algebraico: cada sumando de una expresión algebraica, separada por las operaciones de adición o sustracción. Cada término consta de un coeficiente numérico y un factor literal.

Términos semejantes: términos que tienen el mismo factor literal.

Transversal de gravedad: segmentos que une un vértice y el punto medio del lado opuesto.

Trinomio: expresión algebraica que consta de tres términos.

Valor absoluto: se puede asociar a la distancia de un número respecto del 0 en la recta numérica. Por ejemplo, el valor absoluto de –3 es 3, ya que la distancia de 0 a –3 es 3.

Variable cualitativa: variable que expresa una cualidad, categoría o atributo.

Variable cuantitativa: variable que se puede medir y expresar numéricamente. Por ejemplo: edad en años o tiempo en horas.

Variable estadística: característica que se estudia en una población o muestra.

Vector: segmento de recta dirigido que tiene dirección, sentido y módulo o magnitud.

Vector de desplazamiento: vector que permite trasladar figuras en el plano cartesiano.

Unidad 1 Números

Sección 1 Números enteros

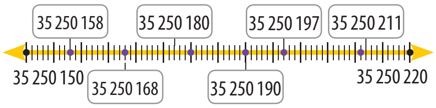
Páginas 10 y 11 ▸ ¿Qué debo saber?

- La relación de orden en los naturales: menor que, mayor que.

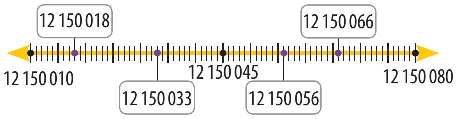
1. a. 1; 3; 4; 5. b. 5348; 5384; 5438; 5834.
c. 0,042; 0,4; 0,44; 4,4.

2. a. < c. = e. >
b. < d. < f. <

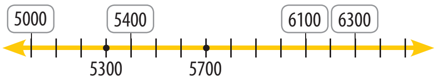
3. a.



b.



4.



- Se suman en cualquier orden y se restan de izquierda a derecha. - La multiplicación.

5. a. 8 c. 26 e. 60 g. 365
b. 18 d. 140 f. 20 h. 225

6. a. 28 b. 24 c. 52

7. a.

	6	1	0	2	5	4	3
+	1	3	3	7	2	1	4
	7	4	3	9	7	5	7

b.

	7	7	4	9	8	8	5	2	4
–	0	5	4	7	3	6	2	1	3
	7	2	0	2	5	2	3	1	1

c.

	7	0	3	2	5	4
–	1	5	1	9	4	2
	5	5	1	3	1	2

- Identificar los datos, una pregunta que se debe responder y expresar en lenguaje matemático la mayor cantidad de información presente.

8. a. 3 y 7
b. 6 y 8
c. $ 2365
d. 7
e. El antecesor.
f. 30 °C; 78 °C.
g. 8 meses.
h. 28 años; 13 años.
i. El mismo número.
j. Respuestas: 11 y 62
Conclusión: La adición es conmutativa.
Sí, ya que la conmutatividad es una propiedad de la adición.

Página 12 ▸ Taller

1. 15 º
2. 10 am
3. Debe adelantar 5 horas
4. A las 3 am
5. Países con más de 7 h de diferencia con Chile: por ejemplo China y Nueva Zelanda. Países con menos de 5 h de diferencia con Chile: por ejemplo Brasil y Argentina.
6. Porque la Tierra gira en dirección este-oeste.
7. El signo (–) indica donde se restan horas; el signo (+) indica donde se suman horas.

Páginas 14 y 15 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 4 d. 36
b. 14 e. 65
c. 34 f. 41

2. a. No d. No
b. Sí; 6 e. Sí; 1
c. No f. Sí; 0

3. La adición.

Práctica guiada

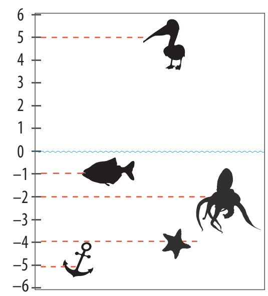
4. a. –3
b. 7
c. 9
d. –10
e. –5
f. Coyhaique, Puerto Montt, Castro y Punta Arenas.
g. Coyhaique.

5. a. 3 c. –3 e. –9500
b. –2 d. 335 f. –3500

6. **Respuesta sugerida:**
a. La temperatura de hoy fue de 0 °C.
b. Debo 5 pesos.
c. Me quedan 700 pesos.
d. Hay peces a una profundidad de 5400 metros.
e. Un humano no puede estar a 7800 metros bajo el nivel del mar.
f. En mi cuenta tengo $ 9 358 111.

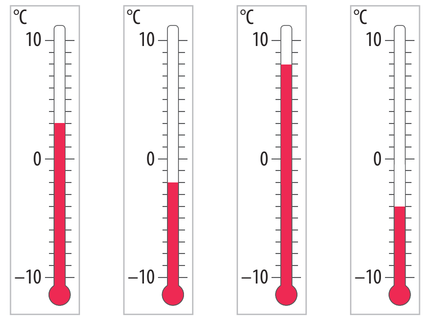
7. a. El avión descendió 250 metros; 250 y –250.
b. Ariel bajó 6 pisos; 6 y –6.
c. Cecilia perdió $1500 de interés mensual; 1500 y –1500.

8.



Aplica

9.



10. a. F; –7 pertenece a los números enteros.
b. V
c. V
d. V
e. F; –32 es un entero negativo.
f. V
g. V

11. a. A 28 personas les gusto el video y a 33 personas no les gustó.
b. Me gusta: +28. No me gusta: –33.

12. a. Es cero. b. Es cero.

Reflexiono

1. En el conjunto de los números enteros se encuentra el inverso aditivo de cada uno de sus elementos, a diferencia del conjunto de los números naturales.
2. No, por ejemplo, el 1.

Refuerzo

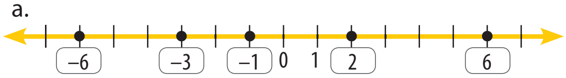
1. c	2. 300; –18

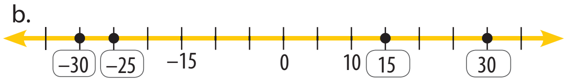
Páginas 18 y 19 ▸ Practiquemos lo aprendido

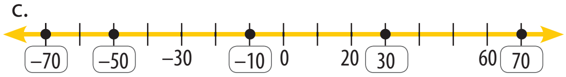
Repaso

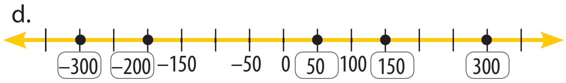
1. a. 7 b. 8 c. 240 d. 1700
2. a. 8; 5; 3; 1 b. 36; 24; 21; 17; 0 c. 121; 111; 110; 101 d. 428; 253; 220; 178; 114
3.


Práctica guiada

4. a.


b.


c.


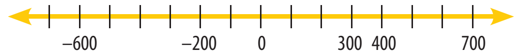
d.


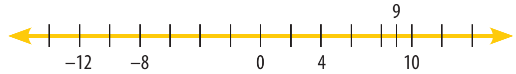
5.


6. a. < b. < c. < d. < e. > f. <
7. a. 3 b. 7 c. 5 d. 4 e. 3 f. 4 g. 7

Aplica

8. a.


b.


c.


9. a. F; –25 > –100
b. V
c. F; 14 > –37
d. F; Es mayor (5 > –5).
e. V
f. F; 3 está a 5 unidades del 8.

10.

7 está a la derecha de 2	7 es mayor que 2	7 > 2
–3 está a la izquierda de 1	–3 es menor que 1	–3 < 1
6 está a la derecha de –5	6 es mayor que –5	6 > –5
–1 está a la derecha de –4	–1 es mayor que –4	–1 >–4
1 está a la izquierda de 2	1 es menor que 2	1 < 2
0 está a la izquierda de 3	0 es menor que 3	0 < 3

11. a. –12 y 12
b. –6 y 6
c. –1; 0; 1
d. No, ya que el valor absoluto es siempre positivo.
e. –5 y 1
f. 12
g. 1, 3 y 5

12. a. 200 m
b. A 300 m, ya que la distancia entre 0 y –300 es 300.
c. Ambos están a 300 m, por lo tanto, están a la misma distancia.

13. Tales de Mileto; Pitágoras; Euclides; Arquímedes; María Gaetana; Abel.

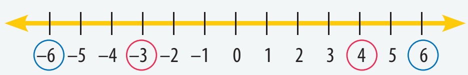
14. - Ubicar los negativos al lado derecho y los positivos a lado izquierdo.
- La distancia entre 2 y 3.
- El orden de los números negativos.

15. Se ubica a m unidades del 0.

Reflexiono

1. La recta numérica permite representar gráficamente números enteros y permite visualizar algunas de sus propiedades como, por ejemplo, las relaciones de orden.
2. Por ejemplo, construir fichas de color azul y rojo y numerar ambos grupos con los naturales. Las rojas pueden representar los negativos y las azules los positivos.

Refuerzo

1. En rojo a 7 unidades y en azul, a 12.


2. 7 unidades.

Página 20 ▸ Taller

1. A: –6 y B: 4
2. –2; A.
3. No, ya que este resultado es negativo.
4. A: –3 y B: 3
5. Ninguno, ya que obtuvieron el mismo resultado.

7. Al sumar dos números enteros del mismo signo se conserva el signo y se suman los valores absolutos. Si los sumandos son de distinto signo se restan sus valores absolutos conservando el signo del sumando con valor absoluto mayor.

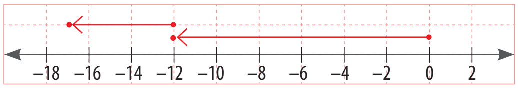
Páginas 22 y 23 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

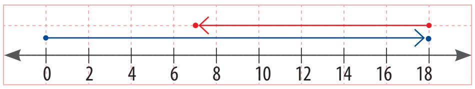
1. a. 18 b. 23 c. 39 d. 180 e. 230 f. 390
2. a. 181 b. 128 c. 18 d. 768
3. a. 0 b. 6 c. 32 d. 10

Práctica guiada

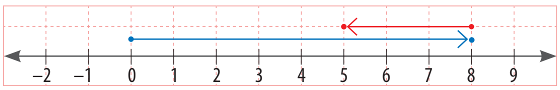
4. a. + b. – c. – d. + e. – f. –
5. a. 6 + (–4) = 2
   b. (–6) + (–4) = –10
   c. 10 + (–15) = –5
6. a. –17



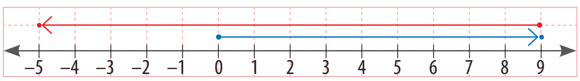
b. 7



c. 5



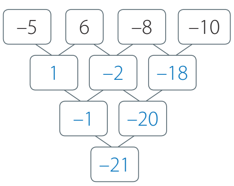
d. –5



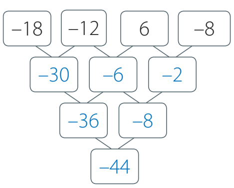
7. a. –2 b. 4 c. 12 d. –6
8. a. –1 b. –4 c. 7 d. –2 e. –6 f. 14

Aplica

9. a. Negativo b. Positivo c. Cero
10. a. Al sexto. b. 17 pisos.
11. Debe $1100.
12. 12 °C
13. 16 °C
14. a.



b.



15. a.

–10	4	–6
0	–4	–8
–2	–12	2

b.

12	–16	4
–8	0	8
–4	16	–12

16. Sí es un cuadrado mágico.

–13	1	–9
–3	–7	–11
–5	–15	–1

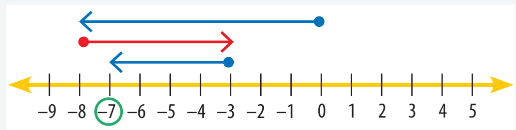
17. Como los tres sumandos son del mismo signo, suman sus valores absolutos. Luego, obtiene su opuesto ya que sabe que el resultado debe ser negativo porque los tres sumandos lo son.

Reflexiono

Sí, y luego aplicar el signo negativo al resultado. Por otro lado, si fueran negativos y positivos, se deberían restar sus valores absolutos conservando el signo del sumando con valor absoluto mayor.

Refuerzo

1.



2. –2.

Página 24 ▸ Taller

1. 5 metros; resta
2. 12 metros
3. 12 metros
4. 12 – (–12) = 24

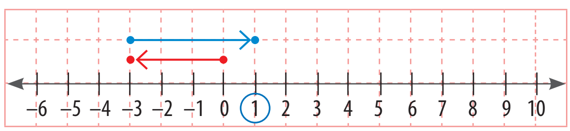
Página 26 y 27 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

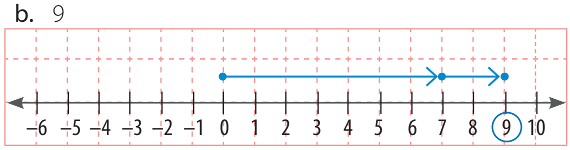
1. a. 702 b. 311 c. 427 d. 567
2. a. No b. No c. Sí d. Sí
3. a. 5 b. 5 c. 18 d. 12 e. 4 f. 12 g. 4 h. 59

Práctica guiada

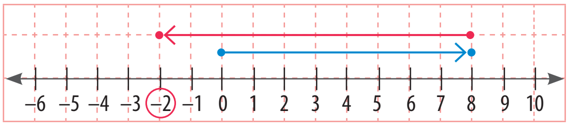
4. a. 12 + (–18) b. (–6) + (–9) c. 3 + (–15) d. 4 + 5 e. (–3) + 4 f. 18 + 6 g. (–12) +8
5. a. 4 – 10 = –6
   b. 11 – 5= 6
   c. 17 –12 = 5
6. a. 1



b. 9



c. −2



7.

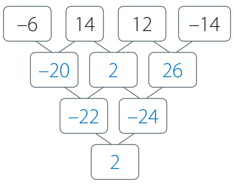
x	y	x − y	y − x	x − (−y)	(−x) − (−y)
3	4	3 − 4 = −1	4 − 3 = 1	3 − (−4) = 7	(−3) − (−4) = 1
5	−3	8	−8	2	−8
−8	2	−10	10	−6	10
−3	−4	1	−1	−7	−1

Aplica

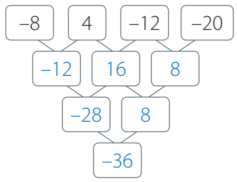
8. a. 8
b. −9
c. −49
d. 198
e. 340

9. a. −60
b. 25
c. −9
d. −29

10. a.



b.



11. a. Con una deuda de $ 21 000.
b. Con una deuda $ 9000.

12. Hay una distancia de 10 metros.

13. El precio del dólar es de $ 535.

14. Se necesitan 5 horas.

15. Tendrá 45 años.

16. La división; 1 ÷ 2 = 0,5.

17. Por ejemplo, al ir de compra gasté $ 13 000 en ropa y $ 6500 en comida. En total gasté $ 19 500.

18. No; 9 − (−1) = 10 y 1 − (−3) = 4

19. $ (t − m + p)

Reflexiono

1. No. 1 − 2 = −1 y −3 − 1 = −4.

2. No, ya que primero se sumaría 3 y 17 y este resultado se le restaría al 11, obteniendo 9 y el resultado correcto es −3.

Refuerzo

1. 6 °C

2. Anita, ya que Pedro se equivocó en 3 + (−12) escribiendo como resultado 12 en vez de −12.

Página 28 ▸ Taller

1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª	7.ª	8.ª	9.ª	10.ª
a	b	c	a + b	b + a	a + (−a)	c + 0	(a + b) + c	a + (b + c)	−(−a)
−3	−6	−5	−9	−9	0	−5	−14	−14	−3
−2	−4	−3	−6	−6	0	−3	−9	−9	−2
−1	−2	1	−3	−3	0	1	−2	−2	−1
1	2	3	3	3	0	3	6	6	1
2	4	5	6	6	0	5	11	11	2

1. Al sumar 0 a cualquier número se obtiene el mismo número. Esta propiedad se llama neutro aditivo.

2. Si un número se suma con su opuesto aditivo resulta 0 y esta propiedad es válida para todos los números enteros.

3. En los números enteros la suma también es conmutativa.

4. Que la adición es asociativa y por esto, los resultados son iguales.

5. El opuesto aditivo del opuesto aditivo de un número es el mismo número.

Página 29 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. −8 b. −7 c. 4 d. 3

Práctica guiada

2. a. Propiedad asociativa: [−8 + 4] + (−6) = −8 + [4 + (−6)]
b. Elemento neutro: −9 + 0 = −9
c. Propiedad conmutativa: 2 + (−6) = (−6) + 2
d. Inverso aditivo: 5 + (−5) = 0

3. a. Conmutativa.
b. Asociatividad.
c. Conmutatividad

4. a. Por ejemplo: Elemento neutro; 5 + 0 = 5.
b. Por ejemplo: Inverso aditivo; 5 + (−5) = 0.

Aplica

5. a. V b. F c. V d. V

6. a. El orden de los sumandos no altera el resultado de la adición.
b. Cuando se asocian los sumandos en distinto orden el resultado de la adición no se altera.
c. Al sumar el cero a un número entero se obtiene como resultado el mismo número entero.
d. Al sumar a un número entero su inverso aditivo, se obtiene como resultado 0 (elemento neutro).

7. El error es aplicar asociatividad a la sustracción, ya que esta operación no cumple con esa propiedad.
= (−15 + 7) − 11 = −8 − 11 = −19

Reflexiono

1. Porque los números enteros poseen números negativos, es decir, los inversos aditivos de los positivos.

2. Sí, es igual, porque se ha aplicado la propiedad conmutativa que no altera la suma.

Refuerzo

1. 23 m.

Páginas 32 y 33 ▸ ¿Cómo voy?

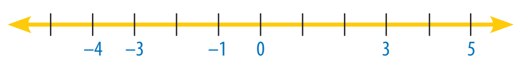
1.

+	Crecimiento	Ingresos	Ganancia
−	Deuda	Pérdida	Bajar

2. a. −50 b. 20 c. −30 d. −12

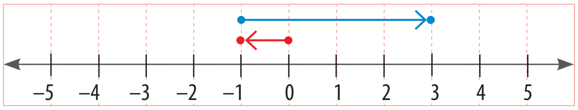
3. Por ejemplo, para hacer unos trámites en un edificio, es necesario subir 7 pisos y luego bajar 8.

4.

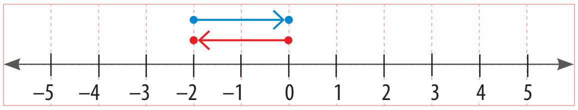


5. a. −4
b. −3
c. 1
d. 4

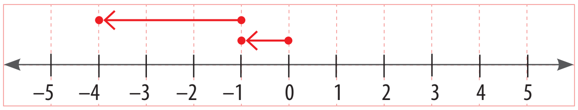
6. a. 300 m b. 200 m c. 50 m
7. a. –3 b. 5 c. –10 d. 18
8. a. – b. – c. + d. – e. + f. + g. –
9. a. 3



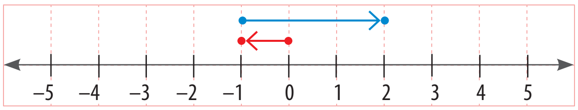
b. 0



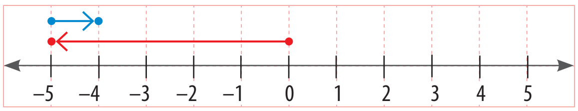
10. a. 100 b. –300 c. 430 d. 0
11. A 17 metros bajo el nivel del mar.
12. a. –4



b. 2



c. –4



13. a. –9 b. –11 c. –8 d. 85
14. a. 4
b. –4
15. a. Porque significan que deben restarlos.
b.

Fecha	Ítem	Gasto	Ganancias	Total
	Saldo mes abril			25 000
03–mayo	Luz	–18 000		7000
07–mayo	Agua	–23 000		–16 000
10–mayo	Sueldo 1		450 000	434 000
12–mayo	Supermercado	–42 450		391 550
18–mayo	Gas	–23 000		368 550

c. Por ejemplo, la cuenta de internet, la mensualidad del gimnasio.
16. Asociatividad e inverso aditivo.
17. a. –18 b. 30

Desafío de integración
1. –$ 16 500 2. –14 °C

Página 34 ▸ Resolución de problemas
Respuesta: Habrá 10 °C

Sección 2 Fracciones, decimales y porcentajes

Páginas 38 y 39 ▸ ¿Qué debo saber?
- Debe estar dividido en partes iguales.
- Multiplicar el numerador y el denominador de una fracción por un mismo número. De la misma forma, se puede hacer realizando divisiones.

1. a. $\frac{6}{10} = 0{,}6$ b. $\frac{3}{10} = 0{,}3$ c. $\frac{25}{100} = 0{,}25$ d. $1\frac{1}{5} = 1{,}2$
2. a. $\frac{7}{35}$ b. $\frac{18}{63}$ c. $\frac{5}{3}$ d. $\frac{8}{29}$
3. a. $\frac{1}{10}$ b. $\frac{3}{10}$ c. $\frac{1}{5}$ d. $\frac{2}{5}$
4. a. Centésima. b. Décima. c. Centésima. d. Milésima.
- Se amplifican (simplifican) las fracciones para igualar los denominadores de todos los términos que se suman o restan. Luego, se suman o restan los numeradores y se conserva el denominador común.
5. a. $\frac{9}{8}$ b. $\frac{5}{12}$ c. $\frac{37}{3}$ d. $\frac{3}{7}$ e. $\frac{11}{45}$ f. $\frac{73}{15}$
6. En total hay $\frac{331}{45}$ kg de papas y $\frac{59}{21}$ kg de tomates. Es decir, quedaron $\frac{3202}{315}$ kg de verduras.
- Para sumar o restar números decimales es necesario hacer corresponder las comas de los sumandos. Por ejemplo, al escribir la suma o resta en una columna, las comas deben estar alineadas.
7. a. 23,967 b. 0,894 c. 44,037 d. 63,031
8. 2,56 litros.
9. 8,6 kg.
10.

0,2	0,70	0,6
0,9	0,5	0,1
0,4	0,3	0,8

Página 41 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso
1. a. 2 décimas.
b. 5 décimas y 3 centésimas.
c. 4 centésimas.
d. 6 milésimas.
2. a. $\frac{5}{4}$ b. $\frac{61}{25}$

Práctica guiada
3. a. 0,7 b. 1,2 c. 36,4 d. 0,364
4. a. $\frac{1}{4}$ b. $\frac{3}{8}$ c. $\frac{13}{10}$ d. $\frac{9}{8}$

Aplica
5. 125 g
6. No, ya que $\frac{3}{4}$ kg es 0,75 kg.
7. La conversión es única, salvo si se consideran fracciones equivalentes. De igual forma ocurre con los números decimales.
8. Ambos, ya que $0{,}50 = 0{,}5 = \frac{1}{2}$.
9. Dividiendo el trozo de un metro en 8 partes y utilizar 3 de ellas.

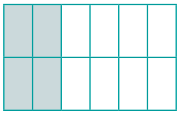
Reflexiono
La cantidad de decimales es infinita.

Refuerzo
0,75 litros.

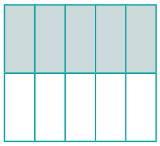
Páginas 45, 46 y 47 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

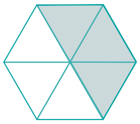
1. a.



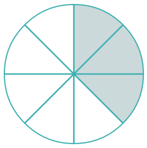
c.



b.



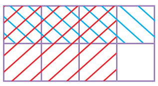
d.



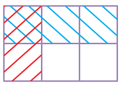
2. a. 87 b. 19 c. 191 d. 380

Práctica guiada

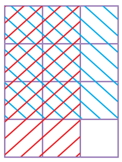
3. a. $\frac{3}{8}$



b. $\frac{1}{6}$



c. $\frac{1}{2}$



4. a. $4 \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$ b. $5 \cdot \frac{5}{2} = \frac{25}{2}$

5. a. 3 y 2 b. 1 y 110 c. 60 y 2

6. a. 6 b. 40 c. 2 d. 2

Aplica

7. a. $\frac{12}{35}$ c. $1\frac{1}{2}$

b. $\frac{3}{5}$ d. $\frac{1}{2}$

8. a. $\frac{8}{15}$ c. $\frac{9}{8}$

b. 1 d. $\frac{7}{8}$

9. a. $\frac{3}{5} \cdot \frac{3}{4}$ b. $\frac{4}{6} : \frac{1}{3}$

10. a. V, $\frac{8}{3} \cdot \frac{3}{2} = 4$ b. F, $\frac{1}{4} : \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

c. F, se utiliza el inverso multiplicativo de una de ellas.

d. F, se multiplica denominador por denominador para obtener el denominador.

11. a.

$\cdot$	$\frac{4}{5}$	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{3}{8}$	$\frac{12}{40}$	$\frac{6}{56}$	$\frac{3}{24}$
$\frac{1}{9}$	$\frac{4}{45}$	$\frac{2}{63}$	$\frac{1}{27}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{15}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{2}{9}$

b.

$:$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{5}{6}$
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{10}{9}$	$\frac{12}{15}$
$\frac{5}{7}$	$\frac{20}{7}$	$\frac{25}{21}$	$\frac{30}{35}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{2}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{6}{10}$

12. El área es $\frac{12}{25}$ m^2.

13. Un doceavo de la cuerda.

14. Necesitan 6 frascos.

15. 11 paquetes.

16. a. 24 días. b. 25 días. c. $\frac{3}{4}$ km / día.

17. a. Jessica pintó $\frac{1}{4}$.

b. Matías pintó $\frac{3}{4}$.

18. a. Todos son 2.

b. Son fracciones que decrecen.

c. Son potencias de 2 que crecen.

d. Seguirá creciendo.

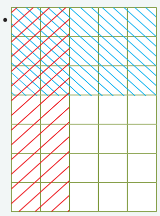
19.

$\frac{1}{3}$	3	1
9	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	1	3

Reflexiono
1. No, ya que la división no es asociativa y por convención se debe dividir de izquierda a derecha.
2. Si dos fracciones son menores que 1, su producto es menor que cada una de ellas; si una de ellas es mayor que 1 y la otra menor que 1, su producto es menor que la primera y mayor que la segunda; y si son mayores que 1, su producto es mayor que cada una de ellas. Por lo tanto, la afirmación es falsa. Por ejemplo $\frac{8}{5} \cdot \frac{5}{2} = 4$ y $\frac{14}{3} \cdot \frac{3}{2} = 7$.

Refuerzo

1.

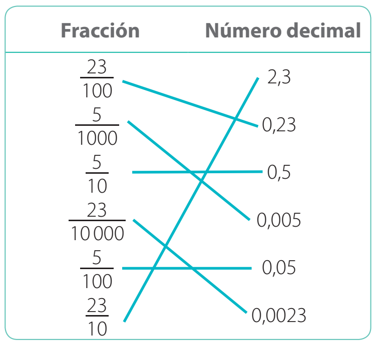


2. 24 vasos.

Páginas 52 y 53 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1.

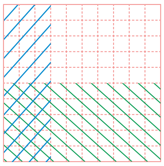


2. a. 9 c. $\frac{5}{6}$ e. 3

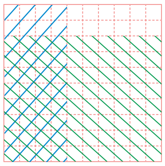
b. $\frac{4}{25}$ d. $\frac{125}{48}$ f. $\frac{3}{10}$

Práctica guiada

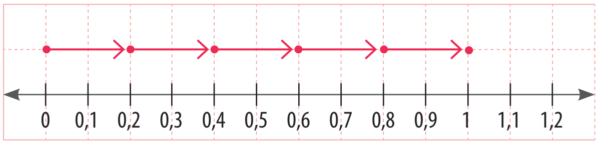
3. a. 0,15



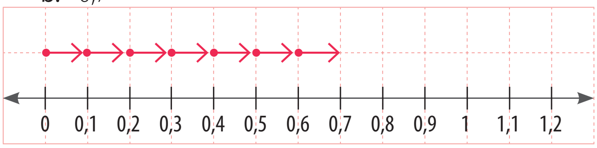
b. 0,32



4. a. 1



b. 0,7



5. a. 0,8 : 0,2 = 4 b. 1,8 : 0,4 = 4,5

6. a. 6,5 b. 19,6 c. 15,4 d. 9,8728 e. 12,6984 f. 332,74

7. a. 12,7 b. 6,14 c. 18,5 d. 18,1 e. 4 f. 0,54

Aplica

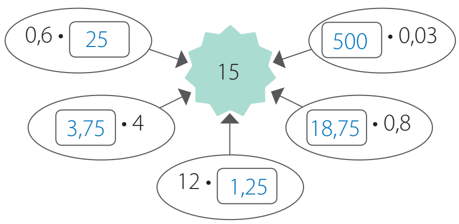
8. a. 820 b. 0,41 c. 0,234 d. 0,01004 e. 0,00101 f. 7,024

9. a. 5,13 cm
b. 7,2 cm

10. Necesitará 22,5 ml de jarabe.

11. Recorre 24,3 km en una hora.

12.



13. a. Es cierto, ya que 1,5 • 0,2 = 0,3 y 1,5 : 5 = 0,3 y 3,8 • 0,2 = 0,76 y 3,8 : 5 = 0,76.
b. Es cierto, ya que 4,5 : 0,5 = 9 y 4,5 • 2 = 9 y 6,3 : 0,5 = 12,6 y 6,3 • 2 = 12,6.
c. Respuesta abierta.

Reflexiono

1. Porque al multiplicar por un número decimal positivo menor que 1 es lo mismo que dividir por un número mayor que 1.

2. Para transformarla en una división de números naturales y con esto facilitar el cálculo.

Refuerzo

1. 0,03 • 0,51 • 7,5 = (0,03 • 0,51) · 7,5 = 0,0153 • 7,5 = 0,11475

2. 160 bolsitas.

Páginas 56 y 57 ▶ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 0,3 b. 0,5 c. 0,8 d. 0,07 e. 0,06 f. 0,52

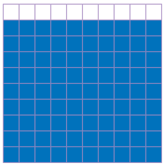
2. a. $\frac{9}{10}$ b. $\frac{13}{100}$ c. $\frac{103}{100}$ d. $\frac{3041}{1000}$ e. $\frac{4}{100}$ f. $\frac{212}{10}$

3. a. $\frac{1}{3}$ b. $\frac{5}{7}$ c. $\frac{4}{5}$ d. 3

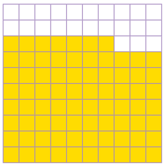
Práctica guiada

4. a. cuatro es a uno. b. cuatro es a diez.

5. a. $\frac{90}{100} = 0{,}9$



b. $\frac{67}{100} = 0{,}67$



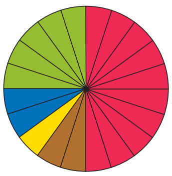
6. a. 24 % b. 30 % c. 27 % d. 46 %

7. a. 50 % b. 20 % c. 75 %

Aplica

8. Rojo; 38 % Amarillo: 25 % Morado: 18 % Celeste: 9 % Verde: 10 %

9.



10.

Fracción	Decimal	Porcentaje
$\frac{1}{10}$	0,1	10 %
$\frac{1}{4}$	0,25	25 %
$\frac{1}{50}$	0,02	2 %
$\frac{3}{5}$	0,6	60 %
$\frac{4}{5}$	0,8	80 %

11.

Porcentaje	Representación decimal utilizando fracciones
33 %	$\frac{33}{100} = 0{,}33$
6 %	$\frac{6}{100} = 0{,}06$
0 %	$\frac{0}{100} = 0$

Porcentaje	Representación decimal utilizando x : 100
94 %	94 : 100 = 0,94
50 %	50 : 100 = 0,5
8 %	8 : 100 = 0,08

Reflexiono

1. Porque son fracciones equivalentes.

2. Sí, ya que $0{,}01 = \frac{1}{100} = 1\,\%$.

Refuerzo

1. 17 es a 50.

2. 75 %.

Páginas 60 y 61 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 280 b. 156 c. 525 d. 1092 e. 151 f. 442 g. 692 h. 6015

2. a. 71 % b. 20 % c. 32 %

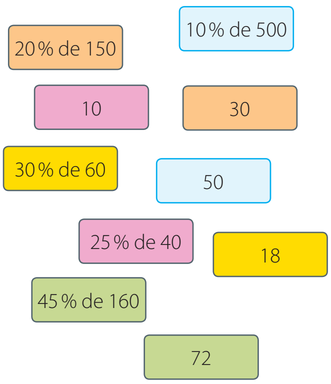
3. a. 25 % b. 10 % c. 80 % d. 50 %

Práctica guiada

4. a. 5 b. 60 c. 30 d. 8 e. 50 f. 125 g. 9 h. 42

5. a. 600 b. 1800 c. 556 d. 4700 e. 87,4 f. 80 g. 750 h. 164

6.



Aplica

7. a. 50 % b. 75 %

9. Contestó 32 preguntas.

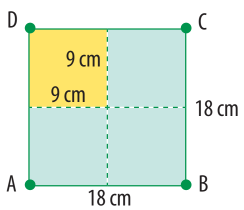
10. 875 hombres.

11. 45 láminas.

12. Pedro recibió 24 láminas, Lorena recibió 36 láminas y Martin recibió 20 láminas.

13. a. 324 cm^2 b. 81 cm^2

c.



d. 25 %

14. Calcula el 10 % y luego lo multiplica por 3 para obtener el 30 %.

15. Es correcto porque 12,5 % es la mitad de 25 %.

Reflexiono

1. No, ya que al aplicar un descuento del 25 % se puede multiplicar por 0,75, mientras que al aplicar un descuento del 15 % seguido de uno del 10 %, se multiplicaría por $0{,}85 \cdot 0{,}90 = 0{,}765$.

2. Sí, ya que 80 es el 40 % de 200.

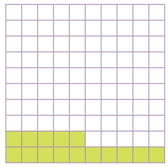
Refuerzo

1. $ 7000	**2.** 30 %

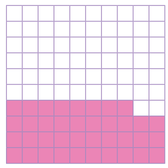
Páginas 64 y 65 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a.



b.



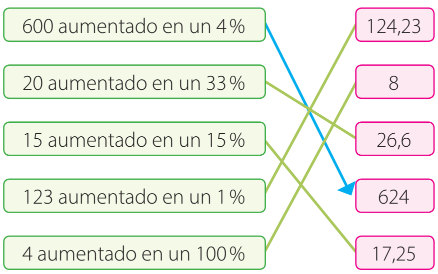
2.

Porcentaje	Notación decimal	Notación fraccionaria
65 %	0,65	$\frac{13}{20}$
20 %	0,2	$\frac{1}{5}$
48 %	0,48	$\frac{12}{25}$
35 %	0,35	$\frac{7}{20}$
1 %	0,01	$\frac{1}{100}$
99 %	0,99	$\frac{99}{100}$

3. a. 16 mujeres. b. 60 % son hombres.

Práctica guiada

4.



5. a. Disminución del 50 %.
b. No hay variación.
c. Disminución del 75 %.
d. Disminución del 25 %.
e. Disminución del 90 %.

Aplica

6. a. Disminución porcentual.
b. Disminución porcentual.
c. Incremento porcentual.

7. a. $36 000 b. $25 200 c. $27 200 d. $12 250

8. Total Honorarios: $ 250 000
10 % impto. retenido: $ 25 000
Total: $ 225 000

9.

Producto	Valor neto	IVA	Valor bruto
Aceite	$ 1200	228	$ 1428
Harina	$ 800	152	$ 952
Pasta	$ 750	142,5	$ 892,5
Bebida	$ 1300	247	$ 1547

10. a. 25 años. b. 20 años.

11. a. $ 60 000. b. $ 90 000.

12. a. 880 niños. b. 1600

13. a. 80 %. b. En un 20 %.

14. Porque el 19 % que calculó, no es el mismo 19 % que tenía el artículo original.

15. a. Que los precios disminuyeron un 0,5 %.
b. $ 9950

Reflexiono

1. Multiplicando los porcentajes de descuento.
2. No, ya que el aumento del 20 % seguido de una disminución en un 20 % se puede calcular multiplicando el precio del producto por 1,2 • 0,8 = 0,96, es decir, se obtendría un precio un 4 % inferior al original.

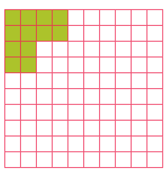
Refuerzo

1. $ 41 650. 2. $ 507 310.

Páginas 68 y 69 ▸ ¿Cómo voy?

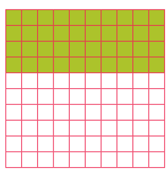
1. a. $\frac{45}{100}$; 0,45 b. $\frac{7}{8} = \frac{875}{1000}$; 0,875

2. a.



$\frac{12}{100}$

b.



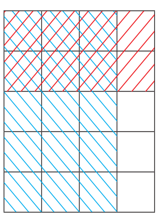
$\frac{40}{100}$

3. a. 9,5 b. 1,75 c. 0,15 d. 0,44

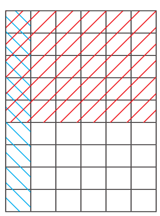
4. a. $\frac{2}{5}$ b. $\frac{14}{25}$ c. $\frac{21}{25}$ d. $\frac{51}{50}$

5. Quedan 0,25 litros de bebida.

6. a. $\frac{6}{20} = \frac{3}{10}$



b. $\frac{5}{54}$



7. a. 1 c. 1 e. $\frac{3}{4}$
b. $\frac{7}{20}$ d. $\frac{4}{25}$ f. $\frac{169}{54}$

8. a. 4 b. 15 c. 3 y 15 d. 7 y 32

9. Juan tiene 12 años.

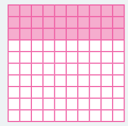
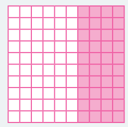
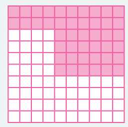
10. Se necesita $3\frac{1}{3}$ tarros.

11. a. 2,1 • 3 b. 6 : 1,5 c. 1,2 : 0,3

12. a. 0,032 b. 0,212 c. 7 d. 28

13. 0,49 cm^2

14.

Representación	Porcentaje	Fracción	Decimal
	30 %	$\frac{3}{10}$	0,3
	40 %	$\frac{2}{5}$	0,4
	44 %	$\frac{11}{25}$	0,44

15. a. 104 b. 21,24 c. 20 d. 38

16. a. 576,725 b. 337,05 c. 3652 d. 2583

17. $ 5176,5.

18. 18 cm.

19. 4450 g.

Desafío de integración

1. Aumentará un 10,04008 % ($ 433,7).
2. a. Un 123,8 % aproximadamente.
b. El valor de la UF al finalizar el año 2015 fue de $ 25 629,09. Por lo tanto, el incremento fue del 4,07 % aproximadamente, valor mayor al estimado.

Sección 3 Potencias

Páginas 74 y 75 ▸ ¿Qué debo saber?

- Que el valor que representa un dígito en un número depende de la posición que está utilizando.
- Se multiplica la cifra por la potencia de 10 correspondiente a su posición.

1. a. 20 000 000 + 8 000 000 + 800 000 + 90 000 + 9000 + 400 + 10 + 3
b. 100 000 000 + 1000 +1
c. 900 000 000 + 80 000 000 + 7 000 000 + 60 000 + 80 + 5
d. 300 000 000 + 20 000 000 +4 000 000 + 7000 + 400 + 50 + 1
e. 80 000 000 + 9 000 000 + 600 000 + 20 000 + 3000 + 70
f. 5 000 000 + 70 000 + 3000 + 300 + 10 + 1

2.

Números	CMi	DMi	UMi	CM	DM	UM	C	D	U
997 152				9	9	7	1	5	2
234 428				2	3	4	4	2	8
2 568 556			2	5	6	8	5	5	6
997 152				9	9	7	1	5	2
47 981 347		4	7	9	8	1	3	4	7

3. a. 79 283 180 c. 9839
b. 700 401 940 d. 2 008 999

4.

Números	Posición	Valor posicional
3 782 002	CM	700 000
45 567 561	DM	60 000
889 312 011	UM	2000
7 111 111	CM	100 000
7 314 200	UMi	7 000 000
125 342 010	UMi	5 000 000

5. Aumenta en 60 000 000 de unidades.

6. El número es 74 448.

- Para los rectángulos y cuadrados el área se obtiene de multiplicar base y altura, mientras que la figura en d. se puede descomponer en un cuadrado y un rectángulo.

7. a. 144 cm^2 b. 35 m^2 c. 5,29 cm^2 d. 36 cm^2

- Consiste en expresar un número como el producto de una multiplicación en que todos los factores son números primos.

8. a. 2 • 2 b. 3 • 3 c. 2 • 2 • 2 • 2 d. 3 • 3 • 3 e. 2 • 2 • 2 • 2 • 2 f. 2 • 2 • 3 • 3 g. 2 • 2 • 2 • 2 • 2 • 2 h. 3 • 3 • 3 • 3

- Una forma es multiplicar los números sin considerar la coma y colocarla en el resultado. Su posición se obtiene de sumar la cantidad de decimales que tienen ambos factores.

Una forma es multiplicar la división por una potencia de 10 de tal forma que el divisor y el dividendo se transformen en números naturales.

9. a. 23 b. 12,3 c. 120,43 d. 3120 e. 705 300 f. 871 100

10. a. 3,14 b. 0,00088 c. 6,324 d. 0,0047036 e. 0,0000002 f. 0,00000124

Páginas 77 ▸ Taller

1. Tres.
2. Tres.
3. El exponente indica la cantidad de ceros y factores 10.
4. El exponente es 4 al igual que la cantidad de factores 10.
5. Que el exponente siempre corresponde a la cantidad de factores 10.
6. 10^{14}
7.

A	B	C	D	E
10	100	1000	10 000	100 000
10	10 • 10	10 • 10 • 10	10 • 10 • 10 • 10	10 • 10 • 10 • 10 • 10
10^1	10^2	10^3	10^4	10^5

8. **Ejemplo de respuesta:** Se puede concluir que existe una relación entre el exponente de la potencia de 10 y la cantidad de ceros que acompaña al 1 en el número al cual es equivalente la potencia, el exponente de la potencia corresponde a la cantidad de ceros del número.

Páginas 78 y 79 ▸ Repaso

1. a. 3 • 3 • 3 b. 2 • 2 • 2 • 2 • 2 c. 3 • 3 • 3 • 3 d. 2 • 2 • 2 • 2 • 2 • 2 • 2

2. a. 230 b. 10 000 c. 2340 d. 44

Práctica guiada

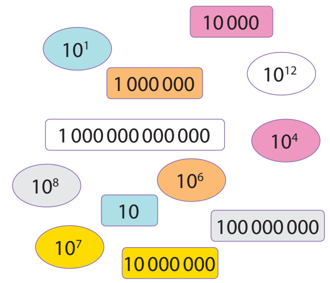
3. a. 100 b. 1 000 c. 100 000 000 d. 10 000 000 000

4. a. < b. > c. < d. =

5. a. 10^6 cm^2 b. 10^2 m^2

Aplica

6.



7. a. 2 b. 7 c. 9 d. 6

8. a. Sí; 10^1. b. No. c. No. d. No. e. Sí; 10^8. f. No.

9. a. 31 b. 18 c. 21

10. a. 10^6 cm^2 b. 10^9 cm^2

11. a. 10^6 b. 10^5 c. 10^8 d. 10^3

12. Gastó \$ 10^5.

13. a. Se aplicaron 3 aumentos, o sea, la imagen aumentó en 10^3.
b. 10^5

14. Cada exponente está aumentado en una unidad con respecto al correcto.

15. a. 2^4 b. $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ c. 3^6

Reflexiono

1. Su descomposición prima debe corresponder solo a los factores 2 y 5, cada uno presente la misma cantidad de veces. Por ejemplo, 10 = 2 • 5, 100 = 2 • 2 • 5 • 5, etc.
2. Sí, ya que ese número corresponde a la cantidad de factores 10 presentes en su descomposición.

Refuerzo

1. 10^{10} cm^2
2. El valor del exponente debe ser 4 (10^4).

Páginas 81 ▸ Taller

1.

Potencia	Valor	Prefijo
10^9	1 000 000 000	giga
10^6	1 000 000	mega
10^3	1000	kilo
10^2	100	hecto
10^1	10	deca
10^0	1	No tiene

2. Son iguales.
3. Para representar potencias de base 10.

4. También utilizando prefijos.

Páginas 82 y 83 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 10^2 b. 10^3 c. 10^5 d. 10^7
2. a. 10^0 b. 10^1 c. 10^3 d. 10^{11}
3. a. 2 b. 4 c. 8 d. 0

Práctica guiada

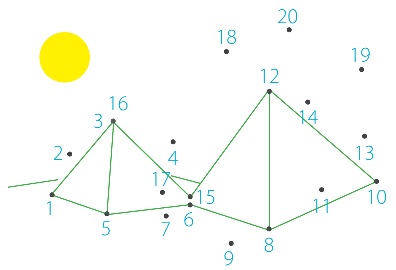
4.

Número	Valor	Descomposición	Potencia
796 553	6000	6 • 1000	$6 \cdot 10^3$
234 670	4000	4 • 1000	$4 \cdot 10^3$
5 674 981	80	8 • 10	$8 \cdot 10^1$
54 821 036	800 000	8 • 100 000	$8 \cdot 10^5$

5. a. Centena. b. Unidad de millón. c. Decena de mil. d. Unidad. e. Centena de mil.
6. a. $1 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 6 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$
   b. $1 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2 \cdot 10^0$
7. a. 1295 b. 524 898 c. 62 689 578
8. a. 100 b. 1000 c. 0,1 d. 1000

Aplica

9. a. $7 \cdot 10^{21}$ km b. $4 \cdot 10^{34}$ Joule c. $3 \cdot 10^8$ m/s d. $1 \cdot 10^{13}$ km
10.



11. a. 10^{11} mm.
    b. 10^6 litros.
    c. No, porque ha leído la mitad de lo establecido.
12. Significa que el resultado es $1{,}5964825 \cdot 10^{13}$.

Reflexiono

1. La cantidad de cifras corresponde a la cantidad de sumandos.
2. No, por ejemplo la descomposición aditiva del número 1 124 635 no tiene potencia de base 10 con exponente 7: $1 \cdot 10^6 + 1 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 4 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$

Refuerzo

1. $2 \cdot 10^6 + 4 \cdot 10^5 + 6 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10^0$
2. 5000

Páginas 86 y 87 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 15,7 b. 157 c. 1570 d. 15 700
   e. La coma de un número decimal que se multiplica por una potencia de 10 se desplaza según el exponente.
2. a. 9 • 5 b. 60 • 20 c. 12 • 12 d. 1666 • 2 e. 23 • 1 000 f. 500 • 500
3. a. $6{,}42 \cdot 10^1$ b. $3{,}52 \cdot 10^8$ c. $2{,}25 \cdot 10^{13}$ d. $3{,}897 \cdot 10^{15}$ e. $1{,}38 \cdot 10^{17}$ f. $2{,}7 \cdot 10^{17}$
4. a. 24 000 000 000 b. 701 000 c. 500 000 000 000 d. 4500 e. 39 000 000 f. 5 645 000 000 000
5.

Número	Utilizando múltiplos de 10	Notación científica
15 000	1,5 • 10 000	$1{,}5 \cdot 10^4$
9 860 000	9,86 • 1 000 000	$9{,}86 \cdot 10^6$
56 400 000	5,64 • 10 000 000	$5{,}64 \cdot 10^7$
12 000 000 000	1,2 • 10 000 000 000	$1{,}2 \cdot 10^{10}$

6. $3 \cdot 10^{10}$ | $2 \cdot 10^7$ | 20 000 000 | 500 000 000 000 000 | $2 \cdot 10^5$ | 3 000 000 | 30 000 000 000 | $3 \cdot 10^6$ | $5 \cdot 10^{14}$ | 200 000

Aplica

7. a. $7 \cdot 10^9$ personas. b. $1{,}5 \cdot 10^{11}$ m. c. $5{,}295 \cdot 10^9$ km. d. $1{,}9891 \cdot 10^{30}$ kg. e. $6{,}5 \cdot 10^7$ años.
8. a. $1{,}3 \cdot 10^7$ m
   b. La potencia, ya que entregan más información para la comparación.
9. $10^3 \neq 10 + 10 + 10$
11. 23 000 millones.
12. a. $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km
    b. Según los datos, tarda 200 segundos.
    c. $4{,}0678 \cdot 10^{13}$ km

Reflexiono

1. Sí, ya que $0{,}2 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^{-1} \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^5$ y $0{,}00002 \cdot 10^{10} = (2 : 10^5) \cdot 10^{10} = 2 \cdot 10^5$.
2. Si, ya que todo número entero puede escribirse como el producto entre un número decimal con parte entera entre 1 y 9 y una potencia de 10.

Refuerzo

Mover la coma hacia la izquierda hasta obtener el 3,6. Luego, multiplicar este valor por una potencia de base 10 con exponente igual al número de lugares que se movió la coma. Así, $36\,000\,000\,000 = 3{,}6 \cdot 10^{10}$.

Páginas 90 y 91 ▸ ¿Cómo voy?

1. a. 10^4 b. 10^7 c. 10^3 d. 10^1 e. 10^0
2. a. 100 000 b. 1 000 000 c. 100 000 000 d. 1000 e. 10 000 f. 10 000 000 000
3. a. No. b. Sí; 10^5. c. No. d. Sí; 10^7. e. No. f. Sí; 10^3.

4. a. 10^6 b. 10^8 c. 10^4 d. 10^5 e. 10^6

5. a. 10^3 m^3 b. 10^7 cm^3

6. a. $4 \cdot 10^3$ c. $9 \cdot 10^1$ e. $5 \cdot 10^6$
b. $3 \cdot 10^2$ d. $9 \cdot 10^4$ f. $9 \cdot 10^4$

7.

Posición	Valor posicional	Potencia de 10
Decena	10	10^1
CM	100 000	10^5
DM	10 000	10^4
Centena	100	10^2
CMi	100 000 000	10^8
Unidad de mil	1000	10^3
UMi	1 000 000	10^6
Decena de millón	10 000 000	10^7
U	1	10^0

8. a. $1 \cdot 10^3 + 3 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10^1 + 8 \cdot 10^0$
b. $1 \cdot 10^5 + 2 \cdot 10^4 + 3 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 4 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^0$
c. $5 \cdot 10^7 + 5 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^2 + 8 \cdot 10^1 + 4 \cdot 10^0$
d. $3 \cdot 10^6 + 5 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 1 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^0$

9. a. 2350 c. 132 000 e. 12 290
b. 655 d. 7 955 000

10. a. 45 000 c. 27 000 000 000
b. 6 180 000 000 000 000 d. 54 500

11. a. $6 \cdot 10^7$ d. $5{,}23 \cdot 10^6$
b. $4{,}3 \cdot 10^5$ e. $5{,}347 \cdot 10^2$
c. $6{,}5321 \cdot 10^2$ f. $4{,}834 \cdot 10^7$

12.

Notación decimal	Notación científica
31,2	$3{,}12 \cdot 10^1$
453,6	$4{,}536 \cdot 10^2$
6000,2	$6{,}0002 \cdot 10^3$
21 000,4	$2{,}10004 \cdot 10^4$
312	$3{,}12 \cdot 10^2$
210,004	$2{,}10004 \cdot 10^2$
53 500	$5{,}35 \cdot 10^4$
7120	$7{,}12 \cdot 10^3$
4536	$4{,}536 \cdot 10^3$

13. a. 1 b. 1,084 c. 3,4805 d. 6

14. Radio de nuestra galaxia:
15 000 000 000 000 m.
Tiempo de rotación de la tierra alrededor de su eje:
86 000 s.
Distancia entre la Tierra y la Luna: 384 400 000 m.

15. Sol: $1{,}392 \cdot 10^6$ km. Júpiter: $1{,}42984 \cdot 10^5$ km.
Tierra: $1{,}2756 \cdot 10^4$ km. Luna: $3{,}476 \cdot 10^3$ km.

16. Tierra-Luna: $3{,}844 \cdot 10^5$ km.
Tierra-Venus: $4{,}14 \cdot 10^7$ km.

17. $1{,}98 \cdot 10^{30}$ kg

18. - Disminuir cálculos.
- Comparar grandes y pequeñas magnitudes.

Desafío de integración

1. 200 litros. **2.** En Santiago. **3.** $2{,}20752 \cdot 10^8$ s.

Sección 3 **Potencias**

Página 94 ▸ Sintetizo mis aprendizajes

¿Cómo se hace?:

1. Resolver primero las operaciones dentro de un paréntesis priorizando multiplicación y división por sobre la adición y la sustracción.
2. El cociente entre el valor final y el valor inicial se expresa como porcentaje. Este valor corresponde al porcentaje del valor inicial que representa el valor final. Para calcular la variación, se debe restar a 100 % ese porcentaje.
3. Descomponer el número en dos factores. El primero de ellos debe ser un decimal de parte entera mayor o igual a 1 y menor a 10, el segundo factor debe ser una potencia de base 10. La multiplicación de estos dos factores debe corresponder al número original.

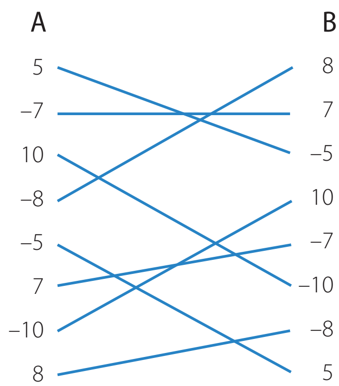
Páginas 95 y 96▸ Refuerzo mis aprendizajes

1. a. –100 b. 100 c. –3 d. 3

2.

3. a. –8; –3; 0; 2; 4; 12 b. –15; –5; 4; 12; 13; 20

4.



5. a. 12 + (–6) = 6 b. (–12) + (–8) = –20

6. a. 1 b. –8 c. 20 d. –10

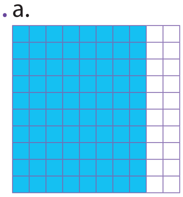
7. a. (–12) – (–15) = 3 b. 12 – 6 = 6

8. a. –3 b. 11 c. –2 d. 7

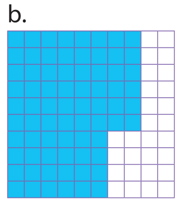
9. (32 – (–1200)) m = 1232 m

10. 38 °C

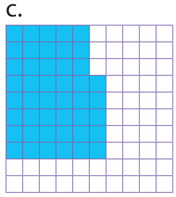
11. a.



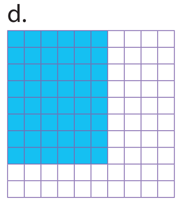
b.



c.



d.



12. a. $0{,}4 \cdot 6 = 2{,}4$ b. $\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{3}{20}$ c. $\frac{4}{5} \cdot \frac{7}{10} = \frac{28}{50}$

13. a. $\frac{1}{9}$ b. $\frac{9}{2}$ c. 0,032 d. 21,93

14. a. 3,6 : 0,9 =4 b. 0,8 : 0,2 = 4

15. a. $\frac{1}{2}$ b. $\frac{25}{32}$ c. 1,5 d. 9,1

16. a. 5,2 b. 6 c. 21 d. 1080

17. Recorre 12,6 km. **18.** El automóvil del tipo A.

19. El 25 % no cursa Educación Básica. El 75 % cursa Educación Básica.

20. Cuesta $ 1089 por kilo.

21. Tienen 125 km^3.

22. a. 10^3 b. 10^5 c. 10^8 d. 10^6 e. 10^0

23. a. $2{,}18 \cdot 10^1$ c. $3{,}584 \cdot 10^{12}$
b. $6{,}01 \cdot 10^8$ d. $1{,}89 \cdot 10^{20}$
e. $9 \cdot 10^{21}$

24. $1 \cdot 10^7$ mm

25. Volumen: $1{,}08321 \cdot 10^{12}$ km^3. Radio: $6{,}378 \cdot 10^3$ km.

Páginas 97 y 98 ▸ ¿Qué aprendí?

Parte I

1. B	**3.** B	**5.** D	**7.** B	**9.** D
2. D	**4.** C	**6.** B	**8.** D	**10.** A

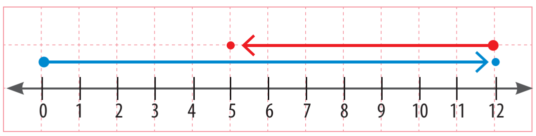
11. a. La diferencia es de 1 °C.
b. Jueves 13; La diferencia fue de 11 °C.

12. 0,4 kg

Parte II

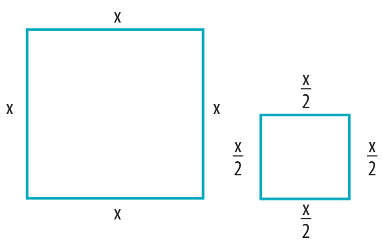
1. –2

2.



3. Gris: $\frac{3}{10} = 0{,}3$ Morado: $\frac{1}{10} = 0{,}1$
Verde: $\frac{4}{10} = 0{,}4$ Naranja: $\frac{2}{10} = 0{,}2$

4. Se reduce en un 75 %.



5. 15 láminas. **6.** 9 estacas.

7. 1000 pétalos. **8.** $45 \cdot 10^8$.

9. Tiene razón. Lo correcto es $1{,}23 \cdot 10^9$.

10. Porque $7 \cdot 11 \cdot 13 = 1001$ y cualquier numero de esa forma es divisible por 1001.

11. No son correctas. El precio de B debe disminuir un 20 %.

Unidad 2 Álgebra

Sección 4 Álgebra

Páginas 104 y 105 ▸ ¿Qué debo saber?

- Resolver operaciones dentro de paréntesis, luego multiplicación y división de izquierda a derecha y finalmente sumas y restas.

1. a. –4 b. –10 c. 9 d. 19 e. 11 f. $-\frac{112}{15}$ g. 0

- Se sigue una secuencia regular, en la cual el término general relaciona cada uno de los términos de la secuencia con su etapa o posición en la que se encuentran.

2. a. 12, 19, 26, 33. b. 73, 61, 49, 37.
c. 64, 32, 16, 8.

3. 14 sillas.

4. a. 13, 22, 37. b. 166 c. 3n + 1

- Porque se igualan expresiones algebraicas.
- Que una inecuación es una desigualdad entre expresiones algebraicas.

5. a. 10 b. 40 c. 12 d. 11

6. a. $x + 5 = 8$, $x = 3$. b. $x + 3 = 7$, $x = 4$.

7. a. $x = 10$ b. $x = 7$ c. $x = 25$ d. $x = 12$ e. $x = -84$ f. $x = -23$

8. a. $x < 8$ b. $x < 28$ c. $x > 20$ d. $x < 20$ e. $x < 120$ f. $x > 42$

9. a. 7,5 cm b. 9 cm.
c. Mario tiene a lo más 17 años. d. 11

Páginas 108 y 109 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

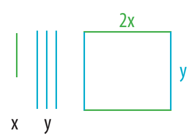
1. a. Cuatro veces n.
b. Cero coma setenta y cinco veces p.
c. Doce unidades disminuidas en 3 veces a.
d. a disminuido en el doble de b.

2. a. 286,02 cm b. 42,1375 cm.

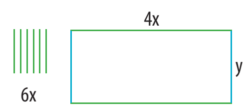
Práctica guiada

3. a. Dos términos. Coeficientes numéricos: 2 y 3. Factores literales: ab y b^2c.
b. Tres términos. Coeficientes numéricos: –2, 1 y –4. Factores literales: def y eg.
c. Un término. Coeficiente numérico: 1. Factor literal: mno^3p.
d. Un término. Coeficiente numérico: $\frac{1}{8}$. Factor literal: stu.

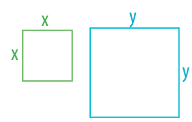
4. a.



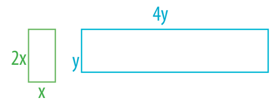
b.



c.



d.



5. a. 2x + 10 b. 3(x + 4) c. 0,25x d. 3(x – 3)

6. a. p = 5c – 3i; 84 pts. b. b = 2x + 3y; 3 050 g.
c. d = (2a + 2(a + 7)) • 2500 + a(a + 7) • 1200; $883 000.

Aplica

7. a. d = 5x + 3y; d: dinero gastado; x: valor pulsera; y: valor collar.
b. r = c + m + 5; r: cantidad de vehículos; c: cantidad de camionetas; m: cantidad de motos.
c. B = 13 + 2h; b: edad de Bárbara; h: edad de hija.

8. a. 3x; 6x – 4
b. Verde: la mitad de un número aumentado en catorce unidades. Naranja: el doble de un número disminuido en una unidad.
c. Morada: 36; 24; 8,4; 25,8
Verde: 20; 18; 15,4; 18,3
Celeste: 68; 44; 12,8; 47,6
Naranja: 23; 15; 4,6; 16,2

9. a. 3h – 2v
b. –4h – v
c. 4v + 5h
d. 2h – 2v
e. (–3h + 2v) + (–h – 3v) = –4h – v
f. (–3h – 2v) + (–h – 3v) + (6h – 2v) = 2h – 7v

Reflexiono
1. No. Al evaluar se tiene 24 + 6 – 18 = 12.
2. Sí. Ambos se pueden representar como 2x + 5.

Refuerzo	
1. x – 2x	**2.** p + b + 2p + 100

Páginas 112 y 113 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

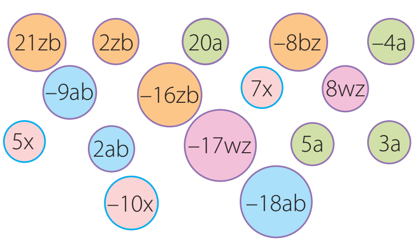
1. a. 11
b. –3 d. 18 f. 11
c. 19 e. 5 g. 14

2.

Expresión algebraica	N.º términos	Coeficiente numérico	Factor literal
2a + 5b	2	2 y 5	a y b
3ap – 5sp + p	3	3, –5 y 1	ap, sp, p
7b – 2s + 5f	3	7, –2 y 5	b, s, f
9nt + 5pt – 12	3	9, 5 y – 12	nt, pt

Práctica guiada

3.



4. a. 4a + 7b c. –2r + 13t
b. 5p – 3q + 4a d. 23y – 5p

5. a. 12x + 11y c. –7a – 5w + 7b
b. 6x + 3y d. $-3a^2b + 8ab + 9ab^2$

Aplica

6.

Expresión Algebraica	Expresión algebraica reducida
8g + 4h – 5g – h + 3g	6g + 3h
3p + 6q – 2r – 4q +5r	3p + 2q + 3r
3j – k + 5j + 16k	8j + 15k
5v + 11w – 3v – 7w	2v + 4w
3x + 2y + 2x + y	5x + 3y
2m + 6n + 7m – 5n	9m + n
7a + 4b – 3c + 2a + 11c	9a + 4b + 8c
16d + 8e + 7f – 4d –3e	12d + 5e + 7f

7. a. 2x b. 3x c. 4x d. 4x

8. a. 11x – 14y + 7z d. 11bc + 3bd
b. 11f – 21g + 14 e. a + 7ab + 7b
c. –9pq – 8rs f. –2v

9. a. A = 9, B = 6. c. A = 5, B = –6
b. A = 7, B = 11. d. A = –3, B = 2.

10. a. 2a + 4b. b. a + 2x + y + w

11.

11x – 9y
4x – 10y | 7x + y
5x – 12y | 2y – x | 8x – y
9x – 17y | 5y – 4x | 3x – 3y | 5x + 2y

12. a. 20 b. Agregar 3 puntos. c. 3n + 5

13. a. Sí, ya que factorizó. b. a(5b + 4c – 7)

Reflexiono
1. Deben tener el mismo factor literal.
2. No. Por ejemplo, x + y – x = y.

Refuerzo	
1. 10y – 23x	**2.** 22a + 12b

Páginas 117, 118 y 119 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 10x b. 4a c. 2p – 2q d. 6s – 6j

2. a. 14 b. 16 c. $\frac{11}{2}$ d. 2

Práctica guiada

3. a. 1 b. 3 c. 3 d. 1 e. 2 f. 1

4. a. 4x + 10 = 38, x = 7.
b. 3x + 9 = 30, x = 7.
c. 5x – 2 = 28, x = 6.
d. 2x – 4 = 16, x = 10.
e. 2 + 3x – 3 = 14; x = 5

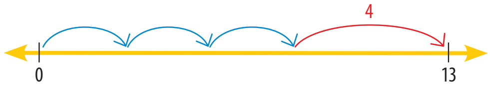
5. a. 36 b. 88 c. 136 d. 152 e. 108

6. a. x = 2 d. p =1,2
b. y = 464 e. j = 1,875
c. w = 0 f. y = 0,875

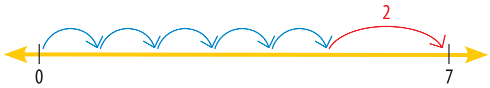
7. a. $\frac{3}{4}$ de círculo. c. $\frac{1}{2}$ círculo.
b. 4 círculos. d. $\frac{4}{3}$ de círculo.

8. a. 5x + 4 = 19 d. 2x – 4 = 5
b. 3x + 2 = 25 e. 4x + 10 = 12
c. 5x – 12 = 10 f. 5x – 3 = 22

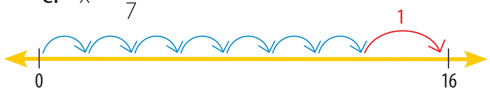
9. a. x = 3



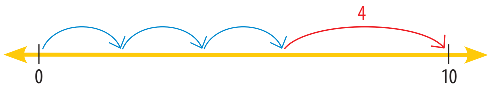
b. x = 1



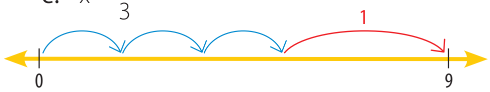
c. $x = \frac{15}{7}$



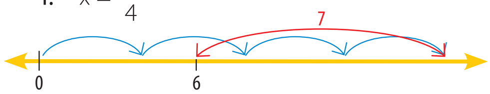
d. x = 2



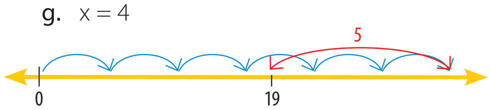
e. $x = \frac{8}{3}$



f. $x = \frac{13}{4}$



g. x = 4



10. a. x = 5 b. x = 8 c. x = 12 d. x = 100

11. 4x = –24, x = –6.

12. El error es que se sumó (–6) a la ecuación. x = 9.

13. a. 3x + 1 = 22 b. x + 3 = –5 c. 3 – 5x = –7

14. $ 1750.

Reflexiono
1. Sí, ya que la cantidad que se coloca en cada platillo es la misma.
2. Los divisores de 10: 1, 2, 5 y 10.

Refuerzo	
1. 2	**2.** 2 m.

Páginas 122 y 123 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. t ≤ 37 b. x > 37 c. x < 37 d. 37 ≤ s

2. a. 30 y 45 c. $6\frac{3}{4}$ y 26
b. 2,5 d. 172 y 210,56

3. a. x < 18 c. x > 17 e. x < 14
b. x < 17 d. x > 8 f. x < 21

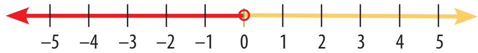
Práctica guiada

4. a. 8x + 3 > 4x + 15
b. 8x + 6 > 6x + 16
c. 4x + 15 > 8x + 3
d. 8x + 3 > 4x + 13

5. a. 15 < w
b. y > 0
c. h < 4
d. x > 1
e. x > 5
f. x > 4

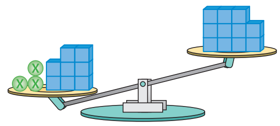
6. a.

b.

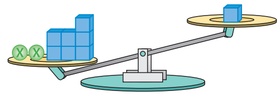


Aplica

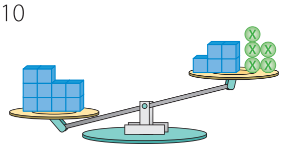
7. a. 3x + 8 > 11



b. 1 < 7 + 2x



c. 5x + 5 < 10



8. a. x > 4 b. x < 18

9. Todos los números menores que 7.

10. Los números mayores que 5.

11. a. Sí. c. No.
b. Sí. d. Sí.

12. a. x < 6 c. x > 1 e. x < 3
b. x < 4 d. $x > \frac{5}{4}$ f. x > 24

13. A > H – J. Puede tener más de 61 años.

14. A lo más 30 cm de largo y 20 cm de ancho.

Reflexiono
1. Porque una desigualdad es siempre verdadera. Por ejemplo, 3 > 1.
2. Sí, por ejemplo 3x + 2 > 11 y 5x + 4 > 19.

Refuerzo
1. x < 6
2. Por ejemplo 0, 1 y 2.
3. L < (16 : 2) – 4.

Páginas 127, 128 y 129 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 12x d. c = 450n
b. $\frac{1}{9}x$ e. d = 7v
c. $\frac{3}{8}x$ f. G = 2A, A + G = 35

2. a. 13a + 15b d. –15t + 7s – 9
b. 4x + 6z e. 2mn + 9m – 10mj
c. –2p – 4z f. 8,5p + 3q

3. a. x = 3 c. x = 7 e. x = 1
b. x = 9 d. x = 7 f. x = 385

4. a. x < 3,5 d. x > 5
b. x > 2 e. x < 5
c. x < 8 f. x < 36

5. a. Sí. b. Sí. c. Sí. d. Sí.

6. a. 10 000 = 8000 + z c. 40 : r = 10
b. 3x = 96 d. 350 = y + 98

Práctica guiada

7. a. 15 000 + c < 34 000. Cuesta menos de 19 000.
b. x > 12. Tiene más de 12 bolitas.
c. 21 000 – 6x > 0; 21 000 – 7x < 0. Cuesta entre $ 3000 y $ 3500.

Aplica

8. a. 6x + 23 = 173. Leyó 25 páginas cada día.
b. 163 = 7x + 16. Le regaló 21 huevitos a cada uno.
c. Esteban tenía 3 años.

9. a. x = 20°. ∢ABC: 65°; ∢BCA: 60°; ∢CAB: 55°.
b. x = 33°. ∢ABC: 122°; ∢BCD: 68°; ∢CDA: 96°; ∢DAB: 74°.

10. a. 220 cc, 1220 cc. Pertinente.
b. 16, 17, 18. Pertinente.
c. $ 3500, $ 17 000. Pertinente.
d. 14 años. Pertinente.
e. 16 segundos. Pertinente.
f. 2,4 m^2. Pertinente.
g. Menos de 24 pisos como máximo. Pertinente.
h. 4 m. Pertinente.
i. Mayor a 105 puntos. No pertinente.
j. x < –1. No pertinente.
k. Ejemplo de respuesta: La 29. 199 círculos. Pertinente.
l. 33, 35, 37. Pertinente.
m. 13, 26 y 35 años. Pertinente.

11. a. Por ejemplo: si a 120 cajas de plumones se le quitan 45 plumones se obtienen 315 plumones. ¿Cuántos plumones tiene cada caja? Respuesta: 3 plumones.
b. Por ejemplo: la masa de 5 manzanas es mayor que la masa de 3 manzanas más 700 g. ¿Cuál es la masa mínima de una manzana? Respuesta: mayor a 350 g.

Reflexiono

Al desarrollar, no consideró la coma del enunciado. Lo correcto es 3x + 1000 = 2x + 5000 y x = 4000.

Refuerzo

1. 21 naranjas.
2. 6 cajas.

Páginas 132 y 133 ▸ ¿Cómo voy?

1. a. 5a b. 3b + 2c

2. a. La mitad de un número disminuido en 14 → –2 –13, 2.
b. 3x – 5 → 4, 10, 1.

3. a. S = B – 7 c. 2H = M – 150
b. C = 300 + L d. C = 5P + 5

4. 34x + 14w

5. a. –6f + 5g + 4
b. –2a + 5g – 5b
c. 13pq + 5rq – 16rs – 3pr – 5
d. –10w + 21x – 1

6. a. Una estrella es equivalente a un rectángulo.
b. Una estrella es equivalente a dos rectángulos.

7. a. x = 23 c. x = 20
b. x = 16 d. x = 60

8. a. x = 10 e. x = 4,25
b. x = 5 f. x = 2,25

9. No haber dividido el 7 por 5. Solución: x = 3,6.

10. a. 8x + 4 > 3x + 10
b. 5x + 6 > 7x + 1

11. a.


b.


12. a. d – 5500 = 25 700
b. p + 5 = 19
c. 2e + 20 < 86

Desafío de integración

1. 7x + 252 < 280. Respuesta: Menos de 39 km.
2. 12 + 4x + 2x = 222. Respuesta: 35 conejos.
3. Al cabo de 12 horas.

Página 134 ▸ Resolución de problemas

Respuesta: El castor logra juntar 3 + 2(n – 1) troncos.

Sección 5 Relaciones proporcionales

Páginas 138 y 139 ▸ ¿Qué debo saber?

- Se multiplica por una potencia de base 10, donde su valor tenga la misma cantidad de ceros que cifras decimales del divisor.

1. a. 37,89 c. 2,166 e. 0,76
b. 0,201 d. 0,35 f. 0,1586

2. a. 3,1 c. 0,07 e. 52,1
b. 7,1 d. 10,01 f. 0,09

- Es el cociente entre dos cantidades.
- Una forma es verificar si forman fracciones equivalentes. La otra, es verificar si el producto de los extremos y el de los medios son iguales.

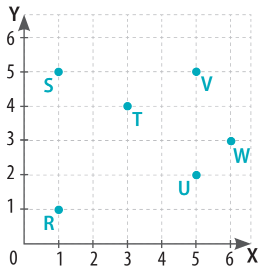
3. a. $\frac{34}{66}$ b. $\frac{22}{42}$ c. $\frac{66}{64}$ d. $\frac{25}{38}$

4. a. 0,7
b. 0,625
c. 6
d. 6

- Identificar la coordenada del eje X y trazar una línea imaginaria perpendicular. Análogamente para la coordenada del eje Y. El punto debe estar ubicado donde ambas líneas se intersecan.
- Calcular distancias, representar traslaciones, calcular perímetros y áreas.

5. A(1, 2) D(3, 3) G(5, 3)
B(2, 1) E(4, 5) H(6, 4)
C(2, 4) F(5, 2) I(6,0)

6.



- Es un lenguaje compuesto por símbolos matemáticos que representan números y que permite general situaciones.

7. a. –10 b. 57 c. $\frac{1}{2}$ d. 90

8. a. x + 18 c. $\frac{2}{5}x$

b. 2x + 1 d. $\frac{1}{2}x - 8$

Páginas 142 y 143 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 5x

b. x – 5

c. $\frac{x}{7}$

d. 0,3x + 2

e. $\frac{x-8}{19}$

2. a. 9 b. 10 c. 86 d. 14

Práctica guiada

3.

Situación	Variable independiente	Variable dependiente
Consumo de tabaco y daño corporal.	Consumo de tabaco.	Daño corporal.
Número de trabajadores y el tiempo empleado en una construcción.	Número de trabajadores.	Tiempo empleado en una construcción.
Cantidad de páginas de un libro y de papel utilizado.	Papel utilizado.	Número de páginas de un libro.

4.

Situación	Relación entre las variables
Consumo de energía eléctrica y potencia de los electrodomésticos.	A mayor potencia de los electrodomésticos, mayor es el consumo de energía.
El área de una baldosa y la cantidad de estas que se necesita para cubrir una superficie.	A mayor área de una baldosa menor es la cantidad que se necesita para cubrir una superficie.
La cantidad de hojas que se imprimen y el consumo de tinta.	A mayor cantidad de hojas que se imprimen mayor es el consumo de tinta.

5. a. y = 3x

b. $y = \frac{x}{2}$

c. y = 8x

Aplica

6. El perímetro (P) de un triángulo equilátero: P = 3x.

El área (A) de un triángulo de base 3 unidades y su altura respectiva (x): $A = \frac{3x}{2}$.

El área (A) de un rectángulo de largo x y de ancho 9 unidades menor que el largo: A = x(x – 9).

7. a. La variable dependiente es y. La variable independiente es x.

b.

Ingreso	5	4	6	7
Egreso	16	13	19	22

c. Multiplica un número por 3 y luego le suma una unidad.

d. Sí.

8. a. La variable dependiente es y. La variable independiente es x.

b.

Ingreso	4	2	$\frac{28}{5}$	6
Egreso	22	12	30	32

c. A 2 le suma un número multiplicado por 5.

d. Sí.

9. y = 2x + 7

Ejemplo:

x	0	1	2	3
g(x)	7	9	11	13

10. a. Sí. b. Sí. c. No.

11. a. y = 10t

b. y = 5000 + 100p

c. y = 230 000 + 20 000v

d. y = 48 • 450x

e. y = 120 – 3n

12. Por ejemplo: Una empresa gasta 250 dólares diarios por utilizar un galpón y 2500 dólares en fabricar su producto. ¿Cuánto gasta al día?

Reflexiono

1. La similitus es que las expresiones generales transforman números en otros números tal como la maquina transforma, por ejemplo, material en productos. elaborados
2. Sí, por ejemplo el índice de masa corporal depende de la masa y la estatura de una persona.

Refuerzo

1. La variable independiente son las horas trabajadas y la dependiente es el trabajo realizado.
2. d = 4t

Páginas 146 y 147 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. $\frac{1}{5}$ c. 72 e. 6

b. 2 d. $\frac{5}{2}$ f. 4,5

2. a. Variable independiente: cantidad de tarjetas de memoria. Variable dependiente: capacidad de almacenaje.

b. Variable independiente: área del radier. Variable dependiente: cantidad de sacos de cemento.

c. Variable independiente: cantidad de sacos de fruta. Variable dependiente: masa de los sacos.

d. Variable independiente: cantidad de dinero. Variable dependiente: cantidad de cajitas de jugo.

3. a. 5 c. 1,5

b. 3,2 d. 0,2

Práctica guiada

4. a. Directa: a mayor cantidad de personas que pagan,mayor es la ganancia.
   b. Directa: a mayor cantidad de libros en una caja, mayor es la masa.
   c. No es directa, ya que no hay una razón constante.
   d. No es directa, mientras más personas realizan un trabajo, menos tiempo tardarán en terminarlo.
   e. Directa: mientras más minutos en llamada, mayor es el valor que se paga.

5. a. No.   c. No.
   b. Sí, $k = 0{,}25$.   d. Sí, $k = 7$.

6. a. 4   b. 252   c. 24   d. 12

Aplica

7. a. $m = 20$; $n = 18$.
   b. $p = 0{,}5$; $F = 12$.

8. a. Variable independiente: cantidad de horas. Variable dependiente: total a pagar.
   b. 630
   c. $y = 630x$

9. $ 3000.

10. $ 4000.

11. 980 m

12. 200 palabras.

13. 48 segundos.

14. No, ya que la razón de la primera mezcla es 4 : 3 y la segunda es 28 : 15.

15. 153 g.

16. La compañía B.

17. a. Sí, ya que $P = 4x$.
   b. No, ya que $A = x^2$.

18. Por ejemplo los trenes del metro que durante la mañana ingresan a las estaciones cada 2 minutos.

Reflexiono
No puede ser negativa, ya que, por ejemplo, si tenemos $A = -2B$, un incremento en la variable A trae asociado una disminución en la variable B.

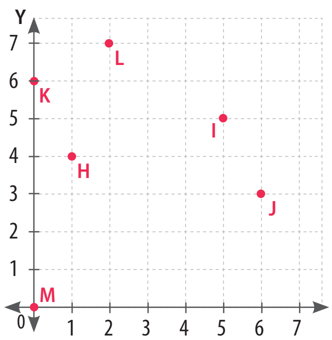
Refuerzo	
1. 230.	**2.** 120 cocineros.

Páginas 150 y 151 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. A(1, 7) - B(6, 4) - C(7, 5) - D(3, 6) - E(5, 0) - F(4, 2) - G(2, 3) - H(4, 4)

2.



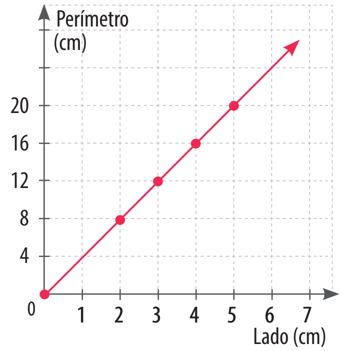
Práctica guiada

3.

x (horas)	y = 20 • x	y (recorrido en km)	Par ordenado (x, y)
1	20 • 1	20	(1,20)
4	20 • 4	80	(4, 80)
5	20 • 5	100	(5,100)
7	20 • 7	140	(7,140)
9	20 • 9	180	(9,180)
12	20 • 12	240	(12, 240)

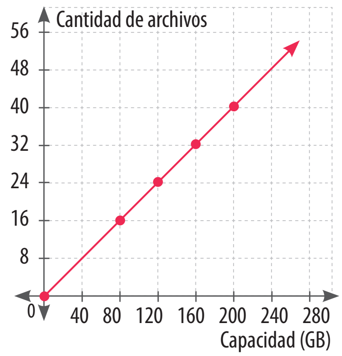
Aplica

4. a.



Directamente proporcional, $k = 4$.

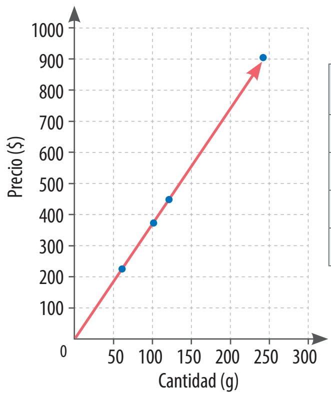
b.



Directamente proporcional, $k = 0{,}2$.

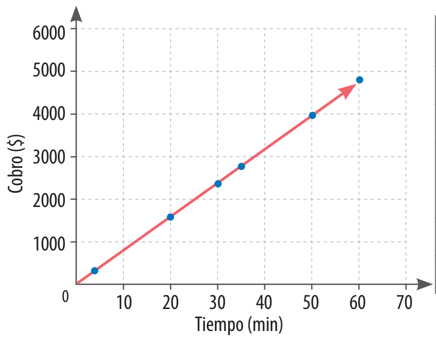
5. a. No, ya que mientras los valores de x aumentan los de y disminuyen.
   b. No, si bien ambos valores aumentan, no lo hacen de forma constante.
   c. Sí, ya que la recta contiene al origen, con $k = 4$.
   d. No, ya que la recta no contiene al origen.

6. a.



Cantidad (g)	Precio ($)
60	225
100	375
120	450
240	900

b.



Tiempo (min)	Cobro ($)
4	320
20	1600
30	2400
35	2800
50	4000
60	4800

7. a. Local 1: 15 y local 2: 10.
b. $ 15
c. $ 10
d. Local 1: f(x) = 15x   Local 2: f(x) = 10x
e. En el local 2.

8. a. 4
b. Cada minuto se utilizan 4 m^3.
c. 28 m^3

9. Para x = 4 se debe tener y = 800.

10. a = 8 y b = 10. Aplicando proporcionalidad se tiene que 5a = 4b. Luego, existen infinitas soluciones.

Reflexiono

1. No, ya que mientras mayor sea el valor de la constante, la variable dependiente crece más, por lo que su gráfico se acerca al eje Y, es decir, aumenta su inclinación.

2. Si la constante de proporcionalidad es positiva, siempre el gráfico es ascendente.

Refuerzo

1. Representar los valores correspondientes como puntos en el plano cartesiano: la variable independiente se representa en el eje X y la dependiente, en el eje Y.

2. Como la recta y = 750x.

Páginas 154 y 155 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 6, 12, 18, 24, 30
b. 3,2; 6,4; 9,6; 12,8; 16
c. 0,5; 1; 1,5; 2; 2,5
d. $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{5}{4}$
e. $\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{9}{8}, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}$
f. $\frac{9}{5}, \frac{18}{5}, \frac{27}{5}, \frac{36}{5}, 9$
g. $12, 6, 4, 3, \frac{12}{5}$
h. $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}, \frac{1}{8}, \frac{1}{10}$

2. a. 3   b. 15   c. $\frac{5}{2}$ d. $\frac{1}{3}$ e. 1,2   f. 1,5   g. 1,5   h. 0,8

Práctica guiada

3. a. Sí.   b. No.   c. No.   d. No.

4. a. No, pueden haber tres 7° básicos A, B y C y en cada uno 35, 37, 36 alumnos respectivamente.
b. No, es directa, a mayor capacidad mayor cantidad de música.
c. No, ya que a mayor distancia mayor será el largo de la fila.
d. No, mientras mayor sea la nota mayor será el promedio que tenga con otra.

5. Al doble de tiempo para realizar el trabajo / la mitad de máquinas.
Al cuarto del largo del rectángulo / El cuarto del ancho del rectángulo para el mismo contenido del área.
A la mitad del contenido de los vasos / El doble de vasos necesarios.
Al cuádruple de bombas / El cuarto de tiempo para vaciar la piscina.
Al tercio de la presión de gas / El triple del volumen que ocupa el gas.
El quíntuple de personas / El quíntuple del precio para cada persona.

Aplica

6. a. Sí, k = 120.
b. No.

7. a. Aumenta al doble.
b. Disminuye a su tercera parte.
c. Aumenta 8 veces.
d. Disminuye en una quinta parte.
e. Aumenta 4 veces.

8. a. p = 10; q = 2,5   b. n = 8; m = 24

9. a. 6 días.   b. 5 días.   c. 93,75 km/h.

10. a. Directa.   b. Inversa.   c. Inversa.   d. Inversa.

11. 90 máquinas embotelladoras.

Reflexiono

1. Verificando si el producto o cociente de los valores correspondiente son constantes.

2. No son variables proporcionales.

Refuerzo

1. La velocidad de un móvil y el tiempo en completar cierta distancia. El tiempo de vaciado de un estanque de petróleo y la cantidad de tuberías para ello.

2. 8 días.

Páginas 158 y 159 ▸ Practiquemos lo aprendido

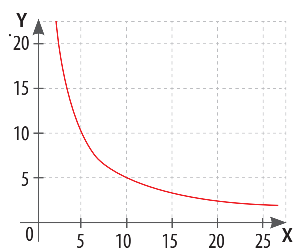
Repaso

1. a. x = 35; y = 10
b. x = 5; y = 10
c. x = 7,2; y = 6
d. x = 3,75; y = 0,75

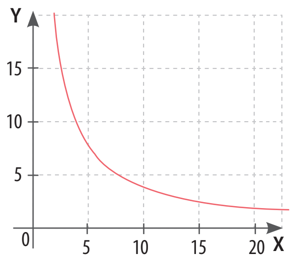
2. a. No, a mayor número de estudiantes mayor cantidad de carpas.
b. Sí, mayor velocidad menor tiempo.
c. No, a mayor superficie del muro mayor cantidad de pintura.

Práctica guiada

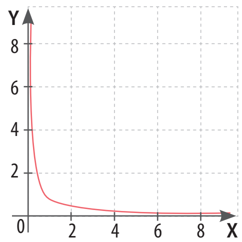
3. a. No.
b. Sí



c. Sí.



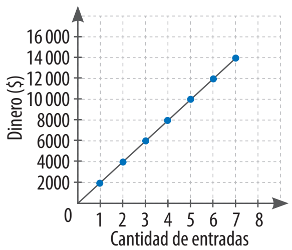
d. Sí.



e. No.
f. No.

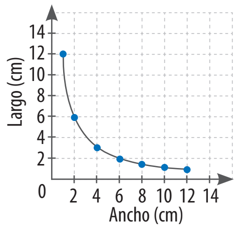
Aplica

4. a.



No son inversamente proporcionales.

b.



Sí son inversamente proporcionales.

5. a. No, ya que para x = 2 se tiene y = 5, pero 2 • 5 = 10, pero para x = 0 se tiene y = 10 y 0 • 10 = 0.
b. Sí, ya que el gráfico corresponde y (8, 5) y (40, 1) verifica xy = 40.

6. a. $y = \frac{400}{x}$

7. a. xy = 18 hipérbola roja; xy = 48 hipérbola azul; xy = 80 hipérbola verde.
b. Estaría entre xy = 48 y xy = 80.

Reflexiono
1. Mientras menor sea el valor de k, la hipérbola tiende a acercarse más a los ejes coordenados.
2. El de la directa es una semirrecta que pasa por el origen, mientras que el de la inversa, es una curva asintótica a los ejes coordenados llamada hipérbola.

Refuerzo
4 días.

Páginas 162 y 163 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 1,6 b. 2,25 c. 0,6 d. 0,25 e. 3,75 f. 12

2. a. No, ya que el cociente no es constante.
b. No, ya que el cociente no es constante.
c. Sí, ya que el cociente es constante igual a 0,5.

3. a. 72 huevos. b. 30 monedas.

Práctica guiada

4. a. 448 cm y 287 cm. b. 9,7 cm.

Aplica

5. a. 473 cm. b. 1 : 59.

6. a. 4,25 cm, 1,525 cm y 1,7 cm.
b. 1 : 8.

7. 18 cm de largo, 2,4 cm de alto y 1,68 cm de ancho.

8. 15 cm de largo y 8,75 cm de ancho.

9. 8,4 cm.

12. a. 416,5 cm de largo, 163,2 cm de ancho y 137,7 cm de alto.
b. Que sus dimensiones son las reales.

Reflexiono
1. La escala se mantiene.
2. No, solo con la proporcionalidad directa ya que en la proporcionalidad inversa el cociente entre sus variables no es constante.

Refuerzo	
1. 1 : 2000	**2.** 50 m y 75 m.

Páginas 166 y 167 ▸ ¿Cómo voy?

1. a. a = 1,5 b. a = 0,5

2. a. $\frac{30}{7}$ b. 8 c. 6,75 d. 1,2

3. a. F b. F c. V d. F

4. a. P = 2L b. T = 2500n

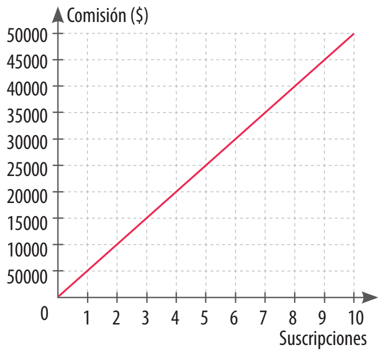
5.

x (cantidad de empanadas)	y = 1200 • x	y (precio)	Par ordenado (x, y)
1	y = 1200 • 1	1200	(1, 1200)
3	y = 1200 • 3	3600	(3, 3600)
6	y = 1200 • 6	7200	(6, 7200)
7	y = 1200 • 7	8400	(7, 8400)

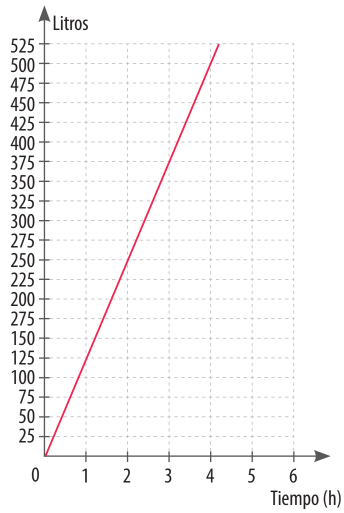
6. Recta verde y recta roja.

7. a. y = x b. 30 minutos.

8. a. C = 5000r



b. L = 125H



9. a. √ b. √ c. √

10. a. Variable independiente: cantidad de litros de agua.
Variable dependiente: área de la superficie regada.
y = 12,5x

b. Variable independiente: cantidad de piedras.
Variable dependiente: cantidad de pulseras. y = 1/5x

11. a. a = 600 y b = 5 b. a = 5 y b = 10

12. a. Inversa.
b. 36.
c. Al menos 3 maquinarias.

13. a. 1,93 cm c. 1 : 300 000
b. 11,9 km d. 0,0255 m

Desafío de integración

1. a. 0,9 kg mas de carne y 1 bebida más.
b. $ 76 000.

2. a. 150 clientes. b. 1,15 minutos.

Páginas 168 ▸ Resolución de problemas

Respuesta: La máquina ejerce 24 N/cm^2.

Páginas 170 ▸ Sintetizo mis aprendizajes

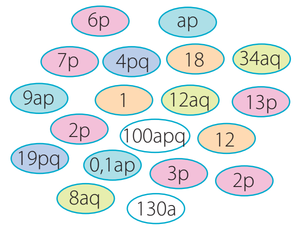
Pregunta 1: Porque las soluciones de las inecuaciones de grado 1 son intervalos de números.

Pregunta 2: Determinando si el cociente o el producto de los valores correspondientes es constante, respectivamente.

Páginas 171 y 172 ▸ Refuerzo mis aprendizajes

1. a. 15S + 12C – 3Q b. $\frac{300}{x} - 8$
c. Puntaje total = (12 + L) + L + 4(12 + L), con L = –3.
Puntaje total = 42.

2.



3. a. –5h b. 20z + 2s c. 4t – 13st

4. a. Medio círculo equivale a un rectángulo.
b. Dos rectángulos equivalen a un círculo.

5. a. 11 b. 5 c. 12,5

6. 3x + 5 < x + 6

7. a. x > 6 c. x > 12
b. 3 > x d. x < 99

8. a. $550 b. 17,5 cm

9. 5

10. y = x + 4

11. a. y = 5x b. y = 3x c. y = 8x

12. a. 8 b. 27 c. 2,5

13. a. Sí, 10. b. Sí, 12 g oro y 18 g plata. c. No.

14. A = 2; B = 8; C = 5,4; D = 3

15. a. 600 b. 42 c. 45 d. 20

16. a. 25 líneas. b. 6,4 hectáreas.

17. A = 5; B = 4; C = 6,25; D = 10

18. 60 km

19. 1 : 3 000 000

20. 9,375 cm

Páginas 173 y 174 ▸ ¿Qué aprendí?

Parte 1

1. C **3.** D **5.** A **7.** A
2. B **4.** B **6.** D **8.** B

9. a. 2x + 1 b. 8x c. 3x + 15

10. 150 cm

Parte 2

1. 14m + 8 **2.** 1 **3.** B y D.

4. 4 **5.** 31 años. **6.** y = 550x

7. y = 2x – 6 **8.** 26 estampillas más.

9. 24 técnicos más. **10.** 20 horas diarias.

11. a. Sí. c. Sí.
b. Sí. d. No, el producto no es constante.

12. - 6 cm de largo y 3 de ancho.
- 5 cm de largo y 2 de ancho.
- 4 cm de largo y 1 de ancho.

Unidad 3 Geometría

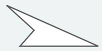
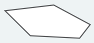
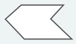
Sección 6 Polígonos

Páginas 180 y 181 ▸ ¿Qué debo saber?

- Figura plana cerrada delimitada por segmentos de recta que no se cortan entre ellos, salvo en sus extremos.
- Según la cantidad de lados, según sus ángulos en cóncavos o convexos y en regulares e irregulares.

1. ① Vértice ② Lado ③ Ángulo

2.

Nombre	Polígono	N° de lados	N° de ángulos	N° de vértices
Triángulo		3	3	3
Cuadrilátero		4	4	4
Pentágono		5	5	5
Hexágono		6	6	6
Heptágono		7	7	7
Octágono		8	8	8

El número de lados, de vértices y de ángulos es el mismo.

- Que el centro del transportador esté sobre vértice del ángulo, haciendo coincidir una de las semirrectas de este con el radio del transportador que indica 0°.

3. a. 130° b. 60° c. 140° d. 35°

4. a. 160° b. 50° c. 90° d. 90°

5. - La medida de sus lados y la medida de sus ángulos.
- Es la medida de su superficie interior.

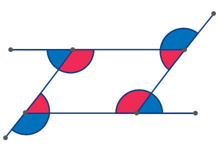
a. F. Solo el cuadrado y el rectángulo.
b. V. Equilátero: tres lados congruentes. Isósceles: dos lados congruentes. Escaleno: todos sus lados distintos.
c. V. Es un paralelogramo.
d. V. Tienen pares de lados opuestos congruentes y paralelos.
e. F. Tienen un par de lados paralelos.

6. a. 12 cm^2 b. 16 cm^2 c. 9 cm^2 d. 8 cm^2

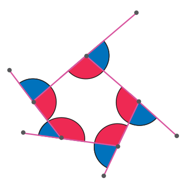
Páginas 184 y 185 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

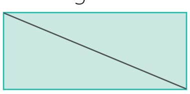
1. a.



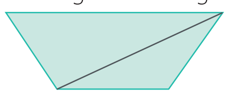
b.



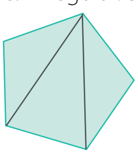
2. a. Irregular. 2 triángulos.



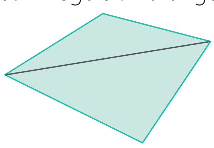
b. Irregular. 2 triángulos.



c. Regular. 3 triángulos.



d. Irregular. 2 triángulos.



Práctica guiada

3. a. 7 lados b. 11 lados c. 10 lados

4. a. 120° b. 144°

5. a. $\alpha = 134°$ b. $\alpha = 80°$

Aplica

6.

Polígono regular	Medida de cada ∡interior	Medida de cada ∡exterior
Triángulo	60°	120°
Cuadrilátero	90°	90°
Pentágono	108°	72°
Hexágono	120°	60°
Dodecágono	150°	30°

7. a. 60° b. 120°

8. No, ya que mide 72°. **9.** Obtuvo un decágono.

Reflexiono

1. Porque cualquier polígono se puede dividir en triángulos.

Refuerzo

1. 156° **2.** 6 lados.

Páginas 189, 190 y 191 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 66 cm^2 b. 66 cm^2

2. a. 1,43 b. 0,925 c. 160,92 d. 46,6

3. a. F. Solo dos son paralelos.
b. V d. F. En un rombo.
c. V e. V

Práctica guiada

4. a. 16 cm^2 b. 30 m^2 c. 10,5 dm^2 d. 45,5 m^2

5. a. 4 cm b. 6,5 cm c. 7 m d. 3 dm

Aplica

6. a. 6 cm^2 b. 12 cm^2 c. 10 cm^2 d. 9 cm^2

7. a. 15 cm^2 b. 84 m^2 c. 78 cm^2

8. a. 100 cm^2 c. 32 cm^2
b. 35 m^2 d. 160 dm^2

9. a. 27 cm^2 b. 96 cm^2 c. 47 cm^2

10. 10 puertas completas.

11. $ 14 900 000.

12. Sus áreas son iguales.

13. Debe aumentar en 4 unidades.

14. Verde: 5,85 m^2 Amarillo: 3,9 m^2 Celeste: 1,95 m^2

Reflexiono

1. Calcular el área de color morado de las 4 baldosas y comparar. En este caso, la baldosa B tiene la mayor área de color morado.

Refuerzo

1. No, ya que el área se cuadruplica.

2. 14 cm

Páginas 194 y 195 ▸ **¿Cómo voy?**

1. a. $x = 100°$
   b. $x = 116°$
   c. $x = 100°$; $y = 80°$
   d. $x = 120°$; $y = 60°$
2. $x = 36°$
3. $\frac{9}{2}$
4. $60°$
5. Verónica tiene la razón ya que al sumar los ángulos interiores de la figura se obtiene 530º en vez de 540º.
6. Los tres polígonos tienen igual área.
7. 1,6 m^2
8. 454,67 cm^2
9. **a.** 21 cm^2 **b.** 20 cm^2 **c.** 5 cm
10. **a.** 84 cm^2 **b.** 10 cm **c.** 7 cm
11. **a.** 312 cm^2 **b.** 9 cm **c.** 234 cm^2
12. .**a.** 54 cm^2 **b.** 63 cm^2 **c.** 22,5 cm^2

Desafío de integración

1. 25 cm^2
2. **a.** 19,24 cm^2 **b.** 57,72 cm^2

Página 196 ▸ **Resolución del problemas**

Respuesta: El área disponible para plantar pasto y tréboles es de 432 m^2.

Sección 7 Círculo

Páginas 200 y 201 ▸ **¿Qué debo saber?**

- Infinitos números decimales.

1. a. 3
   b. 134,1
   c. 349,89
   d. 46,0
   e. 4
   f. 180
2. Por ejemplo:
   a. 10,1
   b. 0,5
   c. 6,8
   d. 17,241
   e. 0,205
   f. 8,9671
3. a. 1,7
   b. 1,4
   c. 0,4
   d. 0,7
   e. 2,3
   f. 3,6
   g. 2,8
   h. 4,1
4. a. 18 cm^2.
   b. 17 cm^2

- Es la medida de la superficie de la figura.
- Es la medida del contorno de una figura.
- Generalmente se utiliza cm o m para perímetro y cm^2 o m^2 para área.
- No, porque representan ideas diferentes.
- Generalmente sí, pero existen ocasiones en que el perímetro no varía, como por ejemplo: un rectángulo de lados 2 cm y 10 cm tiene perímetro 24 cm y área 20 cm^2 y otro de lados 5 cm y 7 cm también tiene perímetro 24 cm pero área 35 cm^2.

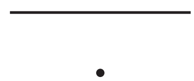
5. a. A = 16 cm^2. P = 19 cm.
   b. A = 10,8 cm^2. P = 15,2 cm.
6.

mm	cm	dm	m	dam	hm	km
9250	925	92,5	9,25	0,925	0,0925	0,00925
231	23,1	2,31	0,231	0,0231	0,00231	0,000231
47	4,7	0,47	0,047	0,0047	0,00047	0,000047
366 010	36 601	3660,1	366,01	36,601	3,6601	0,36601

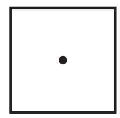
7. Necesitará 864 m.
8. a. Santiago ha tejido más.
   b. Santiago: 1,5 • 0,8 = 1,2 m^2. Valeria: 1,2 • 0,9 = 1,08m^2.

Página 202 ▸ **Taller**

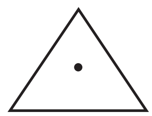
1. Propuesta de Felipe:



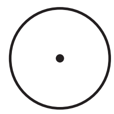
Propuesta de Ricardo:



Propuesta de Valeria:



Propuesta de Daniela:

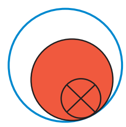


2. En la de Daniela. Todos están a igual distancia del tarro.
3. Que todas las posiciones están a la misma distancia del centro de la figura que se puede formar.

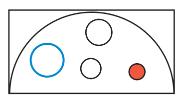
Página 203 ▸ **Practiquemos lo aprendido**

Repaso

1. **Ejemplo de respuestas**
   a.

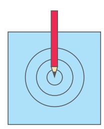


   b.



Aplica

3. a. pertenecen.
   b. no pertenece.
   c. pertenece.
   d. no pertenece.
4. a.



   b. 20 cm.
5. Con la segunda figura.

Reflexiono

Se podría usar un círculo de cartón y explicarle que el contorno de la figura es la circunferencia y que su interior es el círculo.

Refuerzo

Una circunferencia: por ejemplo el manubrio de un auto o un anillo.

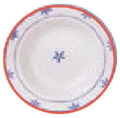
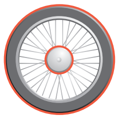
Un círculo: por ejemplo una moneda de $ 10 o el botón de una chaqueta.

Página 204 ▸ Taller

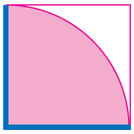
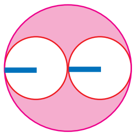
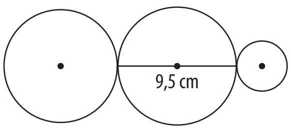
1. Con el círculo.
2. Sí, ya que en él se pueden trazar infinitos diámetros.
5. Sí, ya que en él se pueden trazar infinitos radios.

Página 205 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a.  b. 

Aplica

3. Diámetro: 2,2 cm y radio: 1,1 cm.
4. a.  b. 
5. a. Los radios tienen igual medida entre sí.
   b. Los diámetros son de igual medida entre sí.
   c. La medida del diámetro equivale al doble del radio.
6. a. Un cuadrado. **b.** 64 cm.
7. 

Un diámetro mide 9,5 cm.

Reflexiono

1. Infinitos.
2. Que la medida de su prolongación hacia el lado opuesto tiene igual medida.

Refuerzo

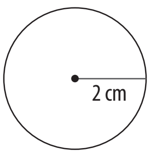
1. Por ejemplo, considerar un punto fijo que representará el centro de la circunferencia y marcar con el compás la medida de 6 cm utilizando la regla.
2. Diámetro.

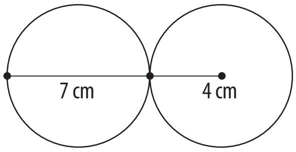
Página 206 ▸ Taller

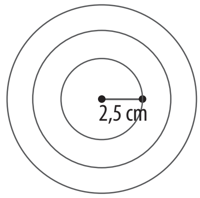
3. a. El promedio es 3.
   b. El promedio es 3,14.
   c. P = d • 3,14, donde d es el diámetro y P es el contorno del círculo.

Páginas 208 y 209 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 4,8
   b. 22,78
   c. 69,5824
   d. 17,1
   e. 9,134
   f. 85,3
2. a. 

   b. 

   c. 

Práctica guiada

3. a. 25,12 cm
   b. 78,5 cm
   c. 21,98 cm
   d. 53,38 cm
4. a. 5 cm
   b. 2,5 m
5. a. 12,56 cm
   b. 26,28 cm
   c. 37,68 cm
   d. 57,96 cm
   e. Por ejemplo, la figura **a** está compuesta por cuatro cuartos de una circunferencia de radio 2 cm. Entonces, para obtener el perímetro de la figura basta con calcular el perímetro de una circunferencia de radio 2 cm.

Aplica

6. 40009,88 km aproximadamente.
7. 235,5 m
8. 471 cm
9. **a.** 6,28 cm. 12,56 cm. 25,12 cm. 50,24 cm.
   b. Se encuentran en la razón 1 : 2
10.

Día	Vueltas
Lu	5,8
Ma	19,38
Mi	7,75
Ju	11,63
Vi	13,57

Reflexiono

Camilo, ya que si el radio de una circunferencia aumenta o disminuye, el perímetro de esta también lo hace.

Refuerzo

95 argollas.

Páginas 212 y 213 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 3
   b. 5
   c. 0
   d. 8
2. a. 15 cm^2
   b. 28 cm^2

Práctica guiada

3. a. 12,56 cm²
b. 50,24 cm²
c. 176,625 cm²
d. 7,065 cm²

4. a. 3 m
b. 7 cm
c. 5 m
d. 9 cm

5. a. 1,14 cm²
b. 19,26 cm²
c. 64,26 cm²
d. 7,74 cm²

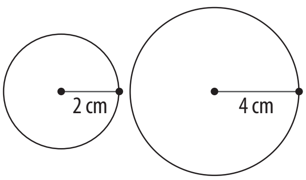
Aplica

6. Bajo el rectángulo hay un área de 3,14 cm².

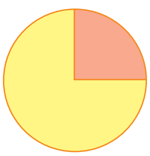
7. Restar el área del círculo de 4 cm al de radio 6 cm y luego compararla con el círculo de radio 4 cm.

8. a. 1 m.
b. 2 m.
c. 6,28 m.

9. a. No es correcta la afirmación, ya que el área aumenta al cuádruple.
b.



10. a. En la ruleta de Lucía.
b. En la ruleta de Richard se calcula el área de un cuarto de circunferencia con radio de 30 cm resultando 706,5 cm². En la ruleta de Lucía se calcula el área del círculo amarillo con radio de 20 cm resultando 1256 cm².
c.



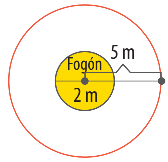
Reflexiono
Se calcula el área del semicírculo dividiendo por dos el área del círculo respectivo y luego se le resta el área del círculo de su interior.

Refuerzo	
1. 100,48 cm²	**2.** 100,48 cm²

Páginas 216 y 217 ▸ ¿Cómo voy?

1. a. 28,26 m²
b. 17,535 m²

2. a. Los niños se pueden ubicar en cualquier punto de la circunferencia roja.



b. 10 m
c. 78,5 m²
d. 14,915 m² menos.

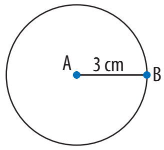
3. a.

b. 50,24 m²
c. 109,76 m²

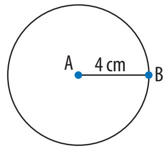
4. 8 cm

5. a. V
b. V
c. V
d. F (Justificación: El radio mide 6 cm).

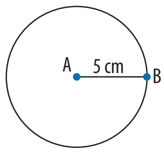
6. a.



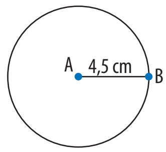
b.



c.



d.



7. a. 20,096 cm
b. 10,048 cm
c. 13,188 cm
d. 31,4 cm

8. a. 45,7 cm
b. 62,8 cm
c. 87,1 cm

9. a. Diámetro = 1 cm; Radio = 0,5 cm
b. Diámetro = 8 cm; Radio = 4 cm
c. Diámetro = 6 cm; Radio= 3 cm

10. Recorrerá 510,25 m.

11. El diámetro mide 6 cm.

12. a. 28,26 cm²
b. 50,24 cm²
c. 254,34 cm²
d. 113,04 cm²

13. a. 1125 cm²
b. 40,5 cm²
c. 54 cm²

Desafío de integración

1. 24,84 cm.

2. 4 cm

Página 218 ▸ Resolución de problemas

Respuesta: La longitud del contorno de flores del círculo mayor es 9,42 m.

Sección 8 Construcciones Geométricas

Página 222 y 223 ▸ ¿Qué debo saber?

- Agudo: entre 0° y 90°. Recto: 90°. Extendido: 180°. Obtuso: entre 90° y 180°.

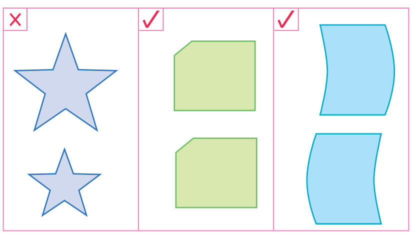
1. a. 40°, agudo.
b. 120°, obtuso.
c. 90°, recto.
d. 180°, extendido.

2. a. 115°, obtuso.
b. 60°, agudo.
- Las rectas paralelas no se intersecan en ningún punto. Las rectas perpendiculares se intersecan y forman ángulos rectos.

3. a. Por ejemplo Avenida Polonia y Avenida México.
b. Por ejemplo Calle 8 y Calle 7.
c. Por ejemplo Calle 8 y Avenida México.
- Para dar una descripción más específica de un triángulo, de acuerdo a sus ángulos y a sus lados.
- Triángulos 180° y cuadriláteros 360°.

4.


5. a. Equilátero y acutángulo.
b. Escaleno y obtusángulo.
c. Escaleno y rectángulo.
d. Equilátero y acutángulo.
- En el tamaño y la forma de las figuras.

6.


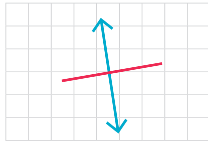
Páginas 226 y 227 ▸ Practiquemos lo aprendido

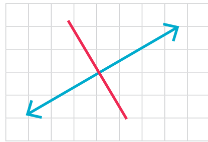
Repaso

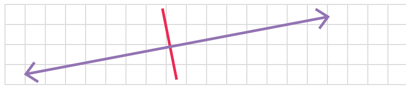
1. a. V, ya que ambas son perpendiculares a L_4.
b. V, ya que ambas son perpendiculares a L_1.
c. F, ya que los ángulos que forman son agudos y obtusos.
d. V, ya que forman ángulos rectos.

2. a. Por ejemplo Los Boldos y Los Álamos.
b. Por ejemplo Los Bellotos y Los Abedules.
c. Los Pinos.
d. Los Alerces.

Aplica

6. a.


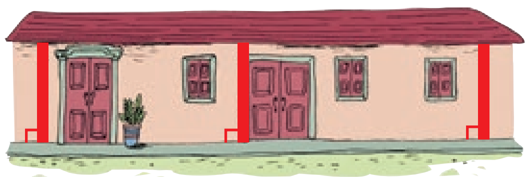
b.


7.


8. a.


b.


9. a. Solo una recta.
b. No, solo una.

10.


11. Las rectas perpendiculares a cada lado deben pasar por los puntos medios de estos.

12. Identificar los siguientes puntos:

Con una escuadra apoyada en AB, medir el lado BC. Deslizarla hasta A y dibujar el lado AD. Finalmente, unir D con A y D con C.

Reflexiono

1. Paralelas: Los rieles de un tren, las líneas que dividen las vías en una autopista y las filas de asientos en un cine

Perpendiculares: Poste de la luz y el suelo, las patas de una mesa y su cubierta y el techo de una casa y sus paredes.

2. No. Las rectas B y C son paralelas.

Refuerzo

Un triángulo rectángulo.

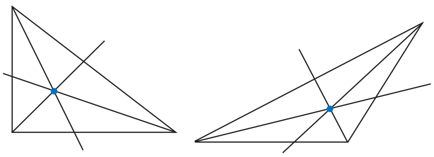
Página 228 ▸ Taller

3. a.

m∠CAB = 57°	m∠ABC = 44°	m∠BCA = 79°
m∠CAI = 28,5°	m∠ABI = 22°	m∠BCI = 39,5°
m∠IAB = 28,5°	m∠CBI = 22°	m∠CIA = 39,5°

b. Los ángulos generados por las bisectrices miden la mitad del ángulo inicial.

c.



d. Por ejemplo: Es una recta que divide un ángulo en dos ángulos de igual medida.

e. No, ya que el incentro equidista de los segmentos del triángulo.

Página 229 ▸ Taller

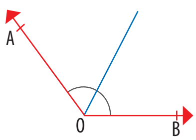
1. Dentro del triángulo
2. Fuera del triángulo.

Páginas 230 y 231 ▸ Practiquemos lo aprendido

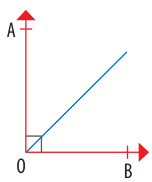
Repaso

1. a. 54°
   b. 118°

2. a.



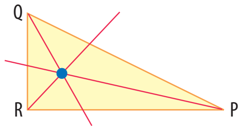
b.



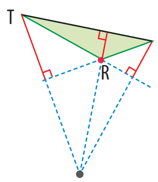
3. b. La medida de uno de los ángulos formado por la bisectriz es la mitad del original.
   c. Se mantiene la relación entre los ángulos. Al cambiar la medida de los ángulos, cambia la ubicación del incentro.
   d. Que la bisectriz divide al ángulo en dos ángulos de igual medida.
4. b. Al mover la construcción cambia la ubicación del ortocentro en el triángulo.

Aplica

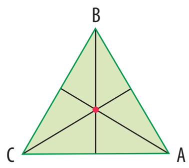
5.



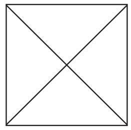
6. a.



b.



7. a. Es altura y bisectriz, dado que es un triángulo isósceles.
   b. Por ejemplo: clasificación de triángulos y medición de ángulos.
   c. En el triángulo isósceles coincide la altura con la bisectriz en el vértice que une los lados congruentes. Además, la altura siempre crea ángulos rectos en la base del triángulo.
8. a.



   b. Todos son triángulos isósceles rectángulos.
9. b. Ambos son triángulos isósceles rectángulos.
10. a. Altura. En los ángulos formados por el pliegue y el lado del trapecio.
11. No es correcto, pues la bisectriz solo divide al ángulo en dos ángulos congruentes y no a la figura.

Reflexiono
Sí, en un triángulo equilátero.

Refuerzo
180º.

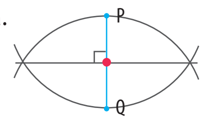
Página 232 ▸ Taller

2. El doble
3. Si, se conseva.
4. Pasan por el vértice y el punto medio del lado opuesto.

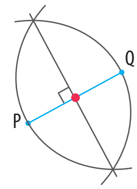
Páginas 234 y 235 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a.



b.

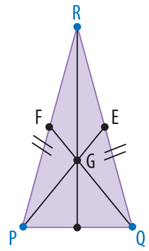


Práctica guiada

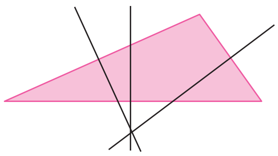
2. b. La circunferencia.
   c. La circunferencia se modifica en longitud, según cambie la forma del triángulo. Esto sucede porque las simetrales en un triángulo siempre se construirán de la misma forma, como una perpendicular en el punto medio del lado.

Aplica

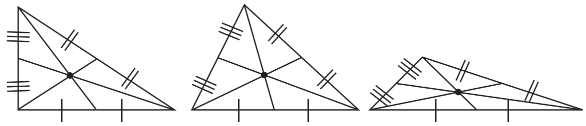
3. Equilátero ya que el segmento pasa por el punto medio del lado AB partiendo del vértice C.
4. En todos, excepto en el último triángulo escaleno, ya que la recta no necesariamente forma un ángulo recto con el lado AC del triángulo.
5.



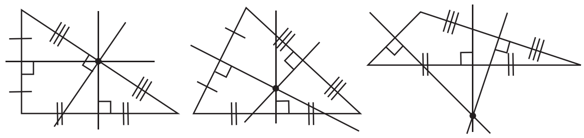
6.



7. a. Baricentro.



Circuncentro.



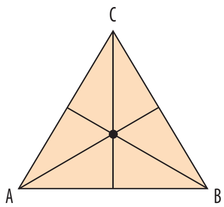
b. Baricentro.
Rectángulo: Dentro del triángulo
Acutángulo: Dentro del triángulo
Obtusángulo: Dentro del triángulo

c. Circuncentro.
Rectángulo: En la hipotenusa del triángulo.
Acutángulo: Dentro del triángulo
Obtusángulo: Fuera del triángulo

8. a. Es la misma distancia
b. Ocurriría lo mismo

9. a. Es la misma para cada C.
b. Crecen a medida que C se aleja del segmento AB.
c. Simetral, ya que le recta que se forma es perpendicular al segmento AB.

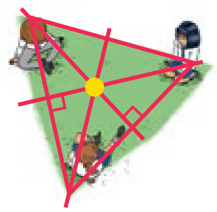
10.



Miden igual ya que el triángulo es equilátero.

11. a. Se deben trazar las simetrales del triángulo cuyos vértices serán los niños.

b.



Canasta

Reflexiono
No, ya que las transversales de gravedad son segmentos que pasan por el vértice y el lado opuesto.

Refuerzo
Son coincidentes.

Páginas 238 y 239 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. Su ubicación sería el incentro.

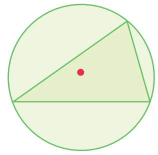
2. 119,32 cm.

3. 12 cm.

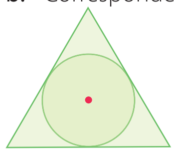
Aplica

6. a. Inscrita
b. Ninguno
c. Ninguno
d. Circunscrita

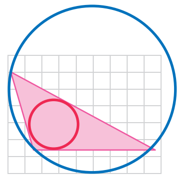
7. a. Corresponde al circuncentro.



b. Corresponde al incentro.



8.



9. a. En la hipotenusa.
b. Fuera del triángulo.
c. Dentro del triángulo.
d. Al variar el tipo de triángulo, la posición del circuncentro también varía.

10. Las simetrales.

11. a. En la circunferencia.
b. Ocurre lo mismo con otros triángulos rectángulos.
c. En un triángulo rectángulo inscrito en una semicircunferencia, el vértice del ángulo recto siempre está en la circunferencia y la hipotenusa es el diámetro.

12. a. F, ya que no es tangente a los tres lados del triángulo.
b. V, ya que contiene los tres vértices del triángulo.
c. F, ya que sus extremos no son ni el centro ni uno de sus puntos.
d. F, ya que el segOG es radio de la circunferencia roja.

Reflexiono
No, ya que los puntos de intersección nunca corresponden a los extremos de un diámetro de la circunferencia. Si eso ocurriera, no se podría construir el triángulo.

Refuerzo
Determinar el circuncentro y con un compás medir la distancia entre ese punto y uno de sus vértices y construir la circunferencia.

Páginas 242 y 243 ▸ Repaso

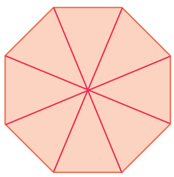
1. a. DE
b. DF
c. DFE
d. FED

2. a. Congruentes.
   b. No congruentes.
   c. No congruentes.
   d. Congruentes.

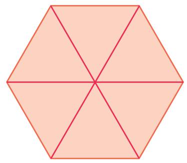
Práctica guiada

3. a. Es posible.
   b. No es posible.
   c. No es posible.
   d. Es posible.

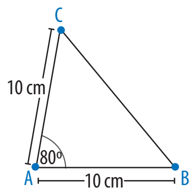
5. a.



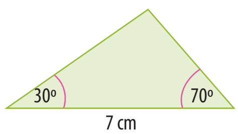
b.



6.



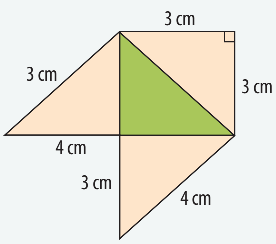
7. a.



Reflexiono

No, ya que uno de los ángulos del triángulo no necesariamente mide 90°.

Refuerzo

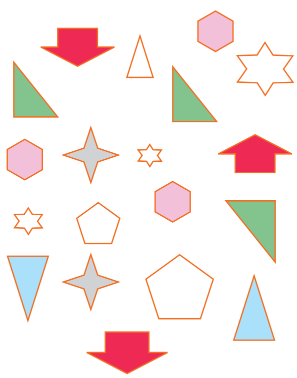


P = 20 cm

Páginas 246 y 247 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1.



2. a. Las posibles medidas son: 2 cm y 20 cm; 4 cm y 10 cm; 5 cm y 8 cm.
   b. Los perímetros son: 44 cm, 28 cm y 26 cm.
   c. Varía.
   d. No. Ya que la congruencia implica igualdad de tamaño y forma.

Aplica

4. a. Unir A con B y B con C. Luego, utilizar rectas paralelas a los segmentos trazados para formar el paralelógramo.

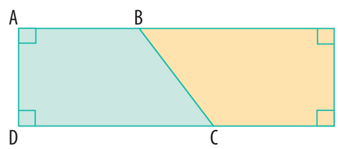
5. a. Sí.
   b. Se puede construir un único cuadrilátero con esa información ya que esas figuras tienen solo 4 vértices.

6. a. Por ejemplo, trazar una recta que pase por el punto A hasta intersecar a L_1. Luego, trazar una paralela a L_1 y otra paralela a la recta que pasa por el punto A.

9. a. Sí, es correcta.

10. Solo uno.

12. Sí es posible:



Reflexiono

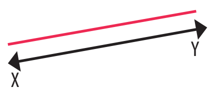
No, ya que lo puede dividir formando un triángulo y un pentágono.

Refuerzo

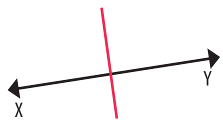
Por ejemplo, midiendo con transportador y regla sus ángulos y lados para verificar si son de igual medida.

Páginas 250 y 251 ▸ ¿Cómo voy?

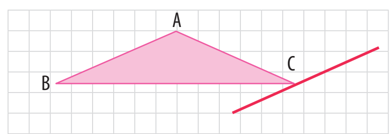
1. a.



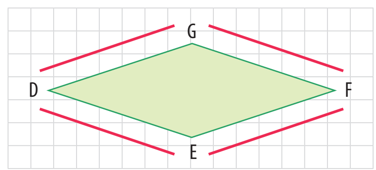
b.



c.

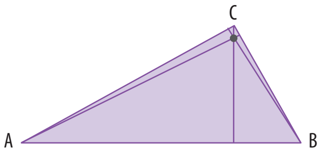


d.



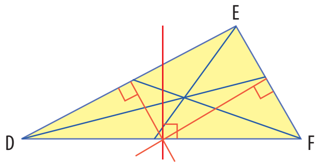
2. En el punto medio de la recta que une ambos quioscos.

3.

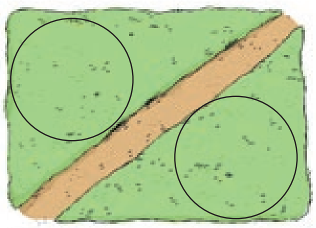


Las áreas son iguales.

4.



5. a. Por ejemplo:



b. Porque son tangentes al camino central a los bordes del parque.

6. Por ejemplo, completar la circunferencia circunscrita por los tres alumnos y en esa circunferencia colocar a los 5 alumnos que están haciendo fila.

7. a. V.

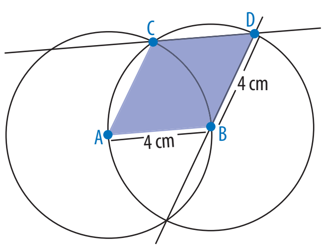
b. F, es siempre menor.

c. V

d. F.

8. No, pues solo tiene el ángulo, requiere además al menos de dos lados o un ángulo y un lado.

10. Con el compás se realiza una circunferencia de centro A de radio 4 cm y dibuja un radio. Luego, se realiza una segunda circunferencia de de radio 4 cm con centro B en un punto que pertenezca a la primera circunferencia. Luego se marca la intersección (punto C) de ambas circunferencias y se unen los puntos C y A. Se trazan rectas paralelas a los lados dos segmentos construidos y que pasen por los puntos B y C, marcando el punto D en su intersección. Así, la figura ABCD es paralelogramo de lado 4 cm.

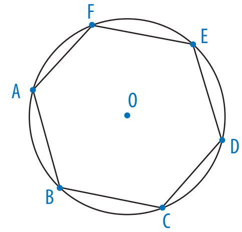


Desafío de integración

Una altura, ya que su longitud es menor a la de una bisectriz.

Página 252 ▸ Resolución de problemas

Respuesta:

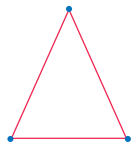


Sección 9 Plano cartesiano

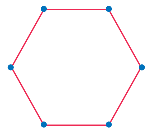
Páginas 256 y 257 ▸ ¿Qué debo saber?

- Un vértice es el punto donde se intersecan dos lados, que corresponden a los segmentos que limitan a un polígono.

1. a.

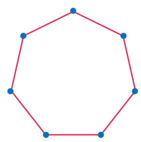


b.



c.

d.



- Es la medida de la superficie del polígono.
- Para un cuadrado se obtiene de la potencia cuadrada de la medida de su lado, mientras que para el triángulo, como el semiproducto de la base y la altura.

2. a. No se pueden determinar los lados, ya que existen infinitos rectángulos cuya área es 200 cm^2.

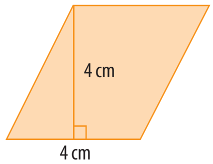
b. Sí es posible. Por ejemplo, el de lados 10 cm y 20 cm y el de lados 25 cm y 8 cm tienen área 200 cm^2.

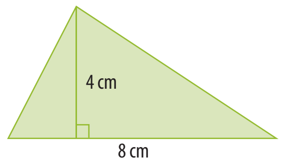
c. Infinitos.

3. a. Todas son iguales a 16 cm^2.

b. A que todas ocupan la misma superficie.

c. Sí, por ejemplo:





4. A Don Manuel, ya que el valor a pagar es $ 24 192, mientras que en la de Don Luis, $ 26 522.

- Es una transformación isométrica que traslada cada punto de una figura según el mismo desplazamiento vertical y horizontal.
- Rotación, que consiste en rotar una figura según un ángulo y un centro, y Reflexión, que consiste en reflejar la figura según un eje de simetría o un punto.

5. a. AB = 1; BC = 4; CD = 1; DA = 4.

b. AB = 1; BC = 4; CD = 1; DA = 4.

c. Que a pesar de trasladar la figura esta mantiene sus dimensiones.

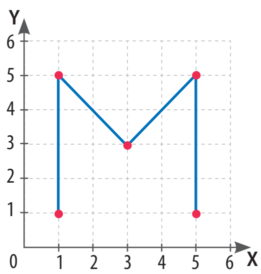
Páginas 258 y 259 ▸ Taller

1. - BUEN TRABAJO

- ESTO ES SENCILLO

2. (4, 2) (5, 1) (7, 1) (4, 3) (2, 3) (3, 3) (1, 1) (1, 1) (5, 2) (4, 1) (1, 1) (1, 3) (5, 1) (5, 2) (2,1) (9, 1) (3,1) (9, 1) (3, 1) (3, 2) (5, 1) (3, 3) (1, 1)

4.



Una letra M.

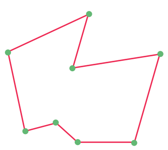
5. Números negativos.

6. Es un sistema de coordenadas formado por dos ejes perpendiculares, X e Y, en el que se representan puntos por medio de pares ordenados.

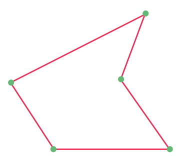
Páginas 260 y 261 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

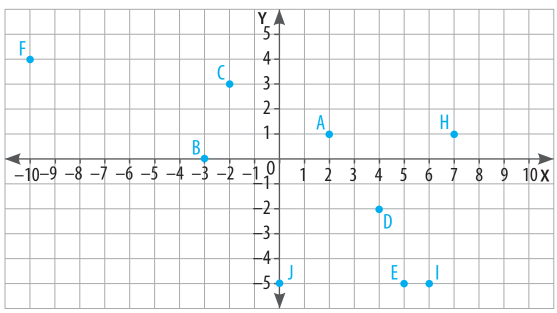
1. a.



b.



2.

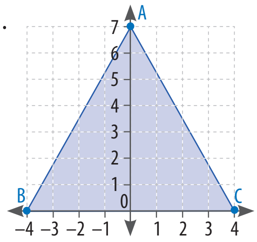


3. a. A(2, 3) d. D(-2, 2) g. G(3, -3)

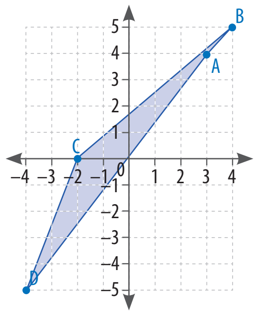
b. B(1, 1) e. E(1, -2) h. H(-2, 1)

c. C(4, 0) f. F(-1, 3) i. I(3, 2)

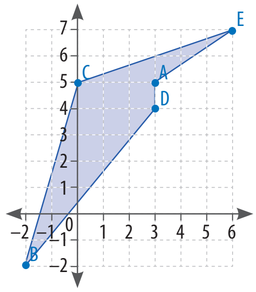
4. a.



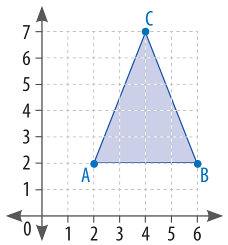
b.



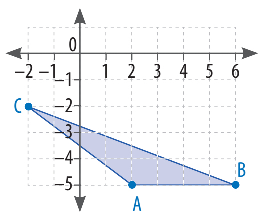
c. Por ejemplo:



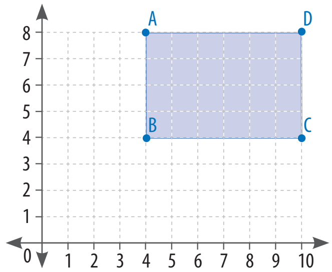
5. a.



b.



c.



Aplica

6. a. 10 cm^2.
b. 5 cm^2.

7. a. Por ejemplo, (–2, 3); (2,1).
b. (–2, 0) y (2, 0); (–2, 8) y (2, 8) o (0, 2) y (0,6).
c. Ambos triángulos son posibles de formar. Por ejemplo, uno isósceles de tercer vértice el (0,2).

8. a. (8,3)
b. (1, 2), (7, 2), (7, 5) y (1, 5).
c. Cuadrado de la S.

9. Por ejemplo, identificar la medida de su radio y la posición de su centro. Se debe conocer las coordenadas del centro de la circunferencia.

10. A(2,5), (6, 5), (6, 9), (10, 9), B(10,14).

Reflexiono
Es falsa la afirmación, ya que se encuentra a la mitad de la distancia de entre B(12, 3) y (0,3).

Refuerzo
D(3,5)

Páginas 264 y 265 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

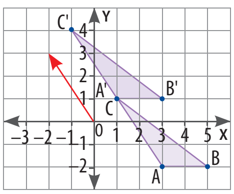
1. a. No es un desplazamiento por medio de vector.
b. Es un desplazamiento por medio de vector.
c. No es un desplazamiento por medio de vector.
d. Es un desplazamiento por medio de vector.

Práctica guiada

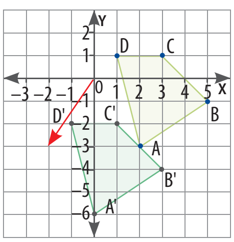
2. a. (–1, 3)
b. (–3, –2)
c. (0, –3)
d. (2, –2)
e. (–3, 0)
f. (4, 0)

3. a. (3, –4)
b. (–4, 3)
c. (–2, –1)

4. a.



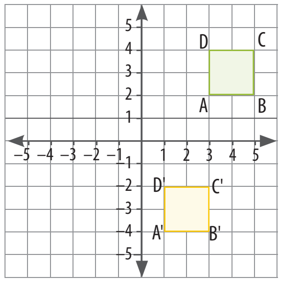
b.



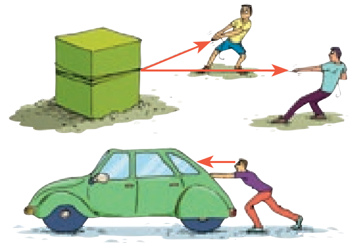
Aplica

5. (6,1)

6.



7.



8. Que el vector indica una dirección, un sentido y una magnitud.

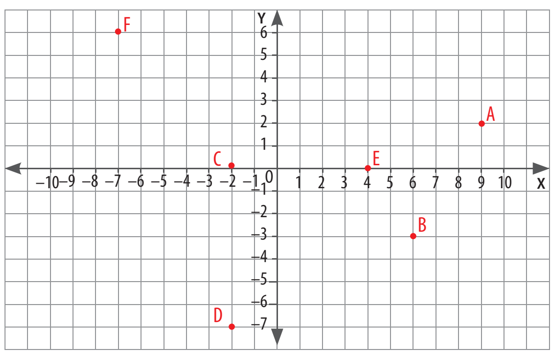
9. Por ejemplo, restar a cada vértice de la figura resultante el vector de desplazamiento. Con ello, se obtienen las coordenadas de la figura original.

Reflexiono
1. No, ya que al aplicar el mismo vector de desplazamiento, los puntos resultantes mantienen la distancia que tenían los puntos originales.
2. Por ejemplo, si un automóvil recorrió 100 m hasta un punto y se devuelve al inicio, la distancia recorrida es 200 m, mientras que su desplazamiento es 0, ya que su posición final es igual a la inicial.

Refuerzo
1. Estaba en (4,1).
2. El vector de coordenadas (10, 2).

Páginas 268 y 269 ▸ ¿Cómo voy?

1.

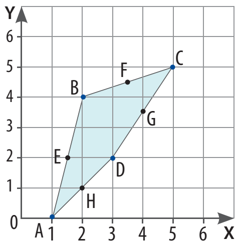


2. a. V
b. F, son (2, 0).
c. F, son (0, 2).

d. V
e. V
f. F, son (–3, –3)

3. a. Triángulo.
b. Trapecio
c. Cuadrado

4.

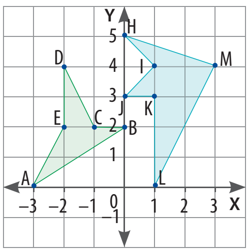


Las coordenadas del punto medio entre A y B son el promedio de las coordenadas de esos puntos.

5. a. 8 cm^2.
b. 15 cm^2.

6. (–5, 3) y (–5, 6) o (9, 3) y (9, 6).

7. Ejemplo de figuras que se pueden dibujar: ABCDE con A(–3, 0), B(0, 2), C(–1, 2), D(–2,4) y E(–2,2) y la figura HIJKLM con F(1, 0), G(3, 4), H(0, 5), I(1, 4), J(0, 3) y K(1, 3).

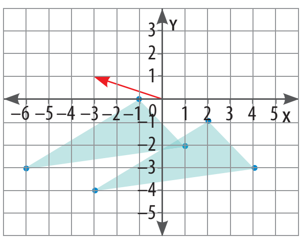


8. a. (5, 2)
b. (3, –4)
c. (–4, 3)

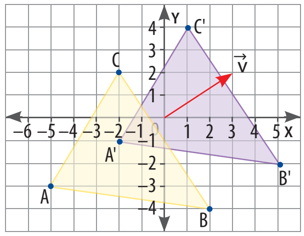
9. a. (–2,–4)
b. (–4, 3)
c. (–3, 2)
d. (11,–1)

10. a. V
b. V
c. F, (0, 4)
d. F, (7, 11)

11.



12.



Desafío de integración

1. Por ejemplo, un triángulo de vértices (0, 0), (24, 0) y (0, 12). Además, existen infinitos triángulos que tienen área 144 cm^2.

2. (–1, –4), (0, –4), (0, 0), (–1, 0).

Página 270 ▸ Resolución de problemas

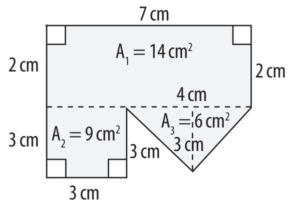
Respuesta:
13 cm^2.

Página 272 ▸ Sintetizo mis aprendizajes

¿Cómo se hace?

Pregunta 1

Dividir la figura en cuadrados, rectángulos y/o triángulos:



El área es 29 cm^2.

Pregunta 2

El perímetro de un círculo se puede estimar de forma concreta utilizando un hilo o lana para rodear el círculo completamente y luego medir el trozo con una regla graduada. De forma simbólica se puede calcular con la fórmula $P = 2\pi r$ resultando una estimación del perímetro ya que π es un decimal infinito.

El área de un círculo se puede estimar dividiendo el círculo en el mayor número de partes iguales (2, 4, 8, 16, 32, 64, etc.) para luego ubicarlas una al lado de la otra. La figura formada se asemejará a un rectángulo, por lo que se deduce que el área podría ser la multiplicación entre la base y la altura, y como la base es la mitad del perímetro de la circunferencia, y la altura corresponde al radio, se puede deducir que $A = r \cdot r \cdot \pi = r^2 \pi$.

Pregunta 3

Que es el centro de la circunferencia inscrita en el triángulo.

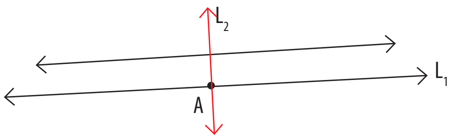
Pregunta 4

Que el punto solo tiene posición y el vector tiene una dirección, un sentido y una magnitud.

Páginas 273 y 274 ▸ Refuerzo mis aprendizajes

1. a. $x = 46°$
b. $x = 62°$
c. $x = 60°$
d. $x = 57°$

2. a. 540°
   b. 900°
3. a. 6 cm^2
   b. 240 cm^2
4. Se deben comprar 4,8 m^2 de tela.
5. a. Radio
   b. Diámetro
   c. Centro
   d. Radio
6. a. P = 20,096 cm; A = 32,1536 cm^2
   b. P = 72,22 m; A = 415,265 m^2
   c. P = 13,188 cm; A = 13,8474 cm^2
   d. P = 31,4 cm; A = 78,5 cm^2
7. a. 439,6 cm^2
   b. 34,54 cm^2
8. El radio de la alcantarilla es de 0,35 m
9.

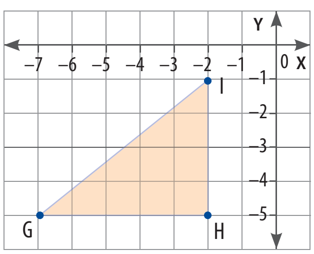


Se formara un paralelogramo.

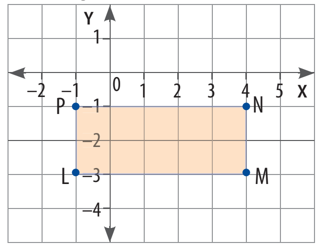
10. a. La simetral del triángulo.
    b. Midiendo el ángulo formado, el cual debe ser 90°.
11. a.

b.

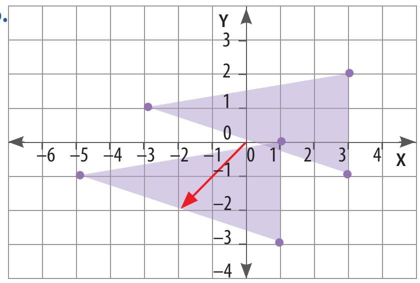
12. Desde cada uno de los vértices hasta el circuncentro del triángulo.
13. A(–5, 2), B(–3, 1) y C(–3, 7)   D(–2, –1), E(3, –4), F(3, 4) y G(1, 4)
14. a. Triángulo rectángulo:



b. Rectángulo:



15. a. (–6, 14)
    b. (3, 4)
    c. (10, 1)
    d. (–12, 14)
16.



Páginas 275 y 276 ▸ ¿Qué aprendí?

Parte 1

1. B
2. B
3. A
4. D
5. B
6. C
7. D
8. C
9. D
10. 140°
11. 80 cm^2

Parte 2

1. 6,8 cm.
2. Incentro.
3. 90 vueltas.
4. 399 baldosas.
5. a. 31,42 cm
   b. 62,13 cm^2
6. a. 1 : 4
   b. 1 : 3
7. 6,88 cm^2
8. 70°
9. 7,74 u^2

Unidad 4 Estadística y probabilidad

Sección 10 Muestreo y representación de datos

Páginas 282 y 283 ▸ ¿Qué debo saber?

- Si está relacionada con números o cantidades, entonces es cuantitativa. En otro caso es cualitativa ya que esta no se puede medir numéricamente porque está relacionada con características.

1. a. Cuantitativa
b. Cualitativa
c. Cualitativa
d. Cuantitativa
e. Cualitativa
f. Cualitativa
g. Cuantitativa

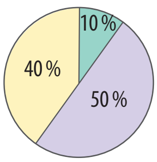
- A través de la cantidad de puntos y la altura de la barra, respectivamente.
- Resumir de forma pictórica gran cantidad de datos.

2. a. 7.° A: 580 puntos y 7.° B obtuvo 610 puntos.
b. b. 70 puntos.

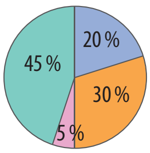
3. a. F, hubo la misma cantidad.
b. V
c. V
d. F, se da entre noviembre y diciembre.
e. V

- 100 %
- Dividiéndola por el total de datos y multiplicándola por 100.

4. a.



b.



5. Drama, 17,04 %; Aventura 31,81 %; Terror 37,5 %
Romance 13,63 %

6. a. Atletismo 15 %
b. Deporte 45 %.

Página 284 ▸ Taller 1

1. La preferencia en los géneros de películas.

2. Que en el establecimiento hay más estudiantes que prefieren el género comedia que el género terror.

3. Sí, ya que el curso pertenece al colegio.

4. Porque la cantidad de estudiantes encuestados es menor y sus edades no representan a las de todo el colegio.

5. No, porque las preferencias varían con respecto a las del colegio.

Páginas 286 y 287 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. V
b. F, es cuantitativa ya que sus valores son números.
c. V
d. V
e. V
f. F, es cuantitativa, ya que representa cantidades.

2. a. Conjunto de animales y subconjunto de perros.
b. Conjunto de números enteros y subconjunto de números naturales.

3. Población: Los departamentos del edificio con Internet.
Muestra: Los tres departamentos.

Práctica guiada

4. a. Población y la variable es cuantitativa.
b. Muestra y la variable es cualitativa.
c. Muestra y la variable es cuantitativa.
d. Muestra y la variable es cuantitativa.

Aplica

5. a. Cualitativa
b. Cuantitativa
c. Cuantitativa
d. Cualitativa
e. Cuantitativa
f. Cualitativa
g. Cuantitativa
h. Cualitativa
i. Cualitativa
j. Cuantitativa

6. El tiempo de espera: variable cuantitativa.
Atención del mozo: variable cualitativa.
Volver al restaurante: variable cualitativa.

7. a. Un grupo de 50 estudiantes de enseñanza media de diferentes colegios.
b. Un grupo de 40 estudiantes de enseñanza básica elegidos de diferentes comunas.

8. a. Población: todas las ampolletas fabricadas.
Muestra: 100 ampolletas.
Variable: estado de las ampolletas.
b. Población: los estudiantes del colegio.
Muestra: 42 estudiantes.
Variable: estatura.
c. Población: los habitantes del país.
Muestra: 6000 personas.
Variable: practica deportiva.

Reflexiono
No, por ejemplo si el estudio es sobre la cantidad de horas dedicadas a estudiar, la variable no puede ser de otro tipo que cuantitativa y es independiente de la cantidad de encuestados.

Refuerzo
1. Población: todos los niños del país. Muestra: mis amigos del colegio. Población: todos los celulares en el país. Los celulares que utilizan los compañeros de trabajo de mi hermana mayor.
2. Lugar preferido: variable cualitativa. Cantidad de días: variable cuantitativa. Cantidad de libros: variable cuantitativa.

Página 288 ▸ Taller 1

1. Los estudiantes del colegio.
2. Sí, tomando 50 hombres y 30 mujeres.
3. Silvana, ya que las muestras elegidas al azar representan mejor a la población porque la pregunta no depende del género de la persona.
4. a. Tomar una muestra al azar de alumnos.
   b. Tomar una muestra al azar de alumnos.
   c. Tomar una muestra compuesta sólo de mujeres.
   d. Tomar una muestra al azar de alumnos.

Página 289 ▸ Taller 2

1. Porque no pueden extraer a todos los peces del lago.
2. Sí, mientras mayor sea el tamaño de la muestra, más representativo será el porcentaje.
3. Sí, calculando el promedio de las cantidades de cada tipo.

Páginas 290 y 291 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 30
   b. 16
   c. 15,68
   d. 140
   e. 6,075
   f. 0,75
   g. 22,4
   h. 300
2. a. 40 : 20 o 2 : 1
   b. 50 : 60 o 5 : 6

Práctica guiada

3. a. Sujeto de estudio: alumnos. Muestra aleatoria.
   b. Sujeto de estudio: personas que asisten a urgencias; muestra no aleatoria.
   c. Sujeto de estudio: la mosca de la fruta; muestra aleatoria.

Aplica

4. a. V
   b. F, son elegidos al azar.
   c. V
   d. F, se quiere representantes de todas las regiones.
5. a. Sí
   b. No
   c. No
6. Dividiendo el número de parásitos de cada tipo por la cantidad total de los parásitos.
7. a. No, debería conocerse el porcentaje de estudiantes según el tipo de colegio en Chile y a partir de esos porcentajes formar la muestra.
   b. No, debería considerarse el porcentaje de cada estrato de los mencionados y con ellos construir la muestra.
9. Por ejemplo, escribir en un papel los nombres de los integrantes del curso y colocarlos dentro de una bolsa negra. Luego, sacar al alzar el 80 % de los papeles y preguntar el uso diario de internet.

Reflexiono
1. Cuando necesito saber la preferencia de comida de mis amigos para hacer una fiesta o cuando me preguntan por el tipo de trabajo que realizan mis padres.
2. Una muestra aleatoria se puede obtener eligiendo al azar a 5 compañeros de un curso, mientras que una no aleatoria, puede ser elegir a mis mejores amigos de mi curso.

Refuerzo
1. No aleatoria, ya que se eligen de forma determinada y no al azar.
2. Alex, ya que su muestra es aleatoria.

Páginas 294 y 295 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. V. cualitativas: sexo de los alumnos y país de proce dencia.
   b. V. cuantitativas: número de hijos e ingresos económicos.

Práctica guiada

2. a.

Primera vez que visita el parque	f	f_{rel}	$f_{\%}$
Sí	2023	0,7	70 %
No	867	0,3	30 %

b.

Nivel socio-económico	f	F	f_{rel}	$f_{\%}$
ABC1	1 088 383	1 088 383	0,072	7,2 %
C2	2 327 930	3 416 313	0,154	15,4%
C3	3 386 081	6 802 394	0,224	22,4%
D	5 260 519	12 062 913	0,348	34,8%
E	3 068 636	15 116 435	0,203	20,3%

3.

Cantidad de televisores por hogar			
Cantidad de televisores	Frecuencia absoluta (f)	Frecuencia acumulada (F)	Frecuencia relativa (f_{rel})
0	0	0	0
1	5	5	0,3125
2	3	8	0,1875
3	4	12	0,25
4	3	15	0,1875
5	1	16	0,0625

a. 0 %
b. 25 %
c. 15

4. a.

Deporte favorito			
Deporte	f	$f_{\%}$	f_r (fracción)
Fútbol	24	48 %	$\frac{12}{25}$
Básquetbol	2	4 %	$\frac{1}{25}$
Vóleibol	7	14 %	$\frac{7}{50}$
Ciclismo	8	16 %	$\frac{4}{25}$
Tenis de mesa	4	8 %	$\frac{2}{25}$
Gimnasia	5	10 %	$\frac{1}{10}$
Total	50	100 %	1

b. La variable es el deporte favorito de los estudiantes y es cualitativa.
c. Se encuestó a 50 estudiantes y el deporte favorito es el fútbol.
d. 14 %

5. a. Aumentó en un 60 %.
b. Sí, ya que entrega el número de investigaciones realizadas en 5 años e indica un aumento en el maltrato animal.

Reflexiono

Porque permiten saber la cantidad total de datos que son menores que un dato fijo.

Refuerzo

Estado civil	f
Casado	675
Soltero	765
Otro	60

Páginas 296 y 297 ▸ Taller

1. Los gráficos permiten representar la información de una forma más clara y rápida visualmente.

2.

Práctica de actividad física	f
Frecuentemente	6
Ocasionalmente	9
Nunca	35

3. Ambos gráficos son pertinentes para mostrar la información, ya que permiten leerla y analizarla rápidamente y de forma exacta.

Páginas 299, 300 y 301 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. Cualitativa
b. Cuantitativa
c. Cuantitativa

Practica guiada

2. a. Tipo de sangre. Gráfico circular.
b. Cantidad de turistas. Gráfico de barras.
c. Duración de pilas. Histograma.

3. a. Cada imagen representa el 2 %.
b. Cada imagen representa aproximadamente el 9 %.

Aplica

4. a. Viernes, porque la barra es más alta.
b. Lunes, martes, miércoles y viernes.
c. El miércoles y jueves.
d. Porque la variable es cualitativa.

5. a.

Frutas	Manzana	Plátano	Naranja	Pera
Número de personas	2	8	10	20

b. Cualitativa
c. 6
d. Manzana
e. Porque está representado con porcentajes. Al ser una variable cualitativa también podría representarse en un gráfico de barras.

6. a. 46 estudiantes.
b. Nota más baja: 3,0 Nota más alta: 7,0.
c. 2 estudiantes.

7. a.

Cantidad de cds	Cantidad de personas
1	4
2	7
3	2
4	6
5	5

b. 24 personas.
c. 11personas.

8. a. 2012: 3223; 2013: 3979
b. Un gráfico de barras o circular.

9. a. No, porque está mal construido.
b. Al no partir de cero el gráfico, se mal interpretan las cantidades.

10. Con un gráfico circular.

11. a. La información debería estar representada en porcentajes.
b. El gráfico es pertinente.

Refuerzo

En un histograma.

Reflexiono

Ninguno, todos los datos se pueden organizar.

Páginas 304 y 305 ▸ ¿Cómo voy?

1. En a. y d., ya que no es pertinente encuestar a todos los habitantes de la ciudad para consultarles sobre el medio de transporte, ni a todos los niños de entre 12 y 15 años sobre el número de minutos diarios que utilizan su celular.
2. a. Transporte que utilizan, variable cualitativa.
   b. Edad de las personas, variable cuantitativa.
   c. Profesión, variable cualitativa.
   d. Número de minutos, cuantitativa.
3. a. No, ya que el alcalde puede elegir personas que sigan su tendencia política.
   b. No, ya que el porcentaje de personas representadas por las que irían a la cata no es representativo de la población.
   c. Sí, ya que son elegidas al azar.
   d. Sí, ya que son elegidas al azar.
4. No, ya que es un ave de todo el sur de Chile y un área de 200 m^2 no es una muestra representativa de la zona.
5. a. 35 %
   b. 308 personas.
6.

Cantidad de mascotas	f	F	f_{rel}
0	0	0	0,00
1	5	5	0,25
2	6	11	0,30
3	4	15	0,20
4	3	18	0,15
5	2	20	0,10

   a. 0 %
   b. 15 %
   c. 11
7. a. Número de revistas compradas.
   b. 5 revistas
   c. 21 personas
8.
   a.

Sexo	f
Hombre	9
Mujer	9
Total	18

   b. Mujeres: 54. Hombres: 60.
   c. Rango mujeres: 22. Rango hombres: 27.
9. Gráfico de barras.

Desafío de integración

1. a. No, ya que puede haber palabras más extensas que otras en cada página.
2. a. Histograma.
   b. De barras.

Página 306 ▸ Resolución de problemas

Respuesta:

Etnia	Porcentaje
Alacalufe	0,38 %
Atacameño	3,04 %
Aimara	7,01 %
Colla	0,46 %
Mapuche	87,3 %
Quechua	0,89 %
Rapanui	0,67 %
Yámana	0,24 %

Sección 11 Medidas de tendencia central

Páginas 310 y 311 ▸ ¿Qué debo saber?

- Las frecuencias absolutas, acumuladas y relativas de los datos.

1. a.

Género de trabajadores	f
F	7
M	11
Total	18

   Hay más trabajadores hombres que mujeres.

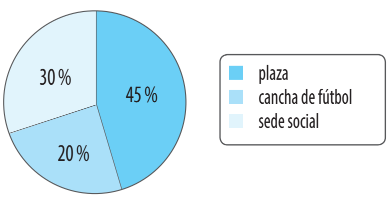
   b.

Cantidad de hijos	f	F
0	4	4
1	4	8
2	5	13
3	3	16
4	2	18
Total	18	

   Hay más trabajadores con dos hijos.

- Si la variable es cuantitativa o cualitativa.
- En los datos representados y en su título.

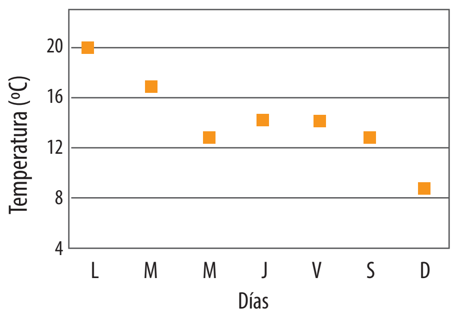
2.



En la partición que muestra el gráfico circular.

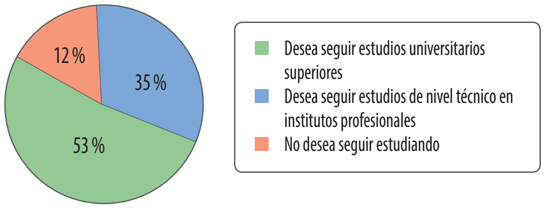
3. a. Población: los estudiantes de un establecimiento
   b. Muestra: 40 estudiantes de 7.º básico.
   c. 40
   d. Las consolas: variable cualitativa.

4. a.



A medida que avanza la semana, la temperatura máxima en Puerto Montt descienden.

b.



5. a. Los puntajes obtenidos en el Simce: variable cuantitativa.

b. Que los puntajes mayores corresponden a grupos socioeconómicos altos, mientras que los puntajes más bajos, a los grupos socioeconómicos bajos.

c. Tienden a aumentar.

Páginas 314 y 315 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 2,3

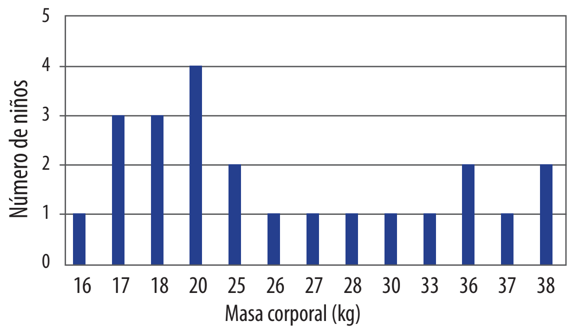
b. 5,8

c. 0,1

d. 1,8

2.

Masa (kg)	f
16	1
17	3
18	3
20	5
25	2
26	1
27	1
28	1
30	1
33	1
36	2
37	1
38	2



3. 29 alumnos.

Práctica guiada

4. a. 6,5

b. 5,125

c. 29,3

En el caso a, el promedio sí es buen representante, ya que la diferencia entre cada dato es muy similiar. En el caso b no, ya que hay un dato muy grande (30) comparado con el resto. Lo mismo sucede en el caso c, donde existe un dato (2) que es muy pequeño comparado con el resto.

5. a. 4,3

b. 6,5

c. 3,8

d. 6,0

e. 5,1

Aplica

6. Edad promedio 43 años.

La municipalidad debe realizar actividades para adultos.

7. a. 4,8

b. Sí, ya que en el promedio se ve un aumento.

8. a. 50

b. 14,14 años.

c. Máximo: 17 años. Mínimo: 12 años.

d. 5 años

10. Porque puede que algunos estudiantes demoren mucho más que 23,5 minutos o mucho menos que 23,5 minutos.

Reflexiono

1. No, ya que es mayor a todos los valores de los datos.

2. No, ya que el valor es igual a la media aritmética.

Refuerzo

1. 55.

2. 5,5.

Páginas 318 y 319 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. **Tabla 1:** Número de llamadas.
   Tabla 2: Presión arterial sistólica.
   b. **Tabla 1:** 23.
   Tabla 2: 133.
   c. **Tabla 1:** valor máximo: 5, valor mínimo: 1. Rango: 4.
   Tabla 2: valor máx. 36, valor mín. 20. Rango 16.
2. Para A: 15, B: 22, C: 11, D: 8.

Práctica guiada

3. a. Moda: 1, 5, 9; V. máx. 9; V. mín. 1; Rango 8.
   b. Moda: no tiene; V. máx. 9; V. mín. 2; Rango 7.
   c. Moda: 3, 5; V. máx. 8; V. mín. 0; Rango 8.
   d. Moda: 5; V. máx. 7; V. mín. 5; Rango 2.

Aplica

4. a. Moda: partidos ganados. Significa que los partidos ganados tienen la mayor frecuencia.
   b. Moda: 0 viajes. Significa que las personas que no han viajado fuera del país tienen la mayor frecuencia.
   c. Moda: guitarra. Significa que el taller de guitarra tiene la mayor frecuencia.
5. a. Una moda: varios
   b. Una moda: 2
7. a. Moda 450 y 525; Valor máximo: 525. Valor mín. 100. Rango 425.
   b. Moda: café.
   No es posible calcular el valor máx., el mín. y el rango en la 2.° situación, ya que es una variable cualitativa.
8. a. En el 50 % de los participantes, con respecto a la actividad física y en el 59 % afirmó no tener el hábito de fumar.

Reflexiono
Para una variable cualitativa no es posible determinar la media pero sí la moda.

Refuerzo
Media: 2 goles. Moda: 2 goles.

Páginas 322 y 323 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 70 %
   b. 16 %
   c. 375
   d. 4
   e. 78,75
2.

Cantidad de dulces que consumen los estudiantes			
N.° dulces	f	$f_{\%}$	F
2	12	30 %	12
3	7	17,5 %	19
4	10	25 %	29
5	11	27,5 %	40
Total	40	100 %	

   a. 29
   b. 47,5 %
   c. 28

Práctica guiada

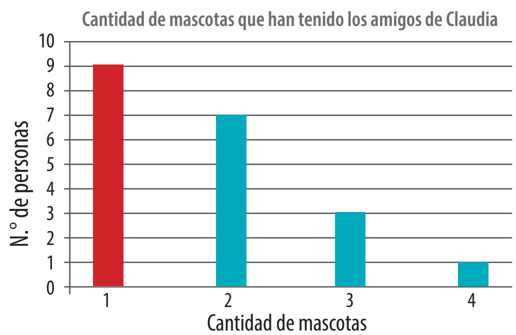
3. a. 45
   b. 4,5
   c. 2
   d. 294
4. a. Mediana: 2 cartones. Es decir, un 50 % de las personas compro como máximo 2 cartones.
   b. Mediana: 1 ingrediente. Es decir, un 50 % de las personas agregó como máximo 1 ingrediente.

Aplica

5. La mediana es 7 para ambos conjuntos.
   La distribución del conjunto A es más dispersa.
6. a.

Cantidad de mascotas	f
1	9
2	7
3	3
4	1
Total	20

   b.



   c. 2 mascotas.

7. a.

Cantidad de llamadas	f
1	2
2	6
3	9
4	9
5	5
6	4
Total	35

b. Mediana: 4 llamadas. Es decir, un 50 % de los estudiantes llamó como máximo en 4 ocasiones.

c. No, ya que la posición central de la muestra la seguiría siendo 4 llamadas.

8. a. Promedio: 5,55. Mediana: 5,5.

b. Mediana: 5,5. La diferencia con la media aritmética es 0,05.
La distribución es homogénea.

c. No, ya que la mediana seguiría siendo 55.

9. x = 14. Mediana: 11,5.

10. Por ejemplo:

Tabla 1				
10	15	17	18	30
40	62	68	90	100

Media aritmética: 45 Mediana: 35

Tabla 2				
90	100	105	109	110
112	114	120	140	160

Media aritmética: 116 Mediana: 111

a. En este caso, ambas tablas presentan la misma cantidad de datos y la mediana es menor que el promedio.

b. La media y la mediana es distinta al igual que el rango.

Reflexiono

Sí, ya que los valores de la encuestas podrían ser todos 0, o tener valores negativos y positivos.

Refuerzo

Se puede calcular la mediana solo para el ingreso mensual y edad ya que son variables cuantitativas, mientras que las otras son cualitativas.

Páginas 326 y 327 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 44

b. 11,25

c. 0

d. 13,4

Práctica guiada

2. a. Criterio: Diferencia entre la media y la mediana.
En el 7.° B la media y la mediana es 18, por lo que la muestra es más homogénea que en los demás cursos.

b. Criterio: Diferencia entre la media, la moda y la mediana.
En el 8.° A la diferencia entre la media, la moda y la mediana es menor que en la de los demás cursos, por lo que la muestra es más homogénea.

3. a. No, porque no sabe cuánto le van a pagar en cada empresa.

b. El equipo B, ya que la mediana y la media son más cercanas en comparación a los valores del equipo A.

c. Sí, ya que hay mayor cantidad de días con mejor temperatura.

4. a. Correcta.

b. No se puede determinar.

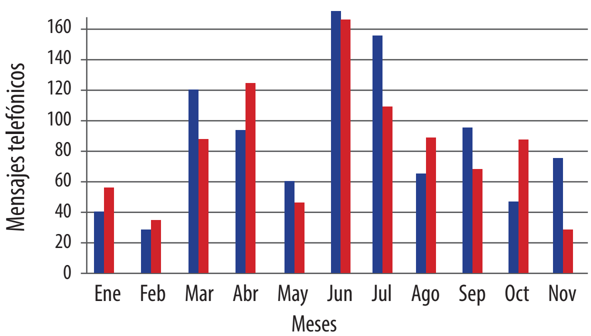
c. Incorrecta.

5. a.

Paula	Pedro
30	32
40	32
48	47
60	55
66	68
76	75
80	88
93	88
94	90
120	110
155	124
185	164

b. Para Paula:
Valor máximo: 185. Valor mínimo: 30. Rango: 155.
Media: 87,25. Mediana: 78. No tiene moda.
Para Pedro:
Valor. Máximo: 164. Valor mínimo: 32. Rango: 132.
Media: 81,08. Mediana: 81,5. Moda: 32 y 88

c.



d. La mediana, ya que los datos son dispersos.

6. a. Media: 76,125; Moda: 75; Mediana: 76; Rango: 10. Es la moda, 75 pulsaciones.
   b. Media: 3,8; Moda: 4; Mediana: 4; Rango: 4. Es la mediana, 50 %.
   c. Media: 2,05; moda: 4; mediana: 2; Rango: 4. Es la mediana, 2 viajes.
7. Por ejemplo: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 6, 8, 9, 10 y 12.
   Moda: 6. Mediana: 6. Media: 6
   La diferencia entre cada dato una vez ordenados es casi la misma.

Reflexiono

1. No. Por ejemplo las muestras 1, 2, 2, 3 y 0, 2, 2, 4 tienen media 2, moda 2 y mediana 2.
2. No, ya que los valores son iguales a la media.

Refuerzo

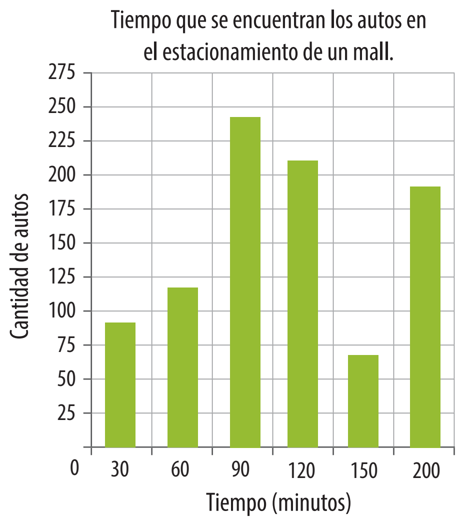
1. Si la distribución de los datos no es homogénea en una muestra, las barras del gráfico serán más altas a la derecha de este o a la izquierda.
2. Si entre los datos de una muestra existe gran diferencia entre ellos, la moda, la mediana y la media serán similares.

Páginas 330 y 331 ▸ ¿Cómo voy?

1. a. Cantidad de personas que aportan económicamente por familia.
   b.

N° de personas	f
1	20
2	18
3	12
4	8
Total	58

   c. La media es aproximadamente 2. Esto significa que en promedio 2 personas aportan económicamente por familia.
2. No, ya que puede haber temperaturas máximas y mínimas lejanas a la temperatura media de la semana.
3. a. Muestra 1: Máximo: 78. Mínimo: 72. Rango: 6.
   Muestra 2: Máximo: 126. Mínimo: 120. Rango: 6.
   Muestra 3: Máximo: 112. Mínimo: 105 Rango: 7.
   b. Media muestra 1: 75,25.
   Media muestra 2: 122,25.
   Media muestra 3: 108,25.
   c. Cada muestra fue tomada de bebés de edades similares ya que las alturas son parecidas. Además, los rangos son muy similares también.
4. Falso, la moda fue el nivel Intermedio.
5. Que el precio que más se repite es $170 000.
6. a. Población, ya que muestra todos los tiempos.
   b. 3,6 horas, es decir, un 50 % de las ventas demoro como máximo 3,6 horas.
7. En el nivel avanzado.
8. a. Máximo: 200. Mínimo: 30. Rango: 170.
   b.



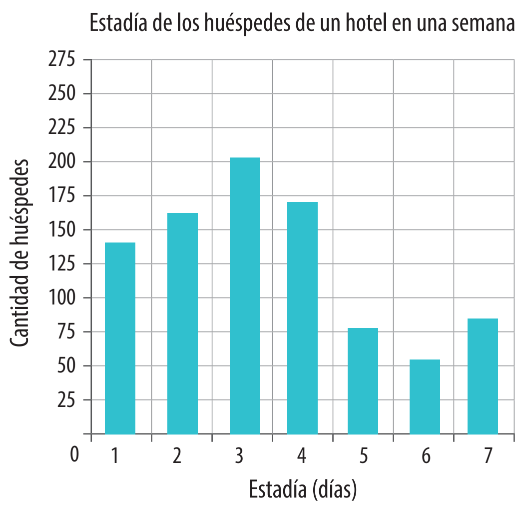
   c. Media: 114,3 minutos. Significa que en promedio un auto se estaciona 114,3 minutos en el mall. Mediana: 120 minutos. Significa que un 50 % de los automóviles estuvo estacionado como máximo 120 minutos.
9. No, ya que estas medidas no tienen por qué ser iguales.
10. Sucursal B.
11. Al lado derecho del gráfico.

Desafío de integración

1. 200 litros.
2. a.

Estadía de huéspedes en una semana		
Estadía en días	f	F
1	142	142
2	163	305
3	203	508
4	170	678
5	76	754
6	54	808
7	82	890

   b. 3,41
   c. 3
   d.



e. No cambia. Si no se consideran las estadías que sobrepasan los 4 días, el número de huéspedes sería 678 pero la mediana seguiría siendo 3 días.

Página 332 ▸ Resolución de problemas
Respuesta: 14,8 minutos.

Sección 12 Probabilidades

Páginas 336 y 337 ▸ ¿Qué debo saber?

- Porque los porcentajes son fracciones de denominador 100.

1. a. 0,4
   b. $\frac{73}{100}$
   c. $\frac{103}{1000}$
   d. 1,44
2. a. 58 %; $\frac{58}{100}$; 0,58
   b. 30 %; $\frac{30}{100}$; 0,3
   c. 50 %; $\frac{50}{100}$; 0,5
   d. 55 %; $\frac{55}{100}$; 0,55
3. a. $\frac{57}{100}$; 0,57
   b. $\frac{7}{100}$; 0.07
   c. $\frac{1}{50}$; 0,02
   d. $\frac{21}{25}$; 0,84
   - Se suman todos datos y el resultado se divide por la cantidad de datos.
4. A Claudia.
5. Un 6,4
   - Presentar y organizar la información para facilitar su análisis.
6. a. 81
   b. 9
   c. 27
   d. 42
7. 85 personas fumadoras presentan molestias respiratorias.
   - Entrega el porcentaje de un determinado valor en la muestra.
8. a. Imposible
   b. Posible.
   c. Seguro.
   d. Posible
9. a. Experimento: Procedimiento que se realiza para estu diar un fenómeno.
   b. Evento: Subconjunto del espacio muestral.
   c. Aleatorio: Que su resultado no se puede predecir.

Página 338 ▸ Taller

1. 1, 2, 3, 4, 5, 6
2. No, ya que tienen la misma probabilidad de salir que el resto.
3. No, ya que todos los números tienen la misma probabilidad de salir.
4. No, ya que es un experimento aleatorio.

Páginas 340 y 341 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1. a. 2, 4, 6, 8 y 10
   b. 3, 5, 7, 9, 11, 13
   c. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19
2. a. Por ejemplo, extraer una de las bolitas y anotar su color.
   b. Por ejemplo, lanzar los dados y sumar los puntos obtenidos.

Práctica guiada

3. a. Aleatorio.
   b. Determínistico.
   c. Aleatorio.
   d. Aleatorio.
4. a. Lanzar una moneda $\Omega = \{C, S\}$
   b. Extraer una bolita de una urna que contiene tres bolitas de distinto color $\Omega = \{azul, amarillo, rojo\}$
   c. Lanzar dos monedas al aire $\Omega = \{CS, SS, CC, SC\}$
   d. Extraer una moneda de una bolsa $\Omega = \{1, 5, 10, 50, 100, 500\}$
   e. Extraer una carta de un mazo inglés $\Omega = \{♣, ♥, ♦, ♠\}$
5. a. Los sucesos se unen: 12 casos favorables.
   b. Los sucesos se unen: 12 casos favorables.
   c. Los sucesos se intersecan: 3 casos favorables.
   d. Los sucesos se intersecan: 2 casos favorables.
   e. Los sucesos se unen: 12 casos favorables.

Aplica

6.

Experimento	Espacio muestral	Suceso	Casos favorables
Lanzar un dado de ocho caras numeradas del 1 al 8	$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$	Obtener un número primo	{2, 3, 5, 7}
Lanzar tres monedas	$\Omega = \{CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS\}$	Obtener exactamente dos sellos y caras	{SSC, SCS, CSS}
Elegir una vocal	$\Omega = \{a, e, i, o, u\}$	Obtener una vocal fuerte	{a, e, o}

7. Marcela
8. a. $\Omega = \{A, L, E, A, T, O, R, I, O\}$
   b. 6
   c. 3
9. a. 10
   b. 7
   c. 12

10. a. Aleatorio: Salga un corazón.
Determinístico: Salga una carta entre el as y el káiser.
b. Aleatorio: Un jugador será expulsado.
Determinístico: Que partan jugando 22 jugadores.

Reflexiono
1. No, ya que un experimento determinístico también tiene espacio muestral, como por ejemplo lanzar un dado y obtener un número menor que 7.
2. No, ya que el único resultado posible sería ese valor y por lo tanto sería determinístico.

Refuerzo
Ω = {CCC, CCS, CSC, SCC, SSC, SCS, CSS, SSS}

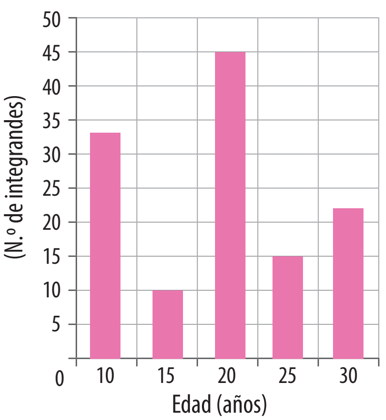
Página 344 y 345 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1.

Edad de los integrantes de una barra de fútbol		
Edades	f	f_{rel}
10	33	0,264
15	10	0,080
20	45	0,360
25	15	0,120
30	22	0,176

2. Edad de los integrantes de una barra de fútbol



Práctica guiada

3. a. No es equiprobable
b. Sí es equiprobable.

Aplica

4. a. Mayor: nivel medio. Menor: postgrado.
b. No, ya que tienen porcentajes diferentes.

5. a. 0,6 y 0,45.
b. No, a partir de la estimación anterior.

6. a.

Extracción de una bolita		
Color	f	f_{rel}
Rojo	1329	0,66
Azul	671	0,34

b. La del color azul es menos que la del color rojo.
c. Que el color rojo tiene mayor probabilidad de extracción.
d. 66 % rojo, 34 % azul.

7.

5000 extracciones										
Número	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
f	490	513	501	491	508	506	493	498	502	498
f_r	0,09	0,10	0,10	0,09	0,1	0,10	0,09	0,09	0,10	0,09
$f_{\%}$	9 %	10 %	10 %	9 %	10 %	10 %	9 %	9 %	10%	9 %

a. 0,01. No, ya que es muy pequeño.
b. 0,1
c. 0,1

8. 0,375.

10. No se puede predecir.

11. Debería mantenerse cercana al 17 %.

12. 0,09

Reflexiono
No, ya que el lanzamiento de la moneda es un experimento aleatorio y cada lanzamiento de la moneda es independiente de los lanzamientos anteriores..

Refuerzo
Cuando se repite un experimento muchas veces, la probabilidad de que ocurra un evento se puede calcular a través de la frecuencia relativa.

Página 346 ▸ Taller

1. 1 de 10.

2. 1 de 10.

3. 1 de 10.

4. Todos son 1 de 10.

5. $\frac{1}{10}$

6. a. 10 casos.
b. 5 casos favorables.
c. 2, 4, 6, 8 y 10.
d. 0,1 y 0.5.

7. 0,4

8. Como el cociente entre el número de casos favorables y el número total de casos.

Páginas 348 y 349 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

1.

Experimento	Espacio muestral	Cantidad de casos favorbles
Lanzar un dado y obtener 5.	Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6}	1
Lanzar dos monedas al mismo tiempo y obtener cara cara.	Ω = {CC, CS, SC, SS}	1
Elegir un número natural par menor que 10.	Ω = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}	4

2. a. A = {5, 6}
   b. B = {2, 3, 5}
   c. C = {1, 3, 5}

Práctica guiada

3. a. $\frac{2}{4}$
   b. 0
4. a. 30 %
   b. 45 %

Aplica

5. a. 5 casos favorables.
   b. 0,25.
6. a. 81 hombres estudian mecánica.
   b. 0,055.
   c. 0,4.
7. a. 0
   b. 0,01
   c. 0,04
8.

	Mujer	Hombre
Mujer	mujer - mujer	mujer - hombre
Hombre	hombre - mujer	hombre - hombre

   a. 0,25
   b. 0,25
   c. 0,5
9. 1750
10. a. V
   b. F, 32.
   c. F, 0,64.
   d. F, 0,36.
11. Se sumaron las probabilidades.
12. a. 0,2.
   b. 1.
13. En ambos casos la probabilidad es 0,1.

Reflexiono
No ya que el 11 tiene 2 casos favorables y el 12 solo 1.

Refuerzo
0,375

Página 350 ▸ Taller

2. a. 8
   b. Número de casos favorables dividido por el número de casos totales.
   c. $\frac{5}{8}$
   d. $\frac{1}{4}$
   e. $\frac{6}{16}$

Páginas 352 y 353 ▸ Practiquemos lo aprendido

Repaso

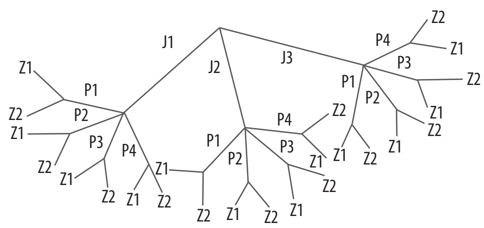
1. a. {4-4, 4-5, 5-4, 4-6, 6-4, 5-5, 5-6, 6-5, 6-6}
   b. $\frac{16}{21}$
2. Con el segundo juego, ya que el área de color rojo es mayor.

Práctica guiada

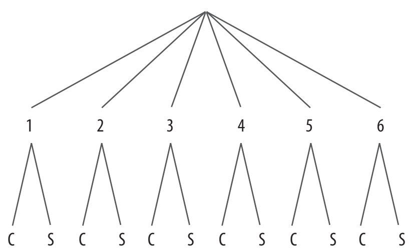
3. a. Ω = {(1, C), (1, S), (2, C), (2, S), (3, C), (3, S), (4, C), (4, S), (5, C), (5, S), (6, C), (6, S)}
   b. 6 c. 6 d. 3

Aplica

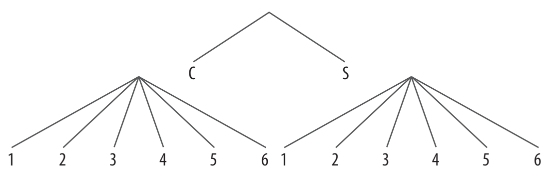
4. a. Ω ={CCa; CCb; CCc; CSa; CSb; CSc; SCa; SCb; SCc; SSa; SSb; SSc}
   b. 6
   c. 4
   d. $\frac{1}{12}$
5. a.



   b. 24
6. a.



   b.



   c. Difieren, pero tienen la misma cantidad de resultados.
7. a. 12
   b. 8
8. a. $\frac{6}{64}$
9. $\frac{1}{12}$

Reflexiono
1. Si, ya que el orden define los eventos.
2. Depende del evento, ya que se consideran los casos favorables a este.

Refuerzo
1. 12 caminos
2. 0,1

Páginas 356 y 357 ▸ ¿Cómo voy?

1. a. Determinístico
   b. Aleatorio
   c. Aleatorio
   d. Determinístico
   e. Determinístico
2. a. $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$
   b. $\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$
3. a. Obtener una carta numerada.
   b. Obtener una carta numerada con un número menor que 5.
   c. Obtener una carta numerada con un número impar mayor que 1.
   d. Obtener una carta con una figura.
4. a. 0,95
   b. Sí, ya que la probabilidad de que salga cada número es casi la misma.
5. a. Suma 7.
   b. 0,05656
   c. Porque hay 3 formas de obtener una suma 4 y solo 1 de obtener una suma 2.
   d. No, ya que sus frecuencias relativas no tiende a igualarse.
6. a. Número total de chocolates y los tipos.
   b. Del stock cuántas hay y cuántas no están defectuosas.
7. a. 0,15625
   b. 0,3
8. a. 48
   b. $\frac{1}{48}$
9. a. 18
   b. $\frac{1}{18}$

Desafío de integración

1. El Alercín ya que su porcentaje de efectividad es de 80 % mientras que el del Alergiol es 56 %.
2. a. 4 azules, 10 verdes y 6 rojas.
   b. 20

Página 358 ▸ Resolución de problemas

Respuesta: $\frac{1}{7}$

Página 360▸ Sintetizo mis aprendizajes

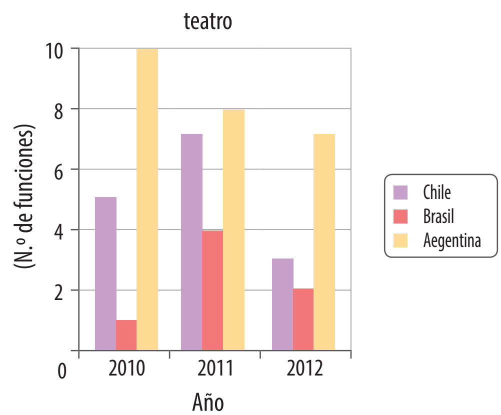
Pregunta 1: Si son muchos datos, conviene agruparlos en intervalos.

Pregunta 2: Comparando su media, su moda y su mediana.

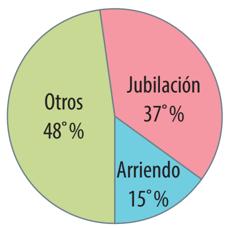
Pregunta 3: Se representa en él todos los posibles resultados del experimento y se cuentan los casos favorables a este.

Páginas 361 y 362 ▸ Refuerzo mis aprendizajes

1. a. Población: Los habitantes de Chile. Muestra: 500 personas
   b. Población: Todas las notas. Muestra: Las mejores notas.
   c. Población: Temperaturas máximas de Abril en Arica. Muestra: Temperaturas máxima de 5 días seguidos.
   d. Población: Los habitantes de un edificio. Muestra: los habitantes de tres departamentos con internet.
3. a. 157 personas.
   b. 470 cuadernos.
   c. 101 personas.
4. a. Máximo: 62. Mínimo: 25.
   b. Rango: 37.
5. a. Variable en estudio: Número de funciones.



   b. Variable en estudio: Ingreso extra.



6. a. Moda: 5. Media: 4. Mediana: 5.
   b. Moda: lunes.
   c. Moda: taller de guitarra.
7. 4kg.
8. Roja o azul, ya que la probabilidad de que salga cualquiera de las dos es cercana al 50 %.
9. a. 8
   b. $\frac{1}{8}$

Página 363 ▸ Actividades de cierre

Parte I

1. D

2. C

3. B

4. A

5. D

6. C

7. D

8. 8. 2,8 horas.

Parte II

1. 0,249

2. 0,2875

3. Azul: 24. Rojo: 15. Verde: 11

5. 408

6. El gráfico 1.

7. En el 7.º C.

Bibliografía

- ÁLVAREZ, R. (2013). *Conjuntos numéricos y aritmética*. Colombia: Universidad de Medellín.
- ARANEDA, A., CHANDÍA, E. y SORTO, M. (2013). *Recursos para la formación inicial de profesores de educación básica*. Datos y azar. Santiago de Chile: Ediciones SM.
- ARAYA, R. y MATUS, C. (2008). *Buscando un orden para el azar*. Proyecto Enlaces Matemática. 2ª ed. Ed. Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.
- ARAYA, R. (2000). *Inteligencia Matemática*. Santiago de Chile: Editorial Universitaria.
- ARTIGUE, M., ET AL. (1995). *Ingeniería didáctica en educación matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamericana.
- BAKER, A. (1986). *Breve introducción a la teoría de números*. Madrid: Editorial Alianza.
- BROUSSEAU, G. (1993). *Fundamentos y métodos de la didáctica de la matemática*. Traducción realizada por Dilma Fregona(Famaf), Universidad de Burdeos.
- CANTORAL, R., ET AL. (2003). *Desarrollo del pensamiento matemático*. México, D.F: Trillas.
- CHEVALLARD, Y. (1991). *La transposición didáctica del saber sabio al saber enseñado*. Buenos Aires: Aique.
- CHUAQUI, R. (1980). *¿Qué son los números?* Santiago de Chile: Editorial Universitaria.
- GODINO, J. (2002). *Didáctica de las Matemáticas para Maestros*. Granada, España. Proyecto Edumat-Maestros, Gami.
- GOVINDEN PORTUS, L. (1998). *Introducción a la estadística*. Santiago de Chile: Mc Graw Hill.
- MA, L. (2010). *Conocimiento y enseñanza de las matemáticas elementales*. Santiago de Chile: Academia Chilena de Ciencias.
- MARTINEZ, S. y VARAS, L. (2013). *Recursos para la formación inicial de profesores de educación básica*. Álgebra. Santiago de Chile: Ediciones SM.
- Matemática Programa de Estudios, Séptimo año Básico. Ministerio de Educación, República de Chile. Santiago de Chile. 2014.
- MIRANDA, H. y MOYA, M. (2008). *Álgebra. El poder generalizador de los símbolos*. Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.
- OTEÍZA, F., ZAMORANO A. y BAEZA, O. (2008). *La circunferencia y un par de rectas en el plano*. Ángulos en el plano. Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.
- OTEÍZA, F., ZAMORANO A. y BAEZA, O. (2008). *La geometría de los modelos a escala*. Semejanza de figuras planas. Santiago: Centro Comenius, Universidad de Santiago de Chile.
- SAAVEDRA, E. (2005). *Contenidos básicos de estadística y probabilidad*. Colección ciencias. Santiago: Universidad de Santiago de Chile.

Sitios web

- Educación: www.educarchile.cl
- Geogebra: www.geogebra.org
- La tierra de los faraones: http://www.egiptologia.org/ciencia/ matematicas/papiro_rhind.htm
- El portal de las matemáticas: www.sectormatematica.cl
- Icarito:www.icarito.cl
- Instituto Nacional de Estadísticas: www.ine.cl
- Ministerio de Educación: www.mineduc.cl
- Ministerio de Salud: www.minsal.cl
- OCDE – Pisa: www.oecd.org
- Programa Explora Conicyt: www.explora.cl
- Real Academia Española de la Lengua: www.rae.es
- Simce: www.simce.cl
- Sismología: www.sismologia.cl

ISBN 978-956-349-949-0

Ministerio de Educación

Gobierno de Chile

EDICIÓN ESPECIAL PARA EL MINISTERIO DE EDUCACIÓN

PROHIBIDA SU COMERCIALIZACIÓN

sm